Russian Academy of Sciences
L.D Landau Institute for Theoretical Physics

Энциклопедия интегрируемых систем

ver. 0039 13.10.2009

Энциклопедия содержит

— основы теории нелинейных интегрируемых систем;

— тесты на интегрируемость и списки интегрируемых систем, основанные на их внутренних свойствах;

— фактическую информацию об отдельных уравнениях.

Энциклопедия является бесплатным нерегулярно обновляемым изданием. Мы приглашаем специалистов присылать статьи по указанной тематике, а также замечания и исправления.

Редакция:

А.Б. Шабат (главный редактор)
В.Э. Адлер (LaTeX)
В.Г. Марихин
А.А. Михайлов (дизайн)
В.В. Соколов

Проект поддержан грантами РФФИ 06-01-90507, 08-01-00453

Указатель

• *Курсив* означает, что отдельной статьи для данного термина нет.

• Метки для уравнений:

e — эволюционное

h — гиперболическое

d — бездисперсионное

D — дифференциальное (индексы обозначают производные)

Δ — разностное (индексы обозначают сдвиги)

• Значения цветов:

интегрируемое

линеаризуемое

не интегрируемое

– А –

– Б –

– В –

Воистину говорят — время собирать
камни и время их не трогать никогда
Т. Аминов. Били

Абловица-Ладика цепочка eDΔ

[179]

$$u_{n,t}=u_{n+1}-2u_n+u_{n-1}+u_nv_n(u_{n+1}+u_{n-1}),\quad -v_{n,t}=v_{n+1}-2v_n+v_{n-1}+u_nv_n(v_{n+1}+v_{n-1})$$

Также: дискретное НУШ

Редукция $t\to it$, $v=\bar{u}$: $iu_t=u_1-2u+u_{-1}-|u|^2(u_1+u_{-1})$.

Цепочка представляет собой линейную комбинацию трёх коммутирующих потоков, принадлежащих одной интегрируемой иерархии:

$$u_{n,x_0}=u_n,\quad v_{n,x_0}=-v_n,\qquad u_{n,x_{\pm1}}=u_{n\pm1}(1+u_nv_n),\quad v_{n,x_{\pm1}}=-v_{n\mp1}(1+u_nv_n).$$

Гамильтонова структура:

$$\{u_n,v_n\}=1+u_nv_n,\quad H_{\pm1}=\sum u_{n\pm1}v_n,\quad H_0=\sum\log(1+u_nv_n).$$

Представление нулевой кривизны : $L_{n,x_k}=U^{(k)}_{n+1}L_n-L_nU^{(k)}_n$,

$$L_n=\begin{pmatrix}\lambda^{-1} & -v_n\\ u_n & \lambda\end{pmatrix},\quad U^{(1)}=\begin{pmatrix}0 & -\lambda v_{n-1}\\ \lambda u_n & u_nv_{n-1}+\lambda^2\end{pmatrix},$$

$$U^{(-1)}=\begin{pmatrix}-v_nu_{n-1}-\lambda^{-2} & v_n/\lambda\\ -u_{n-1}/\lambda & 0\end{pmatrix},\quad -2U^{(0)}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}.$$

Для каждого n, переменные u_n,v_n удовлетворяют системе Полмайера-Лунда-Редже

$$u_{x_+x_-}=\frac{vu_{x_+}u_{x_-}}{uv+1}+u(uv+1),\quad v_{x_+x_-}=\frac{uv_{x_+}v_{x_-}}{uv+1}+v(uv+1).$$

Абловица-Ладика цепочка многополевая eDΔ

[185, 186, 187]

$$\begin{aligned} u_{n,t} &= u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1} + u_{n-1}v_nu_n + u_nv_nu_{n+1},\\ -v_{n,t} &= v_{n+1} - 2v_n + v_{n-1} + v_{n-1}u_nv_n + v_nu_nv_{n+1}, \end{aligned} \qquad u_n \in \mathrm{Mat}(M,N), \quad v_n \in \mathrm{Mat}(N,M) \tag{1}$$

$$\begin{aligned} u_{n,t} &= u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1} + \langle u_n, v_n\rangle(u_{n+1} + u_{n-1}),\\ -v_{n,t} &= v_{n+1} - 2v_n + v_{n-1} + \langle u_n, v_n\rangle(v_{n+1} + v_{n-1}), \end{aligned} \qquad u_n, v_n \in \mathbb{R}^N \tag{2}$$

Цепочка (1), как и в скалярном случае, представляет собой линейную комбинацию коммутирующих потоков

$$\begin{aligned} u_{n,x} &= u_nv_nu_{n+1} + u_{n+1}, & -v_{n,x} &= v_{n-1}u_nv_n + v_{n-1} && (3)\\ u_{n,y} &= u_{n-1}v_nu_n + u_{n-1}, & -v_{n,y} &= v_nu_nv_{n+1} + v_{n+1} && (4)\\ u_{n,z} &= u_n, & -v_{n,z} &= v_n, \end{aligned}$$

однако симметрия $x \leftrightarrow y$, $n \to -n$ пропадает. Матричное обобщение системы Полмайера-Лунда-Редже, отвечающее потокам (3), (4) имеет вид

$$u_{xy} = u_yv(uv+1)^{-1}u_x + uvu + u, \quad v_{xy} = v_x(uv+1)^{-1}uv_y + vuv + v.$$

В частности, векторный случай $M = 1$ приводит к уравнениям

$$\begin{aligned} u_{n,x} &= (\langle u_n, v_n\rangle + 1)u_{n+1}, & -v_{n,x} &= (\langle u_n, v_n\rangle + 1)v_{n-1},\\ u_{n,y} &= \langle u_{n-1}, v_n\rangle u_n + u_{n-1}, & -v_{n,y} &= \langle u_n, v_{n+1}\rangle v_n + v_{n+1},\\ u_{xy} &= \frac{\langle u_y, v\rangle u_x}{\langle u, v\rangle + 1} + \langle u, v\rangle u + u, & v_{xy} &= \frac{\langle u, v_y\rangle v_x}{\langle u, v\rangle + 1} + \langle u, v\rangle v + v. \end{aligned}$$

Автомодельное решение

Автомодельным называется специальное решение уравнения в частных производных (или разностях), характеризуемое инвариантностью относительно некоторой подгруппы Ли классических симметрий уравнения [83,48,82].

В наиболее распространённой ситуации автомодельные решения инвариантны относительно некоторого преобразования сдвига или растяжения. Для многих физических моделей такие решения определяют асимптотическое поведение общего решения.

Построение автомодельных решений сводится к решению уравнения для инвариантов подгруппы. Это понижает размерность задачи, например, автомодельные решения для уравнений с двумя независимыми переменными определяются уже некоторыми ОДУ. Если исходное уравнение было интегрируемым, то согласно гипотезе Абловица-Рамани-Сигура, эти ОДУ обладают свойством Пенлеве.

Примеры:

[83] L.V. Ovsyannikov. Group analysis of differential equations, New York: Academic Press, 1982.

[48] N.H. Ibragimov. Transformation groups applied to mathematical physics. Dordrecht: Reidel, 1985.

[82] P.J. Olver. Applications of Lie groups to differential equations, 2nd ed., *Graduate Texts in Math.* ***107***, New York: Springer-Verlag, 1993.

Адлера-Костанта-Саймса схема

Автор: В.В. Соколов, 09.02.2009

1. Метод факторизации

Схема Адлера-Костанта-Саймса [194,825] (другое название — ***метод факторизации***) позволяет проинтегрировать систему обыкновенных дифференциальных уравнений следующего специального вида:

$$U_t = [U_+, U], \quad U(0) = U_0. \tag{5}$$

Здесь $U(t)$ — функция со значениями в *алгебре Ли* $\mathfrak{G}$, разложенной в прямую сумму векторных подпространств $\mathfrak{G}_+$ и $\mathfrak{G}_-$:

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_+ \oplus \mathfrak{G}_-, \tag{6}$$

каждое из которых является подалгеброй в $\mathfrak{G}$. Через U_+ обозначена проекция U на $\mathfrak{G}_+$. Будем считать для простоты, что $\mathfrak{G}$ вложена в алгебру матриц.

Решение задачи Коши (5) дается формулой

$$U(t) = A(t) U_0 A^{-1}(t), \tag{7}$$

в которой матрица $A(t)$ определяется как решение задачи факторизации

$$A^{-1}B = \exp(-U_0 t), \quad A \in G_+, \quad B \in G_-, \tag{8}$$

где G_+ и G_- группы Ли алгебр $\mathfrak{G}_+$ и $\mathfrak{G}_-$. Если $\mathfrak{G}_-$ идеал, то задача факторизации решается явно:

$$A = \exp((U_0)_+ t), \quad B = A \exp(-U_0 t).$$

[194] M. Adler. On a trace functional for formal pseudo-differential operators and the symplectic structure of the Korteweg-de Vries type equations. *Invent. math.* ***50*** (1979) 219–248.

[825] B. Kostant. Quantization and representation theory. *Lect. Notes* ***34*** (1979) 287–316.

В случае, когда G_+ и G_-алгебраические группы, условия $A \in G_+$ и $A\exp(-U_0 t) \in G_-$ представляют собой систему алгебраических уравнений, из которой (при t, близких к нулю) $A(t)$ однозначно находится. Как будет показано ниже (см. формулу (11)), задача факторизации в случае, когда соответствующие группы Ли не являются алгебраическими, может быть сведена к линейному дифференциальному уравнению с переменными коэффициентами.

Наиболее известным разложением (6) матричной алгебры $\mathfrak{G} = \mathrm{Mat}_N$ является ***разложение Гаусса***, где $\mathfrak{G}_+$ множество всех верхнетреугольных матриц, а $\mathfrak{G}_-$ множество нижнетреугольных матриц с нулями на диагонали. Соответствующая задача факторизации (8) легко решается средствами линейной алгебры. Более нетривиальным является ***разложение Ивасавы***, где $\mathfrak{G}_+$ множество всех верхнетреугольных, а $\mathfrak{G}_-$ множество кососимметрических матриц.

Более общая задача факторизации

$$A^{-1}B = Z(t), \quad Z(0) = E, \quad A \in G_+, \quad B \in G_-, \tag{9}$$

тесно связана с уравнениями вида

$$U_t = [U_+, U] + F(U), \quad U(0) = U_0, \tag{10}$$

где $F : \mathfrak{G} \to \mathfrak{G}$ отображение, инвариантное относительно группы G_+ (простейшим таким отображением является $F(U) = \lambda U$, $\lambda = \mathrm{const}$). А именно, пусть Z удовлетворяет линейному уравнению

$$Z_t = q(t)Z, \quad Z(0) = E,$$

тогда формула

$$U(t) = Aq(t)A^{-1}$$

решает уравнение (10), если

$$q_t = F(q), \quad q(0) = U_0.$$

Таким образом, если мы умеем решать последнюю задачу Коши, то метод факторизации позволяет решить и задачу (10).

Задача факторизации (9) может быть сведена [633] к линейному уравнению с переменными коэффициентами. Определим линейное отображение $L(t) : \mathfrak{G} \to \mathfrak{G}$ формулой

$$L(t)(v) = \big(Z^{-1}(t)vZ(t)\big)_+.$$

Поскольку $L(0)$ тождественное отображение, $L(t)$ обратимо при малых t. Определим A как решение задачи Коши

$$A_t = -AL^{-1}(t)\big((Z^{-1}Z_t)_+\big), \quad A(0) = E, \tag{11}$$

тогда пара A, $B = AZ(t)$ является единственным решением задачи факторизации (9).

2. Редукции и неассоциативные алгебры

Из формулы (7) видно, что если начальные данные U_0 принадлежат векторному пространству M, которое является $\mathfrak{G}_+$-модулем, то $U(t) \in M$ для любого t. Такую спецификацию системы (5) мы будем называть ***M*-редукцией**. Возможность редукций значительно расширяет рамки применимости метода факторизации (см. например [634]).

Имеются глубокие связи между M-редукциями и некоторыми классами неассоциативных алгебр [636,634]. Обозначим через $R : M \to \mathfrak{G}_+$ проектор на $\mathfrak{G}_+$ параллельно $\mathfrak{G}_-$. В терминах оператора R M-редукция записывается как

$$m_t = [R(m), m], \quad m \in M. \tag{12}$$

Рассмотрим алгебраическую операцию на M, определённую формулой

$$m * n = [R(m), n]. \tag{13}$$

[633] I.Z.Golubchik, V.V.Sokolov. On some generalizations of the factorization method. *Theor. Math. Phys.* ***110:3*** (1997) 267–276.

[634] I.Z. Golubchik, V.V. Sokolov. Generalized operator Yang-Baxter equations, integrable ODEs and nonassociative algebras. *J. Nonl. Math. Phys.* ***7:2*** (2000) 184–197.

[636] I.Z. Golubchik, V.V. Sokolov, S.I. Svinolupov. A new class of nonassociative algebras and a generalized factorization method. *Preprint ESI* ***53***, Wien, 1993.

В терминах этого умножения система (12) имеет вид

$$m_t = m * m. \tag{14}$$

Покажем, что если умножение $*$ левосимметрическое, то система (14) интегрируется методом факторизации. Пусть $\mathfrak{A}$ лево-симметрическая алгебра. Положим $\mathfrak{G} = \mathfrak{A} \oplus \mathfrak{A}$. Поскольку для всякой лево-симметрической алгебры $\mathfrak{A}$ операция $[X, Y] = X * Y - Y * X$ задает алгебру Ли, векторное пространство $\mathfrak{G}$ образует алгебру Ли относительно скобки

$$\big[(g_1, a_1), (g_2, a_2)\big] = \big([g_1, g_2], g_1 * a_2 - g_2 * a_1\big).$$

Из этой формулы очевидно, что $\mathfrak{G}_+ = \{(q, 0)\}$ и $\mathfrak{G}_- = \{(q, -q)\}$ подалгебры в $\mathfrak{G}$. Уравнение (5) для $U = (p, q)$, соответствующее разложению $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_+ \oplus \mathfrak{G}_-$, имеет вид

$$p_t = q * p - p * q, \quad q_t = p * q + q * q.$$

Чтобы получить $\mathfrak{A}$-волчок (14), как M-редукцию этой системы, достаточно положить в ней $p = 0$, то есть выбрать $M = \{(0, q)\}$.

Отметим, что операция (13) является лево-симметрической если и только если оператор $R : M \to \mathfrak{G}_+$ удовлетворяет условию (ср. [1229])

$$R([R(a), b] + [a, R(b)]) - [R(a), R(b)] \in \mathrm{Ann}(M),$$

где a, b произвольные элементы M и $\mathrm{Ann}(M)$ означает множество элементов $\mathfrak{G}_+$, действующих на M нулевым образом.

[1229] M.A. Semenov-Tyan-Shansky. What a classical r-matrix is. *Funct. Anal. Appl.* ***17:4*** (1983) 17–33.

Алгебраические структуры

Множество G с умножением $G \times G \to G$ называется ***группой***, если выполнены следующие тождества:

$$\begin{array}{ll} \textit{ассоциативность} & \forall\ a, b, c \quad a(bc) = a(bc), \\ \textit{единичный элемент} & \exists\ e :\ \forall\ a \quad ea = ae = a, \\ \textit{обратный элемент} & \forall\ a\ \exists\ a^{-1} : \quad a(bc) = a(bc). \end{array} \tag{15}$$

Алгеброй называется векторное пространство A над полем F, оснащённое умножением $A \times A \to A$ удовлетворяющим тождествам

$$(\alpha a + \beta b)c = \alpha ac + \beta bc, \quad c(\alpha a + \beta b) = \alpha ca + \beta cb, \quad \forall\ a, b, c \in A, \quad \forall\ \alpha, \beta \in F.$$

Важные классы алгебр характеризуются некоторыми дополнительными тождествами, например:

$$\begin{array}{ll} \textit{коммутативная алгебра} & ab = ba \\ \textit{антикоммутативная алгебра} & ab = -ba \\ \textit{ассоциативная алгебра} & a(bc) = (ab)c \\ \textit{алгебра Ли} & ab = -ba, \quad a(bc) + b(ca) + c(ab) = 0 \\ \textit{йорданова алгебра} & ab = ba, \quad (ab)a^2 = a(ba^2) \\ \textit{лево-симметрическая алгебра} & a(bc) - (ab)c = b(ac) - (ba)c \end{array}$$

Важным примером алгебраической структуры с тернарным умножением является *йорданова пара*.

Дифференцированием алгебры A называется линейное отображение $F : A \to A$, удовлетворяющее ***правилу Лейбница***

$$F(ab) = F(a)b + aF(b).$$

Множество всех дифференцирований обозначается $\mathrm{Der}(A)$. Оно само является алгеброй Ли относительно операции коммутатора $[F, G](a) = F(G(a)) - G(F(a))$. Действительно,

$$[F, G](ab) = F(G(a)b + aG(b)) - G(F(a)b + aF(b))$$

$$= F(G(a))b + G(a)F(b) + F(a)G(b) + aF(G(b)) - G(F(a))b - F(a)G(b) - G(a)F(b) - aG(F(b))$$
$$= [F,G](a)b + a[F,G](b),$$

тождество Якоби также легко проверяется.

Бакирова система eDD

$$u_t = 5u_4 + v^2, \quad v_t = v_4$$

Эта система имеет лишь одну высшую симметрию

$$u_t = 11u_6 + 5vv_2 + 4v_1^2, \quad v_t = v_6.$$

В работе [273] было проверено, что других симметрий не существует, вплоть до порядка 53. Строгое доказательство получено в [294].

См. также гипотезу Фокаса.

[273] I.M. Bakirov. On the symmetries of some system of evolution equations. *Preprint Inst. of Math.*, Ufa, 1991. (in Russian)
[294] F. Beukers, J.A. Sanders, J.P. Wang. One symmetry does not imply integrability. *J. Diff. Eq.* ***146:1*** (1998) 251–260.

Белова-Чалтикяна цепочки eDΔ

[289, 290, 96]

$$u^{(j)}_{n,x} = u^{(j)}_n (u^{(1)}_{n+j} - u^{(1)}_{n-1}) + u^{(j+1)}_n - u^{(j+1)}_{n-1}, \quad j = 1, \dots, M, \quad u^{(M+1)}_n = 0.$$

Белоусова-Жаботинского модель D

[1456, 1457]

$$\dot{u} = av(1-u) + au(1-bu), \quad \dot{v} = -\frac{1}{a}v(1+u) + cw, \quad \dot{w} = d(u-w)$$

Benjamin-Bona-Mahoney-Peregrine equation DD

[292, 1119, 971, 1089]

$$u_t + u_x - u_{xxt} + uu_x = 0$$

Также: регуляризованное уравнение длинных волн

Бенджамина-Оно уравнение eDD

[588, 21]

$$u_t + H(u_{xx}) - 6uu_x = 0, \quad H(f) = \frac{1}{\pi} v.p. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(y)}{y-x} dy$$

Бенни уравнение dDD

$$u_t + uu_x - u_y \int_0^y u_x dy + h_x = 0, \quad h_t + D_x\Big(\int_0^h u dy\Big) = 0$$

Бенни цепочка dDΔ

[293, 851, 852, 882, 883, 1438, 625]

$$u_{n,t} = u_{n+1,x} + n u_{n-1} u_{0,x}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Бездисперсионная пара Лакса $D_t(L) = A_p L_x - A_x L_p$:

$$A = \frac{p^2}{2} + u_0, \quad L = p + u_0 p^{-1} + u_1 p^{-2} + u_2 p^{-3} + \ldots$$

Богоявленского-Нариты цепочки eDΔ

[1030, 733, 331, 17]

$$u_{n,x_k} = u_n \sum_{s=1}^{k} (u_{n+s} - u_{n-s}) \tag{16}$$

Поток, отвечающий x_k не коммутирует с остальными потоками данного семейства, но служит простейшим членом отдельной интегрируемой иерархии. Потоки следующих порядков и ассоциированные системы имеют вид (индекс n опущен):

$$\begin{cases} u_{x_1} = u(u_1 - u_{-1}), \\ u_{t_1} = u(u_1(u_2 + u_1 + u) - u_{-1}(u + u_{-1} + u_{-2})), \end{cases} \quad \to \quad \begin{cases} u_{1,t_1} = D_{x_1}(u_{1,x_1} + u_1(u_1 + 2u_0)), \\ u_{0,t_1} = D_{x_1}(-u_{0,x_1} + (2u_1 + u_0)u_0) \end{cases}$$

(это цепочка Вольтерра и система Леви);

$$\begin{cases} u_{x_2} = u(u_2 + u_1 - u_{-1} - u_{-2}), \\ u_{t_2} = u(u_2(u_4 + \dots + u) + u_1(u_3 + \dots + u) \\ \qquad - u_{-1}(u + \dots + u_{-3}) - u_{-2}(u + \dots + u_{-4})), \end{cases} \quad \to \quad \begin{cases} u_{3,t_2} = D_{x_2}(u_{3,x_2} + u_3(u_3 + 2u_2 + 2u_1)), \\ u_{2,t_2} = D_{x_2}(u_{2,x_2} + u_2(u_2 + 2u_1 + 2u_0)), \\ u_{1,t_2} = D_{x_2}(-u_{1,x_2} + (2u_3 + 2u_2 + u_1)u_1), \\ u_{0,t_2} = D_{x_2}(-u_{0,x_2} + (2u_2 + 2u_1 + u_0)u_0); \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_{x_3} = u(u_3 + u_2 + u_1 - u_{-1} - u_{-2} - u_{-3}), \\ u_{t_3} = u(u_3(u_6 + \dots + u) + u_2(u_5 + \dots + u) \\ \qquad + u_1(u_4 + \dots + u) - u_{-1}(u + \dots + u_{-4}) \\ \qquad - u_{-2}(u + \dots + u_{-5}) - u_{-3}(u + \dots + u_{-6})), \end{cases} \quad \to \quad \begin{cases} u_{5,t_3} = D_{x_3}(u_{5,x_3} + u_5(u_5 + 2u_4 + 2u_3 + 2u_2)), \\ u_{4,t_3} = D_{x_3}(u_{4,x_3} + u_4(u_4 + 2u_3 + 2u_2 + 2u_1)), \\ u_{3,t_3} = D_{x_3}(u_{3,x_3} + u_3(u_3 + 2u_2 + 2u_1 + 2u_0)), \\ u_{2,t_3} = D_{x_3}(-u_{2,x_3} + (2u_5 + 2u_4 + 2u_3 + u_2)u_2), \\ u_{1,t_3} = D_{x_3}(-u_{1,x_3} + (2u_4 + 2u_3 + 2u_2 + u_1)u_1), \\ u_{0,t_3} = D_{x_3}(-u_{0,x_3} + (2u_3 + 2u_2 + 2u_1 + u_0)u_0) \end{cases}$$

и так далее.

Цепочки Богоявленского допускают множество модификаций. Некоторые разностные подстановки для цепочек этого типа можно описать следующим образом. Пусть дана цепочка

$$u_{n,x} = u_n f(u_n), \quad f = a^{(k)}T^k + \dots + a^{(-k)}T^{-k}, \tag{17}$$

где f полином Лорана от оператора сдвига $T : u_n \to u_{n+1}$. Этот полином можно разложить несколькими способами в произведение двух многочленов Лорана и каждое такое разложение порождает подстановку *в* цепочку (17)

$$v_{n,x} = v_n h(e^{g(\log v_n)}) \qquad \xrightarrow{u_n = e^{g(\log v_n)}} \qquad u_{n,x} = u_n f(u_n), \quad f = gh.$$

Легко видеть, что цепочка в переменных v_n полиномиальна если и только если все коэффициенты полинома g неотрицательные целые, кроме того, общая степень её правой части на 1 больше суммы коэффициентов g.

Отметим, что полином f для цепочки Богоявленского (16) равен

$$f = T^k + \dots + T - T^{-1} - \dots - T^{-k} = \frac{(T^k - 1)(T^{k+1} - 1)}{(T - 1)T^k}.$$

Пример 1. Рассмотрим цепочку

$$u_{n,x} = u_n(u_{n+2} + u_{n+1} - u_{n-1} - u_{n-2}),$$

отвечающую многочлену $f = T^2 + T - T^{-1} - T^{-2}$. Выбор $g = T + 1$ приводит к подстановке $u_n = v_{n+1}v_n$ из цепочки

$$v_{n,x} = v_n(v_{n+2}v_{n+1} - v_{n-1}v_{n-2}).$$

Аналогично, выбор $g = T^2 + T + 1$ даёт $u_n = v_{n+2}v_{n+1}v_n$ и приводит к цепочке

$$v_{n,x} = v_n^2(v_{n+2}v_{n+1} - v_{n-1}v_{n-2});$$

полиному $g = T^3 - 1$ отвечает подстановка $u_n = v_{n+3}/v_n$ из рациональной цепочки

$$v_{n,x} = v_n(v_{n+2}/v_{n-1} + v_{n+1}/v_{n-2})$$

и т.д..

Бойера-Финли уравнение dDDD

[355]

$$u_{xx} + u_{yy} = e^{u_t} u_{tt}$$

Больцмана уравнение eDD

[32]

$$u_t = uu_2 + u_1^2$$

Не интегрируемо. Первое неободимое условие (255), (20) не выполняется:

$$\rho_{-1} = u^{-1/2}, \quad D_t(\rho_{-1}) \notin \operatorname{Im} D_x.$$

Борна-Инфельда уравнение hDD

[352, 105, 24]

$$(1 - u_t^2)u_{xx} + 2u_x u_t u_{xt} - (1 + u_x^2)u_{tt} = 0$$

Лагранжиан: $L = (1 - u_t^2 + u_x^2)^{1/2}$
См. также уравнение минимальных поверхностей

Буссинеска уравнение eDD

[353, 354, 704]

$$u_{tt} = -(u_{xx} + u^2)_{xx}$$

Лаксова пара [1436,174]:

$$\psi_{xxx} + \frac{3}{2}u\psi_x + \frac{3}{4}(u_x + v)\psi = \lambda\psi, \quad \psi_t = \psi_{xx} + u\psi \qquad \Rightarrow \qquad u_t = v_x, \quad -3v_t = u_{xxx} + 6uu_x.$$

$$u_t = u_{xx} + (u+v)^2, \quad -v_t = v_{xx} + (u+v)^2$$

[1436] V.E. Zakharov. *JETP* ***65*** (1973) 219–225.

[174] M.J. Ablowitz, R. Haberman. Resonantly coupled nonlinear evolution equations. *J. Math. Phys.* ***16:11*** (1975) 2301–2305.

Буссинеска система, двумеризованная eDDD

$$u_t = u_{xx} + 2v_x, \quad -v_t = v_{xx} - 2uu_x + 2u_y$$

Исключение v даёт уравнение

$$u_{tt} = (u_{xxx} + 4uu_x - 4u_y)_x$$

совпадающее с уравнением Кадомцева-Петвиашвили, с точностью до растяжения и замены $y \leftrightarrow t$.

Бэклунда преобразование

[5, 21, 64]

Преобразованием Бэклунда между уравнениями $F[u] = 0$, $G[v] = 0$ называются соотношения $A[u,v] = 0$, $B[u,v] = 0$, обладающие тем свойством, что исключение одной из переменных u или v приводит к заданному уравнению для второй переменной. Наибольший интерес представляет случай, когда уравнения совпадают (или отличаются значениями параметров), в этом случае говорят о ***авто-преобразовании Бэклунда***.

Примеры.

Бюргерса уравнение eDD

[381]

$$u_t = u_{xx} + 2uu_x$$

Простейшая нелинейная модель с приложениями в гидродинамике, газовой динамике и акустике. Иерархию потенциального уравнения Бюргерса ($u = v_1$) можно определить явной формулой

$$v_{t_n} = (D_x + v_1)^n(1) = Y_n(v_1, \dots, v_n), \quad v_k = D_x^k(v).$$

Многочлены Y_n называются *многочленами Белла*. Следующая формула для их производящей функции легко доказывается дифференцированием по z и x:

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} Y_n \frac{z^n}{n!} = \exp\Big(\sum_{n=1}^{\infty} v_n \frac{z^n}{n!}\Big) = e^{v(x+z)-v(x)}.$$

Преобразование Коула-Хопфа [443,715]

$$v = \log\phi \quad \Rightarrow \quad u = \phi_x/\phi$$

линеаризует всю иерархию:

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} Y_n \frac{z^n}{n!} = \frac{\phi(x+z)}{\phi(x)} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\phi_n}{\phi} \frac{z^n}{n!}.$$

[443] J.D. Cole. On a quasilinear parabolic equation occuring in aerodynamics. *Q. Appl. Math.* ***9*** (1950) 225–236.
[715] E. Hopf. The partial differential equation $u_t = uu_x + \mu u_{xx}$. *Comm. Pure and Appl. Math.* ***3*** (1950) 201–230.

Бюргерса-Хаксли уравнение eDD

[1207, 1208]

$$u_t = u_{xx} + uu_x + u(u-1)(u-a)$$

Неинтегрируемо.

См. также: уравнения Фишера, Колмогорова-Петровского-Пискунова.

Бюргерса-Кортевега-де Фриза уравнение eDD

$$u_t = au_{xxx} + bu_{xx} + uu_x$$

Служит простейшей моделью одномерных нелинейных волн в среде с дисперсией и диссипацией. Имеет некоторые приложения в физике плазмы для описания бесстолкновительных ударных волн [1180,106]. Неинтегрируемо, в отличие от уравнения Бюргерса ($a = 0$) и уравнения КдФ ($b = 0$).

[1180] R.Z. Sagdeev. *J. Theor. Phys.* ***31*** (1961) 1955.
[106] G.M. Zaslavsky, R.Z. Sagdeev. Introduction to nonlinear physics. Moscow, Nauka, 1988.

Бюргерсовского типа уравнения eDD

Автор: В.Э. Адлер, 29.03.2007

Уравнениями типа Бюргерса называются интегрируемые эволюционные уравнения второго порядка

$$u_t = F(u_2, u_1, u, x). \tag{18}$$

Приведём их исчерпывающую классификацию, полученную Свинолуповым. Доказательство следующей теоремы можно превратить в тест на интегрируемость, приложимый к заданному уравнению вида (18). Более того, если уравнение оказывается интегрируемым, то замена переменных, связывающая его с одним из уравнений списка находится конструктивно.

Теорема 1 (Свинолупов [1311]). *Если уравнение (18) обладает высшей симметрией порядка ≥ 3, то оно обладает бесконечной алгеброй высших симметрий и контактно эквивалентно одному из следующих уравнений, линеаризуемых посредством дифференциальной подстановки (f обозначает произвольную функцию):*

$$u_t = u_2 + f(x)u, \tag{B_1}$$

$$u_t = D_x(u_1 + u^2 + f(x)), \tag{B_2}$$

$$u_t = D_x\left(\frac{u_1}{u^2} - 2x\right), \tag{B_3}$$

$$u_t = D_x\left(\frac{u_1}{u^2} + \varepsilon_1 xu + \varepsilon_2 u\right). \tag{B_4}$$

[1311] S.I. Svinolupov. Second-order evolution equations with symmetries. *Russ. Math. Surveys* ***40:5*** (1985) 241–242.

1. Необходимые условия интегрируемости

Согласно общей теории (см. тест по формальной симметрии), необходимые условия интегрируемости имеют вид законов сохранения

$$D_x(\sigma_k) = D_t(\rho_k), \quad k = -1, 0, 1, \dots \tag{19}$$

где плотности ρ_k алгоритмически выражаются через правую часть уравнения и ранее полученные σ_i. Для уравнений (18) понадобятся лишь три первых условия.

Лемма 1. *Если уравнение (18) обладает высшей симметрией порядка ≥ 3, то выполнены уравнения (19) при $k = -1, 0, 1$, где*

$$\begin{gathered} \rho_{-1} = F_{u_2}^{-1/2}, \quad \rho_0 = F_{u_1} F_{u_2}^{-1} - \sigma_{-1} F_{u_2}^{-1/2}, \\ \rho_1 = \frac{1}{8}(4F_u + 2\sigma_0 + \sigma_{-1}^2) F_{u_2}^{-1/2} - \frac{1}{32}(2F_{u_1} - D_x(F_{u_2}))^2 F_{u_2}^{-3/2}. \end{gathered} \tag{20}$$

2. Анализ первого необходимого условия

Для уравнений вида (18) анализ условий инегрируемости упрощается благодаря следующей лемме.

Лемма 2. *Порядок закона сохранения для уравнения (18) равен* 0 *или* 2.

Доказательство. Закон сохранения удовлетворяет уравнению

$$(D_t + F_*^{\mathsf{T}})\left(\frac{\delta \rho}{\delta u}\right) = 0$$

где

$$\frac{\delta \rho}{\delta u} = \rho_u - D_x(\rho_{u_1}) + D_x^2(\rho_{u_2}) - \dots + (-D_x)^m(\rho_{u_m}) = a(x, u, \dots, u_m) u_{2m} + \dots.$$

Собирая члены с u_{2m+2} получаем

$$a D_x^{2m}(F) + D_x^2(a F_{u_2} u_{2m}) + \dots = 0 \tag{21}$$

и если $2m > 2$, то $2aF_{u_2} u_{2m+2} = 0$, откуда $a = 0$. ■

Более того, порядок закона сохранения определяет зависимость F от u_2. Действительно, если уравнение обладает законом сохранения порядка 2, то, согласно (21),

$$2F_{u_2} + u_2 F_{u_2 u_2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad F = (fu_2 + g)^{-1} + h \tag{22}$$

где f, g, h зависят от x, u, u_1. Если порядок закона созранения равен 0, то уравнение квазилинейно: пусть $\rho = \rho(x, u)$, $\rho_u \neq 0$, тогда

$$D_t(\rho) = \rho_u F \in \operatorname{Im} D_x \quad \Rightarrow \quad F = f(x, u, u_1)u_2 + g(x, u, u_1). \tag{23}$$

Уравнение с иным вхождением u_2 в правую часть вовсе не может иметь нетривиальных законов сохранения.

Теперь рассмотрим первое условие интегрируемости $D_t(F_{u_2}^{-1/2}) \in \operatorname{Im} D_x$. Величина $F_{u_2}^{-1/2}$ называется ***сепарантой*** уравнения. Согласно Лемме 2 она должна быть линейна по u_2. Возможны три случая:

$$\begin{aligned}
&1) \qquad F_{u_2}^{-1/2} = D_x(\alpha(x, u, u_1)),\\
&2) \qquad F_{u_2}^{-1/2} = D_x(\alpha(x, u, u_1)) + \beta(x, u), \quad \beta_u \neq 0,\\
&3) \qquad F_{u_2}^{-1/2} = D_x(\alpha(x, u, u_1)) + \beta(x, u, u_1), \quad \beta_{u_1 u_1} \neq 0.
\end{aligned}$$

В случае 1) закон сохранения тривиален, а в случаях 2), 3) его порядок равен, соответственно, 0 и 2. Функции α и β не являются независимыми. Так как β плотность закона сохранения, то

$$D_t(\beta(x, u, u_1)) \sim (\beta_u - D_x(\beta_{u_1}))F \in \operatorname{Im} D_x \quad \Rightarrow \quad \partial_{u_2}^2((\beta_u - D_x(\beta_{u_1}))F) = 0.$$

Последнее уравнение эквивалентно

$$\beta_{u_1 u_1}(\alpha_x + \alpha_u u_1 + \beta) = \alpha_{u_1}(\beta_{u_1 x} - \beta_u + \beta_{u_1 u} u_1). \tag{24}$$

В частности, функция α не зависит от u_1 в случае 2), и $\alpha_{u_1} \neq 0$ в случае 3). Это ясно также из формул (23), (22).

Лемма 3. *Уравнение (18) удовлетворяет условию* $D_t(F_{u_2}^{-1/2}) \in \operatorname{Im} D_x$ *если и только если оно контактно эквивалентно одному из квазилинейных уравнений*

$$u_t = u_2 + f(x, u, u_1), \tag{25}$$

$$u_t = D_x\Big(\frac{u_1}{u^2} + f(x, u)\Big). \tag{26}$$

Доказательство. Согласно формуле (185), контактное преобразование

$$\tilde{t} = t, \quad \tilde{x} = \varphi(x, u, u_1), \quad \tilde{u} = \psi(x, u, u_1), \tag{27}$$

$$(\varphi_x + \varphi_u u_1)\psi_{u_1} = (\psi_x + \psi_u u_1)\varphi_{u_1} \tag{28}$$

действует на сепаранту следующим образом:

$$F_{u_2}^{-1/2} = D_x(\varphi)\tilde{F}_{\tilde{u}_2}^{-1/2}.$$

В случае 1) сепаранту можно превратить в 1. Для этого достаточно принять $\varphi = \alpha$ и найти ψ из уравнения (28). При этом мы приходим, опуская тильду, к уравнению вида (25).

В случаях 2), 3) сепаранту можно положить равной $\tilde{u}$. Так как условия интегрируемости инвариантны относительно контактных преобразований, то правая часть преобразованного уравнения является полной производной по x и имеет место формула (26).

Искомое преобразование в случае 2) является точечным: достаточно выбрать функции $\varphi(x, u)$, $\psi(x, u)$ так, что

$$D_x(\alpha(x, u)) + \beta(x, u) = \psi(x, u)D_x(\varphi(x, u)) \quad \Leftrightarrow \quad \alpha_x + \beta = \psi\varphi_x, \quad \alpha_u = \psi\varphi_u.$$

Другими словами, φ должно быть любым непостоянным решением уравнения $(\alpha_x + \beta)\varphi_u = \alpha_u\varphi_x$, а ψ определяется, как $\psi = (\alpha_x + \beta)/\varphi_x = \alpha_u/\varphi_u$. Якобиан преобразования равен $\beta_u \neq 0$.

Аналогично, в случае 3), искомое контактное преобразование определяется уравнениями (28) и

$$\alpha_x + \alpha_u u_1 + \beta = \psi(\varphi_x + \varphi_u u_1), \quad \alpha_{u_1} = \psi\varphi_{u_1}. \tag{29}$$

На первый взгляд, эта система для φ и ψ переопределена. Однако, оказывается, что связь (24) делает её совместной. Чтобы показать это, продифференцируем первое уравнение (29) по u_1 и, используя второе уравнение (28), приведём уравнения (29) к виду

$$\psi\varphi_x = \alpha_x + \beta - u_1\beta_{u_1}, \quad \psi\varphi_u = \alpha_u + \beta_{u_1}, \quad \psi\varphi_{u_1} = \alpha_{u_1} \quad \Rightarrow$$
$$\varphi_x = \frac{\alpha_x + \beta - u_1\beta_{u_1}}{\alpha_{u_1}}\varphi_{u_1}, \quad \varphi_u = \frac{\alpha_u + \beta_{u_1}}{\alpha_{u_1}}\varphi_{u_1}, \quad \psi = \frac{\alpha_{u_1}}{\varphi_{u_1}}.$$

Уравнение (28) выполнено в силу этой системы и перекрёстное дифференцирование даёт в точности уравнение (24). Соответствующее контактное преобразование невырождено: $w = \psi_u - \psi_{u_1}\varphi_u/\varphi_{u_1} = -\beta_{u_1u_1}/\varphi_{u_1} \neq 0$. ■

3. Завершение доказательства

Лемма 3 эффективно разрешает первое условие интегрируемости и сводит общую задачу к квазилинейной. Дальнейший, отностельно простой анализ выполним отдельно для случаев (25) и (26).

Доказательство Теоремы 1. 1) Рассмотрим сначала уравнения вида (25). Канонические плотности принимают вид

$$\rho_0 = f_{u_1}, \quad \rho_1 \sim \frac{1}{2}f_u + \frac{1}{4}\sigma_0.$$

Так как квазилинейное уравнение может обладать законами сохранения только нулевого порядка, то плотность ρ_0 должна быть линейна по u_1, то есть уравнение имеет вид

$$u_t = u_2 + a(x,u)u_1^2 + b(x,u)u_1 + c(x,u).$$

Этот подкласс уравнений инвариантен относительно замен $\tilde{x} = x$, $\tilde{u} = \psi(x,u)$, и коэффициент a преобразуется согласно формуле $\psi_u^2\tilde{a}(x,\psi) = \psi_u a(x,u) - \psi_{uu}$. Следовательно, уравнение можно привести к виду

$$u_t = u_2 + b(x,u)u_1 + c(x,u).$$

Рассмотрим условие $D_t(b) \in \operatorname{Im} D_x$:

$$D_t(b) = b_u(u_2 + bu_1 + c) = D_x\Big(b_u u_1 + \frac{1}{2}b^2\Big) - u_1 D_x(b_u) - bb_x + b_u c \in \operatorname{Im} D_x.$$

Легко видеть, что это эквивалентно

$$b = p(x)u + q(x), \quad up'' - (pu + q)(p'u + q') + pc \in \operatorname{Im} D_x.$$

Заметим, что мы ещё можем использовать замены

$$\tilde u = \mu(x)u + \nu(x) \quad \Rightarrow \quad p = \mu\tilde p, \quad q = 2\mu'/\mu + \nu\tilde p + \tilde q.$$

Следовательно, функцию p можно превратить в постоянную, а q положить нулём. После этого, если $p \neq 0$, то $c = c(x)$ и мы получаем уравнение (B_2). Если $p = 0$ то функция c определяется из 3-го условия интегрируемости. В этом случае величина $f_u = c_u$ должна быть плотностью закона сохранения, то есть

$$D_t(c_u) = c_{uu}(u_2 + c) \in \operatorname{Im} D \quad \Leftrightarrow \quad D_x^2(c_{uu}) + c_{uuu}(u_2 + c) + c_{uu}c_u = 0 \quad \Leftrightarrow \quad c_{uu} = 0.$$

Замена $\tilde u = u + \nu(x)$ приводит к уравнению (B_1).

2) Теперь рассмотрим уравнения вида (26). В этом случае второе условие интегрируемости принимает вид

$$D_t(u^2 f_u - uf) \in \operatorname{Im} D_x. \tag{30}$$

Имеем, для плотности вида $\rho = \rho(x,u)$,

$$D_t(\rho) = \rho_u D_x(u^{-2}u_1 + f) \sim -D_x(\rho_u)(u^{-2}u_1 + f) \in \operatorname{Im} D_x \quad \Rightarrow \quad \rho_{uu} = 0,$$

и следовательно

$$f = p(x)u + q(x) + r(x)/u.$$

Преобразование

$$\tilde x = \varphi(x), \quad \tilde u = u/\varphi'(x)$$

не меняет вид уравнения и превращает коэффициент f в $\tilde{f} = f + \varphi''/(\varphi' u)$. Это преобразованин позволяет положить $r = 0$, без потери общности. Для этого достаточно определить φ как непостоянное решение уравнения $\varphi'' = -r\varphi'$. Тогда условие (30) сводится к следующему:

$$-D_t(qu) \sim q'(u^{-2}u_1 + pu) \sim q''u^{-1} + q'pu \in \operatorname{Im} D_x \quad \Rightarrow \quad q'' = q'p = 0.$$

Если $q' \neq 0$ то $p = 0$ и растяжение $\tilde{x} = kx$, $\tilde{u} = u/k$ приводит к уравнению (B_3).

Если $q' = 0$ то p уточняется при помощи 3-го условия интегрируемости, которое для данного подслучая принимает вид $4\rho_1 = 18u^{-3}u_1^2 - 9u^{-2}u_2 - 3p'u - pu_1 \sim -2p'u$. Имеем, следовательно,

$$-D_t(p'u) \sim p''(u^{-2}u_1 + pu) \sim p'''u^{-1} + p''pu \in \operatorname{Im} D_x \quad \Rightarrow \quad p'' = 0,$$

что отвечает уравнению (B_4). ■

Вадати-Конно-Ишикавы-Шимицу уравнение eDD

[1387]

$$iu_t = ((1 + u\bar{u})^{-1/2})_{xx}$$

Вариационная производная

[82]

Вариационной задачей называется задача об экстремумах функционала

$$\mathcal{L}[u] = \int_\Omega L[x, u_\sigma]dx, \quad L \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^m, \quad u \in \mathbb{R}^n,$$

где ***лагранжиан*** L зависит от x и конечного числа производных $u_\sigma = D^\sigma(u) = D_{x_1}^{\sigma_1} \cdots D_{x_m}^{\sigma_m}(u^1, \dots, u^n)$. Решение этой задачи определяется ***уравнением Эйлера-Лагранжа*** (с надлежащими граничными условиями)

$$\delta L = 0, \qquad \delta = \left(\frac{\delta}{\delta u^1}, \dots, \frac{\delta}{\delta u^n}\right), \qquad \frac{\delta}{\delta u^j} = \sum_\sigma (-D)^\sigma \frac{\partial}{\partial u_\sigma^j} = \sum_\sigma (-D_{x_1})^{\sigma_1} \dots (-D_{x_m})^{\sigma_m} \frac{\partial}{\partial u_\sigma^j}.$$

Оператор $\delta/\delta u^j$ называется ***вариационной производной***. Используется также термин ***оператор Эйлера*** и обозначение E_{u^j}. С использованием производной Фреше и фомального сопряжения дифференциальных операторов уравнение Эйлера-Лагранжа записывается в компактном виде $L_*^{\intercal}(1) = 0$.

В дискретном случае вариационная производная имеет вид

$$\frac{\delta}{\delta u^j} = \sum_\sigma T^{-\sigma} \frac{\partial}{\partial u_\sigma^j} = \sum_\sigma T_1^{-\sigma_1} \dots T_m^{-\sigma_m} \frac{\partial}{\partial u_\sigma^j},$$

где T_i оператор сдвига $x_i \to x_i + 1$. Нетрудно дать определение и для случая, когда часть независимых переменных являются непрерывными, а часть дискретными.

Примеры:

Векторное поле

[82]

Векторным полем на многообразии M называется гладкое отображение $F : x \to T_x M$, $x \in M$. В локальных координатах $x = (x^1, \dots, x^n)$ на M векторное поле задаётся выражением

$$F = f^1(x)\partial_{x^1} + \dots f^n(x)\partial_{x^n},$$

где f^i гладкие функции на M, а $\partial_{x^i} \in T_x M$ касательный вектор к i-й координатной кривой.

Формула $F(a) = f^1 a_{x^1} + \dots f^n a_{x^n}$ сопоставляет векторному полю дифференцирование в ассоциативной алгебре гладких функций на M. Верно и обратное, то есть каждое дифференцирование задаётся векторным полем, компоненты которого определяются значениями дифференцирования на координатных функциях x^i. Коммутатору дифференцирований, определённому формулой $[F, G](a) = F(G(a)) - G(F(a))$, соответствует коммутатор векторных полей

$$[F, G] = (F(g^1) - G(f^1))\partial_{x^1} + \dots + (F(g^n) - G(f^n))\partial_{x^n},$$

относительно которого пространство векторных полей образует алгебру Ли.

Наличие дополнительной структуры на многообразии позволяет выделить специальные подалгебры Ли векторных полей. Например, гамильтоново векторное поле X_H определяется по функции H равенством $X_H(a) = \{H, a\}$ при помощи скобки Пуассона на M. См. также контактное векторное поле, эволюционная производная.

Векторные интегрируемые эволюционные уравнения

Автор: В.В. Соколов, 08.02.2009

1. Введение. Примеры

В качестве примера векторных уравнений приведем два различных векторных обобщения уравнения мКдФ:

$$\boldsymbol{u}_t = \boldsymbol{u}_3 + (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u})\boldsymbol{u}_1, \qquad \text{и} \qquad \boldsymbol{u}_t = \boldsymbol{u}_3 + (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u})\boldsymbol{u}_1 + (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}_1)\boldsymbol{u}.$$

Здесь $\boldsymbol{u}$ обозначает N-мерный вектор, $(\cdot, \cdot)$ стандартное скалярное произведение. Хорошо известно, что для любого N эти уравнения интегрируемы методом обратной задачи рассеяния и поэтому обладают бесконечным числом симметрий и законов сохранения. Ясно, что оба уравнения обладают $SO(N)$-симметрией (т.е. инвариантны относительно любых вращений). Такие уравнения называются ***изотропными***. Эти уравнения принадлежат к классу изотропных уравнений вида

$$\boldsymbol{u}_t = \boldsymbol{u}_3 + f_2\boldsymbol{u}_2 + f_1\boldsymbol{u}_1 + f_0\boldsymbol{u}, \tag{31}$$

где коэффициенты f_i некоторые вещественно-значные функции, аргументами которых являются шесть различных скалярных произведений между векторами $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}_1$ и $\boldsymbol{u}_2$.

Более общий класс уравнений (31) образуют векторные ***анизотропные*** уравнения. Примером является уравнение [635]

$$\boldsymbol{u}_t = \left(\boldsymbol{u}_2 + \frac{3}{2}(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_1)\boldsymbol{u}\right)_x + \frac{3}{2}(\boldsymbol{u}, R\boldsymbol{u})\boldsymbol{u}_1, \qquad (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) = 1, \tag{32}$$

[635] I.Z. Golubchik, V.V. Sokolov. Multicomponent generalization of the hierarchy of the Landau-Lifshitz equation. *Theor. Math. Phys.* ***124:1*** (2000) 909–917.

где R произвольная постоянная симметрическая матрица. Если $N=3$, то (32) это симметрия знаменитого уравнения Ландау-Лифшица. Уравнение (32) является интегрируемым для произвольных N и R. Коэффициенты анизотропных уравнений (31), по сравнению с изотропными, зависят от еще шести аргументов, определяемых с помощью дополнительного скалярного произведения $\langle X,Y\rangle=(X,RY)$.

2. Определения и обозначения

Введем следующие обозначения. В изотропном случае обозначим через $\mathcal{F}$ множество локально-аналитических функций от переменных

$$u_{[i,j]}=(\boldsymbol{u}_i,\boldsymbol{u}_j),\quad 0\le i\le j. \tag{33}$$

Здесь $(\cdot,\cdot)$ скалярное произведение на N-мерном (или бесконечномерном) векторном пространстве V.

В анизотропной ситуации $\mathcal{F}$ будет обозначать множество локально-аналитических функций от переменных (33) и дополнительных переменных

$$\tilde{u}_{[i,j]}=\langle\boldsymbol{u}_i,\boldsymbol{u}_j\rangle,\quad 0\le i\le j, \tag{34}$$

где $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — ещё одно скалярное произведение на пространстве V. Дифференциальный порядок переменных $u_{[i,j]}$ и $\tilde{u}_{[i,j]}$ равен j. Если функция зависит от переменных (33) и (34) до n-го порядка включительно, то будем говорить, что эта функция имеет порядок n.

Мы рассматриваем свойства векторных уравнений, которые не зависят от природы пространства V и скалярных произведений. Формализацией этого факта является следующее важное предположение: не существует никаких соотношений между скалярными произведениями (33), (34), которые в дальнейшем будут играть роль *независимых* переменных.

Обобщение результатов работ [729,1317,1261,993], касающихся формальной симметрии, на векторный

[729] N.H. Ibragimov, A.B. Shabat. On infinite dimensional Lie-Bäcklund algebras. *Funct. Anal. Appl.* ***14:4*** (1980) 79–80.

[1317] S.I. Svinolupov, V.V. Sokolov. On evolution equations with nontrivial conservation laws. *Funct. Anal. Appl.* ***16:4*** (1982) 86–87.

[1261] V.V. Sokolov, A.B. Shabat. Classification of integrable evolution equations. *Sov. Sci. Rev. C / Math. Phys. Rev.* ***4*** (1984) 221–280.

[993] A.V. Mikhailov, A.B. Shabat, V.V. Sokolov. The symmetry approach to classification of integrable equations. [162, 115–184]

случай может быть сформулировано следующим образом:

Теорема 2 ([984]). *i) Если уравнение (31) обладает бесконечной серией симметрий вида*

$$\boldsymbol{u}_\tau = g_m \boldsymbol{u}_m + g_{m-1}\boldsymbol{u}_{m-1} + \cdots + g_1 \boldsymbol{u}_1 + g_0 \boldsymbol{u},$$

то существует формальный ряд

$$L = a_1 D_x + a_0 + a_{-1} D_x^{-1} + a_{-2} D_x^{-2} + \cdots, \quad a_i \in \mathcal{F},$$

удовлетворяющий операторному соотношению

$$L_t = [A, L], \quad A = D_x^3 + f_2 D_x^2 + f_1 D_x + f_0. \tag{35}$$

ii) Функции

$$\rho_{-1} = \frac{1}{a_1}, \quad \rho_0 = \frac{a_0}{a_1}, \quad \rho_i = \operatorname{res} L^i, \quad i \in \mathbb{N} \tag{36}$$

являются сохраняющимися плотностями для уравнения (31).

iii) Если уравнение (31) обладает бесконечной серией законов сохранения с плотностями, принадлежащими $\mathcal{F}$, то существует формальная симметрия L и кроме того, формальный ряд S вида

$$S = s_1 D_x + s_0 + s_{-1} D_x^{-1} + s_{-2} D_x^{-2} + \cdots \qquad s_i \in \mathcal{F},$$

такой, что

$$S_t + A^{\mathsf{T}} S + S A = 0, \quad S^{\mathsf{T}} = -S,$$

где значок $^{\mathsf{T}}$ означает сопряжение в алгебре формальных рядов (см., например, [993]).

iv) При условиях пункта iii) канонические законы сохранения (36) с $i = 2k$ тривиальны (т.е. имеют вид $\rho_{2k} = D_x(\sigma_k)$ для некоторых функций $\sigma_k \in \mathcal{F}$).

---

[984] A.G. Meshkov, V.V. Sokolov. Integrable evolution equations on the N-dimensional sphere. *Commun. Math. Phys.* ***232:1*** (2002) 1–18.

[993] A.V. Mikhailov, A.B. Shabat, V.V. Sokolov. The symmetry approach to classification of integrable equations. [162, 115–184]

Отметим, что, в отличие от скалярного случая, опретор A в соотношении (35) не является производной Фреше от правой части уравнения.

Законы сохранения

$$D_t\rho_n = D_x\theta_n, \quad n \geq 0,$$

описанные в Теореме 2, называются каноническими. Их можно задать рекуррентной формулой [984,?]:

$$\begin{aligned}\rho_{n+2} = \frac{1}{3}\Big[\theta_n - f_0\delta_{n,0} - 2f_2\rho_{n+1} - f_2D_x\rho_n - f_1\rho_n\Big]\\ - \frac{1}{3}\Big[f_2\sum_{s=0}^{n}\rho_s\rho_{n-s} + \sum_{0\leq s+k\leq n}\rho_s\rho_k\rho_{n-s-k} + 3\sum_{s=0}^{n+1}\rho_s\rho_{n-s+1}\Big]\\ - D_x\Big[\rho_{n+1} + \frac{1}{2}\sum_{s=0}^{n}\rho_s\rho_{n-s} + \frac{1}{3}D_x(\rho_n)\Big], \quad n \geq 0,\end{aligned} \tag{37}$$

где $\delta_{i,j}$ символ Кронекера, а ρ_0 и ρ_1 имеют вид

$$\rho_0 = -\frac{1}{3}f_2, \quad \rho_1 = \frac{1}{9}f_2^2 - \frac{1}{3}f_1 + \frac{1}{3}D_x(f_2).$$

В частности, отсюда находим следующую сохраняющуюся плотность

$$\rho_2 = -\frac{1}{3}f_0 + \frac{1}{3}\theta_0 - \frac{2}{81}f_2^3 + \frac{1}{9}f_1f_2 - D_x\left(\frac{1}{9}f_2^2 + \frac{2}{9}D_x(f_2) - \frac{1}{3}f_1\right).$$

3. Изотропные уравнения на сфере

На сфере имеется, по определению, связь $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}) := u_{[0,0]} = 1$, из которой следует, что $u_{[0,1]} = 0$, $u_{[0,2]} = -u_{[1,1]}$, $u_{[0,3]} = -3u_{[1,2]}$ и т.д.. Эти соотношения позволяют исключить $u_{[0,i]}$, $i = 0, 1, 2, \ldots$ из списка независимых скалярных произведений.

---

[984] A.G. Meshkov, V.V. Sokolov. Integrable evolution equations on the N-dimensional sphere. *Commun. Math. Phys.* ***232:1*** (2002) 1–18.

[?] *** ERROR: citation ‘**SM**’ undefined ***

Кроме того, на сфере имеется условие $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}_t)=0$, из которого вытекает, что $f_0=f_2u_{[1,1]}+3u_{[1,2]}$. Таким образом, уравнение на сфере имеет вид

$$\boldsymbol{u}_t=\boldsymbol{u}_3+f_2\,\boldsymbol{u}_2+f_1\,\boldsymbol{u}_1+(f_2\,u_{[1,1]}+3\,u_{[1,2]})\,\boldsymbol{u}. \tag{38}$$

В этом разделе рассмотрим изотропные уравнения на сфере. Для них без ограничения общности предполагается, что коэффициенты f_1 и f_2 в уравнении (38) зависят только от переменных $u_{[1,1]}$, $u_{[1,2]}$, $u_{[2,2]}$.

Полный список изотропных интегрируемых уравнений на сфере получен в [984]:

$$\boldsymbol{u}_t=\boldsymbol{u}_3-3\frac{u_{[1,2]}}{u_{[1,1]}}\boldsymbol{u}_2+\frac{3}{2}\frac{u_{[2,2]}}{u_{[1,1]}}\boldsymbol{u}_1, \tag{39}$$

$$\boldsymbol{u}_t=\boldsymbol{u}_3-3\frac{u_{[1,2]}}{u_{[1,1]}}\boldsymbol{u}_2+\frac{3}{2}\left(\frac{u_{[2,2]}}{u_{[1,1]}}+\frac{u_{[1,2]}^2}{u_{[1,1]}^2(1+au_{[1,1]})}\right)\boldsymbol{u}_1, \tag{40}$$

$$\boldsymbol{u}_t=\boldsymbol{u}_3+\frac{3}{2}\left(\frac{a^2u_{[1,2]}^2}{1+au_{[1,1]}}-a(u_{[2,2]}-u_{[1,1]}^2)+u_{[1,1]}\right)\boldsymbol{u}_1+3u_{[1,2]}\boldsymbol{u}, \tag{41}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}_t=\boldsymbol{u}_3&-3\frac{(q+1)u_{[1,2]}}{2qu_{[1,1]}}\boldsymbol{u}_2+3\frac{(q-1)u_{[1,2]}}{2q}\boldsymbol{u}\\&+\frac{3}{2}\left(\frac{(q+1)u_{[2,2]}}{u_{[1,1]}}-\frac{(q+1)au_{[1,2]}^2}{q^2u_{[1,1]}}+u_{[1,1]}(1-q)\right)\boldsymbol{u}_1,\end{aligned} \tag{42}$$

где a произвольная постоянная и $q=\varepsilon\sqrt{1+au_{[1,1]}}$, $\varepsilon^2=1$.

Замечание 1. Приведённый список можно сделать более детальным, считая $a=0$ или $a\neq 0$. В частности, уравнение (42), где $a=0$ и $\varepsilon=-1$ имеет вид

$$\boldsymbol{u}_t=\boldsymbol{u}_3+3u_{[1,1]}\boldsymbol{u}_1+3u_{[1,2]}\boldsymbol{u}. \tag{43}$$

[984] A.G. Meshkov, V.V. Sokolov. Integrable evolution equations on the N-dimensional sphere. *Commun. Math. Phys.* ***232:1*** (2002) 1–18.

Если $a = 0$ и $\varepsilon = 1$, то уравнение (42) принимает иной вид:

$$\boldsymbol{u}_t = \boldsymbol{u}_3 - 3\frac{u_{[1,2]}}{u_{[1,1]}}\boldsymbol{u}_2 + 3\frac{u_{[2,2]}}{u_{[1,1]}}\boldsymbol{u}_1. \tag{44}$$

Замечание 2. Каждое из уравнений списка допускает симметрию пятого порядка. Например, симметрия уравнения (43) имеет вид

$$\boldsymbol{u}_\tau = \boldsymbol{u}_5 + 5u_{[1,1]}\boldsymbol{u}_3 + 15u_{[1,2]}\boldsymbol{u}_2 + 5\left(3u_{[1,1]}^2 + 2u_{[2,2]} + 3u_{[1,3]}\right)\boldsymbol{u}_1 + 5\left(6u_{[1,2]}u_{[1,1]} + 2u_{[2,3]} + u_{[1,4]}\right)\boldsymbol{u}.$$

Замечание 3. Уравнение (39) на $\mathbb{R}^N$ появлялось в работах [1262,1323,669] в связи с тройными йордановыми системами. Оно является векторным обобщением широко известного уравнения Шварц-КдФ.

Замечание 4. На одномерной сфере уравнения (40) и (41) при $a = 0$ редуцируются к потенциальному уравнению KdV

$$v_t = v_{xxx} + v_x^3$$

при помощи стереографической проекции и некоторых точечных преобразований. В случае $a = -1$ эти уравнения редуцируются к уравнению Калоджеро-Дегаспериса

$$u_t = u_{xxx} - \frac{1}{2}Q'' u_x + \frac{3}{8}\frac{((Q - u_x^2)_x)^2}{u_x(Q - u_x^2)},$$

где $Q(v) = \frac{1}{4}(v^2 + 1)^2$. Уравнение с таким многочленом $Q(v)$ соответствует тригонометрическому вырождению эллиптической кривой, неявно присутствующей в уравнении Калоджеро-Дегаспериса.

Уравнение (42) редуцируется к интегрируемому уравнению

$$v_t = v_{xxx} - \frac{6av_x v_{xx}^2}{1 + 4av_x^2} + 8v_x^3.$$

[1262] V.V. Sokolov, S.I. Svinolupov. Vector-matrix generalizations of classical integrable equations. *Theor. Math. Phys.* ***100*** (1994) 959–962.

[1323] S.I. Svinolupov, V.V. Sokolov. Deformations of Jordan triple systems and integrable equations. *Theor. Math. Phys.* ***108:3*** (1996) 1160–1163

[669] I.T. Habibullin, V.V. Sokolov, R.I. Yamilov. Multi-component integrable systems and nonassociative structures, [133, pp. 139–168].

4. Анизотропные уравнения на сфере

Для анизотропных уравнений коэффициенты уравнения (31) a priori зависят от девяти переменных. Полный список интегрируемых уравнений получен в [984,275] (a и b — произвольные постоянные):

$$\boldsymbol{u}_t = \boldsymbol{u}_3 + \frac{3}{2}\Big(u_{[1,1]} + \tilde{u}_{[0,0]}\Big)\boldsymbol{u}_1 + 3u_{[1,2]}\boldsymbol{u}, \tag{45}$$

$$\boldsymbol{u}_t = \boldsymbol{u}_3 - 3\frac{u_{[1,2]}}{u_{[1,1]}}\boldsymbol{u}_2 + \frac{3}{2}\left(\frac{u_{[2,2]}}{u_{[1,1]}} + \frac{u_{[1,2]}^2}{u_{[1,1]}^2} + \frac{\tilde{u}_{[1,1]}}{u_{[1,1]}}\right)\boldsymbol{u}_1, \tag{46}$$

$$\boldsymbol{u}_t = \boldsymbol{u}_3 - 3\frac{u_{[1,2]}}{u_{[1,1]}}\boldsymbol{u}_2 + \frac{3}{2}\left(\frac{u_{[2,2]}}{u_{[1,1]}} + \frac{u_{[1,2]}^2}{u_{[1,1]}^2} - \frac{(\tilde{u}_{[0,1]} + u_{[1,2]})^2}{(u_{[1,1]} + \tilde{u}_{[0,0]})u_{[1,1]}} + \frac{\tilde{u}_{[1,1]}}{u_{[1,1]}}\right)\boldsymbol{u}_1, \tag{47}$$

$$\boldsymbol{u}_t = \boldsymbol{u}_3 - 3\frac{\tilde{u}_{[0,1]}}{\tilde{u}_{[0,0]}}\boldsymbol{u}_2 - 3\left(\frac{2\tilde{u}_{[0,2]} + \tilde{u}_{[1,1]} + a}{2\tilde{u}_{[0,0]}} - \frac{5}{2}\frac{\tilde{u}_{[0,1]}^2}{\tilde{u}_{[0,0]}^2}\right)\boldsymbol{u}_1 + 3\left(u_{[1,2]} - \frac{\tilde{u}_{[0,1]}}{\tilde{u}_{[0,0]}}u_{[1,1]}\right)\boldsymbol{u}, \tag{48}$$

$$\boldsymbol{u}_t = \boldsymbol{u}_3 - 3\frac{\tilde{u}_{[0,1]}}{\tilde{u}_{[0,0]}}\boldsymbol{u}_2 - 3\left(\frac{\tilde{u}_{[0,2]}}{\tilde{u}_{[0,0]}} - 2\frac{\tilde{u}_{[0,1]}^2}{\tilde{u}_{[0,0]}^2}\right)\boldsymbol{u}_1 + 3\left(u_{[1,2]} - \frac{\tilde{u}_{[0,1]}}{\tilde{u}_{[0,0]}}u_{[1,1]}\right)\boldsymbol{u}, \tag{49}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}_t &= \boldsymbol{u}_3 - 3\frac{\tilde{u}_{[0,1]}}{\tilde{u}_{[0,0]}}\left(\boldsymbol{u}_2 + u_{[1,1]}\boldsymbol{u}\right) + 3u_{[1,2]}\boldsymbol{u}\\ &\quad + \frac{3}{2}\left(-\frac{u_{[2,2]}}{\tilde{u}_{[0,0]}} + \frac{(u_{[1,2]} + \tilde{u}_{[0,1]})^2}{\tilde{u}_{[0,0]}(\tilde{u}_{[0,0]} + u_{[1,1]})} + \frac{(\tilde{u}_{[0,0]} + u_{[1,1]})^2}{\tilde{u}_{[0,0]}} + \frac{\tilde{u}_{[0,1]}^2 - \tilde{u}_{[0,0]}\tilde{u}_{[1,1]}}{\tilde{u}_{[0,0]}^2}\right)\boldsymbol{u}_1,\end{aligned} \tag{50}$$

$$\boldsymbol{u}_t = \boldsymbol{u}_3 + 3\left(\frac{\tilde{u}_{[0,1]}\tilde{u}_{[0,2]}}{\xi} - \frac{\tilde{u}_{[1,2]}\tilde{u}_{[0,0]}}{\xi} + \frac{\tilde{u}_{[0,1]}}{\tilde{u}_{[0,0]}}\right)\left(\boldsymbol{u}_2 + u_{[1,1]}\boldsymbol{u}\right) + 3u_{[1,2]}\boldsymbol{u}$$

[984] A.G. Meshkov, V.V. Sokolov. Integrable evolution equations on the N-dimensional sphere. *Commun. Math. Phys.* ***232:1*** (2002) 1–18.

[275] M. Yu. Balakhnev, A.G. Meshkov. Integrable anisotropic evolution equations on a sphere. *SIGMA* ***1*** (2005) 027.

$$+\frac{3}{2\xi^2\tilde u^2_{[0,0]}}\Big(\tilde u^3_{[0,0]}\tilde u_{[2,2]}\xi-\xi(\xi+\tilde u_{[0,2]}\tilde u_{[0,0]})^2+(\tilde u^2_{[0,0]}\tilde u_{[1,2]}-2\xi\tilde u_{[0,1]}-\tilde u_{[0,0]}\tilde u_{[0,1]}\tilde u_{[0,2]})^2\Big)\boldsymbol{u}_1$$

$$-a\frac{\tilde u^2_{[0,0]}u_{[1,1]}+\tilde u^2_{[0,1]}}{\tilde u_{[0,0]}\xi}\boldsymbol{u}_1,\qquad \xi=\tilde u_{[0,0]}\tilde u_{[1,1]}-\tilde u^2_{[0,1]},\tag{51}$$

$$\boldsymbol{u}_t=\boldsymbol{u}_3+3\left(\frac{\tilde u_{[0,1]}\tilde u_{[0,2]}}{\xi}-\frac{\tilde u_{[1,2]}\tilde u_{[0,0]}}{\xi}+\frac{\tilde u_{[0,1]}}{\tilde u_{[0,0]}}\right)\big(\boldsymbol{u}_2+u_{[1,1]}\boldsymbol{u}\big)+3u_{[1,2]}\boldsymbol{u}$$

$$+\frac{3}{\xi}\left(\tilde u_{[0,0]}\tilde u_{[2,2]}-2\tilde u_{[0,1]}\tilde u_{[1,2]}-\frac{(\tilde u_{[0,2]}\tilde u_{[0,0]}-2\tilde u^2_{[0,1]})(\xi+\tilde u_{[0,2]}\tilde u_{[0,0]})}{\tilde u^2_{[0,0]}}\right)\boldsymbol{u}_1,$$

$$\xi=\tilde u_{[0,0]}\tilde u_{[1,1]}-\tilde u^2_{[0,1]},\tag{52}$$

$$\boldsymbol{u}_t=\boldsymbol{u}_3-3\frac{a\tilde u_{[0,1]}}{\eta}\boldsymbol{u}_2+3\frac{u_{[1,2]}\eta-a\tilde u_{[0,1]}u_{[1,1]}}{\eta}\boldsymbol{u}+\frac{3}{2}\left(\frac{\tilde u_{[2,2]}}{\eta}+\frac{a\xi-(\tilde u_{[0,2]}+\eta)^2}{\eta\tilde u_{[0,0]}}\right)\boldsymbol{u}_1$$

$$+\frac{3}{2}\left(\frac{\big(\tilde u_{[0,0]}\tilde u_{[1,2]}-\tilde u_{[0,1]}(2a\tilde u_{[0,0]}+b+\tilde u_{[0,2]})\big)^2}{\eta\xi\tilde u_{[0,0]}}-b\frac{a\tilde u^2_{[0,1]}+\eta\tilde u_{[0,0]}u_{[1,1]}}{\eta^2\tilde u_{[0,0]}}\right)\boldsymbol{u}_1,$$

$$\eta=a\tilde u_{[0,0]}+b,\qquad \xi=\tilde u_{[0,0]}(\eta-\tilde u_{[1,1]})+\tilde u^2_{[0,1]},\tag{53}$$

$$\boldsymbol{u}_t=\boldsymbol{u}_3+3\left(\frac{\tilde u_{[0,1]}}{\tilde u_{[0,0]}}+\frac{\tilde u_{[0,1]}\tilde u_{[0,2]}}{\xi}-\frac{\tilde u_{[0,0]}\tilde u_{[1,2]}}{\xi}\right)\big(\boldsymbol{u}_2+u_{[1,1]}\boldsymbol{u}\big)+3u_{[1,2]}\boldsymbol{u}$$

$$+\frac{3}{2}\left(\frac{\tilde u_{[0,0]}\tilde u_{[2,2]}}{\xi}+b\tilde u_{[0,0]}\frac{u_{[1,1]}\eta+a\tilde u^2_{[0,1]}}{\eta\xi}-\frac{(\tilde u_{[0,0]}\tilde u_{[0,2]}+\xi)^2}{\tilde u^2_{[0,0]}\xi}\right)\boldsymbol{u}_1$$

$$+\frac{3}{2}\frac{\left(\tilde u_{[0,0]}^2(a\xi\tilde u_{[0,1]}-\eta\tilde u_{[1,2]})+\eta\tilde u_{[0,1]}(\tilde u_{[0,0]}\tilde u_{[0,2]}+\xi)\right)^2}{\eta\tilde u_{[0,0]}^2(\xi+\eta)\xi^2}\boldsymbol{u}_1,$$

$$\xi=\tilde u_{[0,0]}\tilde u_{[1,1]}-\tilde u_{[0,1]}^2,\quad \eta=(a\tilde u_{[0,0]}+b)\tilde u_{[0,0]},\tag{54}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}_t&=\boldsymbol{u}_3+\frac{3}{2}\left(\frac{\tilde u_{[0,0]}\tilde u_{[1,2]}-\tilde u_{[0,1]}\tilde u_{[0,2]}}{\mu(\mu+\tilde u_{[0,0]})}-2\frac{\tilde u_{[0,1]}}{\mu}\right)(\boldsymbol{u}_2+u_{[1,1]}\boldsymbol{u})+3u_{[1,2]}\boldsymbol{u}\\&+\frac{3}{2\tilde u_{[0,0]}(\mu+\tilde u_{[0,0]})}\Big[\mu^{-2}\big(\tilde u_{[0,0]}\tilde u_{[1,2]}-\tilde u_{[0,1]}\tilde u_{[0,2]}\big)^2+\tilde u_{[0,0]}\tilde u_{[2,2]}-\tilde u_{[0,2]}^2\\&\quad-2\mu^{-2}\tilde u_{[0,1]}\big(\tilde u_{[0,0]}\tilde u_{[1,2]}-\tilde u_{[0,1]}\tilde u_{[0,2]}\big)(\mu+2\tilde u_{[0,0]})\Big]\boldsymbol{u}_1\\&+\big(6\mu^{-2}\tilde u_{[0,1]}^2-3\tilde u_{[0,0]}^{-1}\tilde u_{[0,2]}\big)\boldsymbol{u}_1,\quad \mu^2=\tilde u_{[0,1]}^2+\tilde u_{[0,0]}^2-\tilde u_{[0,0]}\tilde u_{[1,1]}.\end{aligned}\tag{55}$$

Замечание 5. Уравнения (45) – (47) анонсировались в [984]. Уравнение (45) совпадает с (32).

Замечание 6. Приведенный список допускает дальнейшую детализацию. Например, можно положить $a=0$ в (48) и (51). В уравнении (53) можно принять $a=0$ или $b=0$, но $\{a,b\}\neq 0$. В случае $a=0$ уравнение (53) принимает вид

$$\boldsymbol{u}_t=\boldsymbol{u}_3+\frac{3}{2}\left(\frac{\tilde u_{[2,2]}}{b}-\frac{(\tilde u_{[0,2]}+b)^2}{b\tilde u_{[0,0]}}+\frac{\left(\tilde u_{[0,0]}\tilde u_{[1,2]}-\tilde u_{[0,1]}(\tilde u_{[0,2]}+b)\right)^2}{b\xi\tilde u_{[0,0]}}-u_{[1,1]}\right)\boldsymbol{u}_1+3\,u_{[1,2]}\boldsymbol{u},\tag{53a}$$

где $\xi=\tilde u_{[0,0]}(b-\tilde u_{[1,1]})+\tilde u_{[0,1]}^2$.

Если положить в (54) $a=0$, а затем $b=0$, то это уравнение редуцируется к виду

$$\boldsymbol{u}_t=\boldsymbol{u}_3+3\left(\frac{\tilde u_{[0,1]}}{\tilde u_{[0,0]}}+\frac{\tilde u_{[0,1]}\tilde u_{[0,2]}-\tilde u_{[0,0]}\tilde u_{[1,2]}}{\xi}\right)(\boldsymbol{u}_2+u_{[1,1]}\boldsymbol{u})+3u_{[1,2]}\boldsymbol{u}$$

[984] A.G. Meshkov, V.V. Sokolov. Integrable evolution equations on the N-dimensional sphere. *Commun. Math. Phys.* ***232:1*** (2002) 1–18.

$$+\frac{3}{2}\left(\frac{\tilde u_{[0,0]}\tilde u_{[2,2]}}{\xi}-\frac{(\xi+\tilde u_{[0,0]}\tilde u_{[0,2]})^2}{\xi\tilde u_{[0,0]}^2}\right)\boldsymbol{u}_1,\quad \xi=\tilde u_{[0,0]}\tilde u_{[1,1]}-\tilde u_{[0,1]}^2. \tag{54a}$$

Это уравнение является анизотропным обобщением уравнения Шварц-КдФ.

5. Преобразования Бэклунда для уравнений на сфере

Все интегрируемые уравнения на сфере допускают автопреобразования Бэклунда. Эти преобразования содержат произвольный параметр, в принципе позволяющий строить как многосолитонные, так и конечнозонные решения, даже если представление Лакса не известно (см. [216])

Для скалярных эволюционных уравнений авто-преобразование Бэклунда первого порядка — это соотношение между двумя решениями u и v одного и того же уравнения и их производными u_x и v_x. В векторном случае авто-преобразования Бэклунда первого порядка эволюционного уравнения были введены в работе [984], как обыкновенные дифференциальные уравнения вида

$$\boldsymbol{u}_1=f\boldsymbol{u}+g\boldsymbol{v}+h\boldsymbol{v}_x, \tag{56}$$

где f,g и h некоторые скалярные функции произведений векторов $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}$ и $\boldsymbol{v}_x$. В случае изотропного уравнения в $\mathbb{R}^n$ аргументами f,g и h являются

$$u_{[0,0]}=(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}),\quad w_0=(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}),\quad w_1=(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}_x),\quad v_{[0,0]}=(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}),\quad v_{[0,1]}=(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}_x),\quad v_{[1,1]}=(\boldsymbol{v}_x,\boldsymbol{v}_x).$$

В анизотропном случае добавляются еще

$$\tilde u_{[0,0]}=\langle\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}\rangle,\quad \tilde w_0=\langle\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\rangle,\quad \tilde w_1=\langle\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}_x\rangle,\quad \tilde v_{[0,0]}=\langle\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}\rangle,\quad \tilde v_{[0,1]}=\langle\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}_x\rangle,\quad \tilde v_{[1,1]}=\langle\boldsymbol{v}_x,\boldsymbol{v}_x\rangle.$$

На сфере и на конусе из-за наличия связей переменные $u_{[0,0]},v_{[0,0]}$ и $v_{[0,1]}$ исключаются.

---

[216] V.E. Adler, A.B. Shabat, R.I. Yamilov. Symmetry approach to the integrability problem. *Theor. Math. Phys.* ***125:3*** (2000) 1603–1661.

[984] A.G. Meshkov, V.V. Sokolov. Integrable evolution equations on the N-dimensional sphere. *Commun. Math. Phys.* ***232:1*** (2002) 1–18.

Чтобы найти авто-преобразование Бэклунда для эволюционного уравнения (31), мы дифференцируем (56) по t в силу уравнения (31), а затем исключаем $\boldsymbol{u}_1$ при помощи (56). По определению преобразования Бэклунда, полученное таким путем соотношение должно выполняться тождественно. Расщепляя это выражение по независимым переменным, которые не являются аргументами функций f, g и h, мы получаем переопределенную систему нелинейных уравнений в частных производных для этих функций. Если система имеет решение, существенно зависящее от параметра λ, то это решение определяет искомое авто-преобразование Бэклунда.

6. Дивергентные уравнения

Общая задача классификации интегрируемых уравнений (31) является очень трудоемкой и не решена до настоящего времени. Дело не только в том, что коэффициенты уравнения зависят от большого числа переменных. Имеющиеся примеры (см. [276,274]) показывает, что эти коэффициенты могут чрезвычайно сложно зависеть от своих аргументов.

Задача, имеющая вполне обозримый ответ — классификация интегрируемых векторных эволюционных уравнений вида

$$\boldsymbol{u}_t = (\boldsymbol{u}_2 + f_1\boldsymbol{u}_1 + f_0\boldsymbol{u})_x, \qquad f_i = f_i(u_{[0,0]}, \tilde{u}_{[0,0]}, u_{[0,1]}, \tilde{u}_{[0,1]}, u_{[1,1]}, \tilde{u}_{[1,1]}),$$

где f_i некоторые скалярные функции. Список таких уравнений, полученный в [985], после преобразования к потенциальной форме заменой $\boldsymbol{u} \to \boldsymbol{u}_1$, имеет вид

$$\boldsymbol{u}_t = \boldsymbol{u}_3 + \frac{3}{2}\Big(\frac{a^2 {u_{[1,2]}}^2}{1 + a u_{[1,1]}} - a u_{[2,2]}\Big)\boldsymbol{u}_1, \tag{57}$$

$$\boldsymbol{u}_t = \boldsymbol{u}_3 - 3\frac{u_{[1,2]}}{u_{[1,1]}}\boldsymbol{u}_2 + \frac{3u_{[2,2]}}{3u_{[1,1]}}\boldsymbol{u}_1, \tag{58}$$

---

[276] M. Yu. Balakhnev, A.G. Meshkov. On a classification of integrable vectorial evolutionary equations. *J. Nonl. Math. Phys.* ***15:2*** (2008) 212–226.

[274] M. Yu. Balakhnev. On a class of integrable evolutionary vector equations. *Theor. Math. Phys.* ***142:1*** (2005) 13–20.

[985] A.G. Meshkov, V.V. Sokolov. Classification of integrable divergent N-component evolution systems. *Theor. Math. Phys.* ***139:2*** (2004) 609–622.

$$\boldsymbol{u}_t = \boldsymbol{u}_3 - 3\frac{u_{[1,2]}}{u_{[1,1]}}\boldsymbol{u}_2 + \frac{3}{2}\left(\frac{u_{[2,2]}}{u_{[1,1]}} + \frac{{u_{[1,2]}}^2}{{u_{[1,1]}}^2(1+au_{[1,1]})}\right)\boldsymbol{u}_1, \tag{59}$$

$$\boldsymbol{u}_t = \boldsymbol{u}_3 - \frac{3}{2}(p+1)\frac{u_{[1,2]}}{pu_{[1,1]}}\boldsymbol{u}_2 + \frac{3}{2}(p+1)\left(\frac{u_{[2,2]}}{u_{[1,1]}} - \frac{a{u_{[1,2]}}^2}{p^2u_{[1,1]}}\right)\boldsymbol{u}_1, \tag{60}$$

$$\boldsymbol{u}_t = \boldsymbol{u}_3 - 3\frac{u_{[1,2]}}{u_{[1,1]}}\boldsymbol{u}_2 + \frac{3}{2}\left(\frac{u_{[2,2]}}{u_{[1,1]}} + \frac{{u_{[1,2]}}^2}{{u_{[1,1]}}^2} + a\frac{\tilde{u}_{[1,1]}}{u_{[1,1]}}\right)\boldsymbol{u}_1, \tag{61}$$

$$\boldsymbol{u}_t = \boldsymbol{u}_3 - 3\frac{u_{[1,2]}}{u_{[1,1]}}\boldsymbol{u}_2 + 3\frac{u_{[2,2]}}{u_{[1,1]}}\boldsymbol{u}_1. \tag{62}$$

Здесь $p = \sqrt{1+au_{[1,1]}}$, a — постоянная.

Отметим, что уравнения (58), (59), (61) и (62) совпадают по форме с соответствующими уравнениями на сфере.

Войцеховского система D

[1417, 1286, 96]

$$\ddot{q}_k = \dot{p}_k = -\omega_k q_k + \frac{\mu_k^2}{q_k^3} - 2q_k \sum_{j=1}^{N} q_j^2, \quad k = 1, \dots, N$$

Гамильтонова структура:

$$\{q_j, q_k\} = \{p_j, p_k\} = 0, \quad \{p_j, q_k\} = \delta_{jk}, \quad H = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\left(p_k^2 + \omega_k q_k^2 + \frac{\mu_k^2}{q_k^2}\right) + \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{N} q_k^2\right)^2.$$

Имеется N независимых первых интегралов в инволюции (при условии $\omega_k \neq \omega_j$, $\forall k, j$):

$$F_k = p_k^2 + \omega_k q_k^2 + \frac{\mu_k^2}{q_k^2} + q_k^2 \sum_{j=1}^{N} q_j^2 + \sum_{j \neq k} \frac{1}{\omega_j - \omega_k}\left((p_k q_j - p_j q_k)^2 + \frac{\mu_k^2 q_j^2}{q_k^2} + \frac{\mu_j^2 q_k^2}{q_j^2}\right), \quad F_1 + \dots + F_N = 2H.$$

Пара Лакса $\dot{L} = [M, L]$:

$$L = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\lambda^2 I + \Omega + qq^{\mathsf{T}} & \lambda q + p + i\frac{\mu}{q} \\ -\lambda q^{\mathsf{T}} + p^{\mathsf{T}} - i\left(\frac{\mu}{q}\right)^{\mathsf{T}} & -\frac{1}{2}\lambda^2 - q^{\mathsf{T}} q \end{pmatrix}, \qquad M = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\lambda I + i\dfrac{\mu}{q^2} & -q \\ q^{\mathsf{T}} & \frac{1}{2}\lambda \end{pmatrix}$$

где $p, q, \dfrac{\mu}{q}$ векторы-столбцы с k-ми компонентами p_k, q_k, $\dfrac{\mu_k}{q_k}$ соответственно, и $\Omega = \mathrm{diag}(\omega_1, \dots, \omega_N)$, $\dfrac{\mu}{q^2} = \mathrm{diag}\left(\dfrac{\mu_1}{q_1^2}, \dots, \dfrac{\mu_N}{q_N^2}\right)$.

См. также: система Розохатиуса

Волчки

Автор: В.Г. Марихин, 27.08.2007

Пары коммутирующих гамильтонианов, квадратичных по импульсам

В этом разделе мы изучаем пары гамильтонианов вида

$$H = ap_1^2 + 2bp_1p_2 + cp_2^2 + dp_1 + ep_2 + f, \quad K = Ap_1^2 + 2Bp_1p_2 + Cp_2^2 + Dp_1 + Ep_2 + F \tag{63}$$

коммутирующие относительно стандартной скобки Пуассона $\{p_\alpha, q_\beta\} = \delta_{\alpha\beta}$. Предполагается, что коэффициенты гамильтонианов локально аналитические функции от q_1, q_2. Данная задача рассматривалась в работах [507,563,564,973,1429,955,956]. Здесь мы представляем некоторые новые много-параметрические семейста таких пар и общий метод построения полного решения Гамильтона-Якоби в виде интеграла по некоторой алгебраической кривой. В некоторых примерах эта кривая является негиперэллиптическим накрытием эллиптической кривой.

[507] B. Dorizzi, B. Grammaticos, A. Ramani, P. Winternitz. Integrable Hamiltonian systems with velocity dependent potentials. *J. Math. Phys.* ***26:12*** (1985) 3070–3079.

[563] E.V. Ferapontov, A.P. Fordy. Non-homogeneous systems of hydrodynamic type, related to quadratic Hamiltonians with electromagnetic term. *Physica D* ***108:4*** (1997) 350–364.

[564] E.V. Ferapontov, A.P. Fordy. Commuting quadratic Hamiltonians with velocity dependent potentials. *Rep. Math. Phys.* ***44:1,2*** (1999) 53–70.

[973] E. McSween, P. Winternitz. Integrable and superintegrable Hamiltonian systems in magnetic fields. *J. Math. Phys.* ***41*** (2000) 2957–2967.

[1429] H.M. Yehia. Generalized natural mechanical systems of two degrees of freedom with quadratic integrals. *J. Phys. A* ***25:1*** (1992) 197–221.

[955] V.G. Marikhin, V.V. Sokolov. Separation of variables on a non-hyperelliptic curve. *Reg. and Chaot. Dyn.* ***10:1*** (2005) 59–70.

[956] V.G. Marikhin, V.V. Sokolov. On quasi-Stäckel Hamiltonians. *Russ. Math. Surveys* ***60:5*** (2005) 981–983.

1 Диагонализация квадратичных частей

Можно ввести новые координаты s_1, s_2 так, что квадратичные части H, K станут диагональными. Условие $\{H, K\} = 0$ является необходимым для существования такого преобразования. Пусть s_1, s_2 корни уравнения

$$\Phi(s, q_1, q_2) = (B - bs)^2 - (A - as)(C - cs) = 0$$

и $\Phi^i = \Phi(s_i, q_1, q_2)$, тогда каноническое преобразование

$$(q_1, q_2, p_1, p_2) \to (s_1, s_2, P_1, P_2) : p_1 = -\left(\frac{\Phi^1_{q_1}}{\Phi^1_{s_1}} P_1 + \frac{\Phi^2_{q_1}}{\Phi^2_{s_2}} P_2\right), \quad p_2 = -\left(\frac{\Phi^1_{q_2}}{\Phi^1_{s_1}} P_1 + \frac{\Phi^2_{q_2}}{\Phi^2_{s_2}} P_2\right)$$

приводит пару (63) к виду

$$H = \frac{S_1(s_1)}{s_1 - s_2} P_1^2 - \frac{S_2(s_2)}{s_1 - s_2} P_2^2 + \tilde{d} P_1 + \tilde{e} P_2 + \tilde{f}, \qquad K = \frac{s_2 S_1(s_1)}{s_1 - s_2} P_1^2 - \frac{s_1 S_2(s_2)}{s_1 - s_2} P_2^2 + \tilde{D} P_1 + \tilde{E} P_2 + \tilde{F},$$

где

$$S_i(s_i) = \frac{1}{(\Phi^i_{q_i})^2}((as_i - A)(\Phi^i_{q_1})^2 + 2(bs_i - B)\Phi^i_{q_1}\Phi^i_{q_2} + (cs_i - C)(\Phi^i_{q_2})^2).$$

Теорема 3. *Любая пара коммутирующих гамильтонианов (63) может быть приведена каноническим преобразованием*

$$\hat{P}_1 = P_1 + \frac{\partial F(s_1, s_2)}{\partial s_1}, \qquad \hat{P}_2 = P_2 + \frac{\partial F(s_1, s_2)}{\partial s_2}$$

к паре вида

$$H = \frac{U_1 - U_2}{s_1 - s_2}, \qquad K = \frac{s_2 U_1 - s_1 U_2}{s_1 - s_2} \tag{64}$$

где

$$\begin{aligned} U_1 &= S_1(s_1) P_1^2 + \frac{\sqrt{S_1(s_1) S_2(s_2)} Z_{s_1}}{(s_1 - s_2)} P_2 - \frac{S_1(s_1) Z_{s_1}^2}{4(s_1 - s_2)^2} + V_1(s_1, s_2), \\ U_2 &= S_2(s_2) P_2^2 - \frac{\sqrt{S_1(s_1) S_2(s_2)} Z_{s_2}}{(s_1 - s_2)} P_1 - \frac{S_2(s_2) Z_{s_2}^2}{4(s_2 - s_1)^2} + V_2(s_1, s_2), \end{aligned} \tag{65}$$

$$
\begin{aligned}
V_1 &= \frac{1}{2}\sqrt{S_1(s_1)}\partial_{s_1}\left(\sqrt{S_1(s_1)}\frac{Z_{s_1}^2}{s_1-s_2}\right)+f_1(s_1),\\
V_2 &= \frac{1}{2}\sqrt{S_2(s_2)}\partial_{s_2}\left(\sqrt{S_2(s_2)}\frac{Z_{s_2}^2}{s_2-s_1}\right)+f_2(s_2)
\end{aligned}
\tag{66}
$$

для некоторых функций $Z(s_1,s_2)$, $S_i(s_i)$ и $f_i(s_i)$. Скобка Пуассона $\{H,K\}$ равна нулю если и только если выполняются условия:

$$
Z_{s_1,s_2} = \frac{Z_{s_1}-Z_{s_2}}{2(s_2-s_1)}, \tag{67}
$$

$$
(Z_{s_1}\partial_{s_2}-Z_{s_2}\partial_{s_1})\left(\frac{V_1-V_2}{s_1-s_2}\right)=0. \tag{68}
$$

Общее аналитическое решение уравнения Эйлера-Дарбу (67) имеет следующее разложение в окрестности сингулярной прямой $x=y$:

$$
Z(x,y)=A+\log(x-y)B, \quad A=\sum_0^\infty a_i(x+y)(x-y)^{2i}, \quad B=\sum_0^\infty b_i(x+y)(x-y)^{2i}.
$$

Здесь a_0 и a_1 произвольные функции, а другие коэффициенты выражаются через них и их производные. Например, $b_0=\frac{1}{2}a_0''$.

Поодставим это разложение в (68), чтобы доказать $B=0$. Легко проверить, что любое решение уравнения (67) при $B=0$ имеет вид

$$
Z(x,y)=z_0+\delta(x+y)+(x-y)^2\sum_{k=0}^\infty \frac{g^{(2k)}(x+y)}{2^{(2k)}k!(k+1)!}(x-y)^{2k}, \tag{69}
$$

с некоторой функцией $g(x)$ и постоянными z_0,δ. Будем называть $g(x)$ *производящей функцией* для (69). Не теряя общности положим $z_0=0$. Параметр δ очень важен для классификации гамильтонианов из Теоремы 3.

Мы ищем все функции Z, отвечающие рациональным производящим функциям g. Полагая $g(x) = x^n$, получаем для (67) бесконечный набор полиномиальных решений $Z^{(n)}$. Например,

$$\begin{aligned} g(x) = 1 \quad &\Leftrightarrow \quad Z^{(0)}(x,y) = (x-y)^2, \\ g(x) = x \quad &\Leftrightarrow \quad Z^{(1)}(x,y) = (x+y)(x-y)^2, \\ g(x) = x^2 \quad &\Leftrightarrow \quad Z^{(2)}(x,y) = \tfrac{1}{4}\left((x-y)^2 + 4(x+y)^2\right)(x-y)^2. \end{aligned}$$

Всё множество можно получить, применяя к Z^0 ‘оператор рождения’ $x^2\partial_x + y^2\partial_y - \frac{1}{2}(x+y)$. Рациональные функции $g(x) = (x-\mu)^{-n}$ отвечают другому классу точных решений уравнения (67), например

$$g_\mu(x) = \frac{1}{4(x-2\mu)} \quad \Leftrightarrow \quad Z_\mu(x,y) = \sqrt{(\mu-x)(\mu-y)} + \frac{1}{2}(x+y) - \mu.$$

Решение, отвечающее полюсам порядка $n \geq 2$ можно получить, дифференцируя последнюю формулу по параметру μ. Так как функция Z линейна по g, мы получаем решение Z с рациональной производящей функцией $g(x) = \sum_i c_i x^i + \sum_{i,j} d_{ij}(x-\mu_i)^{-j}$.

Гипотеза 1. *Для всех гамильтонианов (64)–(68) производящая функция g является рациональной вида $g(x) = \frac{P(x)}{S(x)}$, где P и S многочлены и* $\deg P < 5$, $\deg S < 6$.

В статьях [1429,955] рассматривалось следующее решение уравнений (67), (68):

$$Z(x,y) = x+y, \quad S_1(x) = S_2(x) = \sum_{i=0}^{6} c_i x^i, \quad f_1(x) = f_2(x) = -\frac{3}{4}c_6x^4 - \frac{1}{2}c_5x^3 + \sum_{i=0}^{2} k_i x^i$$

[1429] H.M. Yehia. Generalized natural mechanical systems of two degrees of freedom with quadratic integrals. *J. Phys. A* ***25:1*** (1992) 197–221.

[955] V.G. Marikhin, V.V. Sokolov. Separation of variables on a non-hyperelliptic curve. *Reg. and Chaot. Dyn.* ***10:1*** (2005) 59–70.

с постоянными c_i, k_i. Отметим, что волчки Клебша и волчок Шоттки-Манакова на $so(4)$ [1222,943,442] являются частными случаями этой модели [955]. Полное решение уравнения Гамильтона-Якоби для неё получено в [955] при помощи разделения переменных на негиперэллиптической кривой рода 4.

2 Универсальное решение уравнения Гамильтона-Якоби

пусть H и K имеют вид (64)–(66) и пусть $p_1 = F_1(x,y)$, $p_2 = F_2(x,y)$ удовлетворяют системе $H = e_1$, $K = e_2$ с постоянными e_i. Здесь и ниже мы обозначаем для краткости $x = s_1$, $y = s_2$. В силу леммы Якоби, если $\{H,\, K\} = 0$ то $F_{1,y} = F_{2,x}$. Чтобы найти действие $\mathsf{S}(x,y,e_1,e_2)$ достаточно решить систему

$$\mathsf{S}_x = F_1, \quad \mathsf{S}_y = F_2.$$

Перепишем систему $H = e_1$, $K = e_2$ в виде

$$p_1^2 + ap_2 + b = 0, \qquad p_2^2 + Ap_1 + B = 0, \tag{70}$$

где

$$a = \frac{Z_x}{x-y}\sqrt{\frac{S_2(y)}{S_1(x)}}, \qquad A = -\frac{Z_y}{x-y}\sqrt{\frac{S_1(x)}{S_2(y)}}, \tag{71}$$

$$b = -\frac{Z_x^2}{4(x-y)^2} + \frac{V_1 - e_1 x + e_2}{S_1(x)}, \qquad B = -\frac{Z_y^2}{4(x-y)^2} + \frac{V_2 - e_1 y + e_2}{S_2(y)}. \tag{72}$$

Легко доказать следующие тождества (последнее получается при помощи (67), (68)):

$$2b_y + Aa_x + 2aA_x = 0, \quad 2Aa_y + aA_y + 2B_x = 0, \tag{73}$$

[1222] F. Schottky. Über das analytische Problem der Rotation eines starren Körpers in Raume von vier Dimensionen. *Sitzungsberichte der Königlich preussischen Academie der Wissenschaften zu Berlin* **XIII** (1891) 227–232.

[943] S.V. Manakov. A remark on integration of the Euler equations for n-dimensional rigid body dynamics. *Funct. Anal. Appl.* ***10*** (1976) 328–329.

[442] A. Clebsch. Über die Bewegung eines Körpers in einer Flüssigkeit. *Math. Annalen* ***3*** (1870) 238–262.

[955] V.G. Marikhin, V.V. Sokolov. Separation of variables on a non-hyperelliptic curve. *Reg. and Chaot. Dyn.* ***10:1*** (2005) 59–70.

$$Ab_x - aB_y + 2A_xb - 2a_yB = 0. \tag{74}$$

Применяя стандартную технику резольвент Лагранжа, перепишем систему (70) в виде

$$uv = \frac{1}{4}aA, \quad Au^3 + \frac{4b}{a}u^2v - \frac{4B}{A}uv^2 - av^3 = 0, \tag{75}$$

что эквивалентно кубическому уравнению на u^2. Пусть (u_k, v_k), $k = 1,2,3$ решения (75), тогда

$$u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = -b, \quad v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 = -B, \quad 8u_1u_2u_3 = -a^2A, \quad 8v_1v_2v_3 = -A^2a,$$

а формулы

$$\begin{array}{ll} p_1 = u_1 + u_2 + u_3, & p_2 = v_1 + v_2 + v_3; \\ p_1 = u_3 - u_1 - u_2, & p_2 = v_3 - v_1 - v_2; \\ p_1 = u_2 - u_1 - u_3, & p_2 = v_2 - v_1 - v_3; \\ p_1 = u_1 - u_2 - u_3, & p_2 = v_1 - v_2 - v_3 \end{array}$$

определяют четыре решения (70). Рассмотрим первое из них.

Лемма 4. *Выполняются уравнения $u_{i,y} = v_{i,x}$ при $i = 1,2,3$.*

Доказательство. Дифференцируя уравнения (75) относительно x и y, находим u_y и v_x как функции от u и v. Затем выражая v через u получаем, что равенство $u_y = v_x$ равносильно тождествам (73), (74). ■

Данная лемма означает, что переменные u_1, u_2, u_3 являются “частными” разделяющими переменными. Действительно, действие принимает в них вид $\mathsf{S} = \mathsf{S}_1 + \mathsf{S}_2 + \mathsf{S}_3$ где функции S_i определяются из уравнений

$$\mathsf{S}_{i,x} = u_i, \quad \mathsf{S}_{i,y} = v_i.$$

Пусть

$$u = \frac{Z_x}{2(x-y)}\sqrt{\frac{y-\xi}{x-\xi}}, \qquad v = -\frac{Z_y}{2(x-y)}\sqrt{\frac{x-\xi}{y-\xi}}.$$

Легко видеть, что пара (u, v) является решением (75) для всех ξ. Если Z решение (67) то $u_y = v_x$. Используя этот факт мы вводим функцию $\sigma(x, y, \xi)$ такую, что $\sigma_x = u$, $\sigma_y = v$. Случаю рациональной функции g соответствует функция Z, выражающаяся через квадратные корни и функцию σ можно найти явно.

Умножение второго уравнения (75) на выражение

$$-2\frac{\sqrt{S_1(x)}\sqrt{S_2(y)}\sqrt{x-\xi}\sqrt{y-\xi}\,(x-y)}{Z_x Z_y}$$

приводит его к виду

$$\Psi(x, y, \xi) = -e_2 + e_1\xi + \frac{y-\xi}{x-y}\Big(V_1 - \frac{S_1(x)Z_x^2}{4(x-\xi)(x-y)}\Big) - \frac{x-\xi}{x-y}\Big(V_2 + \frac{S_2(y)Z_y^2}{4(y-\xi)(x-y)}\Big) = 0.$$

Утверждение 1. *Пусть выполнены условия (67), (68). Тогда функция $\Psi(x, y, \xi)$ зависит лишь от переменных $Y = \sigma_\xi$ и ξ: $\Psi(x, y, \xi) = \phi(\xi, Y)$.*

Доказательство. Рассмотрим якобиан $J = \Psi_x Y_y - \Psi_y Y_x$. Замним Y_y, Y_x на v_ξ, u_ξ соответственно, тогда якобиан J тождественно обратится в ноль в силу (67), (68). Функцию ϕ можно найти, полагая $y = x$. ■

Уравнение $\phi(\xi, Y) = 0$ определяет кривую, а дифференциалы на этой кривой определяют функцию действия S. Пусть $\xi_k(x, y)$, $k = 1, 2, 3$ корни кубического уравнения $\Psi(x, y, \xi) = 0$.

Теорема 4. *Действие S имеет вид*

$$\mathsf{S}(x, y) = \sum_{k=1}^{3}\Big(\sigma(x, y, \xi_k) - \int^{\xi_k} Y(\xi)d\xi\Big), \tag{76}$$

где $Y(\xi)$ алгебраическая функция, определённая уравнением $\phi(\xi, Y) = 0$.

Доказательство. Имеем

$$\mathsf{S}_x(x,y)=\sum_{k=1}^{3}\sigma_x(x,y,\xi_k)+\sum_{k=1}^{3}(\sigma_\xi(x,y,\xi_k)-Y(\xi_k))\xi_{k,x}=\sum_{k=1}^{3}u_k=p_1.$$

Аналогично, $\mathsf{S}_y(x,y)=p_2$. ■

3 Примеры

Перечислим известные на данный момент пары гамильтонианов (64)–(68).

Класс 1. Для моделей из этого класса

$$S_1=S_2=S,\qquad f_1=f_2=f. \tag{77}$$

Теорема 5. *Пусть*

$$g=\frac{\tilde G}{S},\quad \tilde G=G-\frac{\delta}{10}S',\quad f=-\frac{4\tilde G^2}{S}-\frac{4\delta}{3}\tilde G'-\frac{\delta^2}{12}S'',$$

где $S(x)=s_5x^5+s_4x^4+s_3x^3+s_2x^2+s_1x+s_0$, $G(x)=g_3x^3+g_2x^2+g_1x+g_0$ *и* s_i,g_i,δ *постоянные. Тогда функции* S,f *и функция* Z*, отвечающая порождающей функции* g *(см. Раздел) удовлетворяют системам (67), (68).*

Замечание 7. Параметр δ в Теореме 5 совпадает с параметром в (69). В случае $\delta=0$ эта Теорема описывает все пары гамильтонианов (64)–(68), (77).

Рассмотрим общий случай

$$S(x)=s_5(x-\mu_1)(x-\mu_2)(x-\mu_3)(x-\mu_4)(x-\mu_5),$$

где $s_5\neq 0$ и все нули μ_i различны. Тогда функция Z имеет вид

$$Z(x,y)=\sum_{i=1}^{5}\nu_i\sqrt{(\mu_i-x)(\mu_i-y)},\quad nu_i=\mathrm{const}\,. \tag{78}$$

Коэффициенты g_i и δ выражаются через постоянные ν_i через (69). Например, $2\delta = -\sum \nu_i$. Функция f определяется равенством

$$f(x) = -\frac{1}{16}\sum_{i=1}^{5}\nu_i^2\frac{S'(\mu_i)}{x-\mu_i} + k_1 x + k_0,$$

с постоянными k_1, k_0.

Вычисление для функции (78) даёт

$$\sigma(x,y,\xi) = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{5}\nu_i \log\frac{\sqrt{x-\xi}\sqrt{y-\mu_i}+\sqrt{y-\xi}\sqrt{x-\mu_i}}{\sqrt{x-y}\sqrt{\mu_i-\xi}}, \tag{79}$$

$$Y = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{N}\nu_i\frac{\sqrt{(x-\mu_i)(y-\mu_i)}}{(\xi-\mu_i)\sqrt{(x-\xi)(y-\xi)}}.$$

Алгебраическая кривая гиперэллиптическая рода 2: $\phi(Y,\xi) = S(\xi)Y^2 + f(\xi) - \xi e_1 + e_2 = 0$.

Волчок Стеклова на $so(4)$ [1271] является частным случаем Теоремы 5.

Класс 2. Функции Z для моделей из этого класссa являются специальными случаями функций Z из Класса 1. Однако число параметров в этом классе гораздо больше, чем в Теореме 5.

Функции Z определяются, как решения системы

$$Z_{xy} = \frac{Z_x - Z_y}{2(y-x)} = \frac{1}{3}U(Z)Z_x Z_y, \tag{80}$$

где U некоторые функции одной переменной.

Замечание 8. Легко видеть, что данный класс решений уравнения Эйлера-Дарбу $Z_{xy} = \frac{Z_x - Z_y}{2(y-x)}$ совпадает с классом решений вида

$$Z = F\left(\frac{h(x)-h(y)}{x-y}\right),$$

[1271] V.A. Stekloff. Sur le mouvement dún corps solide ayant une cavite de forme ellipsoidale remple par un liquide incompressible en sur les variations des latitudes. *Ann. de la fac. des Sci. de Toulouse, Ser. 3, v. 1* (1909).

где $U = F''/F'^2$.

Лемма 5. *Система ([80]) совместна если и только если*

$$U = \frac{3B'}{2B}, \quad B(Z) = b_2 Z^2 + b_1 Z + b_0, \quad b_i = \mathrm{const}\,.$$

Возможны три случая:

$$\deg B = 2: \quad Z = \sqrt{(x-\mu_1)(y-\mu_1)} + \sqrt{(x-\mu_2)(y-\mu_2)}, \qquad b_2 = 1, \quad b_1 = 0, \quad b_0 = -(\mu_1-\mu_2)^2, \tag{81}$$

$$\deg B = 1: \quad Z = \sqrt{x\,y} + \frac{1}{2}(x+y), \qquad b_1 = 1, \quad b_2 = b_0 = 0, \tag{82}$$

$$\deg B = 0: \quad Z = x + y. \tag{83}$$

1. Рассмотрим функцию Z вида ([81]). Тогда

$$S(x) = (x-\mu_1)(x-\mu_2)P(x) + (x-\mu_1)^{3/2}(x-\mu_2)^{3/2}Q(x), \quad \deg P \le 3, \quad \deg Q \le 2,$$
$$f(x) = f_0 + f_1 x + k_2(x-\mu_1)^{1/2}(x-\mu_2)^{1/2} + \frac{(\mu_2-\mu_1)}{16}\left(\frac{P(\mu_1)}{x-\mu_1} - \frac{P(\mu_2)}{x-\mu_2}\right)$$
$$+\frac{(\mu_2-\mu_1)}{32}(x-\mu_1)^{1/2}(x-\mu_2)^{1/2}\left(\frac{Q(\mu_1)}{x-\mu_1} - \frac{Q(\mu_2)}{x-\mu_2}\right).$$

В случае $Q = 0$, $k_2 = 0$ эти формулы совпадают с соответствующими формулами Класса 1. Функции σ, Y определяются теми же формулами ([79]), что и для Класса 1:

$$\sigma(x,y,\xi) = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2} \log \frac{\sqrt{x-\xi}\sqrt{y-\mu_i} + \sqrt{y-\xi}\sqrt{x-\mu_i}}{\sqrt{x-y}\sqrt{\mu_i-\xi}}, \quad Y = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{2} \frac{\sqrt{(x-\mu_i)(y-\mu_i)}}{(\xi-\mu_i)\sqrt{(x-\xi)(y-\xi)}}.$$

Алгебраическая кривая в этом случае имеет вид

$$(S_R(\xi) + \eta S_I(\xi))Y^2 - k_R(\xi) - \eta k_I(\xi) = 0 \tag{84}$$

где

$$S_R(x) = (x-\mu_1)(x-\mu_2)P(x), \quad S_I(x) = (x-\mu_1)(x-\mu_2)Q(x), \tag{85}$$

$$k_R(x) = -e_2 + e_1 x - f_0 - f_1 x - \frac{(\mu_2-\mu_1)}{16}\Big(\frac{P(\mu_1)}{x-\mu_1} - \frac{P(\mu_2)}{x-\mu_2}\Big), \tag{86}$$

$$k_I(x) = k_2 - \frac{1}{32}(\mu_1-\mu_2)^2 - \frac{1}{16}(\mu_1-\mu_2)\Big(\frac{Q(\mu_1)}{x-\mu_1} - \frac{Q(\mu_2)}{x-\mu_2}\Big), \tag{87}$$

$$\frac{1}{\eta} = \frac{1}{\sqrt{\xi-\mu_1}\sqrt{\xi-\mu_2}}\sqrt{1 - \frac{(\mu_1-\mu_2)^2}{16(\xi-\mu_1)^2(\xi-\mu_2)^2 Y^2}}. \tag{88}$$

Выражая Y как функцию от (ξ,η) и подставляя в (84) мы получаем 10-параметрическую кубику в переменных (ξ,η). Итак, в общем случае кривая $\phi(Y,\xi)=0$ накрывает эллиптическую кривую. Имеем

$$\eta = \frac{\xi-\mu_1}{\frac{\sqrt{x-\mu_1}}{\sqrt{x-\mu_2}} + \frac{\sqrt{y-\mu_1}}{\sqrt{y-\mu_2}}} + \frac{\xi-\mu_2}{\frac{\sqrt{x-\mu_2}}{\sqrt{x-\mu_1}} + \frac{\sqrt{y-\mu_2}}{\sqrt{y-\mu_1}}},$$

следовательно точки $(\xi_1,\eta_1),(\xi_2,\eta_2),(\xi_3,\eta_3)$ коллинеарны.

2. Для функции Z вида (82) имеем

$$S(x) = xP(x) + x^{3/2}Q(x), \qquad \deg P \le 3, \quad \deg Q \le 2,$$

$$f(x) = -\frac{1}{16x}P(x) - \frac{1}{32\sqrt{x}}Q(x) + f_1 x + f_q\sqrt{x} + f_0, \quad Y = \frac{\xi + \sqrt{x}\sqrt{y}}{4\xi\sqrt{x-\xi}\sqrt{y-\xi}}.$$

Кривая в этом случае может быть записана в виде (84) где

$$S_R(x) = xP(x), \quad S_I(x) = xQ(x),$$

$$k_R(x) = -e_2 + e_1 x - f_0 - f_1 x + \frac{1}{16x}P(x), \quad k_I(x) = \frac{1}{16x}Q(x) - f_q, \quad \eta = \frac{4Y\xi^{3/2}}{\sqrt{16Y^2\xi^2-1}}.$$

В переменных (ξ,η) она также является произвольной кубикой. Формула $\eta=\frac{\xi+\sqrt{xy}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$ доказывает, что точки $(\xi_1,\eta_1),(\xi_2,\eta_2),(\xi_3,\eta_3)$ коллинеарны.

3. Для функции Z, заданной (83), имеем

$$S(x)=s_6x^6+s_5x^5+s_4x^4+s_3x^3+s_2x^2+s_1x+s_0,$$
$$f(x)=-\frac{1}{40}S''(x)-\frac{1}{32\sqrt{x}}Q(x)+f_2x^2+f_1x+f_0,\quad Y=\frac{1}{2\sqrt{x-\xi}\sqrt{y-\xi}}.$$

Алгебраическая кривая имеет вид

$$S(\xi)Y^6-F(\xi)Y^4-\Big(\frac{1}{8}F''(\xi)+\frac{7}{1920}S^{IV}(\xi)-\frac{k_2}{2}\Big)Y^2-\frac{s_6}{64}=0,\quad F(\xi)=-e_2+e_1\xi-f(\xi).$$

Это произвольная кубика в переменных (ξ,η), где $\eta=\xi^2-1/(4Y^2)$. Так как $\eta=\xi(x+y)-xy$, то точки $(\xi_1,\eta_1),(\xi_2,\eta_2),(\xi_3,\eta_3)$ коллинеарны.

Класс 3. Будем называть гамильтониан (64)–(68) несимметричным если $S_1(x)\neq S_2(x)$ или $f_1(x)\neq f_2(x)$.

Теорема 6 ([956]). *В несимметричном случае функции Z, S_i, f_i удовлетворяют (67), (68) если и только если*

$$\delta=0,\quad g=\frac{1}{H},\quad S_{1,2}=WH\pm MH^{3/2},\quad f_{1,2}=-\frac{4W}{H}\mp 2MH^{-1/2}\pm aH^{1/2},$$

где g производящая функция для Z и

$$W(x)=w_3x^3+w_2x^2+w_1x+w_0,\quad H(x)=h_2x^2+h_1x+h_0,\quad M(x)=m_2x^2+m_1x+m_0$$

с постоянными w_i,h_i,m_i,a.

---

[956] V.G. Marikhin, V.V. Sokolov. On quasi-Stäckel Hamiltonians. *Russ. Math. Surveys* ***60:5*** (2005) 981–983.

Рассмотрим общий случай $H(x) = (x-\mu_1)(x-\mu_2)$. Алгебраическая кривая $\Psi(\xi, Y) = 0$ имеет вид

$$-e_2+e_1\xi-\frac{RW(\xi)}{2(\xi-\mu_1)(\xi-\mu_2)(\mu_2-\mu_1)}+4M(\xi)\sqrt{2}Y\frac{\sqrt{\xi-\mu_1}\sqrt{\xi-\mu_2}}{(\mu_2-\mu_1)^{3/2}}\sqrt{R}+8b\sqrt{2}Y\frac{(\xi-\mu_1)^{3/2}(\xi-\mu_2)^{3/2}}{\sqrt{R}\sqrt{\mu_2-\mu_1}}=0$$

где

$$Y=\frac{\sqrt{(x-\mu_1)(y-\mu_1)}}{(\xi-\mu_1)\sqrt{(x-\xi)(y-\xi)}}-\frac{\sqrt{(x-\mu_2)(y-\mu_2)}}{(\xi-\mu_2)\sqrt{(x-\xi)(y-\xi)}},\quad R=16(\xi-\mu_1)^2(\xi-\mu_2)^2Y^2-(\mu_1-\mu_2)^2.$$

Подстановляя

$$Y=\frac{(\mu_1-\mu_2)^{3/2}\eta}{4(\xi-\mu_2)(\xi-\mu_1)\sqrt{\eta^2(\mu_2-\mu_1)-8(\xi-\mu_1)(\xi-\mu_2)}}$$

в это уравнение, получаем кубику в переменных (ξ, η) с полным набором из 10 независимых параметров. Легко видеть, что $\eta = a(x, y)\xi + b(x, y)$ с некоторыми функциями a, b.

Подводя итог, мы видим, что во всех случаях из Классов 2, 3 алгебраическая кривая является негиперэллиптическим накрытием эллиптической. Динамика точек $(\xi_1, Y_1), (\xi_2, Y_2), (\xi_3, Y_3)$ на этой кривой (см. Теорему 4) удовлетворяет следующему условию: проекции этих точек на эллиптическую базу $(\xi_1, \eta_1), (\xi_2, \eta_2), (\xi_3, \eta_3)$ лежат на одной прямой.

Гипотеза 2. *Любая пара гамильтонианов (64)–(68) принадлежит к одному из указанных трёх классов.*

Вольтерры цепочка eDΔ

[104, 750, 1448, 942]

$$u_{n,x} = u_n(u_{n+1} - u_{n-1}) \tag{89}$$

Также: модель Лотки-Вольтерры, цепочка Каца-ван Мёрбеке, Ленгмюровская цепочка.

Бигамильтонова структура [59,543,1381]: $u_{n,x} = \{u_n, H^{(k)}\}_k$,

$$\{u_n, u_{n+1}\}_1 = u_n u_{n+1}, \quad H^{(1)} = \sum u_n$$

$$\{u_n, u_{n+1}\}_2 = u_n u_{n+1}(u_n + u_{n+1}), \quad \{u_n, u_{n+2}\}_2 = u_n u_{n+1} u_{n+2}, \quad H^{(2)} = \frac{1}{2}\sum \log u_n$$

Преобразование Бэклунда : $u_n = (f_n + \delta)(f_{n+1} - \delta), \quad \tilde{u}_n = (f_{n+1} + \delta)(f_n - \delta).$

Переменная f удовлетворяет модифицированной цепочке Вольтерры $f_{n,x} = (f_n^2 - \delta^2)(f_{n+1} - f_{n-1})$.

Представление нулевой кривизны :

$$U_n = \begin{pmatrix} u_n & -\lambda u_n \\ -\lambda & \lambda^2 + u_{n-1} \end{pmatrix}, \quad L_n = \begin{pmatrix} \lambda & u_n \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_n = \begin{pmatrix} -\dfrac{\lambda}{2\delta} & f_n + \delta \\ \dfrac{1}{f_n - \delta} & -\dfrac{\lambda}{f_n - \delta} - \dfrac{\lambda}{2\delta} \end{pmatrix}$$

Цепочка [884]

$$p_{n,x} = p_n(s_{n+1} - s_{n-1}), \quad -s_{n,x} = s_n(p_{n+1} - p_{n-1})$$

[59] B.A. Kupershmidt. Discrete Lax equations and differential-difference calculus. Paris: Asterisque, 1985.

[543] L.D. Faddeev, L.A. Takhtajan. Liouville model on the lattice. *Lect. Notes Phys.* ***246*** (1986) 166–179.

[1381] A.Yu. Volkov. Hamiltonian interpretation of the Volterra model. *J. Sov. Math.* ***46*** (1986) 1576–1581.

[884] S.B. Leble, M.A. Salle. Darboux transformation for the discrete analog of the Silin-Tikhonchuk equations. *Dokl. Akad. Nauk SSSR* ***284:1*** (1985) 110–114.

распадается на две не связанные друг с другом копии цепочки Вольтерры (89) и $\tilde u_{n,x} = \tilde u_n(\tilde u_{n+1} - \tilde u_{n-1})$ при замене $u_{2n} = -p_{2n}$, $u_{2n+1} = s_{2n+1}$, $\tilde u_{2n} = s_{2n}$, $\tilde u_{2n+1} = -p_{2n+1}$.

Многополевые обобщения:

1) пусть A ассоциативная алгебра с единицей, тогда цепочка [1190]

$$u_{n,x} = u_{n+1}u_n - u_n u_{n-1}, \quad u_n \in A$$

обладает представлением нулевой кривизны с матрицами U_n, W_n того же вида, что и в скалярном случае. Простейшая высшая симметрия имеет вид

$$u_{n,t} = u_{n+2}u_{n+1}u_n + u_{n+1}^2 u_n + u_{n+1}u_n^2 - u_n^2 u_{n-1} - u_n u_{n-1}^2 - u_n u_{n-1} u_{n-2}.$$

2) Цепочка Суриса [1292,96]:

$$u^{(j)}_{n,x} = u^{(j)}_n\Bigl(\sum_{k=1}^{j-1}(u^{(k)}_{n+1} - u^{(k)}_n) - \sum_{k=j+1}^{m}(u^{(k)}_n - u^{(k)}_{n-1})\Bigr), \quad j = 1,\dots,m$$

[1190] M.A. Salle. Darboux transformations for nonabelian and nonlocal equations of the Toda lattice type. *Theor. Math. Phys.* ***53:2*** (1982) 227–237.

[1292] Yu.B. Suris. Nonlocal quadratic Poisson algebras, monodromy map, and Bogoyavlensky lattices. *J. Math. Phys.* ***38*** (1997) 4179–4201.

[96] Yu.B. Suris. The problem of integrable discretization: Hamiltonian approach. Basel: Birkhäuser, 2003.

Вольтерры цепочка модифицированная eDΔ

[444]

$$u_{n,x} = (1 - u_n^2)(u_{n+1} - u_{n-1})$$

Также: дискретное уравнение мКдФ .

Вольтерры цепочка двумеризованная eDDΔ

Версия из [987,988]:

$$u_t = u(u_{-1}^2 - u_1^2) \pm w_y, \quad (uu_{-1})_y = uw_{-1} - u_{-1}w$$

Версия из [1247,558]:

$$u_x = u(v - v_1), \quad v_y = v(u - u_{-1})$$

[987] A.V. Mikhailov. Integrability of a two-dimensional generalisation of the Toda chain. *Sov. Phys. JETP Lett* ***30*** (1979) 414–418.

[988] A.V. Mikhailov. The reduction problem and the inverse scattering method. *Physica D* ***3:1–2*** (1981) 73–117.

[1247] A.B. Shabat, R.I. Yamilov. To a transformation theory of two-dimensional integrable systems. *Phys. Lett. A* ***227:1–2*** (1997) 15–23.

[558] E.V. Ferapontov. Laplace transformations of hydrodynamic-type systems in Riemann invariants: Periodic sequences. *J. Phys. A* ***30:19*** (1997) 6861–6878.

Вольтерры цепочки, классификация

Теорема 7 (Ямилов[1420]).

$$u_{n,x} = P(u_n)(u_{n+1} - u_{n-1}) \tag{90}$$

$$u_{n,x} = P(u_n^2)\left(\frac{1}{u_{n+1} + u_n} - \frac{1}{u_n + u_{n-1}}\right) \tag{91}$$

$$u_{n,x} = Q(u_n)\left(\frac{1}{u_{n+1} - u_n} + \frac{1}{u_n - u_{n-1}}\right) \tag{92}$$

$$u_{n,x} = \frac{H(u_{n+1}, u_n, u_{n-1}) + \nu(H(u_{n+1}, u_n, u_{n+1}))^{1/2}(H(u_{n-1}, u_n, u_{n-1}))^{1/2}}{u_{n+1} - u_{n-1}} \tag{93}$$

$$u_{n,x} = f(u_{n+1} - u_n) + f(u_n - u_{n-1}), \quad f' = P(f) \tag{94}$$

$$u_{n,x} = f(u_{n+1} - u_n)f(u_n - u_{n-1}) + \mu, \quad f' = P(f)/f \tag{95}$$

$$u_{n,x} = (f(u_{n+1} - u_n) + f(u_n - u_{n-1}))^{-1} + \mu, \quad f' = P(f^2) \tag{96}$$

$$u_{n,x} = (f(u_{n+1} + u_n) - f(u_n + u_{n-1}))^{-1}, \quad f' = Q(f) \tag{97}$$

$$u_{n,x} = \frac{f(u_{n+1} + u_n) - f(u_n + u_{n-1})}{f(u_{n+1} + u_n) + f(u_n + u_{n-1})}, \quad f' = P(f^2)/f \tag{98}$$

$$u_{n,x} = \frac{f(u_{n+1} + u_n) + f(u_n + u_{n-1})}{f(u_{n+1} + u_n) - f(u_n + u_{n-1})}, \quad f' = Q(f)/f \tag{99}$$

$$u_{n,x} = \frac{(1 - f(u_{n+1} - u_n))(1 - f(u_n - u_{n-1}))}{f(u_{n+1} - u_n) + f(u_n - u_{n-1})} + \mu, \quad f' = \frac{P(f^2)}{1 - f^2} \tag{100}$$

где $\nu \in \{-1, 0, 1\}$, $P''' = Q^V = 0$,

$$H(z_1, z_2, z_3) = (\alpha z_2^2 + 2\beta z_2 + \gamma)z_1 z_3 + (\beta z_2^2 + \lambda z_2 + \delta)(z_1 + z_3) + \gamma z_2^2 + 2\delta z_2 + \varepsilon.$$

[1420] R.I. Yamilov. On classification of discrete evolution equations. *Usp. Mat. Nauk* ***38:6*** (1983) 155–156.

Вронскиан

[458, 1081]

Широкие классы явных решений интегрируемых уравнений, включающие рациональные, много-солитонные, много-кинковые и др., допускают компактное представление в терминах определителей. Каждый элемент такого определителя является простым выражением, которое строится, тем или иным образом, по линейной волне, а размер определителя зависит от числа полюсов рационального решения или числа солитонов. Имеется несколько типов таких формул, связанных с определителями или пфаффианами типа Вронского, Грама или Казорати (напомним, что пфаффиан косо-симметрической матрицы A чётного порядка удовлетворяет соотношению $\mathrm{Pf}(A)^2 = \det(A)$).

Примеры:

Высшая симметрия

[1259, 82] Автор: А.Б. Шабат, 20.04.2007

Согласно теореме Бэклунда не существует групп преобразований, зависящих от производных старших порядков. Тем не менее, очень естественное и содержательное обобщение существует в инфинитезимальном варианте.

В самом общем смысле, симметрией дифференциального (или разностного) уравнения является любое другое совместное с ним уравнение. Рассмотрим простейший случай эволюционных уравнений с одной пространственной переменной

$$u_t = F(x, u, u_1, \dots, u_n), \tag{101}$$

где u_k обозначает производную k-го порядка по x. Говорят, что другое такое уравнение

$$u_T = G(x, u, u_1, \dots, u_m)$$

является обобщённой или высшей симметрией (101), если совпадают перекрёстные производные: $u_{tT} = u_{Tt}$, или $D_T(F) = D_t(G)$.

Чтобы сделать определение строгим, следует формализовать определение производных по x, t и T. Будем считать $x, u, u_1, \dots$ независимыми ***динамическими переменными*** (такой подход традиционен для дифференциальной алгебры, см. напр. [1164], где u_k называются *дифференциальными неопределёнными*). При этом дифференцирование по x заменяется ***оператором полной производной***

$$D_x = \partial_x + u_1\partial_u + \dots + u_{k+1}\partial_{u_k} + \dots,$$
$$D_x : \quad x \to 1, \quad u \to u_1 \to \dots \to u_k \to u_{k+1} \to \dots\ .$$

Пусть $\mathcal{F}$ обозначает множество всех локально гладких функций от конечного числа динамических переменных. Любая такая функция дифференцируется по t в силу уравнения (101) согласно цепному правилу:

$$D_t(G) = G_u F + G_{u_1} D_x(F) + \dots + G_{u_m} D_x^m(F).$$

[1164] J.F. Ritt. Differential Algebra. *AMS Colloquim Publ.* ***33***, 1948.

Результат удобно записать в виде

$$D_t(G) = \nabla_F(G) = G_*(F)$$

при помощи векторного поля, называемого ***эволюционной производной***

$$\nabla_F := F\partial_u + D_x(F)\partial_{u_1} + \dots + D_x^k(F)\partial_{u_k} + \dots \tag{102}$$

и дифференциального оператора, называемого ***производной Фреше*** или ***производной Гато*** или ***оператором линеаризации***

$$G_* := G_u + G_{u_1}D_x + \dots + G_{u_m}D_x^m, \qquad G_*(v) = \left(\frac{d}{d\varepsilon}G[u+\varepsilon v]\right)\Big|_{\varepsilon=0}. \tag{103}$$

Определение 1. Эволюционное уравнение $u_T = G(x, u, u_1, \dots, u_m)$ называется ***симметрией*** уравнения (101), если соответствующие эволюционные производные коммутируют: $[\nabla_F, \nabla_G] = 0$. Множество всех G, удовлетворяющих этому соотношению, обозначается $\mathrm{Sym}(F)$.

Кроме коммутатора векторных полей, мы будем использовать квадратные скобки для обозначения коммутатора дифференциальных операторов, а также для операции

$$[F, G] := \nabla_F(G) - \nabla_G(F) = G_*(F) - F_*(G), \qquad F, G \in \mathcal{F}. \tag{104}$$

Это не приводит к недоразумениям, так как смысл обозначения всегда ясен из типа операндов.

Очевидно, и ∇_F и F_* линейны относительно F. Другие важные свойства введённых операций перечислены ниже.

Утверждение 2. *Выполняются тождества:*

1) $[D_x, \nabla_F] = 0;$
2) $[\nabla_F, \nabla_G] = \nabla_{[F,G]};$
3) $[F, [G, H]] + [G, [H, F]] + [H, [F, G]] = 0;$
4) $(FG)_* = FG_* + GF_*;$
5) $(D_x(F))_* = D_xF_*;$
6) $[\nabla_F - F_*, \nabla_G - G_*] = \nabla_{[F,G]} - [F, G]_*.$

Доказательство. 1,2) Достаточно применить коммутатор к динамическим переменным $x, u = u_0, u_1, \dots$ Имеем:

$$
\begin{aligned}
&1)\quad [D_x,\nabla_F](x)=0,\quad [D_x,\nabla_F](u_k)=D_x(D_x^k(F))-\nabla_F(u_{k+1})=0 \quad\Rightarrow\quad [D_x,\nabla_F]=0;\\
&2)\quad [\nabla_F,\nabla_G](x)=0,\quad [\nabla_F,\nabla_G](u_k)=\nabla_F(D_x^k(G))-\nabla_G(D_x^k(F))\\
&\qquad\overset{1)}{=} D_x^k(\nabla_F(G)-\nabla_G(F))=D_x^k([F,G]) \quad\Rightarrow\quad [\nabla_F,\nabla_G]=\nabla_{[F,G]}.
\end{aligned}
$$

Тождество 3) следует из 2) и тождества Якоби для векторных полей. Тождество 4) очевидно, 5) требует некоторых вычислений:

$$
(D_x(F))_*=\Big(\sum_k F_{u_k}u_{k+1}\Big)_*=\sum_k F_{u_k}D_x^{k+1}+\sum_{j,k}u_{k+1}F_{u_k,u_j}D_x^j=D_x\sum_k F_{u_k}D_x^k=D_xF_*.
$$

Чтобы доказать 6), сначала докажем соотношение $(\nabla_F(G))_*=[\nabla_F,G_*]+G_*F_*$:

$$
\begin{aligned}
(\nabla_F(G))_*&=\Big(\sum_k G_{u_k}D_x^k(F)\Big)_*=\sum_k\Big(G_{u_k}D_x^kF_*+D_x^k(F)\sum_j G_{u_k,u_j}D_x^j\Big)\\
&=G_*F_*+\sum_{j,k}D_x^k(F)G_{u_k,u_j}D_x^j=G_*F_*+\sum_j\nabla_F(G_{u_j})D_x^j=G_*F_*+[\nabla_F,G_*].
\end{aligned}
$$

Теперь 6) следует отсюда и 2):

$$
\begin{aligned}
[\nabla_F-F_*,\nabla_G-G_*]&=[\nabla_F,\nabla_G]-[\nabla_F,G_*]-G_*F_*+[\nabla_G,F_*]+F_*G_*\\
&=\nabla_{[F,G]}-(\nabla_F(G))_*+(\nabla_G(F))_*=\nabla_{[F,G]}+\{F,G\}_*.
\end{aligned}
$$
■

Из доказанных тождеств следует, в частности, что симметрии можно эквивалентно определить уравнениями

$$
[\nabla_F,\nabla_G]=0\quad\Leftrightarrow\quad[F,G]=0\quad\Leftrightarrow\quad(\nabla_F-F_*)(G)=0\quad\Leftrightarrow\quad[\nabla_F-F_*,\nabla_G-G_*]=0. \tag{105}
$$

Последняя формула особенно важна при выводе необходимых условий интегрируемости (см. симметрийный подход).

Кроме того, из тождества Якоби 3) следует, что пространство $\mathcal{F}$, оснащённое операцией $[,]$ является алгеброй Ли, причём множество симметрий $\mathrm{Sym}(F)$ является его подалгеброй Ли. ***Интегрируемые уравнения*** определяются как уравнения, у которых алгебра Ли симметрий бесконечномерна. Структура этой алгебры Ли может быть различной. Для линеаризуемых уравнений она содержит бесконечномерную подалгебру классических симметрий. Для уравнений типа КдФ типична ситуация, когда классические симметрии образуют конечномерную некоммутативную подалгебру Ли, а высшие симметри бесконечномерную коммутативную подалгебру Ли (называемую “иерархией”).

Гамильтонова структура

1. Конечномерные динамические системы

Определение 2. Пусть $\mathcal{F}(M)$ обозначает алгебру гладких вещественнозначных функций на конечномерном многообразии M. Операция $\{\cdot,\cdot\}:\mathcal{F}(M)\times\mathcal{F}(M)\to\mathcal{F}(M)$ называется ***скобкой Пуассона*** если выполняются следующие свойства:

билинейность	$\{\alpha F+\beta G,H\}=\alpha\{F,H\}+\beta\{G,H\}$,
кососимметричность	$\{F,G\}=-\{G,F\}$,
тождество Якоби	$\{F,\{G,H\}\}+\{G,\{H,F\}\}+\{H,\{F,G\}\}=0$,
правило Лейбница	$\{F,GH\}=\{F,G\}H+\{F,H\}G$

для любых функций $F,G,H\in\mathcal{F}(M)$ и постоянных α,β. Многообразие M снабжённое такой операцией называется ***пуассоновым многообразием***.

В силу правила Лейбница, пуассонова структура в локальных координатах $u_1,\dots,u_d$ на M определяется формулой

$$\{F,G\}=\sum_{m,n=1}^{d}J_{m,n}F_{u_m}G_{u_n}=\langle\operatorname{grad}F,J\operatorname{grad}G\rangle,\quad J_{m,n}=\{u_m,u_n\}.$$

В терминах ***структурной матрицы*** J, свойство кососимметричности и тождество Якоби принимают вид

$$J_{m,n}=-J_{n,m},\quad \partial_{u_s}(J_{m,n})J_{s,k}+\partial_{u_s}(J_{k,m})J_{s,n}+\partial_{u_s}(J_{n,n})J_{s,m}=0.$$

Рангом пуассоновой структуры в точке u называется ранг матрицы $J(u)$. В частности, пуассонова структура невырождена, если J имеет ранг d. В силу свойства кососимметричности, пуассоновы структуры на нечётномерном многоообразии всегда вырождены. Пуассонова структура ранга r обладает $d - r$ независимыми ***функциями Казимира*** C_i, то есть функциями, для которых скобка Пуассона тождественно равна нулю: $\{C_i, F\} = 0$, $\forall F$.

Пример 2. 1) Каноническая ***скобка Дарбу***: локальные координаты $(q_1, \ldots, q_d, p_1, \ldots, p_d)$,

$$\{q_m, q_n\} = \{p_m, p_n\} = 0, \quad \{q_m, p_n\} = \delta_{m,n}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}.$$

Скобка Дарбу невырождена.

2) ***скобка Ли-Пуассона*** определяется на двойственном пространстве к алгебре Ли L:

$$\{F, G\}(u) = \langle [\operatorname{grad} F(u), \operatorname{grad} G(u)], u \rangle, \quad u \in L^*.$$

В случае, если $L = L^*$ и $\langle u, v \rangle = \operatorname{tr} \operatorname{ad} u \operatorname{ad} v$ форма Киллинга, функциями Казимира являются коэффициенты характеристического многочлена $\det(\operatorname{ad} u - \lambda \operatorname{id})$.

Определение 3. ОДУ на многообразии M называется гамильтоновым, если оно может быть представлено в виде

$$\dot{u} = \{u, H(u)\}$$

где u локальные координаты на M. Функция H называется ***гамильтонианом***.

2. Дифференциально-разностные уравнения (цепочки)

3. Эволюционные уравнения в частных производных

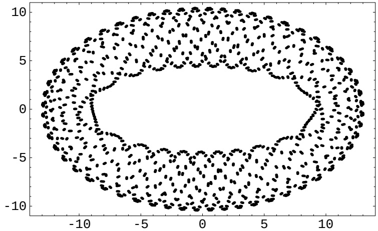
Гарнье система D

$$u'' = \langle u, v\rangle u + Ju, \quad v'' = \langle u, v\rangle v + Jv, \quad u, v \in \mathbb{R}^d, \quad J = \mathrm{diag}(J_1, \ldots, J_d)$$

Гарнье система дискретная Δ

$$\langle u_{n+1}, u_n\rangle u_{n+1} + \langle u_n, u_n\rangle u_n + \langle u_n, u_{n-1}\rangle u_{n-1} = Ju_n, \quad u_n \in \mathbb{R}^d, \quad J = \mathrm{diag}(J_1, \ldots, J_d)$$

Ragnisco



Герджикова-Иванова уравнение eDD

[622, 849, 549]

$$iu_t = u_{xx} - iu^2\bar{u}_x + \frac{1}{2}u^3\bar{u}^2$$

Также: НУШП-III

Гиперболические уравнения и системы

Задача классификации некоторых частных типов интегрируемых гипреболических уравнений рассматривалась в [1460,1461,1462].

Уравнения типа Лиувилля, синус-Гордона типа уравнения

[1460] A.V. Zhiber, N.H. Ibragimov, A.B. Shabat. Liouville type equations. *DAN SSSR* ***249:1*** (1979) 26–29.

[1461] A.V. Zhiber, A.B. Shabat. Nonlinear Klein-Gordon equations with nontrivial group. *Dokl. Akad. Nauk SSSR* ***247:5*** (1979) 1103–1107.

[1462] A.V. Zhiber, A.B. Shabat. The systems $u_x = p(u,v)$, $v_y = q(u,v)$ possessing symmetries. *Dokl. Akad. Nauk SSSR* ***277:1*** (1984) 29–33.

Главных киральных полей уравнение hDD

$$2u_{xy} = u_x u^{-1} u_y + u_y u^{-1} u_x, \quad u \in G$$

где G группа Ли. Эквивалентно,

$$(u^{-1}u_x)_y + (u^{-1}u_y)_x = 0.$$

Представление нулевой кривизны

$$U = \frac{u_x u^{-1}}{1-\lambda}, \quad V = \frac{u_y u^{-1}}{1+\lambda}$$

Дарбу преобразование

Рассмотрим ***спектральную задачу Штурма-Лиувилля***

$$\psi_{xx} = (u(x) - \lambda)\psi. \tag{106}$$

Утверждение 3 (***Преобразование Дарбу***[459]). *Уравнение (106) сохраняет вид при преобразовании*

$$\hat{\psi} = \psi_x - f\psi, \quad \hat{u} = u - 2f_x, \quad f := \psi_x^{(\alpha)}/\psi^{(\alpha)} \tag{107}$$

где $\psi^{(\alpha)}$ частное решение (106) при $\lambda = \alpha$.

Функция f удовлетворяет уравнениям Риккати

$$f_x + f^2 = u - \alpha, \quad -f_x + f^2 = \hat{u} - \alpha.$$

Итерации преобразования Дарбу приводят к последовательности операторов $L_n = -D_x^2 + u_n$, $A_n = -D_x + f_n$ связанных уравнениями

$$L_n = A_n^+ A_n + \alpha_n \quad \to \quad L_{n+1} = A_n A_n^+ + \beta_n = A_{n+1}^+ A_{n+1} + \alpha_{n+1}$$

и описываемой одевающей цепочкой

$$u_n = f_{n,x} + f_n^2 + \alpha_n, \quad f_{n,x} + f_{n+1,x} = f_n^2 - f_{n+1}^2 + \alpha_n - \alpha_{n+1}.$$

Любое решение этого дифференциально-разностного уравнения порождает семейство операторов L_n с ψ-функциями, вычисляемыми при всех $\lambda = \beta_k$ по явным формулам

$$\psi_{k,k} = \exp(\int f_k dx), \quad \psi_{n,k} = A_n^+ \psi_{n+1,k}, \quad n < k. \tag{108}$$

Это свойство объясняет роль преобразования Дарбу в квантовой механике, см. метод факторизации.

Преобразование Дарбу допускает непосредственное обобщение для линейных задач любого порядка и в любой размерности. Упомянем лишь несколько наиболее типичных примеров. В частности, приведённое выше преобразование легко получается при разделении переменных из следующего преобразования.

---

[459] G. Darboux. *Compt. Rend.* ***94*** 1456–1459.

Утверждение 4. *Двумерное уравнение Шрёдингера*

$$\sigma\psi_y = \psi_{xx} - u(x,y)\psi \tag{109}$$

сохраняет вид при преобразовании

$$\hat\psi = \psi_x - f\psi, \quad \hat u = u - 2f_x, \quad f := \phi_x/\phi \tag{110}$$

где ϕ любое частное решение (109).

Доказательство. Обозначим $g = \phi_y/\phi$, тогда $g_x = f_y$, $\sigma g = f_x + f^2 - u$ и

$$L = \sigma D_y - D_x^2 + u = \sigma(D_y - g) - (D_x + f)(D_x - f), \quad [D_y - g, D_x - f].$$

Следовательно, $\hat\psi$ удовлетворяет уравнению $\hat L\hat\psi = 0$, где $\hat L = \sigma(D_y - g) - (D_x - f)(D_x + f) = L - 2f_x$. ■

Итерации преобразования (110) описываются двумеризованной одевающей цепочкой

$$f_{n,x} + f_{n+1,x} = f_n^2 - f_{n+1}^2 - \sigma(g_n - g_{n+1}), \quad g_{n,x} = f_{n,y}.$$

Дарбу система hDDD

[25, 1445]

$$u^{ij}_{x_k} = u^{ik} u^{kj}, \quad i \neq j \neq k \neq i$$

Также: Дарбу-Захарова-Манакова система

Является условием совместности линейных уравнений

$$\psi^i_{x_j} = u^{ij} \psi^j, \quad i \neq j.$$

Потоки D_{x_k}, D_{x_m} коммутируют: $u^{i,j}_{x_k,x_m} = u^{i,j}_{x_m,x_k}$.

Дарбу система дискретная h$\Delta\Delta\Delta$

[322]

$$u^{ij}_k = (u^{ij} + u^{ik}u^{kj})(I - u^{jk}u^{kj})^{-1}, \quad u^{ij} \in \mathrm{Mat}(N,N), \quad i \neq j \neq k \neq i$$

Также: дискретная система Дарбу-Захарова-Манакова

Является условием совместности линейных уравнений

$$\psi^i_j = \psi^i - u^{ij}\psi^j, \quad i \neq j.$$

Удовлетворяет свойству 4D-совместности $u^{i,j}_{k,m} = u^{i,j}_{m,k}$.

Дегаспериса-Прокеси уравнение DD

[465]

$$u_t - u_{xxt} = uu_{xxx} + 3u_x u_{xx} - 4uu_x \tag{111}$$

В [466] показано, что уравнение вида

$$u_t - u_{xxt} = uu_{xxx} + bu_x u_{xx} - (b+1)uu_x$$

интегрируемо только при $b = 2$ (уравнение Камассы-Холма) или $b = 3$ (111). Хотя эти случаи выглядят очень похоже, соответствующие линейные задачи совершенно различны: уравнение Камассы-Холма связано с Шрёдингеровской спектральной задачей 2-го порядка, тогда как (111) отвечает спектральной задаче Каупа-Купершмидта 3-го порядка.

[466] A. Degasperis, A.N.W. Hone, D.D. Holm. A new integrable equation with peakon solutions. *Theor. Math. Phys.* ***133:2*** (2002)1463-1474.

Дима уравнение eDD

$$u_t = u^3 u_{xxx}$$

или $v_t = (v^{-1/2})_{xxx}$ где $u = -2^{-1/3} v^{-1/2}$.

Уравнение связано с уравнением Шварца-КдФ композицией введения потенциала и преобразования годографа:

$$u_t = u^3 u_{xxx} \quad \Leftarrow \quad y_x = \frac{1}{u}, \quad y_t = \frac{1}{2} u_x^2 - u u_{xx} \quad \Rightarrow \quad y_t = \frac{y_{xxx}}{y_x^3} - \frac{3 y_{xx}^2}{2 y_x^4} \quad \Leftrightarrow \quad x_t = x_{yyy} - \frac{3 x_{yy}^2}{2 x_y}$$

Дискретная дифференциальная геометрия

В этом разделе мы обсудим некоторые понятия, впервые открытые в рамках дифференциальной геометрии в начале 20-го века [14,25,26,36,37]. Они включают множество специальных классов поверхностей и координатных систем, таких как минимальные поверхности, поверхности постоянной средней кривизны, изотермические поверхности, ортогональные и сопряжённые координатные системы и т.д., а также преобразования этих объектов.

Понимание классических результатов с точки зрения современной теории интегрируемости стало возможным, в частности, благодаря прогрессу в построении их дискретных аналогов. Объектами дискретной дифференциальной геометрии являются дискретные сети, то есть, отображения из $\mathbb{Z}^M$ в $\mathbb{R}^d$ (или иное подходящее пространство), определяемые некими геометрическими свойствами. Их изучение было начато в [89,1418]. Ближе к нашему времени, было сделано ключевое наблюдение, что дискретизация может быть определена в терминах преобразований типа Бэклунда-Дарбу и их свойства перестановочности Бьянки для непрерывных объектов. С другой стороны, непрерывные объекты воспроизводятся из дискретных в подходящем пределе. Во многих отношениях, дискретная картина оказывается более прозрачной и фундаментальной, чем непрерывная, поскольку преобразования дискретных поверхностей описываются теми же уравнениями, что и сами поверхности. Эта схема была реализована в разнообразных постановках в статьях [308,309,501,436], см. также обзоры [317,318] для

---

[14] L. Bianchi. Lezioni di geometria differenziale. 3 ed., Pisa: Enrico Spoerri, 1923.

[25] G. Darboux. Leçons sur les systémes orthogonaux et les coordonneés curvilignes. 2 ed., Paris: Gauthier-Villars, 1910.

[26] G. Darboux. Leçons sur la théorie générale des surfaces et les applications géométriques du calcul infinitésimal. T. I-IV. 3 ed., Paris: Gauthier-Villars, 1914-1927.

[36] L.P. Eisenhart. A treatise on the differential geometry of curves and surfaces. Boston: Ginn, 1909.

[37] L.P. Eisenhart. Transformations of surfaces. Princeton University Press, 1923.

[89] R. Sauer. Differenzengeometrie. Berlin: Springer-Verlag, 1970.

[1418] W. Wunderlich. Zur Differenzengeometrie der Flächen konstanter negativer Krümmung. *Österreich. Akad. Wiss. Math.-Nat. Kl.* ***160*** (1951) 39–77.

[308] A.I. Bobenko, U. Pinkall. Discrete surfaces with constant negative Gaussian curvature and the Hirota equation. *J. Differential Geom.* ***43:3*** (1996) 527–611.

[309] A.I. Bobenko, U. Pinkall. Discrete isothermic surfaces. *J. Reine Angew. Math.* ***475*** (1996) 187–208.

[501] A. Doliwa, P.M. Santini. Multidimensional quadrilateral lattices are integrable. *Phys. Lett. A* ***233:4–6*** (1997) 365–372.

[436] J. Cieśliński, A. Doliwa, P.M. Santini. The integrable discrete analogues of orthogonal coordinate systems are

дальнейших деталей и ссылок.

multidimensional circular lattices. *Phys. Lett. A* ***235:5*** (1997) 480–488.

[317] A.I. Bobenko, Yu.B. Suris. Discrete differential geometry. Consistency as integrability. math.DG/0504358v1

[318] A.I. Bobenko, Yu.B. Suris. On organizing principles of discrete differential geometry. Geometry of spheres. math.DG/0608291v2

Дискретные уравнения

В простейшей ситуации мы рассматриваем уравнения, определённые на решётке $\mathbb{Z}^2$. Quad-уравнениями называются уравнения вида

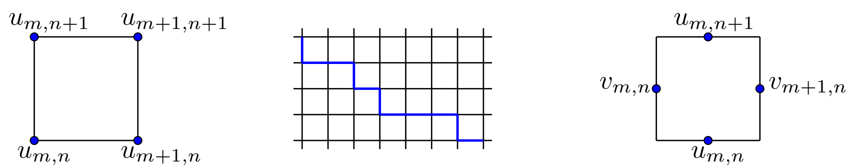
$$Q_{m,n}(u_{m,n}, u_{m+1,n}, u_{m,n+1}, u_{m+1,n+1}) = 0. \tag{112}$$

Уравнения u ассоциируются с вершинами квадратной решётки. Уравнение должно быть разрешимо относительно любой их четырёх неизвестных.

Другим типом уравнений являются отображения Янга-Бакстера

$$u_{m,n+1} = f_{m,n}(u_{m,n}, v_{m,n}), \quad v_{m+1,n} = g_{m,n}(u_{m,n}, v_{m,n}). \tag{113}$$

Переменные u, v ассоциируются с рёбрами квадратной решётки. Для обоих типов уравнений начальные данные выбираются в простейшем случае вдоль координатных осей или на “лесенке”.



Дискретной системой типа Тоды на планарном графе G называется набор уравнений вида

$$\sum_{j:(i,j)\in E_G} f_{i,j}(u_i,u_j)=0, \quad i\in V_G$$

где V_G, E_G обозначают, соответственно, множества вершин и рёбер графа G. В частности, для случаев квадаратной и треугольной решёток получаем следующие типы уравнений.

Дискретные цепочки типа Тоды — уравнения вида

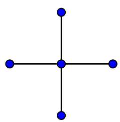
$$f^1_{m,n}(u_{m,n},u_{m-1,n})+f^2_{m,n}(u_{m,n},u_{m+1,n})+f^3_{m,n}(u_{m,n},u_{m,n-1})+f^4_{m,n}(u_{m,n},u_{m,n+1})=0.$$

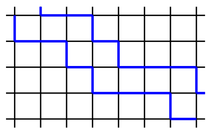
Простейший выбор начальных данных вдоль прямых $n=0$, $n=1$.

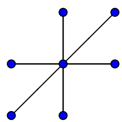
Дискретные релятивистские цепочки типа Тоды:

$$\begin{aligned}f^1_{m,n}(u_{m,n},u_{m-1,n})+f^2_{m,n}(u_{m,n},u_{m+1,n})+f^3_{m,n}(u_{m,n},u_{m,n-1})+f^4_{m,n}(u_{m,n},u_{m,n+1})\\ +f^5_{m,n}(u_{m,n},u_{m-1,n-1})+f^6_{m,n}(u_{m,n},u_{m+1,n+1})=0.\end{aligned}$$

Простейший выбор начальных данных вдоль двойной лесенки.







Дисперсия и диссипация

[105, 30]

Дисперсией называется явление разрушения волнового пакета вследствие того, что скорость распространения волны зависит от волнового вектора. ***Диссипацией*** называется затухание амплитуды волны при $t \to \infty$. Оба эффекта объясняются в рамках линейной теории волн, но играют огромное значение и для волн нелинейной природы.

Любое линейное уравнение в частных производных с постоянными коэффициентами $L[u(t,x)] = 0$ обладает решениями в виде плоских гармонических волн $u(t,x) = \exp(i(\langle k, x\rangle - \omega t))$, причём частота ω и волновой вектор k связаны вполне определённым алгебраическим уравнением $\Lambda(\omega, k) = 0$, которое называется ***дисперсионным соотношением***. Например, прямой подстановкой находим:

волновое уравнение	$u_{tt} = \Delta u$	$\mapsto$	$\omega^2 = \langle k, k\rangle,$
уравнение Клейна-Гордона	$u_{tt} = \Delta u - cu$	$\mapsto$	$\omega^2 = \langle k, k\rangle + c,$
уравнение теплопроводности	$u_t = \Delta u$	$\mapsto$	$\omega = -i\langle k, k\rangle,$
уравнение Шрёдингера	$iu_t = \Delta u$	$\mapsto$	$\omega = -\langle k, k\rangle.$

Гиперплоскость $\langle k, x\rangle = \omega t + \mathrm{const}$ называется поверхностью постоянной фазы, её смещение вдоль единичного вектора нормали $k/|k|$ происходит с ***фазовой скоростью*** $v_p = \omega/|k|$. Зависимость частоты от волнового вектора характеризует ***групповая скорость*** $v_g = \nabla_k(\omega)$. Если $v_g \neq \mathrm{const}$, то разные моды распространяются с разной скоростью, что и приводит к явлению дисперсии.

Диссипация имеет место, если частота имеет отрицательную мнимую часть: $\omega = \omega_R + i\omega_I$, $\omega_I < 0$, при этом волны экспоненциально затухают. Наоборот, закон дисперсии с $\omega_I > 0$ приводит к экспоненциальному росту и неустойчивости волн.

Диспергирующих волн на воде система eDD

[858]

$$u_t = (u_{xx} - 3vu_x + 3uv^2 - 3u^2)_x, \quad v_t = (v_{xx} + 3vv_x + v^3 - 6uv)_x$$

Диспергирующих длинных волн система eDDD

[336, 337, 805]

$$u_t = (u_x + u^2 - 2q)_x, \quad -v_t = (v_x - 2uv)_x, \quad q_y = v_x$$

Преобразование Бэклунда [807,1247]

$$u_{n,y} = v_n - v_{n+1}, \quad v_{n,x} = v_n(u_n - u_{n-1}).$$

[807] B.G. Konopelchenko. The nonabelian 1+1-dimensional Toda lattice as the periodic fixed point of the Laplace transform for the 2+1-dimensional integrable system. *Phys. Lett. A* ***156:5*** (1991) 221–222.

[1247] A.B. Shabat, R.I. Yamilov. To a transformation theory of two-dimensional integrable systems. *Phys. Lett. A* ***227:1–2*** (1997) 15–23.

Дифференциальные и псевдо-дифференциальные операторы

Автор: А.Б. Шабат, 28.04.2007

Значение дифференциальных операторов обусловлено тем, что на этом языке формулируются задачи о построении конечнозонных потенциалов и высших симметрий интегрируемых уравнений. В обоих случаях оказывается полезным введение псевдо-дифференциальных операторов, в частности, это находит применение в теории операторов рекурсии и формальной симметрии.

1. Задача о коммутирующих дифференциальных операторах

Умножение в кольце $\mathcal{R}$ ***дифференциальных операторов (ДО)***

$$A=\sum_{k=0}^{n} a_{n-k}D^k = a_0D^n + a_1D^{n-1} + a_2D^{n-2} + \dots + a_n, \quad D \equiv \frac{d}{dx}$$

с гладкими коэффициентами $a_k = a_k(x)$ определяется ***правилом Лейбница***

$$D^m a = aD^m + ma_xD^{m-1} + \frac{m(m-1)}{2}a_{xx}D^{m-2} + \dots .$$

Если $A = a_0D^n + \dots$ и $B = b_0D^m + \dots$ то

$$[A,B] := AB - BA = (na_0b_{0,x} - mb_0a_{0,x})D^{n+m-1} + \dots \tag{114}$$

то есть, вообще говоря, порядок коммутатора равен $n+m-1$. Следовательно, условие коммутативности $[A,B] = 0$ эквивалентно системе из $n+m$ уравнений для $n+m+2$ коэффициентов A и B. Число уравнений и неизвестных уравнивается, если ввести в рассмотрение следующие два элементарных преобразования:

$$D = a\hat{D}, \qquad \tilde{A} = f^{-1}Af. \tag{115}$$

Первое соответствует замене независимой переменной $x \to \hat{x}$, а второе сопряжению оператором нулевого порядка, то есть умножением на гладкую функцию $f = f(x)$. Оба преобразования сохраняют свойство коммутативности. Например, в случае сопряжения $\widetilde{AB} = \tilde{A}\tilde{B}$ и следовательно

$$[A, B] = 0 \quad \Leftrightarrow \quad [\tilde{A}, \tilde{B}] = 0.$$

Замена независимой переменной с $a = a_0^{1/n}$ заменяет A оператором $\hat{A}$ с ведущим коэффициентом $\hat{a}_0 = 1$.

Определение 4. ***Централизатором*** $\mathcal{C}(A)$ дифференциального оператора A называется подкольцо ДО, коммутирующих с A:

$$\mathcal{C}(A) = \{B \in \mathcal{R} : \ [A, B] = 0\}.$$

Централизатор называется ***тривиальным*** если он состоит из многочленов с постоянными коэффициентами от некоторого дифференциального оператора C минимального порядка, то есть

$$A = \alpha_0 C^n + \alpha_1 C^{n-1} + \dots + \alpha_n, \quad B = \beta_0 C^m + \beta_1 C^{m-1} + \dots + \beta_m, \quad \alpha_i = \text{const}, \quad \beta_i = \text{const}\,.$$

Легко доказать, что централизатор ДО первого порядка всегда тривиален. Действительно, если $A = a_0 D + a_1$, то преобразования (115) позволяют свести его к $A = D$. Так как

$$[D, b_0 D^m + b_1 D^{m-1} + \dots + b_m] = D(b_0)D^m + D(b_1)D^{m-1} + \dots + D(b_m),$$

то все b_i постоянны. Итак, в нетривиальных случаях порядок n оператора A должен быть равен по меньшей мере 2. В следующем примере $n = 2$ и порядок B также выбран минимальным.

Пример 3. Пусть $A = D^2 + a$ и $B = D^3 + bD + c$. Тогда уравнение $[A, B] = 0$ равносильно системе

$$2b_x = 3a_x, \quad b_{xx} + 2c_x = 3a_{xx}, \quad a_{xxx} + ba_x - c_{xx} = 0.$$

Исключение b и c даёт уравнение (ε постоянная интегрирования)

$$a_{xxx} + 6aa_x = \varepsilon a_x, \tag{116}$$

любое решение которого порождает коммутирующую пару ДО. Более того, легко проверить, что если $u \neq \mathrm{const}$, то не существует оператора C первого порядка, такого что $A = \alpha_0 C^2 + \alpha_1 C + \alpha_2$, то есть эта пара не является тривиальной. В частности, выбор $u = 2x^{-2}$ приводит к паре

$$A = D^2 - 2x^{-2}, \quad B = D^3 - 3x^{-2}D + 3x^{-3}, \quad [A, B] = 0, \quad A^3 = B^2.$$

2. Поле псевдо-дифференциальных операторов

Чтобы понять структуру нетривиальных централизаторов, нужно расширить кольцо $\mathcal{R}$, введя ***псевдо-дифференциальные операторы (ПДО)*** как формальные ряды

$$A = a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + a_2 D^{n-2} + \dots \tag{117}$$

Произведение в расширенном кольце $\tilde{\mathcal{R}}$ определяется ***правилом Лейбница***, обобщённом на любую целую степень D:

$$D^n a = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} D^k(a) D^{n-k} = \begin{cases} \quad\dots & \\ aD^{-1} - a_x D^{-2} + a_{xx} D^{-3} - \dots & n = -1 \\ aD^{-2} - 2a_x D^{-3} + 3a_{xx} D^{-4} - \dots & n = -2 \\ aD^{-3} - 3a_x D^{-4} + 6a_{xx} D^{-5} - \dots & n = -3 \\ \quad\dots & \end{cases}$$

где $\binom{n}{k} = n(n-1)\cdots(n-k+1)/k!$. В частности, для ПДО первого порядка с единичным ведущим коэффициентом $B = D + b_1 + b_2 D^{-1} + b_3 D^{-2} + \dots$ имеем

$$\begin{gathered} B^n = D^n + b_{1,n} D^{n-1} + b_{2,n} D^{n-2} + b_{3,n} D^{n-3} + \dots, \qquad b_{1,n} = nb_1, \\ b_{2,n} = nb_2 + \binom{n}{2}(b_{1,x} + b_1^2), \quad b_{3,n} = nb_3 + \binom{n}{2}(b_{2,x} + 2b_1 b_2) + \binom{n}{3}(b_{1,xx} + 3b_1 b_{1,x} + b_1^3), \ \dots \end{gathered} \tag{118}$$

Следовательно, выражения для коэффициентов $b_{j,n}$, $j = 1, 2, \ldots$ содержат только первые j коэффициентов заданного ряда B. Эта треугольная структура уравнений позволяет ввести дополнительные алгебраические операции на $\tilde{\mathcal{R}}$.

Лемма 6. *Пусть A формальный ряд (117) порядка n с $a_0 = 1$. Тогда:*
- *существует единственный формальный ряд $L = A^{-1}$, такой, что $AL = LA = 1$;*
- *если $n \neq 0$, то существует единственный формальный ряд $B = A^{1/n}$, такой, что $\operatorname{ord} B = 1$, ведущий коэффициент равен 1 и $B^n = A$.*

Доказательство. Доказательство аналогично в обоих случаях, рассмотрим только второй. Стартуя с формул (118), получаем

$$b_{j,n} = nb_j + f[b_1, b_2, \ldots, b_{j-1}]$$

где f дифференциальный многочлен от своих аргументов. Система для коэффициентов b_k

$$a_1 = nb_1, \quad a_2 = b_{2,n}, \quad a_3 = b_{3,n}, \ldots$$

треугольна и, следовательно, однозначно разрешима. ■

Два ряда, определённые в лемме называются, соответственно, ***обратным*** и ***корнем n-й степени***. Условие $a_0 = 1$ является техническим и преобразование $D \to a\hat{D}$ (см. (115)) с $a = a_0^{1/n}$ ведёт к ряду $\hat{A}$ с единичным старшим коэффициентом.

Подчеркнём ещё раз, что в силу треугольной структуры уравнений первые j коэффициентов исходного ряда A определяют первые j коэффициентов рядов A^{-1} и $A^{1/n}$. Это *рекурсивное свойство* алгебраических операций в поле $\tilde{\mathcal{R}}$ степенных рядов (117) оказывается очень важным.

3. Теорема Бёрчнэла-Чонди

Теперь мы можем вернуться к задаче о коммутативности. Рассмотрим централизатор в кольце $\tilde{\mathcal{R}}$:

$$\tilde{\mathcal{C}}(A) = \{B \in \tilde{\mathcal{R}} : \ [A, B] = 0\}.$$

Следующее утверждение показывает, что, в отличие от случая ДО, этот централизатор всегда тривиален.

Теорема 8 (Бёрчнэл, Чонди [380]). *Пусть $A \in \tilde{\mathcal{R}}$, $\operatorname{ord} A = n \neq 0$. Тогда ПДО $B \in \tilde{\mathcal{R}}$ коммутирует с A если, и только если он может быть представлен в виде формального ряда*

$$B = \beta_0 A_1^m + \beta_1 A_1^{m-1} + \ldots, \quad \beta_k = \mathrm{const}, \quad A_1^n = A. \tag{119}$$

Доказательство. Очевидно, любая степень A_1 коммутирует с A и принадлежит $\tilde{\mathcal{C}}(A)$. Чтобы доказать обратное утверждение, обозначим $B_1 = [B, A_1]$. Тогда

$$BA - AB = BA_1^n - A_1^n B = B_1 A_1^{n-1} + A_1 B_1 A_1^{n-2} + \cdots + A_1^{n-1} B_1 \quad \Rightarrow \quad \tilde{\mathcal{C}}(A_1) = \tilde{\mathcal{C}}(A), \tag{120}$$

так как n-й член в сумме (120) имеет тот же старший коэффициент.

Старший коэффициент b_0 ПДО $B \in \tilde{\mathcal{C}}(A_1)$ порядка $m \neq 0$ должен быть пропорционален a_0^m, в силу формул (114) которые остаются верными и в $\tilde{\mathcal{R}}$. Следовательно, мы находим, что

$$B \in \tilde{\mathcal{C}}(A_1) \quad \Rightarrow \quad b_0 = \beta_0 a_0^m \quad \Rightarrow \quad \tilde{B} = B - \beta_0 A_1^m \in \tilde{\mathcal{C}}(A_1).$$

Для завершения доказательства применим индукцию по порядку $\tilde{m} < m$ ряда $\tilde{B} = B - \beta_0 A_1^m$. Заметим, что в случае порядка $m = 0$ с $B = b_0 + b_1 D^{-1}$ из формулы (114) следует $a_0 b_{0,x} = 0$. Таким образом, в этом случае порядок ряда $\tilde{B} = B - b_0$ отрицателен и индукция проходит беспрепятственно. ■

Из доказанной теоремы следует, что любой централизатор $\tilde{\mathcal{C}}(A)$ абелев, то есть

$$B_1, B_2 \in \tilde{\mathcal{C}}(A) \quad \Rightarrow \quad [B_1, B_2] = 0.$$

В случае дифференциального оператора A централизатор $\mathcal{C}(A) \subset \tilde{\mathcal{C}}(A)$ и, таким образом, мы получаем следующий классический результат.

Следствие 1. *Любые два ДО, коммутирующие с третьим, коммутируют друг с другом.*

---

[380] J.L. Burchnall, T.W. Chaundy. Commutative ordinary differential operators. *Proc. London Soc. Ser. 2* ***21*** (1923) 420–440.

Иными словами, бинарное отношение $[A,B]=0$ является эквивалентностью и оператор A в $\mathcal{C}(A)$ можно заменить любым нетривиальным (ненулевого порядка) элементом централизатора. Минимальный порядок $n>0$ нетривиальных элементов $\mathcal{C}(A)$ даёт некоторое представление о структуре централизатора. При $n=1$ централизатор всегда тривиален, но в случае $n=2$ имеются нетривиальные с дифференциальными операторами $B\in\mathcal{C}(A)$ нечётного порядка (см. Пример 3). Кроме того, хотя элемент $B\in\mathcal{C}(A)$ вообще говоря, нельзя представить, как многочлен от A, между A и B имеется алгебраическое соотношение в силу Теоремы 8.

Пример 4. Рассмотрим структуру $\mathcal{C}(A)$ для случая дифференциального оператора A второго порядка. Если централизатор нетривиален, то в нём содержится дифференциальный оператор B_1 минимального нечётного порядка $2n+1\ge 3$. Любой элемент в $\mathcal{C}(A)$ можно представить в виде $P(A)B+Q(A)$ где P,Q многочлены с постоянными коэффициентами. В частности, $B_1^2=P(A)B_1+Q(A)$ и заменяя $B_1=B+\frac{1}{2}P(A)$ приходим к алгебраическому соотношению $B^2=Q(A)$. Легко видеть, что оператор B также имеет минимальный порядок $2n+1$, и такова же степень многочлена Q. Соотношение $B^2=Q(A)$ полностью определяет умножение в коммутативном кольце $\mathcal{C}(A)$ порождённом A и B.

4. Вычеты

В силу Теоремы 8, структура централизатора $\mathcal{C}(A)$ связана со свойствами формального ряда

$$A_1=a_0D+a_1+a_2D^{-1}+a_3D^{-2}+\dots,\quad A_1^n=A\in\mathcal{R}. \tag{121}$$

Для любого ПДО

$$B=b_0D^n+b_1D^{n-1}+\dots+b_n+b_{n+1}D^{-1}+\dots\quad\in\tilde{\mathcal{R}}$$

определим ***дифференциальную часть*** и ***вычет***

$$B_+:=b_0D^n+b_1D^{n-1}+\dots+b_n\quad\in\mathcal{R},\qquad \operatorname{res}(B):=b_{n+1}. \tag{122}$$

В частности, для формального ряда (121) обозначим

$$\rho_j=\operatorname{res}A_1^j,\quad j=-1,1,2,\dots,\quad \rho_0=a_1/a_0. \tag{123}$$

Обращая эти формулы, получаем (см. (118)), что

$$a_0 = 1/\rho_{-1}, \quad a_1 = \rho_0/\rho_{-1}, \quad a_2 = \rho_1, \quad 2a_3 = \rho_3\rho_{-1} - 2\rho_1\rho_0 - \frac{(\rho_1\rho_{-1})_x}{\rho_{-1}}, \dots$$

и рекурсивные свойства алгебраических операций в $\tilde{\mathcal{R}}$ позволяют легко доказать [994] следующую лемму.

Лемма 7. *Последовательность (123) вычетов степеней A_1 и последовательность коэффициентов этого формального ряда определяют друг друга однозначно и рекурсивно.*

Определение 5. Для дифференциального оператора $L = D^m + l_2 D^{m-2} + \cdots + l_m$ специального вида назовём ***L-иерархией*** последовательность (123) вычетов $\rho_j = \rho_j(L)$, $j \geq 1$ выраженную в терминах коэффициентов $l_2, \dots, l_m$ дифференциального оператора L.

Пример 5. В случае ДО второго порядка $L = D^2 + a$ коэффициенты ряда $A \in \tilde{\mathcal{R}}$, $A^2 = L$ выражаются через a:

$$\begin{gathered} A = D + a_1 D^{-1} + a_2 D^{-2} + \dots, \quad 2a_1 = a, \quad 4a_2 = -a_x, \quad 8a_3 = a_{xx} - a^2, \\ 16a_4 = -a_{xxx} + 6aa_x, \quad 2^5 a_5 = a_{xxxx} + 2a^3 - 14aa_{xx} - 11a_x^2, \dots \end{gathered} \tag{124}$$

Это даёт, для вычетов $\rho_j(a) = \rho_j(L)$ с нечётным $j = 1, 3, 5, \dots$

$$2\rho_1(a) = a, \quad 2^3\rho_3(a) = a_{xx} + 3a^2, \quad 2^5\rho_5(a) = a_{xxxx} + 5a_x^2 + 10aa_{xx} + 10a^3, \dots \tag{125}$$

Все чётные вычеты обращаются в ноль, $\rho_{2n}(a) = 0$, $n = 1, 2, 3, \dots$ так как для чётных степеней ряда (124) имеем $A^{2n} = L^n$.

Подставляя разложение (122) в формулу $[L, A^j] = 0$, находим

$$A^j = (A^j)_+ + \rho_j D^{-1} + \mathcal{O}(D^{-2}) \quad \Rightarrow \quad [L, (A^j)_+] = -2\rho_{j,x}, \tag{126}$$

так как (ср. (114))

$$0 = [L, A^j] = [L, (A^j)_+] + [L, \rho_j D^{-1}] + \mathcal{O}(D^{-1}) = [L, (A^j)_+] + 2\rho_{j,x} + \mathcal{O}(D^{-1}).$$

[994] A.V. Mikhailov, A.B. Shabat, R.I. Yamilov. The symmetry approach to classification of nonlinear equations. Complete lists of integrable systems. *Russ. Math. Surveys* ***42:4*** (1987) 1–63.

Подводя итог, мы видим, что приведённое определение L-иерархии вместе с Теоремой 8 и формулой (126) позволяют сформулировать критерий нетривиальности централизатора $\mathcal{C}(L)$ дифференциального оператора $L = D^2 + a$ второго порядка.

Следствие 2 (Теоремы 8). *Централизатор $\mathcal{C}(D^2 + a)$ нетривиален если и только если он содержит дифференциальный оператор B нечётного порядка $2n + 1$, $n \geq 1$ и в этом случае функция $a = a(x)$ удовлетворяет нелинейному ОДУ порядка $2n + 1$:*

$$\rho_{2n+1}(a) + \sum_{k=0}^{n-1} c_k \rho_{2k+1}(a) = c_n, \quad c_j = \mathrm{const} \in \mathbb{C}.$$

В частности, при $n = 1$ последнне уравнение имеет вид $a_{xx}+3a^2+c_0a = c_1$ (см. (125). Оно определяет условие коммутативности $[L, (A^3)_+] = 0$ и эквивалентно уравнению (116) из Примера 3.

В заключение обсудим коротко L-иерархию в случае оператора L третьего порядка. По аналогии с Примером 5, находим

$$L = D^3 + 3uD + 3v \quad \Rightarrow \quad A = D + a_1 D^{-1} + a_2 D^{-2} + \dots, \quad a_1 = u, \quad a_2 = v - u_x, \dots \tag{127}$$

Аналогично (126), уравнение $[L, A^j] = 0$ даёт

$$A^j = (A^j)_+ + a_{j,1} D^{-1} + a_{j,2} D^{-2} + \mathcal{O}(D^{-3}) \quad \Rightarrow \quad [L, (A^j)_+] + 3a_{j,1,x} D + 3a_{j,1,xx} + 3a_{j,2,x} = 0$$

то есть пару уравнений $a_{j,1,x} = a_{j,2,x} = 0$. Таким образом, сравнительно с (126), эта формула включает $a_{j,2,x}$, что следует выразить в терминах $a_{j,1} = \rho_j$. Для этого предположим дополннительно, что опреатор третьего порядка L кососимметричен:

$$L^\intercal := -D^3 - 3Du + 3v = -D^3 - 3uD + 3(v - u_x) = -L = -D^3 - 3uD - 3v.$$

В этом случае

$$A^\intercal + A = 0, \quad A^\intercal := -D - D^{-1} a_1 + D^{-2} a_2 - D^{-3} a_3 + \dots \tag{128}$$

и мы приходим к следующей лемме.

Лемма 8. *Пусть, вообще,* $A = D + a_1 D^{-1} + a_2 D^{-2} + \dots$ *и* $A^n = (A^n)_+ + a_{n,1} D^{-1} + a_{n,2} D^{-2} + \dots$. *Тогад* A *кососимметричен если и только если* $a_{n,1} = \operatorname{res}(A^n) = 0$ *для чётных* $n = 2, 4, \dots$. *Кроме того, для кососимметричного* A

$$2a_{n,2} = a_{n,1,x}, \quad \text{если } n \text{ нечётное.}$$

Таким образом, как и в случае симметричного дифференциального оператора второго порядка, для кососимметрических операторов третьего порядка и нечётных $j = 5, 7, \dots$

$$a_{j,1,x} = \rho_{j,x} = 0 \quad \Rightarrow \quad [L, (A^j)_+] = 0.$$

В частности, в простейшем случае $j = 5$ возникает аналог уравнения (116)

$$u_{xxxxx} + 15D\Big(2uu_{xx} + \frac{7}{4}u_x^2 + u^3\Big) = \varepsilon u_x. \tag{129}$$

Вычисление $\operatorname{res}(A^5)$ достаточно длинное и, фактически, сравнимо с прямолинейным вычислением коммутатора $[L, M] = a_1 D + a_2$, где

$$L = D^3 + 3uD + 3v, \quad M = (A^5)_+ = D^5 + 5uD^2 + aD + b + c.$$

Эти вычисления дают прежде всего

$$a = 5(u_x + v), \quad 3b = 10u_{xx} + 15u^2 + 15v_x, \quad 3c = 10v_{xx} + 30uv$$

и условие $[L, M] = 0$ теперь сводится к паре уравнений

$$\begin{cases} u_{xxxxx} + 15D(uu_{xx} + u_x^2 + 3vu_x - 3v^2 + u^3) = \varepsilon u_x, \\ v_{xxxxx} + 15D(uv_{xx} + 2vu_{xx} + 2v_x u_x - 3vv_x + 3u^2 v) = \varepsilon v_x. \end{cases} \tag{130}$$

легко видеть, что уравнение 5-го порядка (129) для u представляет собой одну из трёх возможных скалярных редукций $\delta v = u_x$, $\delta = 0, 1, 2$ этой системы.

Дифференциальные подстановки

Формулы (275), (276) определяют также продолжение для более общих преобразований

$$\tilde{x}_i = f_i(x, u_s), \quad \tilde{u}^j = g^j(x, u_s), \quad |s| \le k. \tag{131}$$

Теорема 9 (Бэклунд[268,269]). *Если продолжение преобразования (131) на некоторое J^r обратимо, то оно является точечным, если $m > 1$ или контактным, если $m = 1$.*

Преобразования (131), не являющиеся точечными или контактными называются ***дифференциальными подстановками***. Следует подчеркнуть, что теорема Бэклунда не означает, что любое такое преобразование необратимо. Например, следующее преобразование есть инволюция:

$$\tilde{x} = x, \quad \tilde{u} = \frac{v_x}{u_x}, \quad \tilde{v} = -v + u\frac{v_x}{u_x}.$$

Тем не менее, легко видеть, что его продолжение не является обратимым преобразованием на J^r, для любого конечного r.

Примеры: разностные подстановки для цепочки Богоявленского

См. также таблицы подстановок

[268] A.V. Bäcklund. Einigies über Curven- und Flächentransformationen. *Lunds Universitëts Års-skrift* ***10*** (1873) 1–12.
[269] A.V. Bäcklund. Über Flächentrasformationen. *Math. Ann.* ***9:3*** (1875) 297–320.

Дробно-линейные инварианты

Пусть P_n^m обозначает множество многочленов от n переменных, степени m по каждой переменной. Операции

$$P_4^1 \xrightarrow{\delta_{x_i,x_j}} P_2^2 \xrightarrow{\delta_{x_k}} P_1^4, \qquad \delta_{x,y}(Q) = Q_xQ_y - QQ_{xy}, \quad \delta_x(h) = h_x^2 - 2hh_{xx}$$

коваринтны по отношению к дробно-линейным преобразованиям

$$M[f](x_1,\dots,x_n) = (c_1x_1+d_1)^m \dots (c_nx_n+d_n)^m f\left(\frac{a_1x_1+b_1}{c_1x_1+d_1},\dots,\frac{a_nx_n+b_n}{c_nx_n+d_n}\right), \quad f \in P_n^m$$

где $a_id_i - b_ic_i = \Delta_i \neq 0$. Более точно:

$$\delta_{x_i,x_j}(M[Q]) = \Delta_i\Delta_jM[\delta_{x_i,x_j}(Q)], \quad \delta_{x_i}(M[h]) = \Delta_i^2M[\delta_{x_i}(h)]. \tag{132}$$

Относительными инвариантами этого действия для многочленов $r(x) = r_4x^4 + r_3x^3 + r_2x^2 + r_1x + r_0$ из P_1^4 служат коэффициенты вейерштрассовской нормальной формы $r = 4x^3 - g_2x - g_3$. В терминах заданного многочлен они имеют вид[6]

$$\begin{aligned} g_2(r,x) &= \frac{1}{48}(2rr^{IV} - 2r'r''' + (r'')^2) = \frac{1}{12}(12r_0r_4 - 3r_1r_3 + r_2^2), \\ g_3(r,x) &= \frac{1}{3456}(12rr''r^{IV} - 9(r')^2r^{IV} - 6r(r''')^2 + 6r'r''r''' - 2(r'')^3) \\ &= \frac{1}{432}(72r_0r_2r_4 - 27r_1^24 + 9r_1r_2r_3 - 27r_0r_3^2 - 2r_2^3). \end{aligned}$$

При дробно-линейной замене $x = x_1$ эти величины умножаются на простын множители:

$$g_k(M[r],x) = \Delta_1^{2k}g_k(r,x), \quad k = 2,3.$$

Для биквадратичных многочленов из $h \in P_2^2$,

$$h(x,y) = h_{22}x^2y^2 + h_{21}x^2y + h_{20}x^2 + h_{12}xy^2 + h_{11}xy + h_{10}x + h_{02}y^2 + h_{01}y + h_{00}, \tag{133}$$

[6] N.I. Akhiezer. Elements of the theory of elliptic functions. Moscow: Nauka, 1970. (in Russian)

относительными инвариантами являются

$$\begin{aligned} i_2(h,x,y) &= 2hh_{xxyy} - 2h_x h_{xyy} - 2h_y h_{xxy} + 2h_{xx}h_{yy} + h_{xy}^2 = \\ &= 8h_{00}h_{22} - 4h_{01}h_{21} - 4h_{10}h_{12} + 8h_{02}h_{20} + h_{11}^2, \end{aligned}$$

$$i_3(h,x,y) = \frac{1}{4}\det\begin{pmatrix} h & h_x & h_{xx} \\ h_y & h_{xy} & h_{xxy} \\ h_{yy} & h_{xyy} & h_{xxyy} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} h_{22} & h_{21} & h_{20} \\ h_{12} & h_{11} & h_{10} \\ h_{02} & h_{01} & h_{00} \end{pmatrix} = -\frac{1}{4}\delta_{x,y}(\delta_{x,y}(h))/h.$$

При дробно-линейной замене $x = x_1$ и $y = x_2$,

$$i_k(M[h],x,y) = \Delta_1^k \Delta_2^k i_k(h,x,y), \quad k = 2,3.$$

Следующие свойства операций $\delta_{x,y}$, δ_x доказываются непосредственно.

Лемма 9. *Для любого аффинно-линейного многочлена $Q(x,y,u,v) \in P_4^1$ и любого биквадратичного многочлена $h(x,y) \in P_2^2$:*

$$\delta_u(\delta_{xy}(Q)) = \delta_y(\delta_{xu}(Q)), \tag{134}$$

$$i_k(\delta_{xy}(Q),u,v) = i_k(\delta_{uv}(Q),x,y), \quad k = 2,3, \tag{135}$$

$$g_k(\delta_x(h),y) = g_k(\delta_y(h),x), \quad k = 2,3. \tag{136}$$

Обозначим $Q^{ij} = Q^{ji} = \delta_{x_k,x_l}(Q)$ где $\{i,j,k,l\} = \{1,2,3,4\}$. Из Леммы 9 следует коммутативность диаграммы

$$\begin{tikzcd} r_4(x_4) & Q^{34}(x_3,x_4) \arrow[l, "\delta_{x_3}"'] \arrow[r, "\delta_{x_4}"] & r_3(x_3) \\ Q^{14}(x_1,x_4) \arrow[u, "\delta_{x_1}"] \arrow[d, "\delta_{x_4}"'] & Q(x_1,x_2,x_3,x_4) \arrow[l, "\delta_{x_2,x_3}"'] \arrow[r, "\delta_{x_1,x_4}"] \arrow[u, "\delta_{x_1,x_2}"'] \arrow[d, "\delta_{x_3,x_4}"] & Q^{23}(x_2,x_3) \arrow[u, "\delta_{x_2}"'] \arrow[d, "\delta_{x_3}"] \\ r_1(x_1) & Q^{12}(x_1,x_2) \arrow[l, "\delta_{x_2}"'] \arrow[r, "\delta_{x_1}"] & r_2(x_2) \end{tikzcd} \tag{137}$$

Кроме того, биквадратичные многочлены на противоположных рёбрах имеют одни и те же инварианты i_2, i_3, а инварианты g_2, g_3 совпадают для всех r_i. Эту диаграмму можно дополнить многочленами Q^{13}, Q^{24} отвечающими диагоналям (так что возникнет граф тетраэдра). Многочлены Q^{ij} удовлетворяют ряду важных тождеств.

Лемма 10. *Выполняются следующие тождества:*

$$4i_3(Q^{12},x_1,x_2)Q^{14} = \det\begin{pmatrix} Q^{12} & Q^{12}_{x_1} & S \\ Q^{12}_{x_2} & Q^{12}_{x_1x_2} & S_{x_2} \\ Q^{12}_{x_2x_2} & Q^{12}_{x_1x_2x_2} & S_{x_2x_2} \end{pmatrix}, \quad S = Q^{23}_{x_3x_3}Q^{34} - Q^{23}_{x_3}Q^{34}_{x_3} + Q^{23}Q^{34}_{x_3x_3}, \tag{138}$$

$$Q^{12}Q^{34} - Q^{14}Q^{23} = PQ, \quad P = \det\begin{pmatrix} Q & Q_{x_1} & Q_{x_3} \\ Q_{x_2} & Q_{x_1x_2} & Q_{x_2x_3} \\ Q_{x_4} & Q_{x_1x_4} & Q_{x_3x_4} \end{pmatrix} \in P^1_4, \tag{139}$$

$$\frac{2Q_{x_1}}{Q} = \frac{Q^{12}_{x_1}Q^{34} - Q^{14}_{x_1}Q^{23} + Q^{23}Q^{34}_{x_3} - Q^{23}_{x_3}Q^{34}}{Q^{12}Q^{34} - Q^{14}Q^{23}}\,. \tag{140}$$

Тождество (138) показывает, что Q^{14} можно выразить через три другие многочлена (при условии $i_3(Q^{12}) \neq 0$). Тождество (139) определяет Q как один из множителей в простом выражении построенном из Q^{ij}. Наконец, дифференцирование (140) по x_2 или x_4 приводит к соотношению вида $Q^2 = F[Q^{12}, Q^{23}, Q^{34}, Q^{14}]$, где F рациональное выражение от Q^{ij} и их производных. Следовательно, если многочлены на рёбрах известны (достаточно трёх), то Q находится явно.

Дэви-Стюартсона система eDDD

$$
\begin{aligned}
u_{t_+} &= u_{xx} + 2p_x u, \quad -v_{t_+} = v_{xx} + 2p_x v, \quad p_y = uv \\
u_{t_-} &= u_{yy} + 2q_y u, \quad -v_{t_-} = v_{yy} + 2q_y v, \quad q_x = uv
\end{aligned}
$$

Потоки коммутируют, их любая линейная комбинация

$$u_t = \alpha u_{t_+} + \beta u_{t_-}, \quad v_t = \alpha v_{t_+} + \beta v_{t_-}$$

называется системой Дэви-Стюартсона.

Симметрия третьего порядка:

$$
\begin{aligned}
u_{t_3} &= u_{xxx} + 3u_x D_y^{-1}(uv)_x + 3uD_y^{-1}(u_x v)_x \\
v_{t_3} &= v_{xxx} + 3v_x D_y^{-1}(uv)_x + 3vD_y^{-1}(uv_x)_x
\end{aligned}
\tag{141}
$$

Дэви-Стюартсона система матричная eDD

$$u_t = u_{xx} + 2wu, \quad -v_t = v_{xx} + 2vw, \quad w_y = (uv)_x.$$

где $u \in \mathrm{Mat}(m,n)$, $v \in \mathrm{Mat}(n,m)$, $w \in \mathrm{Mat}(m,m)$.

Линейная задача ($\psi \in \mathbb{R}^m$, $\phi \in \mathbb{R}^n$):

$$\psi_y = u\phi, \quad \phi_x = -v\psi, \quad \psi_t = \psi_{xx} + 2w\psi, \quad \phi_t = v_x\psi - v\psi_x.$$

Аналогичные примеры можно найти в [263].

[263] C. Athorne, A.P. Fordy. Integrable equations in (2+1) dimensions associated with symmetric and homogeneous spaces. *J. Math. Phys.* ***28:9*** (1987) 2018–2024.

Ермакова система D

$$\ddot{x} + \omega^2(t)x = x^{-3}f(x/y), \quad \ddot{y} + \omega^2(t)y = y^{-3}g(x/y)$$

Случай $f = \text{const}$ введён в работе [532].

В общем случае, система обладает первым интегралом

$$I = \frac{1}{2}(x\dot{y} - y\dot{x})^2 - \int^{x/y} z^{-3}f(z)dz - \int^{y/z} z^{-3}g(z)dz$$

и допускает линеаризацию [256, 257].

---

[532] V.P. Ermakov. Second order differential equations. Integrability conditions in closed form. *Izv. Kievskogo Univ.* ***9*** (1880) 1–25. [in Russian]

Закон сохранения

Для скалярных $1+1$-уравнений:

Определение 6. Порядком закона сохранения с плотностью $\rho = \rho(x, u, \ldots, u_m)$ называется порядок вариационной производной

$$\frac{\delta \rho}{\delta u} = \rho_u - D(\rho_{u_1}) + D^2(\rho_{u_2}) - \cdots + (-D)^m(\rho_{u_m}).$$

Захарова система eDD

[16]

$$i\psi_t = \psi_{xx} - n\psi, \quad n_t = u_x, \quad u_t = n_x + (|\psi|^2)_x$$

Неинтегрируемая система, описывающая нелинейное взаимодействие двух волн, отвечающих различным пространственно-временным масштабам.

Интегрируемая дискретизация

[96]

Проблема построения дискретизации, сохраняющей свойство интегрируемости является одной из центральных в теории интегрируемых динамических систем. Наиболее разумными являются подходы, основанные на дискретизации каких-либо внутренних структур модели, (например, представления нулевой кривизны). Однако, они являются очень “индивидуальными” и неалгоритмичными. Наоборот, дискретизация Кахана-Хироты-Кимуры является явной и применима к любой системе ОДУ с квадратичной правой частью, но, вообще говоря, не гарантирует сохранения свойства интегрируемости.

Интегрируемая иерархия

Уравнение называется интегрируемым, если оно обладает бесконечномерной алгеброй обобщённых симметрий. Эта алгебра называется ***иерархией*** данного уравнения.

В более широком смысле, к иерархии относят также нелокальные обобщённые симметрии, симметрии, отвечающие неизоспектральным деформациям и дискретные симметрии, порождённые преобразованиями Бэклунда. Такой подход, в сочетании с аппаратом дифференциальных/разностных подстановок, позволяет установить полезные взаимосвязи между уравнениями из разных классов. Законы сохранения и представления нулевой кривизны в том или ином виде пересчитываются для всех таких ассоциированных уравнений, что позволяет применить к ним единообразные методы интегрирования.

Пример 6. Рассмотрим потенциальное уравнение КдФ

$$u_{t_3} = u_{xxx} - 6u_x^2. \tag{142}$$

Оно допускает классические симметрии ... и высшие симметрии ...

Порождаемая этими симметриями алгебра Ли и называется иерархией уравнения pot-КдФ.

Преобразование Бэклунда для уравнения (142) определяет одевающую цепочку

$$u_{n+1,x} + u_{n,x} = (u_{n+1} - u_n)^2 + a_n.$$

Задача построения её решений, периодических по n, оказывается эквивалентной построению конечнозонных решений КдФ.

Далее, принцип нелинейной суперпозиции приводит к дискретному уравнению КдФ

$$(u_{n,m} - u_{n+1,m+1})(u_{n+1,m} - u_{n,m+1}) = a_n - b_m.$$

Замена $v = u_{n+1,m} - u_{n,m}$, $w = u_{n,m+1} - u_{n,m}$ приводит к отображению Янга-Бакстера

$$v_2 = -w + \frac{a_1 - a_2}{w - v}, \qquad w_1 = -v + \frac{a_1 - a_2}{w - v},$$

а ограничение на чётную подрешётку к дискретной цепочке типа Тоды

$$\sum_n \frac{a_n - a_{n+1}}{u_{n,n+1} - u} = 0.$$

В известном смысле все перечисленные уравнения можно отнести к иерархии уравнения (142).

Интегрируемое отображение

Дискретная теорема Лиувилля [1370,1371]

[1370] A.P. Veselov. Integrable mappings. *Russ. Math. Surveys* ***46:5*** (1991) 1–51.
[1371] A.P. Veselov. What is an integrable mapping? [162, 251–272]

Интегрируемость

Тесты Уолквиста-Эстабрука

Многосолитонный тест

WTC-тест

Интегрируемые уравнения можно разделить на линеаризуемые и уравнения, интегрируемые методом обратной задачи рассеяния (в терминологии Ф. Калоджеро C-интегрируемые и S-интегрируемые уравнения). В терминах канонической серии законов сохранения можно дать следующее строгое определение.

Определение 7. Если каноническая серия для эволюционного уравнения, обладающего формальной симметрией, содержит законы сохранения как угодно высокого порядка, уравнение называется S-интегрируемым, в противном случае — C-интегрируемым.

Важно отметить, что само по себе существование бесконечной серии законов сохранения не влечёт S-интегрируемости. Например, для линейного уравнения $u_t = u_3$ функция u_n^2 является плотностью закона сохранения для любого $n = 1, 2, \ldots$. Однако для этого уравнения формальная симметрия равна D_x и все канонические законы сохранения тривиальны.

[583]

[583] H. Flaschka, A.C. Newell, M. Tabor. Integrability. [162, 73–114]

Интегрируемых уравнений история

Прекрасные и подробные изложения истории таких понятий, как солитон, высшие симметрии, преобразования Бэклунда, свойство Пенлеве и др. можно найти в работах [874,144,30,5,1000].

1834 открытие Расселом большой уединённой волны переноса[1179,531]

1853 уравнение Лиувилля [911]

1855 определение интегрируемости по Лиувиллю [912]

1871 статьи Буссинеска [353,354]

1879 преобразования Бьянки-Ли-Бэклунда [296,910,270,271,272]

---

[874] G.L. Lamb, jr. Bäcklund transformations at the turn of the century. [109, 69–79]

[144] Solitons. (R.K. Bullough, P.J. Caudrey eds). *Topics in current physics **17***, Springer-Verlag, 1980.

[30] R.K. Dodd, J.C. Eilbeck, J.D. Gibbon, H.C. Morris. Solitons and nonlinear wave equations. London: Academic Press, 1982.

[5] M.J. Ablowitz, H. Segur. Solitons and the Inverse Scattering Transform. Philadelphia: SIAM, 1981.

[1000] J.W. Miles. The Korteweg-de Vries equation, a historical essay. *J. Fluid Mech. **106*** (1981) 131–147.

[1179] J.S. Russel. Report on waves. pp. 311–390 in *Rept. 14th Meeting of the British Association for the Advancement od Science.* London: J. Murray, 1844.

[531] G.S. Emmerson. John Scott Russel. A great Victorian engineer and naval architect. (John Murray: London, 1977); Encyclopedia Britannica, 9th edn., p. 66.

[911] J. Liouville. Sur l'equation aux différences partielles $d^2\log\lambda/dudv\pm\lambda/2a^2=0$. *J. Math. Pures Appl. **18:1*** (1853) 71–72.

[912] J. Liouville. Note sur l'integration des equations de la dynamice. *J. Math. Pures Appl. **20*** (1855) 137–138.

[353] J. de Boussinesq. Theorie de l'intumescence liquid appelée onde solitaire ou de translation, se propagente dans un canal rectangulaire. *Comptes Rendus Acad. Sci. Paris **72*** (1871) 755–759.

[354] J. de Boussinesq. Theorie des ondes et de remous qui se propagent. *J. Math. Pures et Appl., Ser. 2, **17*** (1872) 55–108.

[296] L. Bianchi. Ricerche sulle superficie a curvatura costante e sulle elicoidi. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa **2*** (1879) 285.

[910] S. Lie. Zur theorie der Flächen konstanter Krümnung. III, IV. *Arch. Math. og Naturvidenskab **5:3*** (1880) 282–306, 328–358.

[270] A.V. Bäcklund. Zur Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung. *Math. Ann. **17:3*** (1880) 285–328.

[271] A.V. Bäcklund. Zur Theorie der Flächentransformationen. *Math. Ann. **19:3*** (1881) 387–422.

[272] A.V. Bäcklund. Om ytor med konstant negativ krökning. *Lunds Universitëts Års-skrift **19*** (1883).

1882 преобразование Дарбу [459]

1889 волчок Ковалевской [827]

1894 уравнение sin-Гордон [460,14]

1895 вывод уравнения КдФ [824]

1902 работы Пенлеве и Гамбье [1112,615]

1910 уравнение Цицейки [1360]

1914? цепочка Тоды [26]

1940 метод факторизации [1224]

1955 формула Крама [458]

1955 численный эксперимент Ферми-Паста-Улама-Тсингоу [463]

---

[459] G. Darboux. *Compt. Rend.* ***94*** 1456–1459.
[827] S.V. Kowalevski. Sur le probleme de la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe. *Acta Math.* ***12*** (1889) 177–232.
[460] G. Darboux. Leçons sur la théorie générale des surfaces. Paris: Gauthier-Villars, 1894.
[14] L. Bianchi. Lezioni di geometria differenziale. 3 ed., Pisa: Enrico Spoerri, 1923.
[824] D.J. Korteweg, G. de Vries. On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationary waves. *Phil. Mag.* ***39:241*** (1895) 422–443.
[1112] P. Painlevé. Sur les équations différentielles du second ordre et d'ordre superieur dont l'integral général est uniform. *Acta Math.* ***25*** (1902) 1–86.
[615] B. Gambier. *Acta Math.* ***33*** (1909) 1–55.
[1360] G. Tzitzeica. Sur une nouvelle classe de surfaces. *C.R. Acad. Sci. Paris* ***150*** (1910) 955–956.
[26] G. Darboux. Leçons sur la théorie générale des surfaces et les applications géométriques du calcul infinitésimal. T. I-IV. 3 ed., Paris: Gauthier-Villars, 1914-1927.
[1224] E. Schrödinger. A method of determining quantum-mechanical eigenvalues and eigenfunctions. *Proc. Roy. Irish Acad.* ***A 46*** (1940) 9–16.
[458] M.M. Crum. Associated Sturm-Liouville systems. *Quart. J. Math. Oxford Ser. 2* ***6*** (1955) 121–127.
[463] T. Dauxois. Fermi, Pasta, Ulam and a mysterious lady. arXiv:0801.1590v1

1965 рождение термина “солитон” [1434]

1967 Метод обратной задачи рассеяния [616]

1967 цепочка Дарбу [1342]

[1434] N.J. Zabusky, M.D. Kruskal. Interaction of “solitons” in a collisionless plasma and the recurrence of initial states. *Phys. Rev. Let.* ***15:6*** (1965) 240–243.

[616] C.S. Gardner, J.M. Greene, M.D. Kruskal, R.M. Miura. Method for solving the Korteweg-de Vries equation. *Phys. Rev. Let.* ***19:19*** (1967) 1095–1097.

[1342] M. Toda. Vibration of a chain with nonlinear interaction. *J. Phys. Soc. Japan* ***20*** (1967) 431–436.

Ито система eDD

$$u_t = u_{xxx} + 6uu_x + 2vv_x, \quad v_t = 2(uv)_x$$

Представление нулевой кривизны

$$\psi_{xx} = \left(\lambda - u - \frac{v^2}{4\lambda}\right)\psi, \quad \psi_t = (4\lambda + 2u)\psi_x - u_x\psi.$$

Ишимори уравнение eDDD

[731]

$$s_t = [s, s_{yy} - s_{xx}] + g_y s_x + g_x s_y, \quad g_{xx} + g_{yy} = 2\langle s, s_y, s_x \rangle, \quad s \in \mathbb{R}^3,\ g \in \mathbb{R}$$

Двумерное обобщение уравнения Гайзенберга. Калибровочно эквивалентно системе Дэви-Стюартсона [914].

[914] V.D. Lipovsky, A.V. Shirokov. *Funct. Anal. Appl.* ***23:3*** (1989) 65–66.

Йорданова алгебра

Автор: В.В. Соколов, 04.07.2006 [749, 738, 55]

Йордановой называется коммутативная неассоциативная алгебра, в которой выполняется тождества

$$a \circ b = b \circ a, \quad (a \circ b)a^2 = a \circ (b \circ a^2).$$

Любая ассоциативная алгебра A порождает йорданову алгебру A^+ с произведением $a \circ b = ab + ba$. Йорданова алгебра, изоморфная подалгебре некоторой A^+, называется специальной. Существуют йордановы алгебры, которые нельзя получить таким образом, они называются исключительными.

Пример 7. Примеры простых йордановых алгебр:

1) gl_n^+, то есть алгебра всех матриц размера $n \times n$ по отношению к умножению $a \circ b = ab + ba$, с обычным матричным умножением в правой части.

2) Пространство n-мерных векторов с умножением

$$a \circ b = \langle a, c\rangle b + \langle b, c\rangle a - \langle a, b\rangle c$$

где $\langle , \rangle$ невырожденная симметричная билинейная форма, c фиксированный постоянный вектор.

С йордановыми алгебрами связаны некоторые многополевые аналоги уравнения КдФ.

Йорданова пара

Автор: В.В. Соколов, 04.07.2006 [68, 77]

Йордановой парой называется прямая сумма $V = V^+ \oplus V^-$ векторных пространств над полем $\mathbb{F}$ (если пространства V^+ и V^- совпадают, то используется термин ***йорданова тройная система***), снабжённая трилинейной операцией

$$\{\,\} : V^{\pm} \times V^{\mp} \times V^{\pm} \to V^{\pm}$$

удовлетворяющей тождествам

$$\{abc\} = \{cba\}, \tag{143}$$

$$\{ab\{cde\}\} - \{cd\{abe\}\} = \{\{abc\}de\} - \{c\{bad\}e\}. \tag{144}$$

Наиболее важными примерами йордановых пар являются следующие:

$$2\{abc\} = \langle a, b\rangle c + \langle c, b\rangle a, \qquad a, b, c \in \mathbb{F}^N, \tag{145}$$

$$\{abc\} = \langle a, b\rangle c + \langle c, b\rangle a - \langle a, c\rangle b, \qquad a, b, c \in \mathbb{F}^N, \tag{146}$$

$$2\{abc\} = abc + cba, \qquad a, c \in \mathrm{Mat}_{M,N}(\mathbb{F}), \quad b \in \mathrm{Mat}_{N,M}(\mathbb{F}). \tag{147}$$

Важную роль играют операторы $L(a, b) : V \to V$, определяемые формулой

$$L(a, b)(c + d) = \{abc\} - \{bad\}, \quad a, c \in V^+, \quad b, d \in V^-.$$

Соотношение (144) означает, что $L(a, b) \in \mathrm{Der}(V)$. Дифференцирования такого вида называются ***внутренними***. Кроме того, тождество (144) эквивалентно коммутационному соотношению

$$[L(a, b), L(c, d)] = L(\{abc\}, d) - L(c, \{bad\})$$

из которого следует, что все внутренние дифференцирования образуют подалгебру Ли $\mathrm{Inder}(V) \subseteq \mathrm{Der}(V)$. Примером ***внешнего*** дифференцирования служит отображение

$$\sigma(a + b) = a - b, \quad a \in V^+, \quad b \in V^-.$$

Структурная алгебра Ли йордановой пары определяется как

$$\mathrm{strl}(V) = V \oplus \mathrm{Der}(V)$$

с коммутатором $(a, c \in V^+,\ b, d \in V^-,\ F, G \in \mathrm{Der}(V))$

$$[a + b + F, c + d + G] = (F(c) - G(a)) + (F(d) - G(b)) + ([F, G] + L(a, d) - L(c, b)).$$

С йордановыми парами связан целый ряд многополевых систем: аналоги НУШ, НУШП, мКдФ, цепочки Вольтерра, некоторые примеры с рациональной правой частью.

Кадомцева-Петвиашвили уравнение eDDD

[751]

$$u_t = u_{xxx} - 6uu_x + 6\sigma^2 v_{yy}, \quad 2v_x = u$$

Вероятно, самое известное 3-мерное уравнение. Обзор многочисленных результатов можно найти в книгах[5,85,62].

Вспомогательные линейные задачи [511,1450]:

$$\sigma\psi_y = \psi_{xx} - u\psi, \quad \psi_t = 4\psi_{xxx} - \frac{3}{2}u\psi_x - \frac{3}{4}(u_x + 2\sigma v_y)\psi.$$

Преобразование Бэклунда (x, y-part) [421,1396]:

$$(v_n + v_{n+1})_x = (v_n - v_{n+1})^2 - \sigma g_n, \quad g_{n,x} = (v_n - v_{n+1})_y.$$

Высшая симметрия

$$u_{t_4} = u_{xxy} - 4uu_y - 2u_x v_y + w_{yyy}, \quad v_x = u, \quad w_x = v.$$

[5] M.J. Ablowitz, H. Segur. Solitons and the Inverse Scattering Transform. Philadelphia: SIAM, 1981.

[85] V.I. Petviashvili, O.A. Pohotelov. Solitary waves in plasma and atmosphere. Moscow: Energoatomizdat, 1989. (in Russian)

[62] B.A. Kupershmidt. KP or mKP. Noncommutative mathematics of Lagrangian, Hamiltonian, and integrable systems. *Math. Surveys and Monographs* ***78***, Providence, RI: AMS, 2000.

[511] V.S. Dryuma. On the analytic solution of the two-dimensional Korteweg-de Vries equation. *JETP Lett.* ***19:12*** (1974) 753–755.

[1450] V.E. Zakharov, A.B. Shabat. The scheme of integration of nonlinear equations of mathematical physics by inverse scattering method. I, II. *Funct. Anal. Appl.* ***8:3*** (1974) 43–53; ***13:3*** (1979) 13–22.

[421] H.H. Chen. A Bäcklund transformation in two dimensions. *J. Math. Phys.* ***16:12*** (1975) 2382–2384.

[1396] J. Weiss. Modified equations, rational solutions and the Painlevé property for the Kadomtsev-Petviashvili and Hirota-Satsuma equations. *J. Math. Phys.* ***26:9*** (1985) 2174–2180.

Билинейная форма Хироты ($u = 2(\log f)_{xx}$):

$$(D_x D_t + D_x^4 + 3\sigma^2 D_y^2) f \cdot f = 0.$$

N-солитонное решение найдено в [1206]. Солитонные решения изучались также в статьях [998,999] (анализдополнительных ограничений на параметры, ведущих к резонансному взаимодействию солитонов), [606,607,946,1435] и др... Свойства решений существенно зависят от знака σ^2. Если $\sigma^2 > 0$, то солитонное решение устойчиво по отношению к 2-мерным возмущениям, и неустойчиво при $\sigma^2 < 0$.

Локализованное рациональное решение, или ***ламп***

$$u = 2D_x^2 \log((x + ay + (a^2 - b^2)t)^2 + b^2(y + 2at)^2 + 3b^{-2}),$$

было найдено в [947,1209]. В этой работе выведена также формула для мульти-лампового решения, демонстрирующая, что лампы взаимодействуют без сдвига фаз.

Гипотеза Новикова

[1206] J. Satsuma. N-soliton solution of the two-dimensional Korteweg-de Vries equation. *J. Phys. Soc. Japan* ***40*** (1976) 286–290.

[998] J.W. Miles. Obliquely interacting solitary waves. *J. Fluid Mech.* ***79*** (1977) 157–169.

[999] J.W. Miles. Resonantly interacting solitary waves. *J. Fluid Mech.* ***79*** (1977) 171–179.

[606] N.C. Freeman. A two dimensional distributed soliton solution of the KdV equation. *Proc. Roy. Soc. Lond. A* ***366*** (1979) 185–204.

[607] N.C. Freeman. Soliton interactions in two dimensions. *Adv. Appl. Mech.* ***20*** (1980) 1–37.

[946] S.V. Manakov, P.M. Santini, L.A. Takhtajan. Asymptotic behavior of the solutions of the Kadomtsev-Petviashvili equation. *Phys. Lett. A* ***75*** (1980) 451–454.

[1435] A.A. Zaitsev. On the formation of stationary nonlinear waves by superposition of solitons. *Dokl. Akad. Nauk SSSR* ***272:3*** (1983) 583–587.

[947] S.V. Manakov, V.E. Zakharov, L.A. Bordag, V.B. Matveev. Two-dimensional solitons of the KP equation and their interaction. *Phys. Lett. A* ***63:3*** (1977) 205–206.

[1209] J. Satsuma, M.J. Ablowitz. Two-dimensional lumps in nonlinear dispersive systems. *J. Math. Phys.* ***20*** (1979) 1496.

Кадомцева-Петвиашвили уравнение модифицированное eDDD

$$u_t = u_{xxx} - 6u^2 u_x + 6u_x v_y + 3v_{yy}, \quad v_x = u$$

Кадомцева-Петвиашвили уравнение матричное eDDD

$$u_t = u_{xxx} - 3(uu_x + u_x u - v_{yy} + v_y u - uv_y), \quad v_x = u, \quad u \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$$

Кадомцева-Петвиашвили уравнение цилиндрическое eDDD

[73]

$$u_{xt} = (u_{xx} + 3u^2)_{xx} - \frac{u_x}{2t} + 3\sigma^2 \frac{u_{yy}}{t^2} \tag{148}$$

Также: уравнение Джонсона [746].
Точечно эквивалентно уравнению КП [913]:

$$u(x,y,t) = U\Big(x + \frac{y^2 t}{12\sigma^2}, yt, t\Big), \quad U_{XT} = (U_{XX} + 3U^2)_{XX} + 3\sigma^2 U_{YY}.$$

[746] R.S. Johnson. *J. Fluid Mech.* ***97:4*** (1980) 701–719.
[913] V.D. Lipovsky, V.B. Matveev, A.O. Smirnov. *Zap. Semin. LOMI* ***150*** (1986) 70–75.

Калибровочное преобразование

Пример 8. ***Преобразование Лиувилля***

$$dx = r^2 dy, \quad \psi = r\phi, \quad u = q/r^4 + r_{xx}/r$$

связывает две формы уравнения Штурма-Лиувилля:

$$\psi_{xx} = (u(x) - \lambda)\psi \quad \leftrightarrow \quad \phi_{yy} = (q(y) - \lambda r^4(y))\phi.$$

В частности, выбор $r = \psi(x, 0)$ приводит к другой классической форме (так называемой ***акустической спектральной задаче***)

$$\phi_{yy} = -\lambda r^4(y)\phi. \tag{149}$$

Для неё преобразование Дарбу (107) калибровочно эквивалентно [214]:

$$\hat{\phi} = \phi_y/p - \phi, \quad p := \phi_y^{(\alpha)}/\phi^{(\alpha)}, \quad p_y + p^2 = -\alpha r^4, \quad \hat{r} = p/r, \quad \hat{r}^2 d\hat{y} = r^2 dy.$$

[214] V.E. Adler, A.B. Shabat. Dressing chain for the acoustic spectral problem. *Theor. Math. Phys.* ***149:1*** (2006) 1324–1337.

Калоджеро уравнение hDD

[390, 1117]

$$u_{xt} = uu_{xx} + \Phi(u_x)$$

Уравнение типа Лиувилля.
Частный случай: уравнение Хантера-Сакстона [721,1096]

$$u_{xt} = uu_{xx} + \varepsilon u_x^2$$

[721] J.K. Hunter, R. Saxton. Dynamics of director fields. *SIAM J. on Appl. Math.* ***51:6*** (1991) 1498–1521.
[1096] P.J. Olver, P. Rosenau. Tri-Hamiltonian duality between solitons and solitary wave solutions having compact support. *Phys. Rev. E* ***53:2*** (1996) 1900–1906.

Калоджеро-Дегаспериса уравнение, эллиптическое eDD

$$u_t = u_3 - \frac{3u_1u_2^2}{2(u_1^2+1)} - \frac{3}{2}\wp(u)u_1(u_1^2+1) - 2au_1, \quad \dot{\wp}^2 = 4\wp^3 + g_1\wp + g_2$$

Калоджеро-Дегаспериса уравнение, экспоненциальное eDD

$$u_t = u_3 - \frac{1}{2}u_1^3 - \frac{3}{2}(e^{2u} + ae^{-2u} + b)u_1$$

Калоджеро-Мозера модель D

[385, 1017, 222, 1087]

$$\ddot{u}_k = -\sum_{j\neq k} f'(u_k - u_j), \quad j,k = 1,\dots,n, \qquad f(x) = \begin{cases} x^{-2} & \text{рациональный случай} \\ \sinh^{-2} x & \text{гиперболический случай} \\ \wp(x) & \text{эллиптический случай} \end{cases}$$

См. также модель Руйзенарса-Шнайдера

Камассы-Холма уравнение DD

[412, 589, 413, 631]

$$u_t - u_{xxt} + 2ku_x = uu_{xxx} + 2u_x u_{xx} - 3uu_x$$

Представление нулевой кривизны

$$\psi_{xx} = \left(\lambda(u - u_{xx} + k) + \frac{1}{4}\right)\psi, \quad \psi_t = \frac{u_x}{2}\psi + \left(\frac{1}{2\lambda} - u\right)\psi_x$$

Каупа система eDD

[770]

$$u_t = u_{xx} + 2(u+v)u_x, \quad v_t = -v_{xx} + 2(u+v)v_x$$

Преобразование Бэклунда

$$u_{n,x} = (u_n + v_{n+1})(u_{n+1} - u_n + \beta_n), \quad v_{n,x} = (u_{n-1} + v_n)(v_n - v_{n-1} - \beta_{n-1})$$

Принцип нелинейной суперпозиции

$$\tilde{u}_n = u_n - (\beta_{n+1} - \beta_n)\frac{u_n + v_{n+1}}{u_{n-1} + v_{n+1} - \beta_{n-1}}, \quad \tilde{v}_n = v_n + (\beta_{n+1} - \beta_n)\frac{v_n + u_{n-1}}{u_{n-1} + v_{n+1} - \beta_n}$$

Представление нулевой кривизны

$$U = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(u-v) & (u+\lambda)(v+\lambda) \\ 1 & \frac{1}{2}(v-u) \end{pmatrix}, \quad V = (u+v-2\lambda)U + \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(u_x+v_x) & \lambda(u_x - v_x) + u_x v - u v_x \\ 0 & -\frac{1}{2}(u_x+v_x) \end{pmatrix},$$

$$W_n = (u_n + v_{n+1})^{-1/2}\begin{pmatrix} u_n - \lambda & u_n v_{n+1} + (\lambda - \beta_n)(u_n + v_{n+1}) + \lambda^2 \\ 1 & v_{n+1} - \lambda \end{pmatrix}$$

Каупа-Броера система eDD

[771, 358, 1308]

$$u_t = -u_{xx} + 2uu_x + 2v_x, \quad v_t = v_{xx} + 2(uv)_x$$

Каупа-Купершмидта уравнение eDD

[777, 853, 602, 509]

$$u_t = u_5 + 10uu_3 + 25u_1u_2 + 20u^2u_1$$

Пара Лакса $L = D^3 + uD, \quad A = -9L_+^{5/3}$

Кахана-Хироты-Кимуры дискретизация

Пусть дана система ОДУ с квадратичной правой частью

$$x' = Q(x,x) + Ax + b, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

где $Q(x,y) = Q(y,x)$ тензор ранга 3, A матрица и b вектор. Дискретизация, предложенная в работах[752, 753,790] определяется формулой

$$\frac{x_{n+1} - x_n}{\varepsilon} = Q(x_{n+1}, x_n) - Q(x_{n+1}, x_{n+1}) - Q(x_n, x_n) + A(x_{n+1} + x_n) + 2b,$$

определяющей бирациональное отображение $x_{n+1} = f_\varepsilon(x_n)$, причём $x_n = f_{-\varepsilon}(x_{n+1})$. Вообще говоря, этот способ не гарантирует сохранения свойства интегрируемости по Лиувиллю, см. пример ниже. Тем не менее, имеется гипотеза, что если исходная система алгебраически вполне интегрируема, то это же верно и для соответствующего отображения.

Примеры: система Лотки-Вольтерра, волчок Эйлера

[752] W. Kahan. Unconventional numerical methods for trajectory calculations. Unpublished lecture notes (1993).

[753] W. Kahan, R.-C. Li. Unconventional schemes for a class of ordinary differential equations — with applications to the Korteweg-de Vries equation. *Jour. Comp. Phys.* ***134*** (1997) 316–331.

[790] K. Kimura, R. Hirota. Discretization of the Lagrange top. *J. Phys. Soc. Japan* ***69*** (2000) 3193–3199.

Квад-уравнения hΔΔ

Автор: В.Э. Адлер, 21.07.2005; Last mod. 3.12.2008

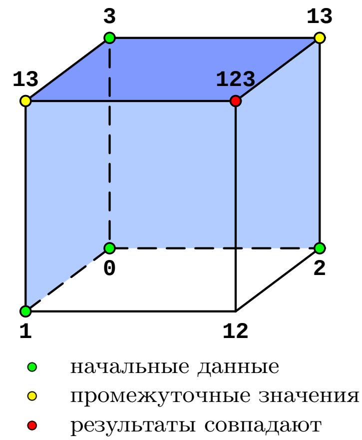
Квад-уравнением называется дискретное уравнение на решётке $\mathbb{Z}^2$, связывающее значения полевой переменной, отвечающие вершинам каждого единичного квадрата. В более общей постановке рассматриваются уравнения на квад-графах, то есть плоских графах с четырёхугольными гранями. Квад-уравнения возникают, как принцип нелинейной суперпозиции для преобразований Бэклунда. При этом из коммутативности ПБ следует свойство 3D-совместности, что и мотивирует его принятие в качестве внутреннего определения интегрируемости для квад-уравнений.

1. 3*D*-совместность

Обозначим вершины куба как показано на рисунке и рассмотрим систему из шести quad-уравнений, ассоциированных с гранями куба (полагаем $u_{ij} := u_{ji}$):

$$Q_{ij}(u, u_i, u_j, u_{ij}) = 0, \quad Q_{ij}(u_k, u_{ik}, u_{jk}, u_{123}) = 0.$$

Эта система называется ***3D-совместной*** [1058,315], или ***совместной вокруг куба***, если значения u_{123}, вычисленные тремя возможными способами, совпадают при любом выборе начальных данных u, u_1, u_2, u_3.



[1058] F.W. Nijhoff, A.J. Walker. The discrete and continuous Painlevé hierarchy and the Garnier system. *Glasgow Math. J.* ***43A*** (2001) 109–123.

[315] A.I. Bobenko, Yu.B. Suris. Integrable systems on quad-graphs. *Int. Math. Res. Notices* (2002) 573–611.

Квад-уравнения h∆∆

Автор: В.Э. Адлер, 21.07.2005; Last mod. 3.12.2008

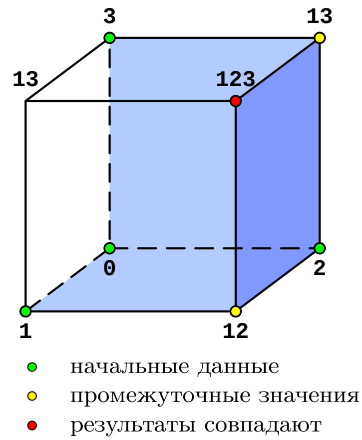
Квад-уравнением называется дискретное уравнение на решётке $\mathbb{Z}^2$, связывающее значения полевой переменной, отвечающие вершинам каждого единичного квадрата. В более общей постановке рассматриваются уравнения на квад-графах, то есть плоских графах с четырёхугольными гранями. Квад-уравнения возникают, как принцип нелинейной суперпозиции для преобразований Бэклунда. При этом из коммутативности ПБ следует свойство 3D-совместности, что и мотивирует его принятие в качестве внутреннего определения интегрируемости для квад-уравнений.

1. $3D$-совместность

Обозначим вершины куба как показано на рисунке и рассмотрим систему из шести quad-уравнений, ассоциированных с гранями куба (полагаем $u_{ij} := u_{ji}$):

$$Q_{ij}(u, u_i, u_j, u_{ij}) = 0, \quad Q_{ij}(u_k, u_{ik}, u_{jk}, u_{123}) = 0.$$

Эта система называется ***$3D$-совместной*** [1058,315], или ***совместной вокруг куба***, если значения u_{123}, вычисленные тремя возможными способами, совпадают при любом выборе начальных данных u, u_1, u_2, u_3.



[1058] F.W. Nijhoff, A.J. Walker. The discrete and continuous Painlevé hierarchy and the Garnier system. *Glasgow Math. J.* ***43A*** (2001) 109–123.

[315] A.I. Bobenko, Yu.B. Suris. Integrable systems on quad-graphs. *Int. Math. Res. Notices* (2002) 573–611.

Квад-уравнения h∆∆

Автор: В.Э. Адлер, 21.07.2005; Last mod. 3.12.2008

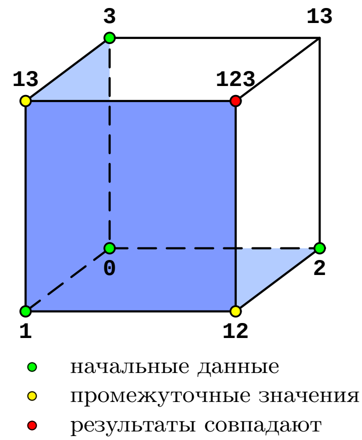
Квад-уравнением называется дискретное уравнение на решётке $\mathbb{Z}^2$, связывающее значения полевой переменной, отвечающие вершинам каждого единичного квадрата. В более общей постановке рассматриваются уравнения на квад-графах, то есть плоских графах с четырёхугольными гранями. Квад-уравнения возникают, как принцип нелинейной суперпозиции для преобразований Бэклунда. При этом из коммутативности ПБ следует свойство 3D-совместности, что и мотивирует его принятие в качестве внутреннего определения интегрируемости для квад-уравнений.

1. $3D$-совместность

Обозначим вершины куба как показано на рисунке и рассмотрим систему из шести quad-уравнений, ассоциированных с гранями куба (полагаем $u_{ij} := u_{ji}$):

$$Q_{ij}(u, u_i, u_j, u_{ij}) = 0, \quad Q_{ij}(u_k, u_{ik}, u_{jk}, u_{123}) = 0.$$

Эта система называется ***$3D$-совместной*** [1058,315], или ***совместной вокруг куба***, если значения u_{123}, вычисленные тремя возможными способами, совпадают при любом выборе начальных данных u, u_1, u_2, u_3.



[1058] F.W. Nijhoff, A.J. Walker. The discrete and continuous Painlevé hierarchy and the Garnier system. *Glasgow Math. J.* ***43A*** (2001) 109–123.

[315] A.I. Bobenko, Yu.B. Suris. Integrable systems on quad-graphs. *Int. Math. Res. Notices* (2002) 573–611.

Пример 9. Дискретное уравнение КдФ

$$(u-u_{ij})(u_i-u_j)=a_i-a_j,\quad (u_k-u_{123})(u_{ik}-u_{jk})=a_i-a_j$$

(параметр a_i ассоциирован с рёбрами куба, параллельными ребру $(0,i)$). Один из способов вычисления:

$$u_{12}=u-\frac{a_1-a_2}{u_1-u_2},\quad u_{13}=u-\frac{a_1-a_3}{u_1-u_3},$$
$$u_{123}=u_1-\frac{a_2-a_3}{u_{12}-u_{13}}=\frac{a_1u_1(u_2-u_3)+a_2u_2(u_3-u_1)+a_3u_3(u_1-u_2)}{a_1(u_2-u_3)+a_2(u_3-u_1)+a_3(u_1-u_2)}.$$

Так как выражение симметрично по индексам, два других способа приводят к этому же результату.

Пример 10. Линейное уравнение

$$u_{ij}-u_i-u_j+u=0,\quad u_{123}-u_{ik}-u_{jk}+u_k=0.$$

Независимо от порядка вычислений имеем $u_{123}=u_1+u_2+u_3-2u$.

2. Список quad-уравнений

Классификация $3D$-совместных quad-уравнений получена в [207] при следующих предположениях:

- $Q_{ij}(u,u_i,u_j,u_{ij})=Q(u,u_i,u_j,u_{ij},a_i,a_j)$ где параметры a_i приписаны к рёбрам, параллельным $(0,i)$;
- функция Q линейна по каждой переменной u: $Q=c_1uu_1u_2u_{12}+\dots+c_{16}$ с коэффициентами, зависящими от a_i;
- уравнения допускают группу симметрий квадрата ($\varepsilon^2=\sigma^2=1$):

$$Q(u,u_1,u_2,u_{12},a_1\alpha_2)=\varepsilon Q(u,u_2,u_1,u_{12},a_2,a_1)=\sigma Q(u_1,u,u_{12},u_2,a_1,a_2);\qquad(150)$$

- ***условие тетраэдральности***: u_{123} как функция от начальных данных не зависит от u (ср. примеры 9 и 10).

[207] V.E. Adler, A.I. Bobenko, Yu.B. Suris. Classification of integrable equations on quad-graphs. The consistency approach. *Commun. Math. Phys.* ***233*** (2003) 513–543.

Теорема 10. *С точностью до дробно-линейной замены переменных и точечной замены параметров $3D$-совместные уравнения, удовлетворяющие перечисленным выше условиям исчерпываются следующими:*

$$a_1(u-u_2)(u_1-u_{12})-a_2(u-u_1)(u_2-u_{12})=\delta^2a_1a_2(a_2-a_1) \tag{Q$_1$}$$

$$\begin{aligned}&a_1(u-u_2)(u_1-u_{12})-a_2(u-u_1)(u_2-u_{12})\\&\qquad+a_1a_2(a_1-a_2)(u+u_1+u_2+u_{12})=a_1a_2(a_1-a_2)(a_1^2-a_1a_2+a_2^2)\end{aligned} \tag{Q$_2$}$$

$$\begin{aligned}&(a_2^2-a_1^2)(uu_{12}+u_1u_2)+a_2(a_1^2-1)(uu_1+u_2u_{12})-a_1(a_2^2-1)(uu_2+u_1u_{12})\\&\qquad=\delta^2(a_1^2-a_2^2)(a_1^2-1)(a_2^2-1)/(4a_1a_2)\end{aligned} \tag{Q$_3$}$$

$$\begin{aligned}&\operatorname{sn}a_1\operatorname{sn}a_2\operatorname{sn}(a_1-a_2)(k^2uu_1u_2u_{12}+1)+\operatorname{sn}a_1(uu_1+u_2u_{12})\\&\qquad-\operatorname{sn}a_2(uu_2+u_1u_{12})-\operatorname{sn}(a_1-a_2)(uu_{12}+u_1u_2)=0,\qquad \operatorname{sn}a\equiv\operatorname{sn}(a;k)\end{aligned} \tag{Q$_4$}$$

$$(u-u_{12})(u_1-u_2)=a_1-a_2 \tag{H$_1$}$$

$$(u-u_{12})(u_1-u_2)+(a_2-a_1)(u+u_1+u_2+u_{12})=a_1^2-a_2^2 \tag{H$_2$}$$

$$a_1(uu_1+u_2u_{12})-a_2(uu_2+u_1u_{12})=\delta(a_2^2-a_1^2) \tag{H$_3$}$$

$$a_1(u+u_2)(u_1+u_{12})-a_2(u+u_1)(u_2+u_{12})=\delta^2a_1a_2(a_1-a_2) \tag{A$_1$}$$

$$(a_2^2-a_1^2)(uu_1u_2u_{12}+1)=a_1(a_2^2-1)(uu_1+u_2u_{12})-a_2(a_1^2-1)(uu_2+u_1u_{12}) \tag{A$_2$}$$

Доказательство основано на соотношениях между аффинно-линейными и биквадратичными многочленами и многочленами 4-й степени. При сделанных предположениях выполняются соотношения

$$Q_{u_2}Q_{u_{12}}-QQ_{u_2u_{12}}=k(a_1,a_2)h(u,u_1,a_1)$$

где

$$k(a_2,a_1)=-k(a_1,a_2),\quad h(u_1,u,a_1)=h(u,u_1,a_1),$$

причём биквадратичный многочлен h удовлетворяет свойству, что многочлен 4-й степени

$$h_{u_1}^2-2hh_{u_1u_1}=r(u)$$

не зависит от параметров уравнения. В силу этого классификация сводится к восстановлению h и Q по многочлену r, который можно привести дробно-линейной заменой к одной из нескольких канонических форм.

Замечание 9. • Уравнение (A_1) сводится к (Q_1) при замене $u_i \to -u_i$; (A_2) сводится к (Q_3) при замене $u_i \to 1/u_i$.

• Уравнения (Q_1)–(Q_3) и (H_1), (H_2) получаются из (Q_4), (H_3) как вырождения или предельные случаи.

• Уравнение (Q_4) определяет принцип нелинейной суперпозиции для уравнения Кричевера-Новикова и, является, в определённом смысле, наиболее фундаментальным дискретным уравнением [217].

• Уравнение (Q_4) приведено в форме, найденной Хиетаринтой [доклад на конференции SIDE-2004]. В работе [207] это уравнение было приведено в гораздо более громоздком виде, связанном с Вейерштрассовой формой эллиптической кривой $A^2 = r(a) = 4a^3 - g_2 a - g_3$.

• Задача классфикации без дополнительных предположений (аффинная линейность, заданная зависимость от параметров, симметрия, свойство тетраэдральности) остаётся открытой. В частности, несколько примеров без свойства тетраэдральности найдены в [686]. Можно доказать, что биквадратики для таких уравнений должны быть вырожденными.

• Известно несколько уравнений с многочленом Q квадратичным по каждой переменной, но все они сводятся к аффинно-линейным преобразованиями типа Миуры.

3. Представление нулевой кривизны

Аффинно-линейное уравнение $Q = 0$ можно интерпретировать, как дробно-линейное преобразование между любой парой переменных, с коэффициентами зависящими от оставшейся пары. Пусть

$$u_{13} = M(u_1, u, a_1, a_3; u_3) = \frac{Au_3 + B}{Cu_3 + D}$$

[217] V.E. Adler, Yu.B. Suris. Q4: Integrable master equation related to an elliptic curve. *Int. Math. Res. Notices* (2004) 2523–2553.

[207] V.E. Adler, A.I. Bobenko, Yu.B. Suris. Classification of integrable equations on quad-graphs. The consistency approach. *Commun. Math. Phys.* ***233*** (2003) 513–543.

[686] J. Hietarinta. A new two-dimensional lattice model that is “consistent around a cube”. *J. Phys. A* ***37:6*** (2004) L67–73.

тогда

$$u_{23} = M(u_2, u, a_2, a_3; u_3), \quad u_{123} = M(u_{12}, u_2, a_1, a_3; u_{23}) = M(u_{12}, u_1, a_2, a_3; u_{13}).$$

Так как композиции дробно-линейных замен отвечает перемножение матриц, то переобозначение $a_3 \to \lambda$ и введение нормирующего множителя приводит к представлению нулевой кривизны

$$L(u_{12}, u_1, a_2, \lambda)L(u_1, u, a_1, \lambda) = L(u_{12}, u_2, a_1, \lambda)L(u_2, u, a_2, \lambda)$$

с матрицей

$$L(u_1, u, a_1, \lambda) = (AD - BC)^{-1/2} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}.$$

Например, в случае дискретного уравнения КдФ (H1) имеем

$$L(u_1, u, a_1, \lambda) = \begin{pmatrix} u & -uu_1 + a_1 - \lambda \\ 1 & -u_1 \end{pmatrix}.$$

4. Трёхногая форма и дискретные цепочки Тоды

Пусть quad-уравнение $Q(u, u_1, u_2, u_{12}, a_1, a_2) = 0$ обладает симметрией квадрата (150). Будем говорить, что оно допускает ***трёхногую форму***, если оно эквивалентно уравнению вида

$$\phi(u, u_{12}, a_1, a_2) = \psi(u, u_1, a_1) - \psi(u, u_2, a_2).$$

Часто удобно использовать также мультипликативный вариант определения

$$F(x, x_{12}, \alpha_1 - \alpha_2) = F(x, x_1, \alpha_1)/F(x, x_2, \alpha_2).$$

Всякому трёхногому уравнению отвечает дискретная цепочка Тоды на планарном графе

$$\sum_n \phi(u, u_{n,n+1}, a_n, a_{n+1}) = 0$$

где сумма берётся по рёбрам, выходящим из вершины u.

Трёхногая форма существует для всех уравнений из приведённого выше списка, см. таблицу. Можно доказать общую формулу

$$\psi(u,u_1,a_1)=\int\frac{du_1}{h(u,u_1,a_1)}+C(u,a_1).$$

Для уравнений (Q_n) существует точечная замена парметров $a=a(\alpha)$, такая, что $\phi(u,u_{12},a_1,a_2)=\psi(u,u_{12},a(\alpha_1-\alpha_2))$. Кроме того, часто удобно также делать замены самих переменных $u=u(x)$;

	$F(x,y,\alpha)$	$u=u(x)$	$a=a(\alpha)$
$(\mathrm{Q}_1)_{\delta=0}$	$\exp(\alpha/(x-y))$	x	α
$(\mathrm{Q}_1)_{\delta=1}$	$\dfrac{x-y+\alpha}{x-y-\alpha}$	x	α
(Q_2)	$\dfrac{(x+y+\alpha)(x-y+\alpha)}{(x+y-\alpha)(x-y-\alpha)}$	x^2	α
$(\mathrm{Q}_3)_{\delta=0}$	$\dfrac{\sinh(x-y+\alpha)}{\sinh(x-y-\alpha)}$	$\exp 2x$	$\exp 2\alpha$
$(\mathrm{Q}_3)_{\delta=1}$	$\dfrac{\sinh(x+y+\alpha)\sinh(x-y+\alpha)}{\sinh(x+y-\alpha)\sinh(x-y-\alpha)}$	$\cosh 2x$	$\exp 2\alpha$
(Q_4)	$\dfrac{\mathrm{sn}(x+\alpha)-\mathrm{sn}\,y}{\mathrm{sn}(x-\alpha)-\mathrm{sn}\,y}\cdot\dfrac{\Theta_4(x+\alpha)}{\Theta_4(x-\alpha)}$	$\mathrm{sn}\,x$	α

$$(\mathrm{H}_1):\quad \frac{a_1-a_2}{u-u_{12}}=u_1-u_2,\qquad (\mathrm{H}_2):\quad \frac{u-u_{12}+a_1-a_2}{u-u_{12}-a_1+a_2}=\frac{u+u_1+a_1}{u+u_2+a_2}$$

$$(\mathrm{H}_3):\quad \frac{a_2u-a_1u_{12}}{a_1u-a_2u_{12}}=\frac{uu_1+\delta a_1}{uu_2+\delta a_2}$$

Замечание 10. Для уравнения (Q_4) с многочленом r в форме Вейерштрасса нога имеет вид

$$F=\frac{\sigma(x+y+\alpha)\sigma(x-y+\alpha)}{\sigma(x+y-\alpha)\sigma(x-y-\alpha)}.$$

5. Многополевые quad-уравнения

Классификация многополевых quad-уравнений вряд ли возможна. Одна из причин заключается в том, что, в отличие от скалярного случая, эти уравнения не являются полиномиальными. Вероятно, простейшим примером служит векторный аналог дискретного уравнения КдФ:

$$u - u_{12} = \frac{a_1 - a_2}{|u_1 - u_2|^2}(u_1 - u_2).$$

Это уравнение допускает интересную редукцию $a_i = -|u_i - u|^2$ [200]. Некоторые другие примеры можно найти в [316,1216].

Неабелевы аналоги для уравнения Кричевера-Новикова (186) известны только для нескольких частных случаев:

- $r = 0$ (Шварц-КдФ). Уравнение, его ПБ и принцип суперпозиции имеют вид

$$u_{t_3} = u_{xxx} - \frac{3}{2}u_{xx}u_x^{-1}u_{xx}, \qquad u_{i,x} = a_i(u - u_i)u_x^{-1}(u - u_i)$$
$$a_1(u - u_2)(u_2 - u_{12})^{-1} = a_2(u - u_1)(u_1 - u_{12})^{-1}$$

- $r = 4$

$$u_{t_3} = u_{xxx} - \frac{3}{2}u_{xx}u_x^{-1}u_{xx} + 6u_x^{-1} + 3[u_x^{-1}, u_{xx}], \qquad u_{i,x} = \frac{1}{a_i}(u - u_i + a_i)u_x^{-1}(u - u_i - a_i)$$
$$a_1(u_1 - u_{12} + a_2)(u - u_1 - a_1)^{-1} = a_2(u_2 - u_{12} + a_1)(u - u_2 - a_2)^{-1}$$

- $r = u^2$

$$u_{t_3} = u_{xxx} - \frac{3}{2}(u_{xx}u_x^{-1}u_{xx} + u_{xx}u_x^{-1}u - uu_x^{-1}u_{xx} - uu_x^{-1}u)$$

---

[200] V.E. Adler. Integrable deformations of a polygon. *Physica D* ***87:1–4*** (1995) 52–57.

[316] A.I. Bobenko, Yu.B. Suris. Integrable non-commutative equations on quad-graphs. The consistency approach. *Lett. Math. Phys.* ***61*** (2002) 241–254.

[1216] W.K. Schief. Isothermic surfaces in spaces of arbitrary dimension: integrability, discretization and Bäcklund transformations. A discrete Calapso equation. *Stud. Appl. Math.* ***106:1*** (2001) 85–137.

$$u_{i,x} = \frac{1}{1-a_i^2}(u - a_i u_i)u_x^{-1}(a_i u - u_i)$$

$$(1-a_1^2)(u_1 - a_2 u_{12})(a_1 u - u_1)^{-1} = (1-a_2^2)(u_2 - a_1 u_{12})(a_2 u - u_2)^{-1}$$

Эти уравнения обладают также трёхногими формами, что приводит к неабелевым дискретным цепочкам типа Тоды.

Кинк

См. также:
решения уравнения sine-Гордон

Киральных полей уравнение hDD

$$u_x=[u,Jv],\quad v_y=[v,Ju],\quad u,v\in\mathbb{R}^3,\quad |u|=|v|=1,\quad J=\operatorname{diag}(a,b,c).$$

Линейная по λ лаксова пара найдена в [349] (с точностью до перехода к переменным светового конуса; $u=(u_1,u_2,u_3)$, $v=(v_1,v_2,v_3)$):

$$U=\begin{pmatrix}0&u_1&u_2&u_3\\-u_1&0&u_3&-u_2\\-u_2&-u_3&0&u_1\\-u_3&u_2&-u_1&0\end{pmatrix}\tilde J,\quad V=\begin{pmatrix}0&v_1&v_2&-v_3\\-v_1&0&v_3&v_2\\-v_2&-v_3&0&-v_1\\v_3&-v_2&v_1&0\end{pmatrix}\tilde J,$$

$$\tilde J=-\frac{1}{2}\operatorname{diag}(\lambda-a-b+c,\lambda-a+b-c,\lambda+a-b-c,\lambda+a+b+c).$$

Преобразование Бэклунда и дискретизация найдены в [1052].

[349] L.A. Bordag, A.B.Yanovski. Polynomial Lax pairs for the chiral $O(3)$-field equations and the Landau-Lifshitz equation. *J. Phys. A* ***28:14*** (1995) 4007–4013.

[1052] F.W. Nijhoff, V.G. Papageorgiou. Lattice equations associated with the Landau-Lifshitz equations. *Phys. Lett. A* ***141:5–6*** (1989) 269–274.

Кирхгофа система D

$$u' = [u, H_u] + [v, H_v], \quad v' = [v, H_u], \quad H = \langle u, Au\rangle + \langle v, Bv\rangle + \langle u, Cv\rangle$$
$$u, v \in \mathbb{R}^3, \quad A, B, C \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{R}), \quad A = \mathrm{diag}(a_1, a_2, a_3), \quad B = B^{\mathsf{T}}$$

Классическая симметрия

Классической симметрией называется локальная 1-параметрическая группа контактных или точечных преобразований, сохраняющая рассматриваемое уравнение. Это понятие применимо ко всем типам дифференциальных уравнений: обыкновенным и в частных производных, а также разностным.

Теория классических симметрий была разработана С. Ли. Современное изложение теории классических и обобщённых эволюционных симметрий можно найти в книгах [83,48,8,82], см. также [1259].

---

[83] L.V. Ovsyannikov. Group analysis of differential equations, New York: Academic Press, 1982.
[48] N.H. Ibragimov. Transformation groups applied to mathematical physics. Dordrecht: Reidel, 1985.
[8] R.L. Anderson, N.H. Ibragimov. Lie-Bäcklund transformations in applications. Philadelphia: SIAM, 1979.
[82] P.J. Olver. Applications of Lie groups to differential equations, 2nd ed., *Graduate Texts in Math.* ***107***, New York: Springer-Verlag, 1993.

Клеточные автоматы

В широком смысле слова ***клеточным автоматом*** называется любая динамическая система, у которой временная и пространственные независимые переменные принимают целочисленные значения, а зависимые переменные принимают значения из конечного множества. В более узком смысле требуется, чтобы динамика описывалась локально, то есть правила перехода $t \to t+1$ должны определяться значениями зависимых переменных в некоторой окрестности каждого узла пространственной решётки.

Пример: система ящиков-шаров.

Колмогорова-Петровского-Пискунова уравнение eDD

[798, 575, 1028]

$$u_t = u_{xx} + \delta(u-\alpha)(u-\beta)(u-\gamma)$$

Также: уравнение ФицХью-Нагумо

Не интегрируемо. Замена $x \to ax$, $t \to a^2 t$, $u \to bu + c$ позволяет привести уравнение к виду

$$u_t = u_{xx} - u(u-1)(u-\alpha).$$

Богатые семейства точных решений найдены в [1005,1074,441].

См. также: уравнения Бюргерса-Хаксли, Фишера.

[1005] R.M. Miura. Accurate computation of the stable solitary wave for the FitzHugh-Nagumo equations. *J. Math. Biol.* ***13*** (1982) 247–269.

[1074] M.C. Nucci, P.A. Clarkson. The nonclassical method is more general than the direct method for symmetry reductions. An example of the Fitzhugh-Nagumo equation. *Phys. Lett. A* ***164:1*** (1992) 49–56.

[441] P.A. Clarkson, E.L. Mansfield. Symmetry reductions and exact solutions of a class of nonlinear heat equations. *Physica D* ***70:3*** (1994) 250–288.

Кортевега-де Фриза уравнение eDD

$$u_t = u_{xxx} + 6uu_x$$

Фундаментальное уравнение, описывающее слабонелинейные волны в одномерной среде со слабой дисперсией.

Оператор рекурсии: $D_x^2 + 4u + 2u_x D_x^{-1}$

Высшие симметрии: $u_{t_{2n+1}} = u_{2n+1} + \dots = \mathrm{const}\, D_x(g_n)$ где $g_{n+1} = (D_x^2 + 4u + 2D_x^{-1})(g_n)$. Производящая функция $g = 1 + g_1/\lambda + g_2/\lambda^2 + \dots$ удовлетворяет уравнению

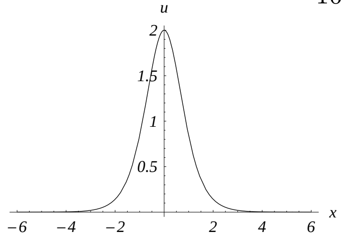
$$g_{xxx} + 4(\lambda + u)g_x + 2u_x g = 0 \quad \Rightarrow \quad 2gg_{xx} - g_x^2 + 4(\lambda + u)g^2 = w(\lambda) \quad \Rightarrow$$

$$8g_{n+1} = \sum_{j=1}^{n-1} g_{j,x} g_{n-j,x} - 2\sum_{j=0}^{n-1} g_j g_{n-j,xx} - 4\sum_{j=1}^{n} g_j g_{n+1-j} - 4u\sum_{j=0}^{n} g_j g_{n-j}.$$

Представление нулевой кривизны

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -u-\lambda & 0 \end{pmatrix}, \quad V_n = (-4)^n \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}G_{n,x} & G_n \\ -\frac{1}{2}G_{n,xx} - (u+\lambda)G_n & \frac{1}{2}G_{n,x} \end{pmatrix}, \quad G_n = \lambda^n + \lambda^{n-1}g_1 + \dots + g_n$$

Солитонные решения КдФ



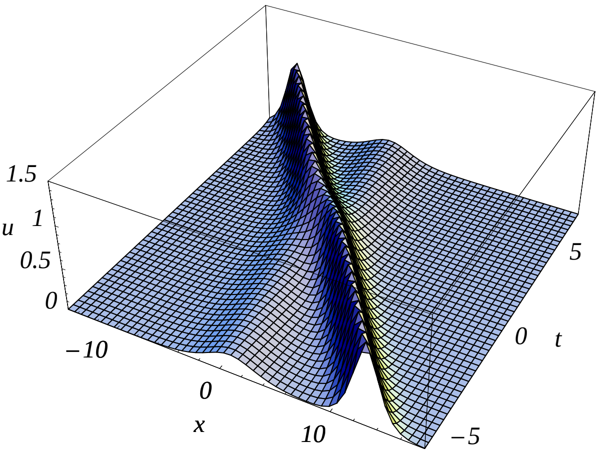
Одно-солитонное решение задаётся формулой

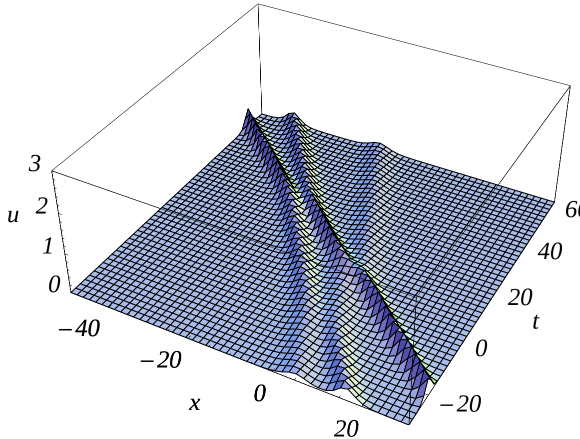
$$u = \frac{2k^2}{\cosh^2(kx + 4k^3t + \delta)}.$$

Формула для N-солитонного решения [1388] имеет вид

$$u = 2D_x^2 \log W[e^{y_1} + e^{-y_1}, \dots, e^{y_n} - (-1)^n e^{-y_n}],$$
$$y_j = k_j x + 4k_j^3 t + \delta_j, \quad 0 < k_1 < \dots < k_n,$$

где W обозначает вронскиан $W[f_1, \dots, f_n] = \det(D_x^{k-1}(f_j))_{j,k=1}^n$.





[1388] H.D. Wahlquist. Bäcklund transformations of potentials of the Korteweg-de Vries equation and the interaction of solitons with cnoidal waves. [109, 162–183].

Кортевега-де Фриза уравнение векторное eDD

$$u_t = u_{xxx} + \langle c, u\rangle u_x + \langle c, u_x\rangle u - \langle u, u_x\rangle c, \qquad u, c \in \mathbb{R}^d, \quad c = \mathrm{const}\,.$$

Кортевега-де Фриза уравнение йорданово eDD

[1314]

$$u_t = u_{xxx} + u \circ u_x, \quad u \in J$$

где J йорданова алгебра. Частными случаями являются векторное и матричное уравнения КдФ.

Кортевега-де Фриза уравнение матричное eDD

$$u_t = u_{xxx} + 3uu_x + 3u_x u, \quad u \in Mat_n$$

Кортевега-де Фриза уравнение модифицированное eDD

$$u_t = u_{xxx} + 6u^2 u_x$$

Кортевега-де Фриза уравнение модифицированное йорданово eDD

$$u_t = u_{xxx} + \{u, u, u_x\}, \quad u \in J,$$

где J тройная йорданова система.

Частными случаями являются следующие векторные и матричные обобщения уравнения мКдФ

$$u_t = u_{xxx} + \langle u, u\rangle u_x, \quad u \in \mathbb{R}^N,$$

$$u_t = u_{xxx} + \langle u, u\rangle u_x + \langle u, u_x\rangle u, \quad u \in \mathbb{R}^N,$$

$$u_t = u_{xxx} + u^2 u_x + u_x u^2, \quad u \in \mathrm{Mat}_N\,.$$

Кортевега-де Фриза уравнение модифицированное матричное – 1 eDD

$$u_t = u_{xxx} + 3u^2u_x + 3u_xu^2, \quad u \in Mat_n \tag{151}$$

Кортевега-де Фриза уравнение модифицированное матричное – 2 eDD

[788, 919]

$$u_t = u_{xxx} + 3[u, u_{xx}] + 6uu_xu, \quad u \in Mat_n \tag{152}$$

Кортевега-де Фриза уравнение потенциальное eDD

$$u_t = u_{xxx} + 6u_x^2$$

Кортевега-де Фриза уравнение сферическое eDD

$$u_t = u_{xxx} + 6uu_x + \frac{u}{t}$$

Не интегрируемо, в отличие от цилиндрического уравнения КдФ.

Кортевега-де Фриза уравнение цилиндрическое eDD

$$u_t = u_{xxx} + 6uu_x - \frac{u}{2t} \qquad (153)$$

Лаксова пара [512]:

$$-t\psi_{xx} = \Big(\frac{x}{12} + tu + \lambda\Big)\psi, \quad \psi_t = 4\psi_{xxx} + 6u\psi_x + 3u_x\psi.$$

Точечное преобразование в уравнение КдФ [927]:

$$u(x,t) = \frac{1}{t}U(xt^{-1/2}, -2t^{-1/2}) - \frac{x}{12t}, \quad U_T = U_{XXX} + 6UU_X.$$

См. также [745,73]. Другая эквивалентная форма [399]:

$$u_t = u_{xxx} + 6t^{-1/2}uu_x.$$

Оператор рекурсии для этой последней формы [1077]

$$L = tD_x^2 + 4t^{1/2}u + \frac{1}{3}x + (2t^{1/2}u_x + \frac{1}{6})D_x^{-1}.$$

Многополевые обобщения изучались в [664].

[512] V.S. Dryuma. *Izvestiya AN MSSR* ***1976:3*** (1976) 89.

[927] A. Lugovtsov, B. Lugovtsov. *Dynamika sploshnoi sredy* ***1*** (1969) 195–200. (in Russian)

[745] R.S. Johnson. On the inverse scattering transform, the cylindrical Korteweg-de Vries equation and similarity solutions. *Phys. Lett. A* ***72:3*** (1979) 197–199.

[73] V. Matveev, M. Salle. Darboux transformations and solitons. Springer-Verlag, 1991.

[399] F. Calogero, A. Degasperis. *Lett. Nuovo Cim.* ***23*** (1978) 150.

[1077] W. Oevel, A.S. Fokas. *J. Math. Phys.* ***25*** (1984) 918.

[664] M. Gũrses, A. Karasu, R. Turhan. Non-autonomous Svinolupov Jordan KdV Systems. SI/0101031 (2001).

Кортевега-де Фриза уравнение с шварцианом eDD

$$u_t = u_{xxx} - \frac{3u_{xx}^2}{2u_x} + au_x$$

Наиболее вырожденный случай уравнения Кричевера-Новикова.

Кортевега-де Фриза уравнение , супер- eDD

[856]

$$u_t = \frac{1}{4}u_{xxx} + \frac{3}{2}uu_x + 3vv_x, \quad v_t = v_{xxx} + \frac{3}{2}uv_x + \frac{3}{4}u_x v$$

КдФ-типа уравнения, классификация eDD

Авторы: А.Г. Мешков, В.В. Соколов, 2009

1. Список интегрируемых уравнений

Уравнениями типа КдФ называются интегрируемые эволюционные уравнения третьего порядка с постоянной сепарантой:

$$u_t = u_3 + F(u, u_1, u_2), \tag{154}$$

Их исчерпывающая классификация была полученна Свинолуповым и Соколовым [1317,1318] (точнее говоря, в этих работах была решена чуть более общая задача с функцией F, явно зависящей от x, но оказывается, что при этом не появляется существенно новых ответов). Доказательство следующей теоремы можно превратить в тест на интегрируемость, приложимый к заданному уравнению вида (154). Более того, если уравнение оказывается интегрируемым, то замена переменных, связывающая его с одним из уравнений списка находится конструктивно.

Теорема 11. *Всякое нелинейное интегрируемое уравнение (154) точечно эквивалентно уравнению из следующего списка:*

$$u_t = u_3 + uu_1, \tag{K$_1$}$$

$$u_t = u_3 + u^2 u_1, \tag{K$_2$}$$

$$u_t = u_3 + u_1^2, \tag{K$_3$}$$

[1317] S.I. Svinolupov, V.V. Sokolov. On evolution equations with nontrivial conservation laws. *Funct. Anal. Appl.* ***16:4*** (1982) 86–87.

[1318] S.I. Svinolupov, V.V. Sokolov. On the conservation laws for equations with nontrivial Lie-Bäcklund algebra. pp. 53-67 in *“Integrable system”, ed. A.B. Shabat*, Ufa, 1982. [in Russian]

$$u_t = u_3 - \frac{1}{2}u_1^3 + (c_1 e^{2u} + c_2 e^{-2u})u_1, \tag{K$_4$}$$

$$u_t = u_3 - \frac{3u_1 u_2^2}{2(u_1^2+1)} + c_1(u_1^2+1)^{3/2} + c_2 u_1^3, \tag{K$_5$}$$

$$u_t = u_3 - \frac{3u_1 u_2^2}{2(u_1^2+1)} - \frac{3}{2}P(u)u_1(u_1^2+1), \tag{K$_6$}$$

$$u_t = u_3 - \frac{3(u_2^2-1)}{2u_1} - \frac{3}{2}P(u)u_1^3, \tag{K$_7$}$$

$$u_t = u_3 - \frac{3u_2^2}{2u_1}, \tag{K$_8$}$$

$$u_t = u_3 - \frac{3u_2^2}{4u_1} + c_1 u_1^{3/2} + c_2 u_1^2, \quad (c_1, c_2) \neq 0, \tag{K$_9$}$$

$$u_t = u_3 - \frac{3u_2^2}{4u_1} + cu, \tag{K$_{10}$}$$

$$\begin{aligned} u_t = u_3 &- \frac{3u_2^2}{4(u_1+1)} - 3u_1(u_1+1) + 3u_2\sqrt{u_1+1} \\ &- 6u_1(u_1+1)^{3/2} + 3u_1(u_1+2)(u_1+1), \end{aligned} \tag{K$_{11}$}$$

$$\begin{aligned} u_t = u_3 &- \frac{3u_2^2}{4(u_1+1)} - 3\frac{u_2(u_1+1)\cosh u}{\sinh u} + 3\frac{u_2\sqrt{u_1+1}}{\sinh u} \\ &- 6\frac{u_1(u_1+1)^{3/2}\cosh u}{\sinh^2 u} + 3\frac{u_1(u_1+2)(u_1+1)}{\sinh^2 u} + u_1^2(u_1+3), \end{aligned} \tag{K$_{12}$}$$

$$u_t = u_3 + 3u^2 u_2 + 3u^4 u_1 + 9uu_1^2, \tag{K$_{13}$}$$

$$u_t = u_3 + 3uu_2 + 3u^2 u_1 + 3u_1^2, \tag{K$_{14}$}$$

где $(P')^2 = 4P^3 - g_2 P - g_3$ *и* k, c, c_1, c_2, g_2, g_3 *произвольные постоянные.*

Замечание 11. Уравнения (K$_1$)–(K$_9$) S-интегрируемы, а (K$_{10}$)–(K$_{14}$) C-интегрируемы.

Замечание 12. Уравнения

$$u_t = u_3 + \frac{3((Q-u_1^2)_x)^2}{8u_1(Q-u_1^2)} - \frac{1}{2}Q''u_1 \qquad \text{и} \qquad u_t = u_3 - \frac{3(u_{xx}^2+Q)}{2u_1},$$

где $Q = c_4u^4 + c_3u^3 + c_2u^2 + c_1u + c_0$ произвольный многочлен четвертой степени, являются другими каноническими формами уравнений (K_6) и (K_7) соответственно. А именно, при $Q \neq 0$ замена $u = f(v)$, где $(f')^2 = -Q(f)$, сводит эти уравнения к уравнениям (K_6) и (K_7) для переменной v.

Замечание 13. Точечные замены, используемые для приведения уравнений типа КдФ к одному из перечисленных, достаточно просты. Весь класс уравнений (154) допускает следующие точечные преобразования:

$$\text{(конформные преобразования)} \qquad \tilde u = \phi(u), \tag{155}$$

$$\text{(преобразование Галилея)} \qquad \tilde x = x + ct, \qquad F \to F - cu_1, \tag{156}$$

$$\text{(растяжение)} \qquad \tilde x = ax, \quad \tilde t = a^3 t, \qquad F(u,u_1,u_2) \to a^{-3}F(u,au_1,a^2u_2). \tag{157}$$

Кроме того, подклассы уравнений специального вида допускают дополнительные точечные преобразования. Если функция F не зависит от u, то допускается преобразование

$$\tilde u = u + c_1x + c_2t, \qquad F(u_1,u_2) \to F(u_1 - c_1, u_2) + c_2, \tag{158}$$

а если функция F однородна степени 1: $F(\lambda u, \lambda u_1, \lambda u_2) = \lambda F(u,u_1,u_2)$, то допускается преобразование

$$\tilde u = u\exp(at + bx), \qquad F \to F + au, \quad u_n \to (\partial_x - b)^n u. \tag{159}$$

Приведенная ниже схема доказательства одновременно дает алгоритм приведения интегрируемого уравнения к одной из канонических форм (K_1)–(K_{14}).

2. Необходимые условия интегрируемости

Определение интегрируемости уравнений типа КдФ означает наличие у них высших инфинитезимальных симметрий и/или высших законов сохранения. Классификация уравнений с такими свойствами основана на симметрийном подходе, особенно эффективном в случае эволюционных уравнений с одной пространственной переменной.

Инвариантное описание всех интегрируемых уравнений (154) даётся следующим утверждением, означающим, что интегрируемое уравнение должно обладать локальными законами сохранения $(\rho_n)_t = (\sigma_n)_x$, $n = 0, 1, \ldots$, плотности и токи которых рекуррентно определяются по правой части уравнения. Напомним, что эти законы сохранения называются каноническими. Следует пояснить, что хотя симметрийный подход даёт лишь необходимые условия интегрируемости, на практике для классификации достаточно их конечного числа (в рассматриваемом случае — четырёх), после чего интегрируемость для каждого найденного уравнения устанавливается в индивидуальном порядке.

Теорема 12. *Уравнение (154) обладает бесконечной серией высших симметрий, если и только если выполнены следующие условия интегрируемости*

$$D_t(F_{u_2}) = D_x(\sigma_0), \tag{160}$$

$$D_t(3F_{u_1} - F_{u_2}^2) = D_x(\sigma_1), \tag{161}$$

$$D_t(9\sigma_0 + 2F_{u_2}^3 - 9F_{u_2}F_{u_1} + 27F_u) = D_x(\sigma_2), \tag{162}$$

$$D_t(\sigma_1) = D_x(\sigma_3). \tag{163}$$

где $F_{u_i} = \partial_{u_i}(F)$, D_x оператор полной производной по x, а D_t эволюционное дифференцирование в силу уравнения (154).

Относительно доказательства данной теоремы, отметим, что условия интегрируемости выводятся из существования формальной симметрии. Имеется и другой способ [423,983] вычисления канонических

---

[423] H.H. Chen, Y.C. Lee, C.S. Liu. Integrability of nonlinear Hamiltonian systems by inverse scattering method. *Physica Scr.* ***20*** (1979) 490–492.

[983] A.G. Meshkov. Necessary conditions of the integrability. *Inverse Problems* ***10*** (1994) 635–653.

плотностей через логарифмическую производную формальной собственной функции для оператора линеаризации уравнения (154). Он приводит к рекуррентной формуле

$$\rho_{n+2} = \frac{1}{3}\left[\sigma_n - \delta_{n,0}F_u - F_{u_1}\rho_n - F_{u_2}\left(D_x(\rho_n) + 2\rho_{n+1} + \sum_{s=0}^{n}\rho_s\rho_{n-s}\right)\right] - \sum_{s=0}^{n+1}\rho_s\rho_{n+1-s}$$
$$- \frac{1}{3}\sum_{0\le s+k\le n}\rho_s\rho_k\rho_{n-s-k} - D_x\left[\rho_{n+1} + \frac{1}{2}\sum_{s=0}^{n}\rho_s\rho_{n-s} + \frac{1}{3}D_x(\rho_n)\right], \qquad n \ge 0,$$

где $\delta_{i,j}$ символ Кронекера, с начальными условиями

$$\rho_0 = -\frac{1}{3}F_{u_2}, \qquad \rho_1 = \frac{1}{9}F_{u_2}^2 - \frac{1}{3}F_{u_1} + \frac{1}{3}D_x(F_{u_2}).$$

Данная рекуррентная формула публикуется впервые. Легко проверить, что первые четыре условия из этой серии эквивалентны условиям (160)–(163).

Чтобы эффективно использовать канонические законы сохранения для классификации, удобно сначала изучить возможную структуру плотностей локальных законов сохранения для уравнений вида (154).

Лемма 11. *Пусть $\rho(u, u_1, u_2)$ сохраняющаяся плотность для уравнения (154). Тогда*

$$\rho_{u_2u_2u_2} = 0, \qquad \rho_{u_2u_2u_1} + \rho_{u_*u_*u_*} = \frac{2}{3}F_{u_2}\rho_{u_2u_2}. \tag{164}$$

При доказательстве используется следующий алгоритм проверки того, является ли данная функция $S(u, u_1, \dots, u_n)$ полной производной по x (т.е. принадлежит $\operatorname{Im} D_x$). Во-первых, S должна быть линейна по старшей производной u_n. Если это выполнено, то, как легко видеть, из S можно вычесть полную производную так, что разность имеет порядок, меньший, чем n. Продолжая эту процедуру понижения порядка, мы либо придём к выражению, нелинейному по старшей производной, либо получим ноль.

Альтернативный способ основан на известном свойстве

$$S \in \mathbb{R} \oplus \operatorname{Im} D_x \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\delta S}{\delta u} = 0, \qquad \frac{\delta}{\delta u} := \sum_{k=0}^{\infty}(-D_x)^k\partial_{u_k}$$

оператора вариационной производной. Хотя теоретически этот способ более прозрачен, первый способ гораздо более эффективен с вычислительной точки зрения.

Покажем, как можно использовать формулы (164) при классификации уравнений (154).

Лемма 12. *Пусть для уравнения (154) выполнено первое из условий интегрируемости (160). Тогда F квадратичная функция по u_2.*

Доказательство. Согласно первому из уравнений (164),

$$F_{u_2} = f_1 u_2^2 + f_2 u_2 + f_3.$$

Подставив это выражение во второе из уравнений (164), получаем

$$f_{1,u} u_1 + f_{1,u_1} u_2 = \frac{2}{3} f_1 (f_1 u_2^2 + f_2 u_2 + f_3).$$

Так как f_i не зависят от u_2, то приравнивая коэффициенты при u_2^2, получаем $f_1 = 0$. Проинтегрировав уравнение $F_2 = f_2 u_2 + f_3$, приходим к требуемому результату. ■

Аналогичные вычисления, связанные со следующими условиями интегрируемости, позволяют уточнить возможную зависимость функции F от u_1 и, в конце концов, с точностью указанных выше замен, получить полный список интегрируемых уравнений (154). Краткий набросок этих рассуждений приведён в следующем разделе.

3. Схема классификации

Согласно Лемме 12, уравнение имеет вид

$$u_t = u_3 + A_2(u_1, u) u_2^2 + A_1(u_1, u) u_2 + A_0(u_1, u), \tag{165}$$

причем эта форма уравнения не изменяется при любых допустимых преобразованиях (155)–(159). Из условия интегрируемости (161) нетрудно извлечь, что

$$9A_{2,u_1u_1} - 36A_2 A_{2,u_1} + 16A_2^3 = 0,$$

откуда

$$A_2 = -\frac{3B_{u_1}}{4B}, \qquad \text{где} \quad B_{u_1u_1u_1} = 0.$$

Случай 1. Пусть многочлен B имеет степень 2: $B = u_1^2 + B_1(u)u_1 + B_0(u)$, тогда условие (161) дает

$$A_1 = -\frac{3B_u}{2B}u_1.$$

Для любого такого уравнения условие (160) выполнено. Это означает, что функция σ_0 известна и мы, при желании, можем пользоваться условием (162). Из условия (161) находим, что $B_1B_0' = 2B_1'B_0$. Нетрудно проверить, что из этого соотношения следует, что подходящим точечным преобразованием $u \to \phi(u)$ можно сделать многочлен B независящим от u: $B = u_1^2 + \beta_1 u_1 + \beta_0$. Ясно, что тогда $A_1 = 0$. Для функции A_0 находим, что

$$2BA_{0,u_1u_1u_1u_1} + 3B'A_{0,u_1u_1u_1} - 3B''A_{0,u_1u_1} = 0.$$

1.1. В случае, когда корни B различны, решением этого уравнения является

$$A_0 = k_1(u)B^{3/2} + k_2(u)(2u_1^3 + 3\beta_1 u_1^2) + k_3(u)u_1 + k_4(u).$$

Далее, из условия (161) следует, что если коэффициент $k_2(u)$ постоянен, то постоянны все остальные коэффициенты и мы (с точностью до допустимых преобразований) приходим к уравнению (K_5). В случае $k_2' \neq 0$ получаем уравнение (K_6). Таким образом, в случае различных корней для полной классификации достаточно двух первых условий интегрируемости.

1.2. В случае кратного корня $B = (u_1 + z)^2$ имеем

$$A_0 = \frac{k_1(u)}{u_1 + z} + k_2(u)(u_1^3 + 3zu_1^2) + k_3(u)u_1 + k_4(u).$$

В случае $z \neq 0$ все коэффициенты оказываются постоянными и мы можем воспользоваться преобразованиями (155)–(158) для приведения уравнения к виду (K_8) или к (K_7) с $P(u) = const$.

В случае $z = 0$ мы все ещё не использовали преобразований $u \to \phi(u)$ для приведения уравнения к каноническому виду. Таким преобразованием можно сделать функцию $k_1(u) \neq 0$ постоянной, а если $k_1(u) = 0$, то можно получить $k_2 = 0$.

Если $k_1 = 0$, то $k_2 = 0$, и в силу условия (161), $k_3' = 0$. Далее из условия (163) следует $k_4' = 0$, и мы возвращаемся к тому, что получено выше при $z \neq 0$.

Если $k_1 \neq 0$, то, с точностью до преобразования (157), $k_1 = 3/2$. Затем из условия (161) получаем $k_3' = k_4' = 0$, $k_4 k_2' = 0$. Отсюда в случае $k_2' = 0$ следует то же, что получено в случае $z \neq 0$. В случае $k_2' \neq 0$ имеем $k_4 = 0$, а постоянная k_3 уничтожается преобразованием Галилея. Используя для уточнения вида функции k_2 условие (163), получаем уравнение (K_7).

Случай 2. Пусть многочлен B имеет первую степень: $B = u_1 + B_0(u)$. Тогда преобразованием $u \to \phi(u)$ можно превратить B_0 в постоянную: $B = u_1 + \beta_0$. В таком случае из первого условия интегрируемости (160) следует

$$A_1 = q_1(u) + q_2(u)u_1 + q_3(u)\sqrt{u_1 + \beta_0}, \quad 3q_1' = q_3^2, \quad 3q_3' = q_2 q_3, \quad q_3(q_1 - \beta_0 q_2) = 0. \tag{166}$$

2.1. Рассмотрим вначале случай $q_3 = 0$, тогда $A_1 = c_0 + q_2(u)u_1$, и условие (160) выполнено.

2.1.a. Если $\beta_0 = 0$, то, используя подходящее преобразование $u \to \phi(u)$, можно считать, что $q_2(u) = 0$. Далее из условий (161) и (162) следует, что $c_0 = 0$ и

$$A_0 = c_1 u_1^{3/2} + c_2 u_1^2 + c_3 u_1 + c_4 u + c_5,$$

причем $c_1 c_4 = 0$. Условие (163) даёт лишь одно ограничение $c_2 c_4 = 0$.

Если $c_4 = 0$, то, с точностью до преобразований (155)–(159), получаем уравнение (K_9). В противном случае, с точностью до преобразований (155)–(159), получаем уравнение (K_{10}).

2.1.b. Если $\beta_0 \neq 0$, то из условий (161) и (162) нетрудно найти, что правая часть уравнения не зависит от u. После этого преобразованием $u \to u - \beta_0 x$ можно сделать постоянную β_0 равной нулю и свести дело к предыдущему случаю.

2.2. В случае $q_3 \neq 0$ из уравнений (166) следует $\beta_0 \neq 0$. С точностью до масштабного преобразования и сдвига по u можно получить из (166) $\beta_0 = 1$, $q_1 = q_2 = -3\coth u$, $q_3 = 3\sinh^{-1} u$ или $\beta_0 = 1$, $q_1 = q_2 = -3$, $q_3 = 0$. Далее из условий (160) и (161) находим A_0, и получаем уравнения (K_{11}), (K_{12}).

Случай 3. Пусть B имеет нулевую степень, тогда $A_2 = 0$. Условие интегрируемости (160) даёт $A_1 = q(u) + p(u)u_1$. Использовав преобразование вида $u \to \phi(u)$, можно считать, что $p(u) = 0$. Из условия (161) следует, что

$$A_0 = p_1(u) + p_2(u)u_1 + p_3(u)u_1^2 + cu_1^3, \quad qc = qp_3' = 0.$$

Дальнейший анализ существенно зависит от функции $A_1 = q(u)$.

3.1. Если $q = 0$, то $\rho_0 = 0$, а условие (161) приводит, в частности, к уравнениям $p_2'p_1 = p_2'p_3 = 0$. Если $p_2' \neq 0$, то из условия (160) следует либо уравнение (K_4) (при $c \neq 0$), либо (K_1) или (K_2). Если $p_2' = 0$, то, привлекая еще условия (162) и (163), получаем, что либо уравнение линейно, либо все p_i постоянные. Далее, с помощью преобразований (155)–(159) приходим либо к (K_3), либо к (K_4) при $c_1 = c_2 = 0$.

3.2. Если $q \neq 0$, то, с учетом равенств $c = p_3' = 0$, из условия (160) следует $q = c_1 + c_2u + c_3u^2$, $q'p_1 = 0$. Дальнейший несложный анализ с использованием всех четырёх условий интегрируемости показывает, что с точностью до преобразований (155)–(159) уравнение совпадает с одним из уравнений (K_{12}), (K_{13}).

КдФ-типа уравнения высшие eDD

Автор: В.В. Соколов, 04.06.2008

Интегрируемые уравнения 5-го порядка проклассифицированы только в случае постоянной сепаранты

$$u_t = u_5 + F(u_4, u_3, u_2, u_1, u). \tag{167}$$

Полный список можно найти в работе [993]. Здесь представлены лишь наиболее важные уравнения. Уравнения (169)–(176) появились в [602,1260,509,510,611]. Остальная часть списка появилась впервые в [993] (отметим, что уравнение (179) приведено там с опечаткой).

Классификация основана на анализе необходимых условий интегрируемости. На первых шагах доказывается, что любое уравнение (167) обладающее высшими законами сохранения имеет вид

$$\begin{gathered}u_t = u_5 + A_1 u_2 u_4 + A_2 u_4 + A_3 u_3^2 + A_4 u_2^2 u_3 + A_5 u_2 u_3 + A_6 u_3 \\ +A_7 u_2^4 + A_8 u_2^3 + A_9 u_2^2 + A_{10} u_2 + A_{11}, \quad A_i = A_i(u, u_1).\end{gathered}$$

Дальнейший анализ разбивается на множество подслучаев и может быть весьма длинным для наиболее вырожденных из них. Например, уравнение [795] $u_t = u_5 + uu_1$ неинтегрируемо, но проходит через первые 10 условий интегрируемости.

---

[993] A.V. Mikhailov, A.B. Shabat, V.V. Sokolov. The symmetry approach to classification of integrable equations. [162, 115–184]

[602] A.P. Fordy, J.D. Gibbons. Some remarkable nonlinear transformations. *Phys. Lett. A* ***75:5*** (1980) 325.

[1260] V.V. Sokolov, A.B. Shabat. (1980)

[509] V.G. Drinfeld, V.V. Sokolov. Lie algebras and equations of Korteweg-de Vries type. *J. Soviet Math.* ***30*** (1985) 1975–2036.

[510] V.G. Drinfeld, S.I. Svinolupov, V.V. Sokolov. Classification of fifth order evolution equations with infinite series of conservation laws. *Dokl. Akad. Nauk Ukr.SSR* ***10 A*** (1985) 8–10.

[611] Fujimoto, Watanabe (1983)

[993] A.V. Mikhailov, A.B. Shabat, V.V. Sokolov. The symmetry approach to classification of integrable equations. [162, 115–184]

[795] Kiyotsugu, Toshio. *J. Phys. Soc. Japan* ***50:2*** (1981) 361–362.

1. Полиномиальные и экспоненциальные уравнения

Симметрия КдФ (K_1) $$u_t = u_5 + 10uu_3 + 20u_1u_2 + 30u^2u_1, \tag{168}$$

Ур. Савады-Котера $$u_t = u_5 + 5uu_3 + 5u_1u_2 + 5u^2u_1, \tag{169}$$

Ур. Каупа-Купершмидта $$u_t = u_5 + 5uu_3 + \frac{25}{2}u_1u_2 + 5u^2u_1, \tag{170}$$

$$u_t = u_5 + 5u_1u_3 + \frac{5}{3}u_1^3, \tag{171}$$

$$u_t = u_5 + 5u_1u_3 + \frac{15}{4}u_2^2 + \frac{5}{3}u_1^3, \tag{172}$$

[602, 1260, 509] $$u_t = u_5 + 5(u_1 - u^2)u_3 + 5u_2^2 - 20uu_1u_2 - 5u_1^3 + 5u^4u_1, \tag{173}$$

$$u_t = u_5 + 5(u_2 - u_1^2)u_3 - 5u_1u_2^2 + u_1^5, \tag{174}$$

[510] $$\begin{aligned} u_t &= u_5 + 5(u_2 - u_1^2 + \lambda_1 e^{2u} - \lambda_2^2 e^{-4u})u_3 - 5u_1u_2^2 \\ &\quad + 15(\lambda_1 e^{2u} + 4\lambda_2^2 e^{-4u})u_1u_2 + u_1^5 - 90\lambda_2^2 e^{-4u}u_1^3 \\ &\quad + 5(\lambda_1 e^{2u} - \lambda_2^2 e^{-4u})^2 u_1, \end{aligned} \tag{175}$$

[611] $$\begin{aligned} u_t &= u_5 + 5(u_2 - u_1^2 - \lambda_1^2 e^{2u} + \lambda_2 e^{-u})u_3 - 5u_1u_2^2 \\ &\quad - 15\lambda_1^2 e^{2u}u_1u_2 + u_1^5 + 5(-\lambda_1^2 e^{2u} + \lambda_2 e^{-u})^2 u_1. \end{aligned} \tag{176}$$

Замены:

$(171) \to (169): \quad u_1 = \tilde{u};$
$(172) \to (170): \quad u_1 = \tilde{u};$
$(173) \to (169): \quad -u_1 - u^2 = \tilde{u};$
$(173) \to (170): \quad 2u_1 - u^2 = \tilde{u};$
$(174) \to (173): \quad u_1 = \tilde{u};$
$(175) \to (170): \quad 2u_2 - u_1^2 \pm 6\lambda_2 e^{-2u}u_1 + \lambda_1 e^{2u} - \lambda_2^2 e^{-4u} = \tilde{u};$
$(176) \to (169): \quad -u_2 - u_1^2 \pm 3\lambda_1 e^{u}u_1 - \lambda_1^2 e^{2u} + \lambda_2 e^{-u} = \tilde{u};$
$(175)|_{\lambda_1=-\lambda^2,\lambda_2=0} = (176)|_{\lambda_1=\lambda,\lambda_2=0};$
$(175)|_{\lambda_1=\lambda_2=0} = (176)|_{\lambda_1=\lambda_2=0} = (174).$

2. Рациональные и эллиптические уравнения

$$u_t = u_5 - \frac{5}{u_1}u_2u_4 + \frac{5}{u_1^2}u_2^2u_3 + 5\Big(\frac{\mu_1}{u_1} + \mu_2u_1^2\Big)u_3 - 5\Big(\frac{\mu_1}{u_1^2} + \mu_2u_1\Big)u_2^2 - 5\frac{\mu_1^2}{u_1} + 5\mu_1\mu_2u_1^2 + \mu_2^2u_1^5, \tag{177}$$

$$\begin{aligned} u_t = u_5 &- \frac{5}{u_1}u_2u_4 - \frac{15}{4u_1}u_3^2 + \frac{65}{4u_1^2}u_2^2u_3 + 5\Big(\frac{\mu_1}{u_1} + \mu_2u_1^2\Big)u_3 \\ &- \frac{135}{16u_1^3}u_2^4 - 5\Big(\frac{7\mu_1}{4u_1^2} - \frac{\mu_2u_1}{2}\Big)u_2^2 - 5\frac{\mu_1^2}{u_1} + 5\mu_1\mu_2u_1^2 + \mu_2^2u_1^5, \end{aligned} \tag{178}$$

$$\begin{aligned} u_t = u_5 &- \frac{5}{2u_1}u_2u_4 - \frac{5}{4u_1}u_3^2 + \frac{5}{u_1^2}u_2^2u_3 + \frac{5u_1^{-1/2}}{2}u_2u_3 + 5(u_1 - 2\mu u_1^{1/2} + \mu^2)u_3 - \frac{35}{16u_1^3}u_2^4 \\ &- \frac{5u_1^{-3/2}}{3}u_2^3 + 5\Big(\mu u_1^{-1/2} - \frac{3\mu^2}{4u_1} - \frac{1}{4}\Big)u_2^2 + \frac{5u_1^3}{3} - 8\mu u_1^{5/2} + 15\mu^2u_1^2 - \frac{40\mu^3u_1^{3/2}}{3} + 5\mu^4u_1, \end{aligned} \tag{179}$$

$$\begin{aligned} u_t = u_5 &- \frac{15(R^5 + 2R^2)}{2(R^3-1)^2}u_2u_4 - \frac{45R^2}{4(R^3-1)^2}u_3^2 + \frac{45(R^{10} + 22R^7 + 13R^4)}{4(R^3-1)^4}u_2^2u_3 + 5\mu R^2u_3 \\ &- \frac{3645(2R^{12} + 4R^9 + R^6)}{16(R^3-1)^6}u_2^4 - \frac{15\mu(2R^7 + 7R^4)}{4(R^3-1)^2})u_2^2 + \frac{2\mu^2}{3}R^5 - \frac{5\mu^2}{3}R^2, \end{aligned} \tag{180}$$

$$\begin{aligned} u_t = u_5 &- \frac{15(R^5 + 2R^2)}{2(R^3-1)^2}u_2u_4 - \frac{45R^2}{4(R^3-1)^2}u_3^2 + \frac{45(R^{10} + 22R^7 + 13R^4)}{4(R^3-1)^4}u_2^2u_3 \\ &- \frac{3645(2R^{12} + 4R^9 + R^6)}{16(R^3-1)^6}u_2^4 - 5\Omega\frac{5R^6 + 2R^3 + 2}{9R^4}u_3 + 5\Omega\frac{10R^9 + 39R^6 + 36R^3 - 4}{12R^2(R^3-1)^2}u_2^2 \\ &- 5\Omega'\frac{10R^9 - 3R^6 + 12R^3 + 8}{54R^6}u_2 - 5\Omega^2\frac{14R^9 + 39R^6 + 24R^3 + 4}{243R^{10}(R^3-1)^2}. \end{aligned} \tag{181}$$

В (180), (181) $R = R(u_1)$ определяется, как решение алгебраического уравнения

$$2R^3 - 3u_1R^2 + 1 = 0,$$

а $\Omega(u)$ есть любое непостоянное решение уравнения

$$\Omega'^2 = 4\Omega^3 + c.$$

Замены:

$$\begin{array}{ll} (177)|_{\mu_1=\lambda_2,\mu_2=-\lambda_1^2} \to (176): & \log u_1 = \tilde{u}; \\ (178)|_{\mu_1=\lambda_1,\mu_2=-\lambda_2^2} \to (175): & -\frac{1}{2}\log u_1 = \tilde{u}; \\ (179) \to (173): & \sqrt{u_1-\mu} = \tilde{u}; \\ (180) \to (175)|_{\lambda_2=0,\lambda_1=\mu}: & \log R(u_1) = \tilde{u}; \\ (181)|_{c=-108\lambda_1^2\lambda_2^2} \to (175): & A(u) + \log R(u_1) = \tilde{u}, \end{array}$$

где $A(u)$ непостоянное решение уравнения

$$A'^2 = \lambda_2^2 \exp(-4A) - \lambda_1 \exp(2A).$$

Коллапс

Автор: Ю.Н. Овчинников, 10.09.2007

Сценарии коллапса в задаче Коши для НУШ

$$iu_t = \Delta u + |u|^\rho u \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\int |u|^2 dx = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

изучались в статьях [1251,1459,95,1103,1105,1106,1108,1109,1110,1111,1104,299]. Использование теорем вложения Соболева позволяет доказать при $n = 2, 3$ существование локальных решений этой задачи в следующих случаях:

$$n = 2,\ 1 \le \rho \quad \text{or} \quad n = 3,\ 1 \le \rho < 4 \quad \Rightarrow \quad u \in C([0, t_0)) \cap W_2^2 \cap \{u | ru \in L_2\}.$$

Используем закон сохранения энергии:

$$E(t) = \int |u_x|^2 dx - \frac{2}{\rho+2}\int |u|^{\rho+2} dx = E_0 = \text{const}, \tag{182}$$

[1251] I.M. Sigal. Non-linear semi-groups. *Ann. Math.* ***78*** (1963) 339–364.

[1459] A.V. Zhiber. The collapse of solutions of one nonlinear boundary value problem. *Proc. of the conference on PDE, Moscow State University* (1978) 78–79.

[95] C. Sulen, P. Sulen. The NLSE: self-focusing ans wave collapse. New York: Springer, 1999.

[1103] Yu.N. Ovchinnikov. Weak collapse in the nonlinear Schrödinger equation. *JETP Lett.* ***69:5*** (1999) 418–422.

[1105] Yu.N. Ovchinnikov, I.M. Sigal. Collapse in the Nonlinear Schrödinger equation. *JETP* ***89:1*** (1999) 5–40.

[1106] Yu.N. Ovchinnikov, I.M. Sigal. Optical bistability. *JETP* ***93:5*** (2001) 1004–1016.

[1108] Yu.N. Ovchinnikov, I.M. Sigal. Collapse in the Nonlinear Schrödinger equation of critical dimension. *JETP Lett.* ***75:7*** (2002) 357–361.

[1109] Yu.N. Ovchinnikov, I.M. Sigal. Multiparameter family of collapsing solutions to the critical Nonlinear Schrödinger equation in dimension $D = 2$. *JETP* ***97:1*** (2003) 194–203.

[1110] Yu.N. Ovchinnikov, V.L. Vereshchagin. Asymptotic behavior of weakly collapsing solutions of the nonlinear Schrödinger equation. *JETP Lett.* ***74:2*** (2001) 72–76.

[1111] Yu.N. Ovchinnikov, V.L. Vereshchagin. The properties of weakly collapsing solutions to the nonlinear Schrödinger equation at large values of free parameters. *JETP* ***93:6*** (2001) 1307–1313.

[1104] Yu.N. Ovchinnikov. Properties of weakly collapsing solutions to the nonlinear Schrödinger equation. *JETP Lett.* ***96:5*** (2002) 975–981.

[299] P. Bizon, Yu.N. Ovchinnikov, I.M. Sigal. Collapse of instanton. *Nonlinearity* ***17:4*** (2004) 1179–1191.

$$\phi(t) \le 4E_0t^2 + 4\mu t + \phi(0), \quad \phi := \int r^2|u|^2dx.$$

Второй член в (182) можно оценить следующим образом, при $u \in W_2^{1;0}(\mathbb{R}^n)$, $n \ge 2$ и $0 \le \alpha < 1$:

$$||u||_q \le \beta||u_x||^\alpha||u||^{1-\alpha}, \quad \frac{1}{q} = \frac{1}{2} - \frac{\alpha}{n}, \quad \text{and} \quad ||u||_6 \le \beta||u_x||^{1/3}||u||_4^{2/3}, \quad n = 2 \tag{183}$$

что позволяет доказать глобальную разрешимость задачи Коши при $\rho < \rho_0$, $\rho_0 = \frac{4}{n}$. Действительно, в силу (183)

$$\int |u|^q dx = ||u||_q^q \le \beta||u_x||^{q\alpha}||u||^{q-q\alpha} \quad \text{and} \quad q\alpha = 1 \quad \Rightarrow \quad \rho = q - 2 = \frac{4}{n}.$$

При $\rho = \rho_0$ задача о коллапсе допускает явное решение [1333]

$$u(t,x) = (t_0 - t)^{-n/4}v(\xi)\exp\Big(i\frac{\alpha r^2 + \beta t}{t_0 - t}\Big), \quad \xi = \frac{r}{t_0 - t}, \quad v(\xi) > 0,$$

$$v_{\xi\xi} + \frac{n-1}{\xi}v_\xi + \lambda v = 0, \quad \inf\{||w||^p : ||\nabla w||^2 - \frac{2}{\sigma}||w||_\sigma^\sigma \le 0\}, \quad \sigma = \rho + 2, \quad \rho = \frac{4}{n}.$$

Этот сценарий не единственный (см. многочастичные решения в [1392,1393,1034].

При $\rho \ne \rho_0$ задача о коллапсе не допускает автомодельных решений, исчезающих на бесконечности. Автомодельный анзац даёт

$$|u|^2 = (t_0 - t)^{-n/2}\xi^{1-n}A_\xi(\xi), \quad \xi := \frac{r}{\sqrt{t_0 - t}},$$

[1333] V.I. Talanov. *JETP Lett.* ***11*** (1970) 303.

[1392] M.I. Weinstein. Nonlinear Schrödinger equations and sharp interpolation estimates. *Commun. Math. Phys.* ***87:4*** (1982) 567–576.

[1393] M.I. Weinstein. *Comm. Partial Diff. Eqs* ***11*** (1986) 545–565.

[1034] H. Nawa. Asymptotic and limiting profiles of blow up solutions of the nonlinear Schrödinger equation with critical power. *Comm. Pure and Appl. Math.* ***52:2*** (1999) 193–270.

$$A_{\xi\xi\xi} = \frac{A_{\xi\xi}^2}{2A_\xi} + A_\xi \left(\frac{n^2 - 4n + 3}{2\xi^2} + \frac{\xi^2}{4} + 2\left(\frac{A_\xi}{\xi^{n-1}}\right)^{\rho/2} + c \right) + \varepsilon \frac{\xi A}{2} + \varepsilon^2 \frac{A^2}{8A_\xi}, \quad \varepsilon = \frac{4}{\rho} - n.$$

Контактные преобразования

В случае одной зависимой переменной ($m = 1$) точечные преобразования могут быть обобщены следующим образом. Пусть $p = (p_1, \dots, p_n)$, $p_i = \partial u/\partial x_i$. ***Контактным преобразованием*** называется невырожденное преобразование вида

$$X_i = X_i(x, u, p), \quad U = U(x, u, p), \quad P_i = P_i(x, u, p) \tag{184}$$

где функции X_i, U, P_i связаны так, что сохраняется полный дифференциал:

$$dU - \sum P_i dX_i = c(du - \sum p_i dx_i), \quad c = c(x, u, p) \neq 0.$$

Более явно, это условие эквивалентно следующему набору уравнений:

$$\{X_i, X_j\} = 0, \quad \{P_i, P_j\} = 0, \quad \{P_i, X_j\} = \delta_{ij} c, \quad \{X_i, U\} = 0, \quad \{P_i, U\} = cP_i,$$

где

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^{n} (f_{p_i}(g_{x_i} + p_i g_u) - g_{p_i}(f_{x_i} + p_i f_u)).$$

Отметим соотношение

$$[X_f, X_g] = X_{\{f,g\}},$$

справедливое для ***контактных векторных полей***

$$X_f = \sum_i f_{p_i} \partial_{x_i} - \sum_i (f_{x_i} + p_i f_u) \partial_{p_i} + \Big(\sum_i p_i f_{p_i} - f\Big) \partial_u.$$

Точечные и контактные преобразования для эволюционных уравнений

В качестве полезного примера рассмотрим более подробно случай эволюционных 1+1-мерных уравнений

$$u_t = F(t, x, u, u_1, \dots, u_n), \quad u_k = D_x^k(u).$$

Легко показать, что подгруппа контактных преобразований, сохраняющих эволюционный вид уравнения определяется формулами

$$T = T(t), \quad X = X(t, x, u, u_1), \quad U = U(t, x, u, u_1)$$

где функции T, X, U удовлетворяют условиям

$$T' \neq 0, \quad D_x(X) \neq 0, \quad w = U_u - \frac{U_{u_1}}{X_{u_1}} X_u \neq 0, \quad X_{u_1}(U_x + U_u u_1) = U_{u_1}(X_x + X_u u_1).$$

Продолжение такого преобразования на производные по x задаётся формулами

$$U_1 = \frac{U_x + U_u u_1}{X_x + X_u u_1} = \frac{U_{u_1}}{X_{u_1}}, \quad U_k = U_k(t, x, u, \ldots, u_k) = D_X^k(U), \quad D_X = \frac{1}{D_x(X)} D_x,$$

а уравнение $U_T = F(T, X, U, \ldots, U_n)$ преобразуется в

$$u_t = f(t, x, u, \ldots, u_n) = w^{-1}(T'F - U_t + U_1 X_t).$$

Для таких преобразований справедлива формула

$$U_{k, u_k} = \frac{w}{(D_x(X))^k} \tag{185}$$

при $k > 1$. В частности, при $n \geq 2$ имеем

$$f_{u_n} = T'(D_x(X))^{-n} F_{U_n}$$

Для подгруппы точечных преобразований

$$T = T(t), \quad X = X(t, x, u), \quad U = U(t, x, u)$$

формула (185) верна также при $k = 1$, а для преобразований вида

$$T = T(t), \quad X = X(t, x), \quad U = U(t, x, u)$$

она верна и при $k = 0$ $(w = U_u)$.

Коротких импульсов уравнение hDD

[284, 1134, 1213, 433, 434, 360, 361]

$$v_{yt} = v + \frac{1}{6}(v^3)_{yy}$$

Дифференциальная подстановка в уравнение sin-Гордона $u_{xt} = \sin u$ [1189]:

$$v = u_t, \quad dy = \cos u\, dx - \frac{1}{2}u_t^2 dt.$$

Представление нулевой кривизны

$$\Psi_y = \frac{1}{2\lambda}\begin{pmatrix} 1 & v_y \\ v_y & -1 \end{pmatrix}, \quad \Psi_t = \frac{v^2}{2}U + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \lambda & -v \\ v & -\lambda \end{pmatrix}.$$

Высшая симметрия [361]:

$$v_{t_3} = \left(\frac{v_{yy}}{(1+v_y^2)^{3/2}}\right)_y$$

[1189] A. Sakovich, S. Sakovich. The short pulse equation is integrable. *J. Phys. Soc. Jpn.* ***74*** (2005) 239–241.

[361] J.C. Brunelli. The short pulse hierarchy. *J. Math. Phys.* ***46*** (2005) 123507.

Кричевера-Новикова уравнение eDD

[836]

$$u_t = u_{xxx} - \frac{3}{2u_x}(u_{xx}^2 - r(u)), \quad r = r_4 u^4 + \dots + r_0 \tag{186}$$

Единственное интегрируемое уравнение вида $u_t = u_{xxx} + f(u_{xx}, u_x, u)$, не связанное дифференциальной подстановкой с уравнением КдФ или линейным [1324]. Гамильтонова структура и оператор рекурсии найдены в [1258].
Преобразование Бэклунда [202]:

$$u_x v_x = h(u,v), \quad h(u,v) = h(v,u), \quad h_{uuu} = 0, \quad r(u) = h_v^2 - 2hh_{vv}.$$

Например, $r(u) = 4u^3 - g_2 u - g_3$ отвечает

$$h = \frac{1}{A}((uv + \alpha u + \alpha v + g_2/4)^2 - (u + v + \alpha)(4\alpha uv - g_3)), \quad A^2 = r(\alpha)$$

где μ параметр ПБ.
Принцип нелинейной суперпозиции [202] эквивалентен квад-уравнению (Q_4).
Представление нулевой кривизны : пусть $h = a(u)v^2 + 2b(u)v + c(u)$, тогда

$$U = \frac{1}{u_x}\begin{pmatrix} b & c \\ -a & -b \end{pmatrix}, \quad V = -2U_{xx} + 2[U_x, U] - 3\Big(\frac{u_{xxx}}{u_x} - \frac{3u_{xx}^2}{2u_x^2} + \frac{r(u)}{6u_x^2}\Big)U.$$

[1324] S.I. Svinolupov, V.V. Sokolov, R.I. Yamilov. Bäcklund transformations for integrable evolution equations. *Sov. Math. Dokl.* ***28*** (1983) 165–168.

[1258] V.V. Sokolov. On the Hamiltonian structure of Krichever-Novikov equation. *Dokl. Akad. Nauk SSSR* ***277:1*** (1984) 48–50.

[202] V.E. Adler. Bäcklund transformation for the Krichever-Novikov equation. *Int. Math. Res. Notices* (1998) 1–4.

Куиспела-Робертса-Томпсона отображение Δ

[1131, 1132]

$$f_3(u_n)u_{n+1}u_{n-1} - f_2(u_n)(u_{n+1} + u_{n-1}) + f_1(u_n) = 0, \quad \deg f_i \le 4$$

Пусть $A(u, v)$, $B(u, v)$ многочлены второй степени относительно каждой переменной:

$$A = a_1u^2v^2 + \cdots + a_9, \quad B = b_1u^2v^2 + \cdots + b_9.$$

Рассмотрим отображение $(u_n, v_n) \to (u_{n+1}, v_{n+1})$, определённое формулами

$$\frac{A(u_n, v_n)}{B(u_n, v_n)} = \frac{A(u_n, v_{n+1})}{B(u_n, v_{n+1})} = \frac{A(u_{n+1}, v_{n+1})}{B(u_{n+1}, v_{n+1})}.$$

Каждый шаг состоит в решении квадратного уравнения, но так как один из корней известен, в результате возникает бирациональное отображение. Величина $I = A/B$ по построению является его инвариантом, что и обеспечивает интегрируемость.

Частным случаем является соответствие Эйлера-Шаля (A симметрический многочлен, $B = 1$) [1370, 1371]. Исторически первым и наиболее простым примером является отображение Мак-Миллана.

[1370] A.P. Veselov. Integrable mappings. *Russ. Math. Surveys* ***46:5*** (1991) 1–51.
[1371] A.P. Veselov. What is an integrable mapping? [162, 251–272]

Купершмидта цепочка dDΔ

[855]

$$u_{n,t} = u_{n+1,x} + u_0 u_{n,x} + \alpha n u_n u_{0,x}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Бездисперсионная пара Лакса $D_t(L) = A_p L_x - A_x L_p$:

$$A = \frac{p^{\alpha+1}}{\alpha+1} + u_0 p, \quad L = p^\alpha + u_0 + u_1 p^{-\alpha} + u_2 p^{-2\alpha} + \dots$$

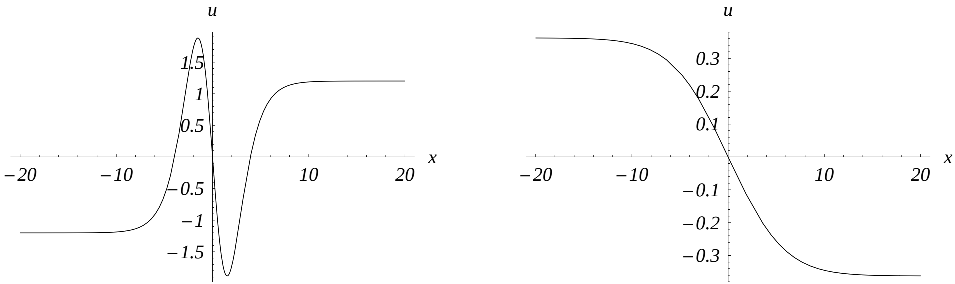
Курамото-Сивашинского уравнение eDD

[1252, 933, 1022]

$$u_t = u_{xxxx} + \mu u_{xx} + u u_x \tag{187}$$

Описывает распространение пламени. Демонстрирует хаотическое поведение. Решение типа кинка[863]:

$$u = 120v^3 + 60\left(\frac{\mu}{19} - 2k^2\right)v - c, \quad v = k\tanh k(x - x_0 - ct), \quad 76k^2 = 11\mu \ \text{ or } \ 76k^2 = -\mu.$$



$\mu = 1,\ k^2 = 11/76;$ $\mu = -1,\ k^2 = 1/76;$ $(c = 0,\ t = 0,\ x_0 = 0).$

[863] Y. Kuramoto, T. Tsuzuki. Persistent propagation of concentration waves in dissipative media far from thermal equilibrium. *Progr. Theor. Phys.* ***55*** (1976) 356–369.

Лагранжа волчок D

[96]

$$\dot{m} = ap^{\mathsf{T}} - pa^{\mathsf{T}}, \quad \dot{a} = ma, \qquad m \in \mathrm{so}(d), \quad a, p \in \mathbb{R}^d, \quad p = \mathrm{const}$$

Описывает, в покоящейся системе координат, движение в поле тяжести d-мерного осе-симметричного твёрдого тела вокруг неподвижной точки на оси симметрии.

Лагранжа волчок дискретный Δ

[96]

$$m_{n+1} = m_n + a_n p^\intercal - p a_n^\intercal, \quad a_{n+1} = (2I + m_n)(2I - m_n)^{-1} a_n, \qquad m_n \in \mathrm{so}(d), \quad a_n, p \in \mathbb{R}^d, \quad p = \mathrm{const}$$

Лаксова пара

[879]

Нелинейное уравнение в частных производных обладает ***парой Лакса***, если оно эквивалентно уравнению для дифференциальных операторов

$$D_t(L) = [A, L], \quad L = u_n D_x^n + \cdots + u_0, \quad A = a_m D_x^m + \cdots + a_m.$$

Лаксова пара бездисперсионная

[1438, 1439]

Нелинейное уравнение в частных производных обладает ***бездисперсионной парой Лакса***, если оно эквивалентно уравнению вида

$$D_t(L) = \{A, L\} = A_p L_x - A_x L_p, \quad L = L(x, t; p), \quad A = A(x, t; p)$$

для коэффициентов разложения функций L и A по степеням параметра p.

Ландау-Лифшица уравнение eDD

$$S_t=[S,S_{xx}+JS],\quad S\in\mathbb{R}^3,\quad \langle S,S\rangle=1,\quad J=\operatorname{diag}(J_1,J_2,J_3),\quad J_1+J_2+J_3=0 \tag{188}$$

Высшая симметрия:

$$S_{t_3}=\Big(S_{xx}+\frac{3}{2}\langle S_x,S_x\rangle S\Big)_x-\frac{3}{2}\langle S,JS\rangle S_x.$$

Мастер-симметрия[610] локальна:

$$S_\tau=[s,x(S_{xx}+JS)+S_x]=xS_t+[S,S_x].$$

Стереографическая проекция

$$S=\frac{1}{1+z\bar z}(z+\bar z,i(z-\bar z),1-z\bar z) \tag{189}$$

приводит (188) к виду

$$iz_t=z_{xx}-\frac{2\bar z(z_x^2+r)}{1+z\bar z}+\frac{1}{2}r',\quad 4r=(J_2-J_1)(z^4+1)+6(J_1+J_2)z^2.$$

- В полностью анизотропном случае $J_i\neq J_k$ нули многочлена R различны.
- В частично изотропном случае можно положить, не теряя общности, $J_1=J_2=\pm\frac{1}{3}\delta^2$, $r=\pm\delta^2z^2$.

Знак $+/-$ отвечает ферромагнетику с лёгкой осью/лёгкой плоскостью.

- Изотропный случай $J=0$, $r=0$ отвечает уравннию Гайзенберга.
- Уравнение остаётся интегрируемым при любом многочлене r 4-й степени. Комплексификация

$z\to u$, $\bar z\to 1/v$, $t\to it$ приводит к системе, также известной как уравнение Ландау-Лифшица:

$$u_t=u_2-\frac{2(u_1^2+r(u))}{u-v}+\frac{1}{2}r'(u),\quad -v_t=v_2-\frac{2(v_1^2+r(v))}{v-u}+\frac{1}{2}r'(v),\quad r^{\mathrm{V}}=0. \tag{190}$$

[610] B. Fuchssteiner. On the hierarchy of the Landau-Lifshitz equation. *Physica D* ***13:3*** (1984) 387–394.

Высшая симметрия:

$$u_{t_3} = u_3 - u_1\Big(\frac{6u_2 + 3r'(u)}{u - v} - \frac{6(u_1^2 + r(u))}{(u - v)^2} - \frac{1}{2}r''(u)\Big),$$
$$v_{t_3} = v_3 - v_1\Big(\frac{6v_2 + 3r'(v)}{v - u} - \frac{6(v_1^2 + r(v))}{(u - v)^2} - \frac{1}{2}r''(v)\Big).$$

Представление нулевой кривизны в матрицах размера 2×2 содержит спектральный параметр на эллиптической кривой. Представление размера 4×4, полиномиальное по λ, найдено в [349].
Преобразование Бэклунда для уравнения ЛЛ задаётся цепочкой Шабата-Ямилова.

[349] L.A. Bordag, A.B.Yanovski. Polynomial Lax pairs for the chiral $O(3)$-field equations and the Landau-Lifshitz equation. *J. Phys. A* ***28:14*** (1995) 4007–4013.

Ландау-Лифшица уравнение, $r = \pm u^2$ (лёгкая ось/лёгкая плоскость) eDD

$$u_t = u_{xx} - 2\frac{u_x^2 - \delta^2 u^2}{u - v} - \delta^2 u, \quad -v_t = v_{xx} + 2\frac{v_x^2 - \delta^2 v^2}{u - v} - \delta^2 v$$

Случай $\delta = 0$ отвечает модели Гайзенберга.

Преобразование Бэклунда

$$u_{n,x} = \frac{2h_n}{u_{n+1} - v_{n+1}} + h_{n,v_{n+1}}, \quad v_{n,x} = \frac{2h_{n-1}}{u_{n-1} - v_{n-1}} - h_{n-1,u_{n-1}},$$

$$h_n = k_n(u_n^2 + v_{n+1}^2) - c_n u_n v_{n+1}, \quad c_n = \frac{2\beta_n^2 - 2\delta\beta_n + \delta^2}{2\beta_n - \delta}, \quad k_n = \frac{\beta_n(\beta_n - \delta)}{2\beta_n - \delta}$$

Представление нулевой кривизны

$$U = \frac{1}{u - v}\begin{pmatrix} \frac{\lambda}{2}(u + v) & -uv \\ \lambda^2 - \delta^2 & -\frac{\lambda}{2}(u + v) \end{pmatrix},$$

$$V = -\lambda U + \frac{1}{(u - v)^2}\begin{pmatrix} -\lambda(uv)_x + \frac{\delta^2}{2}(u^2 - v^2) & u_x v^2 + u^2 v_x \\ (\delta^2 - \lambda^2)(u + v)_x & \lambda(uv)_x - \frac{\delta^2}{2}(u^2 - v^2) \end{pmatrix},$$

$$W_n = h_n^{-1/2}\begin{pmatrix} (\lambda + c_n)v_{n+1} - 2k_n u_n & -u_n v_{n+1} \\ \lambda^2 - \delta^2 & -(\lambda + c_n)u_n + 2k_n v_{n+1} \end{pmatrix}.$$

Ландау-Лифшица уравнение, $r=1$ eDD

$$u_t=u_{xx}-2\frac{u_x^2+\delta}{u-v},\quad -v_t=v_{xx}+2\frac{v_x^2+\delta}{u-v}$$

Случай $\delta=0$ отвечает модели Гайзенберга.

Преобразование Бэклунда

$$u_{n,x}=\frac{2h_n}{u_{n+1}-v_{n+1}}+h_{n,v_{n+1}},\quad v_{n,x}=\frac{2h_{n-1}}{u_{n-1}-v_{n-1}}-h_{n-1,u_{n-1}},\quad h_n=\beta_n(u_n-v_{n+1})^2+\frac{\delta}{4\beta_n}$$

Представление нулевой кривизны

$$U=\frac{\lambda}{u-v}\begin{pmatrix}\frac12(u+v) & -uv-\frac{\delta}{\lambda^2}\\ 1 & -\frac12(u+v)\end{pmatrix},$$

$$V=-\lambda U+\frac{\lambda}{(u-v)^2}\begin{pmatrix}-(uv)_x & u_xv^2+u^2v_x-\frac{2\delta}{\lambda}(u-v)+\frac{\delta}{\lambda^2}(u+v)_x\\ -(u+v)_x & (uv)_x\end{pmatrix},$$

$$W_n=h_n^{-1/2}\begin{pmatrix}-\lambda v_{n+1}+2\beta_n(u_n-v_{n+1}) & \lambda u_nv_{n+1}+\frac{\delta}{\lambda}+\frac{\delta}{2\beta_n}\\ -\lambda & \lambda u_n+2\beta_n(u_n-v_{n+1})\end{pmatrix}.$$

Ландау-Лифшица уравнение, $r = 0$, Гайзенберга уравнение eDD

[1335]

$$S_t = [S, S_{xx}], \quad S \in \mathbb{R}^3, \quad \langle S, S\rangle = 1$$

Матер-симметрия

$$\begin{aligned} S_{\tau_0} &= xS_x, \\ S_{\tau_1} &= x[S, S_{xx}] + [S, S_x], \\ S_{\tau_2} &= x(S_{xxx} + 2\langle S_x, S_x\rangle S_x + 2\langle S_x, S_{xx}\rangle S) + 2S_{xx} + 3\langle S_x, S_x\rangle S + S_x D_x^{-1}(\langle S_x, S_x\rangle) \end{aligned}$$

sl_2 версия:

$$2S_t = [S, S_{xx}], \quad S \in sl_2, \quad S^2 = 1.$$

Представление нулевой кривизны

$$U = \lambda S, \quad V = 2\lambda^2 S + \lambda S S_x.$$

Полиномиальная параметризация

$$S = \begin{pmatrix} 1 - uv & u \\ v(2 - uv) & uv - 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \begin{cases} u_t = u_2 + (u^2 v_1)_x \\ v_t = -v_2 + uv_1^2 \end{cases}$$

Рациональная параметризация

$$u_t = u_{xx} - \frac{2u_x^2}{u - v}, \quad -v_t = v_{xx} + \frac{2v_x^2}{u - v}$$

Преобразование Бэклунда

$$u_{n,x} = \frac{\beta_n(v_{n+1} - u_n)(u_n - u_{n+1})}{v_{n+1} - u_{n+1}}, \quad v_{n,x} = \frac{\beta_{n-1}(v_{n-1} - v_n)(v_n - u_{n-1})}{v_{n-1} - u_{n-1}}$$

Представление нулевой кривизны

$$U = \frac{\lambda}{u-v}\begin{pmatrix} \frac{1}{2}(u+v) & -uv \\ 1 & -\frac{1}{2}(u+v) \end{pmatrix}, \quad V = -\lambda U + \frac{\lambda}{(u-v)^2}\begin{pmatrix} -(uv)_x & u_x v^2 + u^2 v_x \\ -u_x - v_x & (uv)_x \end{pmatrix},$$

$$W_n = \frac{1}{u_n - v_{n+1}}\begin{pmatrix} -\lambda v_{n+1} + \beta_n(u_n - v_{n+1}) & \lambda u_n v_{n+1} \\ -\lambda & \lambda u_n + \beta_n(u_n - v_{n+1}) \end{pmatrix}$$

Лапласа каскадный метод

Автор: В.В. Соколов, 25.12.2008

Преобразования Лапласа были введены в 1873[65, t.9, p.5–68], в дальнейшем теория была значительно развита Дарбу [26, t.2]. Современные работы связаны в первую очередь с приложениями метода в теории интегрируемых систем, см. напр. [1349] и раздел о уравнениях типа Лиувилля. Некоторые обобщения метода Лапласа можно найти в работах [1170,259].

1. Инварианты и преобразования Лапласа

Инварианты Лапласа для линейного гиперболического оператора вида

$$L = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + a(x,y)\,\frac{\partial}{\partial x} + b(x,y)\,\frac{\partial}{\partial y} + c(x,y) \tag{191}$$

определяются следующим образом. Оператор L можно представить в частично факторизованном виде двумя способами

$$L = \Big(\frac{\partial}{\partial x} + b\Big)\Big(\frac{\partial}{\partial y} + a\Big) - h, \qquad h = a_x + ba - c,$$

---

[65] P.S. Laplace. Oeuvres complètes. Paris, 1893.

[26] G. Darboux. Leçons sur la théorie générale des surfaces et les applications géométriques du calcul infinitésimal. T. I-IV. 3 ed., Paris: Gauthier-Villars, 1914-1927.

[1349] S.P. Tsarev. Factoring linear partial differential operators and the Darboux method for integrating nonlinear partial differential equations. *Theor. Math. Phys.* ***122:1*** (2000) 121–133.

[1170] J. Le Roux. Extensions de la méthode de Laplace aux équations linéaires aux derivées partielles d'ordre supérieur au second. *Bull. Soc. Math. de France* ***27*** (1899) 237–262.

[259] C. Athorne. A $\mathbb{Z}^2 \times \mathbb{R}^3$ Toda system. *Phys. Lett. A* ***206*** (1995) 162–166.

или

$$L=\Big(\frac{\partial}{\partial y}+a\Big)\Big(\frac{\partial}{\partial x}+b\Big)-k,\qquad k=b_y+ab-c.$$

Функции h и k инвариантны относительно сопряжений $L\to s(x,y)Ls(x,y)^{-1}$. Эти функции называются соответственно ***главными левым и правым инвариантом Лапласа*** оператора (191).

Уравнение $L(V)=0$ эквивалентно

$$\Big(\frac{\partial}{\partial y}+a\Big)V=V_1,\qquad \Big(\frac{\partial}{\partial x}+b\Big)V_1=hV. \tag{192}$$

Если $h\neq 0$, то V_1 удовлетворяет новому гиперболическому уравнению

$$\Big(\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}+a_1(x,y)\frac{\partial}{\partial x}+b_1(x,y)\frac{\partial}{\partial y}+c_1(x,y)\Big)V_1=L_1(V_1)=0,$$

где

$$a_1=a-(\log h)_y,\qquad b_1=b,\qquad c_1=a_1b_1+b_y-h.$$

Легко видеть, что

$$L_1=\Big(\frac{\partial}{\partial y}+a_1\Big)\Big(\frac{\partial}{\partial x}+b\Big)-h=\Big(\frac{\partial}{\partial x}+b\Big)\Big(\frac{\partial}{\partial y}+a_1\Big)-h_1,$$

где

$$h_1=a_{1,x}-b_y+h.$$

Главный правый инвариант Лапласа k_1 для L_1 совпадает с h. Заметим, что

$$\Big(\frac{\partial}{\partial y}+a_1\Big)L=L_1\Big(\frac{\partial}{\partial y}+a\Big).$$

Говорят, что оператор L_1 получен из оператора L в результате ***y-преобразования Лапласа***. Из (192) следует, что любое решение уравнения $L(V)=0$ порождает решение уравнения $L_1(V_1)=0$ и наоборот.

Если $h_1 \neq 0$, мы можем применить эту же процедуру к оператору L_1 и так далее. В результате получится цепочка операторов

$$L_i = \Big(\frac{\partial}{\partial x} + b\Big)\Big(\frac{\partial}{\partial y} + a_i\Big) - h_i = \Big(\frac{\partial}{\partial y} + a_i\Big)\Big(\frac{\partial}{\partial x} + b\Big) - h_{i-1}, \qquad i \in \mathbb{N}, \tag{193}$$

где

$$\Big(\frac{\partial}{\partial y} + a_i\Big) L_{i-1} = L_i \Big(\frac{\partial}{\partial y} + a_{i-1}\Big).$$

Коэффициенты a_i и инварианты Лапласа этих операторов связаны формулами

$$a_i = a_{i-1} - (\log h_{i-1})_y, \qquad h_i = a_{i,x} - b_y + h_{i-1}. \tag{194}$$

Здесь $a_0 = a$, $h_0 = h$. Из этих формул следует, что

$$h_i = 2h_{i-1} - h_{i-2} - (\log h_{i-1})_{xy}, \tag{195}$$

и $k_i = h_{i-1}$. Цепочка (195) есть ни что иное, как знаменитая интегрируемая двумеризованная цепочка Тоды.

Если $k \neq 0$, то, начиная с оператора L, мы определим другую цепочку операторов $\bar{L}_1, \bar{L}_2, \ldots$ при помощи соотношений

$$\Big(\frac{\partial}{\partial x} + b_i\Big) \bar{L}_{i-1} = \bar{L}_i \Big(\frac{\partial}{\partial x} + b_{i-1}\Big).$$

Для этой цепочки имеем

$$b_i = b_{i-1} - (\log k_{i-1})_x, \qquad a_i = a, \qquad k_i = b_{i,y} - a_x + k_{i-1},$$

где k_i главный инвариант Лапласа, играющий ту же роль для $\bar{L}_i$, что и k для L; другой главный инвариант совпадает с k_{i-1}. Обозначив $h_{-1} = k$ и $h_{-i-1} = k_i$, $i = 1, 2, \ldots$, мы получим полный набор инвариантов Лапласа h_i, $i \in \mathbb{Z}$. Легко проверяется, что все инварианты Лапласа удовлетворяют уравнению (195).

Оператор

$$L^{\mathsf{T}} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} - a\frac{\partial}{\partial x} - b\frac{\partial}{\partial y} + (c - a_x - b_y)$$

называется ***сопряжённым*** к оператору L. Нетрудно показать, что инварианты Лапласа H_i для оператора L^{T} просто связаны с инвариантами Лапласа оператора L:

$$H_n = h_{-n-1}, \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

2. Интегрируемость по Лапласу

Согласно (192), мы имеем

$$V_i = \frac{1}{h_i}\Big(\frac{\partial}{\partial x} + b\Big)V_{i+1}$$

и следовательно

$$V = \frac{1}{h}\Big(\frac{\partial}{\partial x} + b\Big)\frac{1}{h_1}\Big(\frac{\partial}{\partial x} + b\Big)\cdots\frac{1}{h_{p-1}}\Big(\frac{\partial}{\partial x} + b\Big)V_p,$$

где $L_i(V_i) = 0$. Так как

$$\frac{\partial}{\partial x} + b = e^{-\int b\,dx}\frac{\partial}{\partial x}e^{\int b\,dx},$$

то последнюю формулу можно переписать в виде

$$Ve^{\int b\,dx} = \frac{1}{h}\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{h_1}\frac{\partial}{\partial x}\cdots\frac{1}{h_{p-1}}\frac{\partial}{\partial x}\left(V_p e^{\int b\,dx}\right). \tag{196}$$

Аналогично,

$$Ve^{\int a\,dy} = \frac{1}{k}\frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{k_1}\frac{\partial}{\partial y}\cdots\frac{1}{k_{q-1}}\frac{\partial}{\partial y}\left(V_{-q} e^{\int a\,dy}\right),$$

где $\bar{L}_i(V_{-i}) = 0$.

Если для некоторого p мы получили $h_p \equiv 0$, то цепочка операторов L_i обрывается. В этом случае уравнение $L_p(V_p) = 0$ можно легко решить. Из (193) следует, что

$$\Big(\frac{\partial}{\partial y} + a_p\Big) V_p = Y(y) e^{-\int b dx}$$

или

$$V_p = e^{-\int a_p dy}\Big(X(x) + \int Y(y) e^{\int (a_p dy - b dx)} dy\Big),$$

где X и Y произвольные функции переменных x и y соответственно. Пусть

$$\alpha = e^{-\int a_p dy}, \qquad \beta = e^{\int a_p dy - b dx},$$

тогда

$$V_p = \alpha\Big(X + \int Y \beta dy\Big).$$

Подстановка в (196) даёт

$$V = A\Big(X + \int Y\beta dy\Big) + A_1\Big(X' + \int Y\frac{\partial \beta}{\partial x} dy\Big) + \cdots + A_p\Big(\frac{d^p X}{dx^p} + \int Y \frac{\partial^p \beta}{\partial x^p} dy\Big),$$

где $A, A_1, \ldots, A_p$ есть некоторые заданные функции x и y, а функции $X(x)$, $Y(y)$ произвольны. Таким образом, формула (196) задаёт общее решение уравнения $L(V) = 0$ в квадратурах. Заметим, что это решение локально относительно функции X, но нелокально относительно Y.

Выбирая $Y = 0$, получим следующее специальное решение:

$$V = AX + A_1 X' + \cdots + A_p \frac{d^p X}{dx^p}. \tag{197}$$

Итак, если $h_p = 0$, то уравнение $L(V) = 0$ имеет специальное решение вида (197) с произвольной функцией $X(x)$. Верно и обратное утверждение.

Лемма 13. *Пусть уравнение $L(V) = 0$ имеет решение вида (197), где $X(x)$ произвольная функция. Тогда существует номер m такой, что $0 \le m \le p$ и $h_m = 0$.*

Оператор L называется ***интегрируемым по Лапласу*** если существуют $p \geq 0$ и $q \geq 0$ такие, что $h_p \equiv 0$ и $k_q \equiv 0$. Концепция интегрируемости по Лапласу является ключевой при определении класса интегрируемых нелинейных уравнений, интегрируемых по Дарбу, или так называемых уравнений типа Лиувилля (см. также [1463,242] и указанные там ссылки).

Для операторов интегрируемых по Лапласу общее решение уравнения $L(V) = 0$ локально по обеим функциям:

$$V = AX + A_1X' + \cdots + A_p\frac{d^pX}{dx^p} + BY + B_1Y' + \cdots + B_q\frac{d^qY}{dy^q}.$$

Ясно, что оператор $L^\intercal$ интегрируем по Лапласу если и только если L интегрируем по Лапласу.

3. Матричный случай

Рассмотрим теперь оператор (191), у которого коэффициенты a, b, c матрицы размера $N \times N$. Непосредственное обобщение всех определений на матричный случай делается следующим образом. Главные инварианты Лапласа определяются формулами

$$h_0 = a_x + ba - c, \qquad h_{-1} = k_0 = b_y + ab - c.$$

Фактически, относительно преобразований $L \to s(x, y)Ls(x, y)^{-1}$ инвариантны лишь собственные значения матриц h_0, h_{-1}. Тем не менее, мы сохраним для этих матриц название инвариантов, по аналогии со скалярным случаем.

Матрицы h_i для $i > 0$ рекуррентно определяются из следующей системы уравнений:

$$h_{i,y} - h_ia_i + a_{i+1}h_i = 0, \tag{198}$$
$$h_{i+1} = 2h_i + (a_{i+1} - a_i)_x + [b, a_{i+1} - a_i] - h_{i-1}, \tag{199}$$

[1463] A.V. Zhiber, V.V. Sokolov. Exactly integrable hyperbolic equations of Liouville type. *Russ. Math. Surveys* ***56:1*** (2001) 61–101.

[242] I.M. Anderson, M. Juras. Generalized Laplace invariants and the method of Darboux. *Duke Math. J.* ***89:2*** (1997) 351–375.

где $a_0 = a$. Очевидно, в скалярном случае эти формулы совпадают с соответствующими формулами раздела 1. Допустим, что матрицы h_i и a_i при $i \le k$ уже найдены. Тогда мы получаем a_{k+1} из (198) и затем находим h_{k+1} из (199). Однако, если $\det h_k = 0$, то матрица a_{k+1} либо не существует, либо определена с точностью до добавления матрицы α такой, что $\alpha h_k = 0$. В последнем случае, существование и свойства инвариантов Лапласа существенно зависят от выбоа α. На первый взгляд, такие вырождения являются очень специальными, но в приложениях инвариантов Лапласа к интегрируемым система Лиувиллевского типа они являются случаем общего положения.

Чтобы преодолеть затруднение, рассмотрим произведения $H_i = h_i h_{i-1} \cdots h_1 h_0$. Матрицы H_i называются ***обобщёнными инвариантами Лапласа***. В скалярном случае формулы (194) эквивалентны

$$a_i = a - (\log H_{i-1})_y, \qquad h_i = a_{i,x} - b_y + h_{i-1}.$$

Эти формулы обобщаются на матричный случай следующим образом:

$$H_{i,y} - H_i a + a_{i+1} H_i = 0, \tag{200}$$

$$h_{i+1} = a_{i+1,x} + [b, a_{i+1}] - b_y + h_i, \qquad H_{i+1} = h_{i+1} H_i, \tag{201}$$

и $H_0 = h_0$. Чтобы получить H_{i+1} мы должны решить уравнение (200) для a_{i+1} и подставить результат в (201). Обобщённый инвариант Лапласа K_i определяется уравнениями

$$K_{i,x} - K_i b + b_{i+1} K_i = 0, \tag{202}$$

$$k_{i+1} = b_{i+1,y} + [a, b_{i+1}] - a_x + k_i, \qquad K_{i+1} = k_{i+1} K_i, \tag{203}$$

и $K_0 = k_0$.

Следующее утверждение было доказано, в слегка иной формулировке, в работе [1463].

Теорема 13. *Обобщённый инвариант Лапласа H_m существует и корректно определён если и только если*

$$\left(\frac{\partial}{\partial y} + a\right)(\ker H_i) \subset \ker H_i \qquad \text{и} \qquad \left(\frac{\partial}{\partial x} + b\right)(\operatorname{Im} H_i) \subset \operatorname{Im} H_i$$

[1463] A.V. Zhiber, V.V. Sokolov. Exactly integrable hyperbolic equations of Liouville type. *Russ. Math. Surveys* ***56:1*** (2001) 61–101.

для всех $i < m$. *С точностью до очевидной переформулировки это утверждение справедливо и для инвариантов* K_i.

Как и в скалярном случае, мы имеем следующую теорему.

Теорема 14 (С.Я. Старцев [1270]). *Пусть инварианты Лапласа* H_i *оператора (191) с матричными коэффициентами существуют и корректно определены при всех* $i \leq p$, *и* $H_p = 0$. *Тогда существует дифференциальный оператор*

$$S = \sum_{j=0}^{p} A_j(x, y) \frac{\partial^j}{\partial x^j},$$

где A_j *квадратные матрицы и* $\det(A_p) \neq 0$, *такой, что* $S(f(x))$ *есть решение системы* $L(V) = 0$ *для любой вектор-функции* $f(x)$.

Определение 8. Оператор (191) с матричными коэффициентами называется интегрируемым по Лапласу если существуют обобщённые инварианты Лапласа H_i и K_i, корректно определены, и $H_p \equiv 0$, $K_q \equiv 0$ для некоторых $p \geq 0$, $q \geq 0$.

[1270] S.Ya. Startsev. Cascade method of Laplace integration for linear hyperbolic system of equations *Math. Notes* ***83:1*** (2008) 97–106.

Леви система eDD

[994]

$$p_t = p_{xx} + (p^2 + 2pq + 2\beta p)_x, \quad q_t = -q_{xx} + (q^2 + 2pq + 2\beta q)_x$$

Связана с НУШ преобразованием Бэклунда

$$uv = pq - q_x, \quad u_x/u = p + q + \beta.$$

и с НУШП дифференциальной подстановкой

$$p = b_x/b - ab/2, \; q = -ab/2.$$

Преобразование Бэклунда

$$p_{j,x} = p_j(p_{j+1} - p_j + q_{j+1} - q_j + \beta_{j+1} - \beta_j), \quad q_{j,x} = p_j q_j - p_{j-1}q_{j-1}.$$

Гамильтонова структура

$$\{p_j, q_j\} = -p_j, \quad \{p_j, q_{j+1}\} = p_j, \quad H = \sum\bigl(\frac{1}{2}q_j^2 + \beta_j q_j + p_j q_j\bigr).$$

Принцип нелинейной суперпозиции

$$\begin{aligned}
\tilde p_{k-1} &= p_{k-1}\Bigl(1 - \frac{\beta_k - \beta_{k-1}}{p_{k-1} - q_k}\Bigr), & \tilde p_k &= p_k\Bigl(1 + \frac{\beta_k - \beta_{k-1}}{p_{k-1} - q_k - \alpha}\Bigr),\\
\tilde q_{k-1} &= q_{k-1} + \frac{(\beta_k - \beta_{k-1})q_k}{p_{k-1} - q_k}, & \tilde q_k &= q_k\Bigl(1 - \frac{\beta_k - \beta_{k-1}}{p_{k-1} - q_k}\Bigr),\\
\tilde\beta_{k-1} &= \beta_k, & \tilde\beta_k &= \beta_{k-1}
\end{aligned}$$

Представление нулевой кривизны

$$U = \begin{pmatrix} s - \lambda & -q \\ p & \lambda - s \end{pmatrix}, \quad V = 2(\lambda + s)U + \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(p - q) & q \\ p & \frac{1}{2}(q - p) \end{pmatrix}_x, \qquad 2s = p + q + \beta$$

$$W_j = p_j^{-1/2} \begin{pmatrix} p_j & -q_{j+1} \\ p_j & 2\lambda - \beta_{j+1} - q_{j+1} \end{pmatrix}$$

Лево-симметрическая алгебра

Автор: В.В. Соколов, 04.07.2006

Лево-симметрическая алгебра $(A, \circ)$ характеризуется тождеством

$$\mathrm{As}(a, b, c) = \mathrm{As}(b, a, c),$$

где As обозначает ассоциатор

$$\mathrm{As}(a, b, c) = (a \circ b) \circ c - a \circ (b \circ c).$$

Этот класс алгебр, очевидно, обобщает ассоциативные, для которых $\mathrm{As}(X, Y, Z) = 0$. Другим примером лево-симметрической алгебры служит евклидово пространство, снабжённое умножением

$$a \circ b = \langle a, c\rangle b + \langle a, b\rangle c$$

где c постоянный вектор.

С лево-симметрическими алгебрами связаны многополевые аналоги уравнения Бюргерса.

Ли алгебра

Алгеброй Ли L называется алгебра с анти-симметрическим умножением $[\cdot,\cdot] : L \times L \to L$ удовлетворяющим тождеству Якоби:

$$[a,b] = -[b,a], \quad [a,[b,c]] + [b,[c,a]] + [c,[a,b]] = 0.$$

Любая ассоциативная алгебра A порождает алгебру Ли A^{-} с произведением $[a,b] = ab - ba$. Любая алгебра Ли изоморфна подалгебре некоторой A^{-}.

Ли группа

n-параметрической группой Ли называется n-мерное многообразие G снабжённое операциями умножения $G \times G \to G$ и взятия обратного элемента $G \to G$, являющимися гладкими отображениями и удовлетворяющими общим групповым аксиомам (15).

Local Lie groups, Lie groups of transformations

Лиувилля уравнение hDD

[911]

$$u_{xy} = e^u$$

Лиувиллевского типа уравнения

[1460, 1461, 1462, 243, 1463]
Нелинейное гиперболическое уравнение вида

$$u_{xy} = f(x, y, u, u_x, u_y)$$

относят к уравнениям типа уранения Лиувилля, если оно обладает какими-то из следующих свойств:

- общее решение задаётся явной формулой (***интегрируемость по Дарбу***);
- линеаризуемо (C-интегрируемость);
- допускает алгебру симметрий с функциональным произволом;
- допускает нетривиальные интегралы по каждому характеристическому направлению;
- ряд инвариантов Лапласа для этого уравнения обрывается с обеих сторон (***интегрируемость по Лапласу***).

Следует подчеркнуть, что хотя этих свойства тесно связаны, они не эквивалентны и известны примеры уравнений, обладающих только некоторыми из них. Известно несколько классификационных результатов, основанных на анализе перечисленных свойств.

Лорановость

Рациональное отображение $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ обладает ***свойством лорановости***, если любая итерация $f^k(x)$ является многочленом Лорана от начальных данных $x = (x_1, \ldots, x_n)$, то есть, в знаменателях $f^k(x)$ появляются лишь мономы от $x_1, \ldots, x_n$.

Пример: последовательности Сомоса.

Лоренца система eDD

[106, 864, 1230, 659, 881]

$$\dot{x} = k(x - y), \quad \dot{y} = rx - y - zx, \quad \dot{z} = xy - bz.$$

Максвелла-Блоха уравнение DD

Редуцированное уравнение Максвелла-Блоха:

$$E_t = V, \quad V_x = \omega R + EQ, \quad Q_x = -EV, \quad R_x = -\omega V$$

Манакова система eDD

[941]

$$u_t = u_{xx} + 2\langle u, v\rangle u, \quad -v_t = v_{xx} + 2\langle u, v\rangle v, \quad u, v \in \mathbb{R}^N$$

Первое и наиболее простое многополевое обобщение НУШ.
Преобразование Бэклунда [1246,198]:

$$u_{n,x} = u_{n+1} + \beta_n u_n + \langle u_n, v_{n+1}\rangle u_n, \quad -v_{n,x} = v_{n-1} + \beta_{n-1} v_n + \langle u_{n-1}, v_n\rangle v_n. \tag{204}$$

Высшая симметрия 3-го порядка:

$$u_{t_3} = u_{xxx} + 3\langle u, v\rangle u_x + 3\langle u_x, v\rangle u, \quad v_{t_3} = v_{xxx} + 3\langle u, v\rangle v_x + 3\langle u, v_x\rangle v.$$

Величины

$$U = -2\langle u, v\rangle, \quad W = 2\langle u, v_x\rangle - 2\langle u_x, v\rangle$$

удовлетворяют уравнению КП [819,818,425].

$$4U_{t_3} = U_{xxx} - 6UU_x + 3W_t, \quad W_x = U_t.$$

Для величин

$$F_n = -\langle u_n, v_{n+1}\rangle - \beta_n, \quad P_n = \langle u_n, v_{n+1,x}\rangle - \langle u_{n,x}, v_{n+1}\rangle + \langle u_n, v_{n+1}\rangle^2 - \beta_n^2$$

[1246] A.B. Shabat, R.I. Yamilov. Symmetries of nonlinear chains. *Len. Math. J.* ***2:2*** (1991) 377–399.

[198] V.E. Adler. Nonlinear superposition formula for Jordan NLS equations. *Phys. Lett. A* ***190*** (1994) 53–58.

[819] B.G. Konopelchenko, W. Strampp. The AKNS hierarchy as symmetry constraint of the KP hierarchy. *Inverse Problems* ***7*** (1991) L17–24.

[818] B.G. Konopelchenko, J. Sidorenko, W. Strampp. (1+1)-dimensional integrable systems as symmetry constraints of (2+1)-dimensional systems. *Phys. Lett. A* ***157:1*** (1991) 17–21.

[425] Y. Cheng, Y. Li. The constraint of the Kadomtsev-Petviashvili equation and its special solutions. *Phys. Lett. A* ***157:1*** (1991) 22–26.

выполняются, в силу (204), соотношения типа преобразования Миуры [802,743]

$$U_{n+1} = U_n + 2F_{n,x}, \quad U_n = F_n^2 - F_{n,x} + P_n, \quad P_{n,x} = F_{n,t}$$

между КП и модифицированным уравнением КП

$$4F_{t_3} = F_{xxx} - 6(F^2 + P)F_x + 3P_t, \quad P_x = F_t.$$

Переменные F, P удовлетворяют двумеризованной одевающей цепочке

$$F_{n+1,x} + F_{n,x} = F_{n+1}^2 - F_n^2 + P_{n+1} - P_n, \quad P_{n,x} = F_{n,t}.$$

[802] B.G. Konopelchenko. On the general structure of nonlinear evolution equations integrable by the two-dimensional matrix spectral problem. *Commun. Math. Phys.* ***87:1*** (1982) 105–125.

[743] M. Jimbo, T. Miwa. *Publ. RIMS* ***19:3*** (1983) 943.

Массивная Тирринга модель hDD

$$iu_x + v + u|v|^2 = 0, \quad iv_t + u + v|u|^2 = 0$$

Мастер-симметрия

Эволюционное уравнение $u_\tau = K(x, u, u_1, \ldots, u_m)$ называется ***мастер-симметрией*** уравнения $u_t = F(x, u, u_1, \ldots, u_m)$, если соответствующие эволюционные производные удовлетворяют соотношению $[\nabla_F, [\nabla_F, \nabla_K]] = 0$.

Понятие мастер-симметрии было введено Фокасом и Фукcштайнером [588,609,585]. Первый пример появился фактически в [727].

Мастер-симметри могут быть введены при помощи представления нулевой кривизны со спектральным параметром, зависящим от времени [1101,1102,383].

Для многих уравнений (напр. для КдФ, НУШ, цепочки Тоды) мастер-симметрии нелокальны. Однако, модель Ландау-Лифшица, являющаяся универсальным уравнением в классе НУШ, имеет локальную мастер-симметрию.

[588] A.S. Fokas, B. Fuchssteiner. The hierarchy of the Benjamin-Ono equation. *Phys. Lett. A* ***86:6–7*** (1981) 341–345.

[609] B. Fuchssteiner. Master symmetries, higher order time-dependent symmetries and conserved densities of nonlinear evolution equations. *Progr. Theor. Phys.* ***70:6*** (1983) 1508–1522.

[585] A.S. Fokas. Symmetries and integrability. *Stud. Appl. Math.* ***77*** (1987) 253–299.

[727] N.H. Ibragimov, A.B.Shabat. Group theoretical approach to the Korteweg-de Vries equation. *Dokl. Akad. Nauk SSSR* ***244:1*** (1979) 57–61.

[1101] A.Yu. Orlov, E.I. Shulman. On additional symmetries of nonlinear Schrödinger equation. *Theor. Math. Phys.* ***64:2*** (1985) 862–866.

[1102] A.Yu. Orlov, E.I. Shulman. Additional symmetries for integrable equations and conformal algebra representation. *Lett. Math. Phys.* ***12:3*** (1986) 171–179.

[383] S.P. Burtsev, V.E. Zakharov, A.V. Mikhailov. Inverse scattering method with the variable spectral parameter. *Theor. Math. Phys.* ***70:3*** (1987) 227–240.

Мельникова система eDDD

$$u_t = u_{xxx} + 6uu_x + 3v_{yy} - \langle \phi, \psi \rangle_x, \quad v_x = u, \quad \phi_y = \phi_{xx} + u\phi, \quad -\psi_y = \psi_{xx} + u\psi \tag{205}$$

Многополевое обобщение уравнения КП, введённое в [975] и относящееся к классу так называемых уравнений с самосогласованными источниками. Уравнение для вектора ψ совпадают с уравнением вспомогательной линейной задачи для уравнения КП, ϕ удовлетворяет сопряжённому уравнению. Выбор следующего потока приводит к системе

$$\begin{gathered} u_t = u_{xxx} + 6uu_x + 3v_{yy} + 6(\langle \phi, \psi_{xx} \rangle - \langle \phi_{xx}, \psi \rangle + \langle \phi, \psi \rangle_y), \quad v_x = u, \\ 4\phi_t = 4\phi_{xxx} + 6u\phi_x + (3u_x - v - 2\langle \phi, \psi \rangle)\phi, \quad 4\psi_t = 4\psi_{xxx} + 6u\psi_x + (3u_x + v + 2\langle \phi, \psi \rangle)\psi, \end{gathered} \tag{206}$$

также введённой в [975]. Уравнения аналогичного типа изучались далее в [976,977,978,979,980]. Системой Мельникова называется также стационарный поток системы (205) [1250].

[975] V.K. Mel'nikov. On equations for wave interactions. *Lett. Math. Phys.* ***7:2*** (1983) 129–136.

[976] V.K. Mel'nikov. A direct method for deriving a multisoliton solution for the problem of interaction of waves on the x, y plane. *Commun. Math. Phys.* ***112:4*** (1987) 639–652.

[977] V.K. Mel'nikov. Integration method of the Korteweg-de Vries equation with a self-consistent source. *Phys. Lett. A* ***133:9*** (1988) 493–496.

[978] V.K. Mel'nikov. Interaction of solitary waves in the system described by the Kadomtsev-Petviashvili equation with a self-consistent source. *Commun. Math. Phys.* ***126:1*** (1989) 201-215.

[979] V.K. Mel'nikov. Integration of the Korteweg-de Vries equation with a source. *Inverse Problems* ***6*** (1990) 233–246.

[980] V.K. Mel'nikov. Integration of the nonlinear Schrodinger equation with a source. *Inverse Problems* ***8*** (1990) 133–147.

[1250] J. Sidorenko, W. Strampp. Symmetry constraints of the KP hierarchy. *Inverse Problems* ***7*** (1991) L37–43.

Минимальных поверхностей уравнение hDD

[24]

$$(1+u_y^2)u_{xx} - 2u_x u_y u_{xy} + (1+u_x^2)u_{yy} = 0$$

Лагранжиан: $L = (1+u_x^2+u_y^2)^{1/2}$

См. также уравнение Борна-Инфельда

Многополевые уравнения

Автор: В.В. Соколов, 04.07.2006

[941, 942, 603, 600, 262, 245, 246, 247, 1313, 1325, 1315, 1316, 248, 1262, 1263, 1323, 669, 62]

Йордановы алгебры и обобщения уравнения КдФ Рассмотрим многополевые обобщения

$$u^i_t = u^i_{xxx} + C^i_{jk} u^j u^k_x \tag{207}$$

уравнения Кортевега-да Фриза.

Будем рассматривать C^i_{jk} как структурные константы (некоммутативной и неассоциативной) алгебры J и перепишем (207) в виде

$$U_t = U_{xxx} + U \circ U_x,$$

где $U(x,t)$ есть функция со значениями в алгебре J.

Система уравнений (207) называется *неприводимой* если её нельзя привести к блочно-треугольному виду подходящим линейным преобразованием.

Теорема 15 (Свинолупов, [1314]). *Неприводимые системы типа КдФ (207) обладают высшими симметриями если и только если C^i_{jk} являются структурными константами простой йордановой алгебры.*

В частности, простые йордановы алгебры из примера 7 приводят к матричному уравнению КдФ

$$U_t = U_{xxx} + UU_x + U_xU$$

и векторному уравнению КдФ

$$u_t = u_{xxx} + \langle C, u\rangle u_x + \langle C, u_x\rangle u - \langle u, u_x\rangle C.$$

[1314] S.I. Svinolupov. Jordan algebras and generalized KdV equations. *Theor. Math. Phys.* ***87:3*** (1991) 611–620.

Лево-симметрические алгебры и обобщения уравнения Бюргерса

Теорема 16. *Многокомпонентное обобщение уравнения Бюргерса*

$$u^i_t = u^i_{xx} + 2C^i_{jk}u^k u^j_x + A^i_{jkm}u^k u^j u^m, \quad i, j, k = 1, \dots, N$$

интегрируемо если и только если

$$3A^i_{jkm} = C^i_{jr}C^r_{km} + C^i_{kr}C^r_{mj} + C^i_{mr}C^r_{jk} - C^i_{rj}C^r_{km} - C^i_{rk}C^r_{mj} - C^i_{rm}C^r_{jk}$$

и C^i_{jk} являются структурными константами некоторой лево-симметрической алгебры A.

В безкоординатном виде интегрируемые уравнения записываются, как

$$u_t = u_{xx} + 2u \circ u_x + u \circ (u \circ u) - (u \circ u) \circ u$$

где $\circ$ обозначает умножение в A.

В частности, интегрируемым является следующее матричное уравнение:

$$U_t = U_{xx} + 2UU_x.$$

Ещё одним примером является векторное уравнение Бюргерса

$$u_t = u_{xx} + 2\langle u, u_x\rangle C + 2\langle u, C\rangle u_x + \|u\|^2\langle u, C\rangle C - \|C\|^2\|u\|^2 u$$

где C постоянный вектор.

Йордановы тройные системы и обобщения уравнений мКдФ и НУШ

Теорема 17. *Если C^i_{jkm} структурные константы йордановой тройной системы, то система уравнений типа мКдФ*

$$u^i_t = u^i_{xxx} + C^i_{jkm} u^k u^j u^m_x, \quad i, j, k = 1, \dots, N,$$

система уравнений типа НУШ

$$u^i_t = u^i_{xx} + C^i_{jkm} u^j v^k u^m, \quad v^i_t = -v^i_{xx} - C^i_{jkm} v^j u^k v^m, \quad i, j, k = 1, \dots, N$$

и система уравнений типа НУШП

$$u^i_t = u^i_{xx} + C^i_{jkm} (u^j v^k u^m)_x, \quad v^i_t = -v^i_{xx} - C^i_{jkm} (v^j u^k v^m)_x, \quad i, j, k = 1, \dots, N$$

обладают высшими симметриями.

Алгебраическая форма записи имеет, соответственно, вид

$$u_t = u_{xxx} + \{u, u, u_x\},$$
$$u_t = u_{xx} + 2\{u, v, u\}, \quad v_t = -v_{xx} - 2\{v, u, v\},$$
$$u_t = u_{xx} + 2\{v, u, v\}_x, \quad v_t = -v_{xx} - 2\{u, v, u\}_x.$$

В частности, простым тройным йордановым системам (145), (146) и (147) отвечают следующие интегрируемые векторные и матричные обобщения уравнения КдФ

$$u_t = u_{xxx} + \|u\|^2 u_x, \quad u \in \mathbb{R}^N$$
$$u_t = u_{xxx} + \|u\|^2 u_x + \langle u, u_x \rangle u, \quad u \in \mathbb{R}^N,$$
$$U_t = U_{xxx} + U^2 U_x + U_x U^2, \quad U \in \mathrm{Mat}_N .$$

Векторные обобщения НУШ имеют вид

$$u_t = u_{xx} + 2\langle u, v \rangle u, \quad v_t = -v_{xx} - 2\langle v, u \rangle v$$

и

$$u_t = u_{xx} + 4\langle u, v \rangle u - 2\|u\|^2 v, \quad v_t = -v_{xx} - 4\langle v, u \rangle v + 2\|v\|^2 u.$$

Деформации йордановых тройных систем Рассмотрим теперь неполиномиальные интегрируемые уравнения, такие как

$$u_{xy} = \frac{u_x u_y}{u},$$
$$u_t = u_{xxx} - \frac{3}{2}\frac{u_{xx}^2}{u_x},$$
$$u_t = u_{xx} - \frac{2}{u+v}u_x^2, \quad v_t = -v_{xx} + \frac{2}{u+v}v_x^2.$$

Как обобщить эти уравнения на много-компонентый случай? Что такое u^{-1}?

В скалярном случае можно определить x^{-1} как решение ОДУ $y' = -y^2$.

Пусть $\{X, Y, Z\}$ йорданова тройная система, а $\phi(u)$ решение следующей переопределённой совместной системы

$$\frac{\partial \phi}{\partial u^k} = -\{\phi, e_k, \phi\}, \quad k = 1, \dots, N, \tag{208}$$

где $e_1, \dots, e_N$ базис йордановой тройной системы и $u = u^i e_i$.

В матричном случае одним из решений служит

$$\phi(U) = U^{-1}.$$

Для векторной йордановой тройной системы (146)

$$\phi(u) = \frac{u}{\|u\|^2}.$$

Аналог u^{-1} хорошо известен в теории Йордановых тройных систем. Определим линейный оператор P_X формулой $P_X(Y) = \{X, Y, X\}$. Тогда, по определению, $u^{-1} = P_u^{-1}(u)$.

Введём обозначения

$$\alpha_u(X, Y) = \{X, \phi(u), Y\}, \qquad \sigma_u(X, Y, Z) = \{X, \{\phi(u), Y, \phi(u)\}, Z\}.$$

Класс 1. Для любой йордановой тройной системы йорданово уравнение кирального поля

$$u_{xy} = \alpha_u(u_x, u_y)$$

является интегрируемым. Название объясняется тем, что матричному случаю отвечает уравнение главного кирального поля

$$u_{xy} = \frac{1}{2}(u_x u^{-1} u_y + u_y u^{-1} u_x), \quad u \in GL_N.$$

Класс 2. Интегрируемо также следующее уравнение:

$$u_t = u_{xxx} - 3\alpha_u(u_x, u_{xx}) + \frac{3}{2}\sigma_u(u_x, u_x, u_x).$$

Матричное и векторные уравнения имеют вид

$$u_t = u_{xxx} - \frac{3}{2}u_x u^{-1} u_{xx} - \frac{3}{2}u_{xx} u^{-1} u_x + \frac{3}{2}u_x u^{-1} u_x u^{-1} u_x,$$

$$u_t = u_{xxx} - \frac{3\langle u, u_x\rangle}{\|u\|^2}u_{xx} - 3\frac{\langle u, u_{xx}\rangle}{\|u\|^2}u_x + 3\frac{\langle u_x, u_{xx}\rangle}{\|u\|^2}u - \frac{3}{2}\frac{\|u_x\|^2}{\|u\|^2}u_x + 6\frac{\langle u, u_x\rangle^2}{\|u\|^4}u_x - 3\frac{\langle u, u_x\rangle\|u_x\|^2}{\|u\|^4}u,$$

$$u_t = u_{xxx} - \frac{3}{2}\frac{\langle C, u_x\rangle}{\langle C, u\rangle}u_{xx} - \frac{3}{2}\frac{\langle C, u_{xx}\rangle}{\langle C, u\rangle}u_x + \frac{3}{2}\frac{\langle C, u_x\rangle^2}{\langle C, u\rangle^2}u_x.$$

Класс 3. Следующие интегрируемые уравнения

$$v_t = v_{xxx} - \frac{3}{2}\alpha_{v_x}(v_{xx}, v_{xx})$$

связаны с уравнениями из Класса 2 потенциированием $u = v_x$. Матричное уравнение:

$$U_t = U_{xxx} - \frac{3}{2}U_{xx}U_x^{-1}U_{xx}.$$

Векторные уравнения имеют вид:

$$u_t = u_{xxx} - 3\frac{\langle u_x, u_{xx}\rangle}{\|u_x\|^2}u_{xx} + \frac{3}{2}\frac{\|u_{xx}\|^2}{\|u_x\|^2}u_x$$

и

$$u_t = u_{xxx} - \frac{3}{2}\frac{\langle C, u_{xx}\rangle}{\langle C, u_x\rangle}u_{xx}.$$

Класс 4. Скалярным представителем этого класса является модель Гайзенберга

$$u_t = u_{xx} - \frac{2}{u+v}u_x^2, \quad v_t = -v_{xx} + \frac{2}{u+v}v_x^2.$$

Система

$$u_t = u_{xx} - 2\alpha_{u+v}(u_x, u_x), \quad v_t = -v_{xx} + 2\alpha_{u+v}(v_x, v_x)$$

интегрируема. Высшая симметрия 3-го порядка имеет вид

$$u_t = u_{xxx} - 6\alpha_{u+v}(u_x, u_{xx}) + 6\sigma_{u+v}(u_x, u_x, u_x), \quad v_t = v_{xxx} - 6\alpha_{u+v}(v_x, v_{xx}) + 6\sigma_{u+v}(v_x, v_x, v_x).$$

Матричная система имеет вид

$$u_t = u_{xx} - 2u_x(u+v)^{-1}u_x, \quad v_t = -v_{xx} + 2v_x(u+v)^{-1}v_x,$$

одной из двух векторных систем является

$$u_t = u_{xx} - 4\frac{\langle u_x, u+v\rangle}{\|u+v\|^2}u_x + 2\frac{\|u_x\|^2}{\|u+v\|^2}(u+v), \quad v_t = -v_{xx} + 4\frac{\langle v_x, u+v\rangle}{\|u+v\|^2}v_x - 2\frac{\|v_x\|^2}{\|u+v\|^2}(u+v).$$

Интегрируемые уравнения геометрического типа Рассмотрим многокомпонентные системы вида
$$u^i_t = u^i_{xxx} + a^i_{jk}(\vec{u})u^j_x u^k_{xx} + b^i_{jks}(\vec{u})u^j_x u^k_x u^s_x.$$

Этот класс инвариантен относительно точечных замен $\vec{v} = \vec{\Psi}(\vec{u})$. При этих преобразованиях, функции$a^i_{jk}(\vec{u})$ преобразуются, как компоненты аффинной связности Γ.

Удобно переписать систему, как

$$u^i_t = u^i_{xxx} + 3\alpha^i_{jk}u^j_x u^k_{xx} + \left(\frac{\partial \alpha^i_{km}}{\partial u^j} + 2\alpha^i_{jr}\alpha^r_{km} - \alpha^i_{rj}\alpha^r_{km} + \beta^i_{jkm}\right) u^j_x u^k_x u^m_x,$$

где $\beta^i_{jkm} = \beta^i_{kjm} = \beta^i_{mkj}$, то есть

$$\beta(X, Y, Z) = \beta(Y, X, Z) = \beta(X, Z, Y)$$

для любых векторов X, Y, Z. Функции β^i_{jkm} преобразуются как компоненты тензора.

Пусть R и T тензоры кривизны и кручения связности Γ.

Чтобы сформулировать классификационные результаты, введём следующий тензор:

$$\sigma(X, Y, Z) = \beta(X, Y, Z) - \frac{1}{3}\delta(X, Y, Z) + \frac{1}{3}\delta(Z, X, Y),$$

где
$$\delta(X, Y, Z) = T(X, T(Y, Z)) + R(X, Y, Z) - \nabla_X(T(Y, Z)).$$

Из тождества Бьянки следует, что
$$\sigma(X, Y, Z) = \sigma(Z, Y, X).$$

Теорема 18. *Система интегрируема ессли*

$$\nabla_X[R(Y, Z, V)] = R(Y, X, T(Z, V)),$$
$$\nabla_X\left[\nabla_Y(T(Z, V)) - T(Y, T(Z, V)) - R(Y, Z, V)\right] = 0,$$
$$\nabla_X(\sigma(Y, Z, V)) = 0,$$

$$T(X,\sigma(Y,Z,V))+T(Z,\sigma(Y,X,V))+T(Y,\sigma(X,V,Z))+T(V,\sigma(X,Y,Z))=0,$$

u

$$\sigma(X,\sigma(Y,Z,V),W)-\sigma(W,V,\sigma(X,Y,Z))+\sigma(Z,Y,\sigma(X,V,W))-\sigma(X,V,\sigma(Z,Y,W))=0.$$

Если $T=0$, то мы имеем симметрическое пространство с ковариантно постоянной деформацией тройной йордановой системы.

В случае $T\neq 0$, возникает обобщение симметрических пространств. Неизвестно известны ли геометрам такие пространства с аффинной связностью.

Мульти-гамильтонова структура

Говорят, что скобки Пуассона $\{\cdot,\cdot\}_1$, $\{\cdot,\cdot\}_2$ образуют согласованную пару [934] если линейный пучок $\{\cdot,\cdot\}_1+\alpha\{\cdot,\cdot\}_2$ также определяет скобку Пуассона. Очевидно, в проверке нуждается лишь тождество Якоби, более того, легко показать, что если оно выполнено для некоторого значения $\alpha\neq 0$, то оно выполняется при всех α.

Уравнение (ODE, DΔE или PDE) обладает бигамильтоновой структурой, если его можно представить в виде

$$u_t=\{u,H_1\}_1=\{u,H_2\}_2$$

с согласованной парой скобок. Аналогично, тригамильтонова структура определяется уравнениями

$$u_t=\{u,H_1\}_1=\{u,H_2\}_2=\{u,H_3\}_3$$

где скобки образуют совместную тройку, то есть операция $\{\cdot,\cdot\}_1+\alpha\{\cdot,\cdot\}_2+\beta\{\cdot,\cdot\}_3$ должна быть скобкой Пуассона для всех α,β.

[934] F. Magri. A simple model of integrable Hamiltonian equation. *J. Math. Phys.* ***19*** (1978) 1156–1162.

Неймана система D

[1035, 1367]

$$\ddot{u} = -Ju + (\langle u, Ju\rangle - \langle \dot{u}, \dot{u}\rangle)u, \quad u \in \mathbb{R}^d, \quad |u| = 1, \quad J = \mathrm{diag}(J_1, \dots, J_d)$$

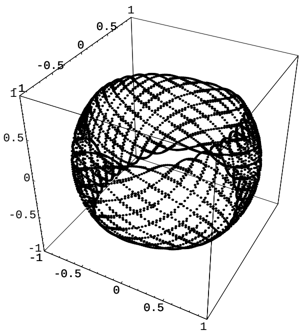
Движение частицы по сфере в квадратичном потенциале $\frac{1}{2}\langle u, Ju\rangle$.

Известно несколько дискретных интегрируемых систем на сфере, общего вида

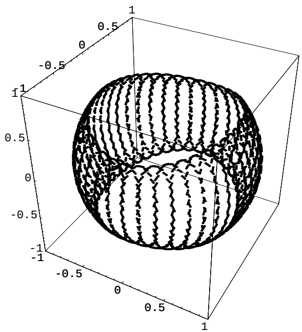
$$u_{n+1} = F(u_n, u_{n-1}; K), \quad u_n \in \mathbb{R}^d, \quad |u_n| = 1, \quad K = \mathrm{diag}(K_1, \dots, K_d),$$

имеющих систему Неймана своим непрерывным пределом [96]. Хотя эти дискретизации обладают различными наборами инвариантов, не эквивалентными даже при $d = 3$, соответствующая им динамика очень похожа. Представленные графики показываю эволюцию одних и тех же начальных данных (при одном и том же выборе матрицы параметров K).

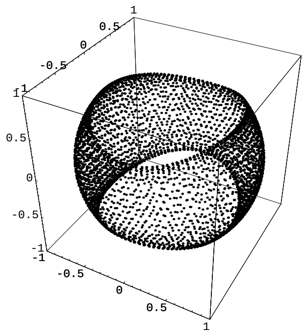
дискретизация Веселова



дискретизация Рагниско



дискретизация Адлера



[96] Yu.B. Suris. The problem of integrable discretization: Hamiltonian approach. Basel: Birkhäuser, 2003.

Неймана система, дискретизация Веселова Δ

[1368, 651]

$$u_{n+1}+u_{n-1}=\frac{2\langle Ku_n,u_{n-1}\rangle}{\langle K^2u_n,u_n\rangle}Ku_n,\qquad u_n\in\mathbb{R}^d,\quad |u_n|=1,\quad K=\operatorname{diag}(K_1,\dots,K_d)$$

Также: стационарная спиновая цепочка Гайзенберга

Непрерывный предел: $u_n=u(\varepsilon n)$, $K^{-2}=I+\varepsilon^2J$.
Инварианты:

$$I_1=\langle Ku_n,u_{n+1}\rangle,\quad I_2=\langle K^{-2}u_n,u_n\rangle+\langle K^{-2}u_{n+1},u_{n+1}\rangle-\langle K^{-1}u_n,u_{n+1}\rangle^2,\ \dots$$

Неймана система, дискретизация Рагниско Δ

[1135]

$$\frac{u_{n+1}}{\langle u_n, u_{n+1}\rangle} - 2u_n + \frac{u_{n-1}}{\langle u_n, u_{n-1}\rangle} = -K^{-2}u_n + \langle u_n, K^{-2}u_n\rangle u_n, \qquad u_n \in \mathbb{R}^d, \quad |u_n| = 1, \quad K = \mathrm{diag}(K_1, \ldots, K_d)$$

Непрерывный предел: $u_n = u(\varepsilon n)$, $K^{-2} = \varepsilon^2 J$.

Неймана система, дискретизация Адлера △

[204]

$$\frac{u_{n+1}+u_n}{1+\langle u_n,u_{n+1}\rangle}+\frac{u_n+u_{n-1}}{1+\langle u_n,u_{n-1}\rangle}=\frac{2Ku_n}{\langle u_n,Ku_n\rangle},\qquad u_n\in\mathbb{R}^d,\quad |u_n|=1,\quad K=\operatorname{diag}(K_1,\dots,K_d)$$

Непрерывный предел: $u_n=u(2\varepsilon n)$, $K=I-\varepsilon^2 J$.
Инварианты:

$$I_1=\frac{\langle Ku_n,u_{n+1}\rangle}{1+\langle u_n,u_{n+1}\rangle},\quad I_2=\frac{\langle K^{-1}(u_n+u_{n+1}),(u_n+u_{n+1})\rangle}{(1+\langle u_n,u_{n+1}\rangle)^2},\ \dots$$

Нелинейное Клейна-Гордона уравнение hDD

[105]

$$u_{tt} - u_{x_1x_1} - \dots - u_{x_dx_d} = F(u)$$

Неинтегрируемо при $d > 1$ для любой нелинейной функции F. При $d = 1$ интегрируемые нелинейные случаи исчерпываются, с точностью до точечных замен, списком[1461]

- $u_{xy} = e^u$ Уравнение Лиувилля
- $u_{xy} = \sin u$ sin-Гордон equation
- $u_{xy} = e^{2u} - e^{-u}$ Tzitzeica equation

[1461] A.V. Zhiber, A.B. Shabat. Nonlinear Klein-Gordon equations with nontrivial group. *Dokl. Akad. Nauk SSSR* ***247:5*** (1979) 1103–1107.

Нелинейное уравнение Шрёдингера eDD

$$u_t = u_{xx} + 2u^2 v, \quad -v_t = v_{xx} + 2uv^2$$

Также: система Захарова-Шабата, система Абловица-Каупа-Ньюэлла-Сигура

Преобразование Бэклунда

$$u_{n,x} = u_{n+1} + \beta_n u_n + u_n^2 v_{n+1}, \quad -v_{n,x} = v_{n-1} + \beta_{n-1} v_n + u_{n-1} v_n^2$$

$$\{v_m, u_n\} = \delta_{m,n+1}, \quad H = \sum \left(u_n v_n + \beta_n u_n v_{n+1} + \frac{1}{2} u_n^2 v_{n+1}^2 \right)$$

Принцип нелинейной суперпозиции

$$\tilde{u}_n = u_n - \frac{(\beta_{n+1} - \beta_n) u_{n-1}}{1 - u_{n-1} v_{n+1}}, \quad \tilde{v}_n = v_n + \frac{(\beta_{n+1} - \beta_n) v_{n+1}}{1 - u_{n-1} v_{n+1}}$$

Представление нулевой кривизны

$$U = \begin{pmatrix} \lambda & -v \\ u & -\lambda \end{pmatrix}, \quad V = -2\lambda U + \begin{pmatrix} -uv & v_x \\ u_x & uv \end{pmatrix},$$
$$W_n = \begin{pmatrix} 1 & -v_{n+1} \\ u_n & -2\lambda - u_n v_{n+1} - \beta_n \end{pmatrix}$$

Оператор рекурсии

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}_{t_n} = R^n \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \qquad R = \begin{pmatrix} D_x + 2uD_x^{-1} v & 2uD_x^{-1} u \\ -2vD_x^{-1} v & -D_x - 2vD_x^{-1} u \end{pmatrix}$$

Симметрия 3-го порядка:

$$u_{t_3} = u_{xxx} + 6uvu_x, \quad v_{t_3} = v_{xxx} + 6uvv_x.$$

Нелинейное уравнение Шрёдингера векторное eDD

[844]

$$u_t = u_{xx} + 4\langle u,v\rangle u - 2\langle u,u\rangle v, \quad -v_t = v_{xx} + 4\langle u,v\rangle v - 2\langle v,v\rangle u, \quad u,v \in \mathbb{C}^m$$

Представление нулевой кривизны

$$U = \begin{pmatrix} -\lambda & -2v^\intercal & 0 \\ u & 0 & 2v \\ 0 & -u^\intercal & \lambda \end{pmatrix}, \quad V = \lambda U + \begin{pmatrix} -2v^\intercal u & 2v_x^\intercal & 0 \\ u_x & 2uv^\intercal - 2vu^\intercal & -2v_x \\ 0 & -u_x^\intercal & 2u^\intercal v \end{pmatrix}$$

$$W_j = \begin{pmatrix} 1 & -2v_{j+1}^\intercal & -2v_{j+1}^\intercal v_{j+1} \\ u_j & (\lambda-\beta_j)I_n - 2u_j v_{j+1}^\intercal & 2(\lambda-\beta_j - u_j v_{j+1}^\intercal)v_{j+1} \\ -\frac{1}{2}u_j^\intercal u_j & u_j^\intercal(u_j v_{j+1}^\intercal - \lambda + \beta_j) & \begin{matrix}(\lambda-\beta_j)^2 - 2(\lambda-\beta_j)u_j^\intercal v_{j+1} + \\ + u_j^\intercal u_j v_{j+1}^\intercal v_{j+1}\end{matrix} \end{pmatrix}$$

Нелинейное уравнение Шрёдингера матричное eDD

[1437, 71, 603, 804]

$$u_t = u_{xx} + 2uvu, \quad -v_t = v_{xx} + 2vuv, \quad u \in \mathrm{Mat}_{M,N}(\mathbb{C}), \quad v \in \mathrm{Mat}_{N,M}(\mathbb{C})$$

Преобразование Бэклунда :

$$u_{n,x} = u_{n+1} + \beta_n u_n + u_n v_{n+1} u_n, \quad -v_{n,x} = v_{n-1} + \beta_{n-1} v_n + v_n u_{n-1} v_n$$

Симметрия 3-го порядка:

$$u_t = u_{xxx} + 3u_x vu + 3uvu_x, \quad v_t = v_{xxx} + 3v_x uv + 3vuv_x.$$

Представление нулевой кривизны

$$U = \begin{pmatrix} -\lambda M I_N & -v \\ u & \lambda N I_M \end{pmatrix}, \quad V = \lambda(M+N)U + \begin{pmatrix} -vu & v_x \\ u_x & uv \end{pmatrix}$$
$$W_n = \begin{pmatrix} I_N & -v_{n+1} \\ u_n & \lambda(M+N)I_M - \beta_n I_M - u_n v_{n+1} \end{pmatrix}.$$

Матрицы размера $M \times M$

$$U = -2uv, \quad W = 2uv_x - 2u_x v$$

удовлетворяют матричному уравнению КП

$$4U_{t_3} = U_{xxx} - 3(U_x U + UU_x - W_t + [W, U]), \quad W_x = U_t,$$

а матрицы

$$F_n = -u_n v_{n+1} - \beta_n I_M, \quad P_n = u_n v_{n+1,x} - u_{n,x} v_{n+1} + u_n v_{n+1} u_n v_{n+1} - \beta_n^2 I_M$$

удовлетворяют двумеризованной матричной одевающей цепочке

$$F_{n+1,x} + F_{n,x} = F_{n+1}^2 - F_n^2 + P_{n+1} - P_n, \quad P_{n,x} = F_{n,t} + [P_n, F_n].$$

Нелинейное уравнение Шрёдингера многомерное eD^N

[1451]

$$i\psi_t = \Delta\psi + |\psi|^{2\sigma}\psi, \quad \Delta = \nabla^2 = \partial_{x_1}^2 + \cdots + \partial_{x_n}^2 \tag{209}$$

Не интегрируемо. Возникает в ряде физических задач, в частности, в физике плазмы и нелинейной оптике. Некоторые частные решения, описывающие слабый коллапс и определяемые ОДУ типа Пенлеве изучались в [1103,1110,379].

Сохраняющиеся плотности:

$$|\psi|^2, \qquad \frac{i}{2}(\psi\nabla\psi^* - \psi^*\nabla\psi), \qquad \frac{1}{2}|\nabla\psi|^2 - \frac{1}{\sigma+1}|\psi|^{2\sigma+2}.$$

[1103] Yu.N. Ovchinnikov. Weak collapse in the nonlinear Schrödinger equation. *JETP Lett.* ***69:5*** (1999) 418–422.

[1110] Yu.N. Ovchinnikov, V.L. Vereshchagin. Asymptotic behavior of weakly collapsing solutions of the nonlinear Schrödinger equation. *JETP Lett.* ***74:2*** (2001) 72–76.

[379] C. Budd, V. Dorodnitsyn. Symmetry-adapted moving mesh schemes for the nonlinear Schrödinger equation. *J. Phys. A* ***34:48*** (2001) 10387–10400.

Нелинейное уравнение Шрёдингера йорданово eDD

[1315]

$$u_t = u_{xx} + 2\{uvu\}, \quad -v_t = v_{xx} + 2\{vuv\}, \quad u \in V^+, \quad v \in V^-$$

где $V = (V^+, V^-)$ есть йорданова пара.

Наиболее общая многополевая версия НУШ. Частные случаи:

- матричное НУШ
- система Манакова
- векторное НУШ

Симметрия третьего порядка:

$$u_t = u_{xxx} + 6\{uvu_x\}, \quad v_t = v_{xxx} + 6\{vuv_x\}.$$

Преобразование Бэклунда :

$$u_{j,x} = u_{j+1} + \beta_j u_j + \{u_j v_{j+1} u_j\}, \quad -v_{j,x} = v_{j-1} + \beta_{j-1} v_j + \{v_j u_{j-1} v_j\}$$

Представление нулевой кривизны можно определить в терминах структурной алгебры Ли йордановой пары:

$$U = u - 2v + \lambda\sigma, \quad V = u_x + 2v_x + 2L(u, v) + \lambda U$$

Дифференциальная подстановка $v = -w_x - \{wuw\}$ (эквивалентная сдвигу $v_{j+1} \to v_j$ в цепочке преобразований Бэклунда) приводит к модифицированному Йорданову НУШ

$$u_t = u_{xx} - 2\{uw_x u\} - 2\{u\{wuw\}u\}, \quad -w_t = w_{xx} + 2\{wu_x w\} - 2\{w\{uwu\}w\},$$

являющемуся симметрией гиперболической системы

$$u_{xy} = 2\{uwu_y\} - u, \quad w_{xy} = -2\{wuw_y\} - w.$$

Нелинейное уравнение Шрёдингера с производной eDD

[782]

$$u_t = u_{xx} + 2(u^2 v)_x, \quad v_t = -v_{xx} + 2(uv^2)_x$$

Также: система Каупа-Ньюэлла, НУШП-I; под тем же названием: система Чена-Ли-Лю (НУШП-II), уравнение Герджикова-Иванова (НУШП-III)

Матер-симметрия :

$$u_\tau = (xu_x + 2xu^2 v + cu)_x, \quad v_\tau = (-xv_x + 2xuv^2 + (c-1)v)_x$$

Высшая симметрия

$$u_{t_3} = (u_{xx} + 6uu_x v + 6u^3 v^2)_x, \quad v_{t_3} = (v_{xx} - 6uvv_x + 6u^2 v^3)_x$$

Преобразование Бэклунда :

$$u_{n,x} = u_n^2(u_{n+1} - u_{n-1}), \quad u_{n,t} = u_n^2(u_{n+1}^2(u_{n+2} + u_n) - u_{n-1}^2(u_n - u_{n-2})), \quad u = u_n, \quad v = u_{n-1}.$$

Представление нулевой кривизны

$$U = 2\lambda \begin{pmatrix} \lambda & u \\ -v & -\lambda \end{pmatrix}, \quad V = (4\lambda^2 + 2uv)U + 2\lambda \begin{pmatrix} 0 & u_x \\ v_x & 0 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 2\lambda/u & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Нелинейное уравнение Шрёдингера с производной матричное eDD

$$u_t = u_{xx} + 2(uv^{\mathsf{T}}u)_x, \quad v_t = -v_{xx} + 2(vu^{\mathsf{T}}v)_x, \quad u,v \in \mathrm{Mat}_{m,n}(\mathbb{C})$$

Это и некоторые другие матричные версии уравнений типа НУШП изучались в работах [1097,1098,1357].

[1097] P.J. Olver, V.V. Sokolov. Integrable evolution equations on associative algebras. *Commun. Math. Phys.* ***193:2*** (1998) 245–268.

[1098] P.J. Olver, V.V. Sokolov. Non-abelian integrable systems of the derivative nonlinear Schrödinger type. *Inverse Problems* ***14:6*** (1998) L5–L8.

[1357] T. Tsuchida, M. Wadati. Complete integrability of derivative nonlinear Schrödinger-type equations. *Inverse Problems* ***15*** (1999) 1363–1373.

Нелинейное уравнение Шрёдингера с производной векторное eDD

[1014]

$$u_t = u_{xx} + 2(\langle u, v\rangle u)_x, \quad v_t = -v_{xx} + 2(\langle u, v\rangle v)_x, \quad u, v \in \mathbb{C}^n$$

Нелинейное уравнение Шрёдингера с производной йорданово eDD

[600, 218]

$$u_t = u_{xx} + 2\{uvu\}_x, \quad v_t = -v_{xx} + 2\{vuv\}_x, \quad u \in V^+, \quad v \in V^-$$

где $V = (V^+, V^-)$ есть йорданова пара.
Эта система является наиболее общим многополевым аналогом уравнения НУШП-I.
Симметрия 3-го порядка:

$$u_{t_3} = (u_{xx} + 6\{uvu_x\} + 6\{u\{vuv\}u\})_x, \quad v_{t_3} = (v_{xx} - 6\{vuv_x\} + 6\{v\{uvu\}v\})_x.$$

НУШ-типа системы, классификация eDD

Автор: В.Э. Адлер, 09.01.2009

1. Введение

Задача классификации интегрируемых систем ***типа НУШ***

$$w_t = A(w)w_2 + F(w, w_1), \quad w = (u, v)^{\mathsf{T}}, \quad F = (f, g)^{\mathsf{T}}, \quad \det A \neq 0 \tag{210}$$

при помощи симметрийного подхода рассматривалась в работах [991], где были получены необходимые условия существования законов сохранения достаточно высокого порядка. Эти условия отсеивают не только неинтегрируемые случаи, но и линеаризуемые системы типа Бюргерса, у которых есть высшие симметрии, но нет высших законов сохранения. В частности, оказалось, что все системы, удовлетворяющие эти условиям, можно привести к виду

$$u_t = u_2 + f(u, v, u_1, v_1), \quad -v_t = u_2 + g(u, v, u_1, v_1) \tag{211}$$

при помощи дифференциальной подстановки. Дальнейшая классификация проводится по модулю точечных замен, дополненных так называемыми симметрическими преобразованиями. Окончательно эта

[991] A.V. Mikhailov, A.B. Shabat. Integrability conditions for systems of two equations of the form $\vec{u}_t = A(\vec{u})\vec{u}_{xx} + F(\vec{u}, \vec{u}_x)$. I, II. *Theor. Math. Phys.* ***62:2*** (1985) 107–122; *Theor. Math. Phys.* ***66:1*** (1986) 32–44.

задача была решена в работе [994], см. также [995,993]. При этом несколько систем оказались новыми, и их интегрируемость была обоснована либо указанием дифференциальной подстановки, приводящей к известной интегрируемой системе, либо построением представления нулевой кривизны. С точки зрения порядка вспомогательной линейной задачи, список делится на системы типа НУШ (a–p) и типа Буссинеска (q–u6), отвечающие, соответственно, порядкам 2 и 3.

2. Расширение модуля точечных замен

Точечные замены переменных, действующие на всём множестве систем (211), порождены преобразованиями

$$(x,t)\to(ax+bt+c,a^2t+d),\qquad (u,v)\to(\phi(u),\psi(v)),\qquad (x,t,u,v)\to(-x,-t,v,u). \tag{212}$$

Многочисленный подкласс составляют системы, инвариантные относительно какой-либо однопараметрической группы преобразований $(u,v)\to(\phi(\alpha,u),\psi(\alpha,v))$. Не теряя общности, можно считать, что эта группа состоит из сдвигов $(u,v)\to(u+\alpha,v)$ либо $(u,v)\to(u+\alpha,v-\alpha)$. Соответствующая система имеет специальный вид

$$u_t=u_2+f(\varepsilon u+v,u_1,v_1),\quad -v_t=u_2+g(\varepsilon u+v,u_1,v_1),\quad \varepsilon=0,1. \tag{213}$$

Такая система допускает дифференциальную подстановку вида $\tilde u=U(\varepsilon u+v,u_1)$, $\tilde v=V(\varepsilon u+v)$, которая, вообще говоря, выводит из класса систем (213). Однако, имеется важный случай, когда композиция таких замен сохраняет вид системы.

Симметрической системой называется система вида (213), инвариантная относительно инволюции $(x,t,u,v)\to(-x,-t,v,u)$:

$$u_t=u_2+f(u+v,u_1,v_1),\quad -v_t=u_2+f(u+v,-v_1,-u_1). \tag{214}$$

[994] A.V. Mikhailov, A.B. Shabat, R.I. Yamilov. The symmetry approach to classification of nonlinear equations. Complete lists of integrable systems. *Russ. Math. Surveys* ***42:4*** (1987) 1–63.

[995] A.V. Mikhailov, A.B. Shabat, R.I. Yamilov. Extension of the module of invertible transformations. Classification of integrable systems. *Commun. Math. Phys.* ***115:1*** (1988) 1–19.

[993] A.V. Mikhailov, A.B. Shabat, V.V. Sokolov. The symmetry approach to classification of integrable equations. [162, 115–184]

Имеют место следующие свойства.

Теорема 19. *Пусть система (214) обладает законом сохранения с плотностью* $\rho = p'(u+v)u_1 + q(u+v)$, $p' \neq 0$. *Тогда* ***симметрическое преобразование***

$$\tilde{u} + \tilde{v} = p(u+v), \quad \tilde{u}_1 = p'(u+v)u_1 + q(u+v) \tag{215}$$

переводит её также в симметрическую систему. Преобразования такого вида задают отношение эквивалентности на множестве систем (214) и сохраняют свойство интегрируемости, то есть, если исходная система обладала высшими симметриями и законами сохранения, то это же верно и для преобразованной системы.

Следующий пример показывает, что использование симметрических замен позволяет существенно сократить список интегрируемых систем.

Пример 11. Рассмотрим систему

$$u_t = u_2 + 2auvu_1 + bu^2v_1 + \frac{1}{2}b(a-b)u^3v^2 + cu^2v, \quad -v_t = v_2 - 2auvv_1 - bv^2u_1 + \frac{1}{2}b(a-b)u^2v^3 + cuv^2,$$

включающую, например, комплексифицированную систему Герджикова-Иванова. Замена $u \to \exp(u)$, $v \to \exp(v)$ приводит её к виду (214) с $f = u_1^2 + (2au_1 + bv_1 + c)e^{u+v} + \frac{1}{2}b(a-b)e^{2u+2v}$. Используя плотность $\rho = u_1 + \beta e^{u+v}$, несложно установить симметрическую эквивалентность со следующими системами:

1) при $b = 2a, c = 0$ с линейной системой $(a = b = c = 0)$;
2) при $b = 2a, c \neq 0$ с НУШ $(a = b = 0, c = 1)$;
3) при $b \neq 2a$ с НУШП $(a = b = 1, c = 0)$.

3. Список интегрируемых систем

Теорема 20. *С точностью до преобразований (212) и симметрических замен (215), системы вида (211), обладающие бесконечным набором высших симметрий и законов сохранения сводятся к системам из следующего списка.*

Замечание. В некоторых случаях оказалось удобным включить в список уравнения, эквивалентные по модулю указанных преобразований. Такие системы обозначены одинаковыми буквами со штрихами. Системы, обозначенные строчной и заглавной буквой связаны потенцированием. Остальные замены описаны в следующем разделе.

$$u_t = u_2 + u_1^2 + v_1, \quad -v_t = v_2 - 2u_1v_1; \tag{a}$$

с. Каупа-Броера
$$u_t = u_2 + (u^2+v)_x, \quad -v_t = v_2 - 2(uv)_x; \tag{A}$$

НУШ
$$u_t = u_2 + u^2v, \quad -v_t = v_2 + v^2u; \tag{b}$$

с. Каупа
$$u_t = u_2 + (u+v)u_1, \quad -v_t = v_2 - (u+v)v_1; \tag{c}$$

$$u_t = u_2 + u_1^2v_1 - 4v_1, \quad -v_t = v_2 - u_1v_1^2 + 4u_1; \tag{d}$$

$$u_t = u_2 + (u^2v - 4v)_x, \quad -v_t = v_2 - (uv^2 - 4u)_x; \tag{D}$$

$$u_t = u_2 - \frac{u_1^2v_1}{(u+v)^2} - \frac{2u_1^2}{u+v}, \quad -v_t = v_2 + \frac{u_1v_1^2}{(u+v)^2} - \frac{2v_1^2}{u+v}; \tag{d$'$}$$

$$\begin{cases} u_t = u_2 + \operatorname{sech}^2(u+v)u_1^2v_1 - 2\tanh(u+v)u_1^2, \\ -v_t = v_2 - \operatorname{sech}^2(u+v)u_1v_1^2 - 2\tanh(u+v)v_1^2; \end{cases} \tag{d$''$}$$

$$u_t = u_2 - 2\tanh(u+v)(u_1^2-4), \quad -v_t = v_2 - 2\tanh(u+v)(v_1^2-4); \tag{e}$$

$$\begin{cases} u_t = u_2 - \dfrac{2u_1^2}{u+v} - \dfrac{8(1+uv)u_1 + 4(1-u^2)v_1}{(u+v)^2}, \\ -v_t = v_2 - \dfrac{2v_1^2}{u+v} + \dfrac{8(1+uv)v_1 + 4(1-v^2)u_1}{(u+v)^2}; \end{cases} \tag{f}$$

$$u_t = u_2 + u_1^2v_1, \quad -v_t = v_2 - u_1v_1^2 - u_1; \tag{g}$$

$$u_t = u_2 + (u^2v)_x, \quad -v_t = v_2 - (uv^2 + u)_x; \tag{G}$$

$$u_t = u_2 + u_1^2 - 2u_1v_1, \quad -v_t = v_2 - v_1^2 - 2u_1v_1; \tag{h}$$

с. Леви
$$u_t = u_2 + (u^2 - 2uv)_x, \quad -v_t = v_2 - (v^2 - 2uv)_x; \tag{H}$$

ур. Гайзенберга
$$u_t = u_2 - \frac{2u_1^2}{u+v}, \quad -v_t = v_2 - \frac{2v_1^2}{u+v}; \tag{h$'$}$$

$$u_t = u_2 - 2\tanh(u+v)u_1^2, \quad -v_t = v_2 - 2\tanh(u+v)v_1^2; \tag{h$''$}$$

$$u_t = u_2 + u_1^2 v_1, \quad -v_t = v_2 - u_1 v_1^2; \tag{i}$$

НУШП
$$u_t = u_2 + (u^2 v)_x, \quad -v_t = v_2 - (uv^2)_x; \tag{I}$$

$$u_t = u_2 + \exp(u+v)u_1^2 v_1 + u_1^2, \quad -v_t = v_2 - \exp(u+v)u_1 v_1^2 + v_1^2; \tag{i$'$}$$

$$u_t = u_2 - \frac{2(u_1^2+1)}{u+v}, \quad -v_t = v_2 - \frac{2(v_1^2+1)}{u+v}; \tag{j}$$

$$\begin{cases} u_t = u_2 - \dfrac{2u_1^2}{u+v} - \dfrac{4((u-v)u_1 + uv_1)}{(u+v)^2}, \\ -v_t = v_2 - \dfrac{2v_1^2}{u+v} + \dfrac{4((u-v)v_1 - u_1 v)}{(u+v)^2}; \end{cases} \tag{k}$$

$$\begin{cases} u_t = u_2 + R(y)u_1^2 v_1 + R'(y)u_1^2 - \dfrac{2}{3}(R''(y) - 2c)u_1 + \dfrac{1}{3}R'''(y), \\ -v_t = v_2 - R(y)u_1 v_1^2 + R'(y)v_1^2 + \dfrac{2}{3}(R''(y) - 2c)v_1 + \dfrac{1}{3}R'''(y), \end{cases} \tag{l}$$

где $y = y(u+v), \quad y' = R(y) = ay^4 + by^3 + cy^2 + dy + e \neq 0;$

$$\begin{cases} u_t = u_2 - \dfrac{2u_1^2}{u+v} - \dfrac{4(P(u,v)u_1 + R(u)v_1)}{(u+v)^2}, \\ -v_t = v_2 - \dfrac{2v_1^2}{u+v} + \dfrac{4(P(u,v)v_1 + R(-v)v_1)}{(u+v)^2}, \end{cases} \tag{m}$$

где $P(u,v) = 2au^2v^2 + buv(v-u) - 2cuv + d(u-v) + 2e,$

$R(y) = ay^4 + by^3 + cy^2 + dy + e;$

ур. Ландау-Лифшица
$$\begin{cases} u_t = u_2 - \dfrac{2(u_1^2 + R(u))}{u+v} + \dfrac{R'(u)}{2}, \\ -v_t = v_2 - \dfrac{2(v_1^2 + R(-v))}{u+v} - \dfrac{R'(-v)}{2}, \end{cases} \tag{n}$$
где $R(y) = ay^4 + by^3 + cy^2 + dy + e;$

$$\begin{cases} u_t = u_2 + e^{\phi}(u_1^2 + 1)v_1 + \phi_u u_1^2 + 2(y(u+v) + y(u-v))u_1, \\ -v_t = v_2 - e^{\phi}(v_1^2 + 1)u_1 + \phi_v v_1^2 - 2(y(u+v) + y(u-v))v_1, \end{cases} \tag{o}$$
где $e^{\phi} = y(u+v) - y(u-v),$
$(y')^2 = -4y^4 + ay^3 + by^2 + cy + d;$

$$u_t = u_2 + (e^{\phi}v_1 + \phi_u)(u_1^2 + 1), \quad -v_t = v_2 - (e^{\phi}u_1 - \phi_v)(v_1^2 + 1), \tag{p}$$
где $e^{\phi} = y(u+v) - y(u-v),$
$(y')^2 = -y^4 + ay^3 + by^2 + cy + d;$

ур. Буссинеска
$$u_t = u_2 + v_1, \quad -v_t = v_2 - u_1^2; \tag{q}$$
$$u_t = u_2 + v_1, \quad -v_t = v_2 - (u^2)_x; \tag{Q}$$
$$u_t = u_2 + (u+v)^2, \quad -v_t = v_2 + (u+v)^2; \tag{r}$$
$$u_t = u_2 + (u+v)v_1 - \frac{1}{6}(u+v)^3, \quad -v_t = v_2 - (u+v)u_1 - \frac{1}{6}(u+v)^3; \tag{s}$$
$$u_t = u_2 + v_1, \quad -v_t = v_2 - u_1^2 - (v + \frac{1}{2}u^2)u_1; \tag{t}$$
$$u_t = u_2 + v_1^2, \quad -v_t = v_2 + u_1^2; \tag{u1}$$
$$u_t = u_2 + 2vv_1, \quad -v_t = v_2 + 2uu_1; \tag{U1}$$

(в системах (u2)–(u6) обозначено $\omega = \exp(\frac{2\pi i}{3})$, $E = e^{u+v}$, $E_1 = e^{\omega u + \omega^2 v}$, $E_2 = e^{\omega^2 u + \omega v}$)

$$u_t = u_2 + v_1^2 + bE - 2cE^{-2}, \quad -v_t = v_2 + v_1^2 + bE - 2cE^{-2}; \tag{u2}$$

$$\begin{cases} \quad u_t = u_2 + v_1^2 - (aE^{-1} + \omega a_1 E_1^{-1} + \omega^2 a_2 E_2^{-1}) v_1, \\ -v_t = v_2 + u_1^2 + (aE^{-1} + \omega^2 a_1 E_1^{-1} + \omega a_2 E_2^{-1}) u_1; \end{cases} \tag{u3}$$

$$\begin{cases} \quad u_t = u_2 + v_1^2 - 2cE^{-2} - 2\omega^2 c_1 E_1^{-2} - 2\omega c_2 E_2^{-2}, \\ -v_t = v_2 + u_1^2 - 2cE^{-2} - 2\omega c_1 E_1^{-2} - 2\omega^2 c_2 E_2^{-2}; \end{cases} \tag{u4}$$

$$u_t = u_2 + v_1^2 + bE + \omega^2 b_1 E_1 + \omega b_2 E_2, \quad -v_t = v_2 + u_1^2 + bE + \omega b_1 E_1 + \omega^2 b_2 E_2; \tag{u5}$$

$$\begin{cases} \quad u_t = u_2 + v_1^2 - (aE^{-1} + \omega a_1 E_1^{-1} + \omega^2 a_2 E_1^{-1}) v_1 \\ \qquad\qquad - \dfrac{1}{6}(a_1 a_2 E + \omega^2 a a_2 E_1 + \omega a a_1 E_2 + a^2 E^{-2} + \omega^2 a_1^2 E_1^{-2} + \omega a_2^2 E_2^{-2}), \\ -v_t = v_2 + u_1^2 + (aE^{-1} + \omega^2 a_1 E_1^{-1} + \omega a_2 E_2^{-1}) u_1 \\ \qquad\qquad - \dfrac{1}{6}(a_1 a_2 E + \omega a a_2 E_1 + \omega^2 a a_1 E_2 + a^2 E^{-2} + \omega a_1^2 E_1^{-2} + \omega^2 a_2^2 E_2^{-2}); \end{cases} \tag{u6}$$

$$u_t = u_2 - \frac{(u_1 + 2v_1)u_1}{2(u+v)} + a(u+v), \quad -v_t = v_2 - \frac{(2u_1 + v_1)v_1}{2(u+v)} + b(u+v); \tag{v}$$

$$u_t = u_2 + (u^2 + v^{-1})_x, \quad -v_t = v_2 - 2(uv)_x - 1. \tag{w}$$

4. Таблица подстановок

Системы (v), (w) сводятся, соответственно, к линейной и приводимой системам:

$$(\mathrm{v}) \to \ \left(u_t = u_2 + v_1 + \frac{a-b}{2}u, \quad -v_t = v_2 - 2bu_1 + \frac{a-b}{2}v\right) \ : \quad \tilde u = 2(u+v)^{1/2}, \quad \tilde v = -2v_1(u+v)^{-1/2},$$

$$(\mathrm{w}) \to \ \left(u_t = u_2 + 1/v, \quad -v_t = v_2\right) \ : \quad \tilde u = u_1/u, \quad \tilde v = uv.$$

Остальные системы связаны следующими заменами (симметрические системы выделены рамкой, двойные стрелки отвечают потенцированию $\tilde u = u_1$, $\tilde v = v_1$, в подстановке, помеченной $A \to B$ переменные с тильдой отвечают уравнению B):

$$\begin{tikzcd}
& (\mathrm{a}) \arrow[dl] \arrow[dr] \arrow[dd, Rightarrow] & \\
(\mathrm{b}) \arrow[dr] & & \boxed{\mathrm{c}} \arrow[dl] \\
& (\mathrm{A}) &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& \boxed{\mathrm{d}} \arrow[dl] \arrow[dr] \arrow[dd, Rightarrow] & \\
\boxed{\mathrm{e}} \arrow[dr] & & (\mathrm{f}) \\
& (\mathrm{D}) &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& \boxed{\mathrm{g}} \arrow[dl] \arrow[dr] \arrow[dd, Rightarrow] & & \boxed{\mathrm{i}} \arrow[dl] \arrow[dr] \arrow[dd, Rightarrow] & \\
\boxed{\mathrm{j}} \arrow[dr] & & \boxed{\mathrm{h}} \arrow[dl] \arrow[dr] \arrow[dd, Rightarrow] & & (\mathrm{k}) \\
& (\mathrm{G}) & & \boxed{\mathrm{I}} \arrow[dl] & \\
& & (\mathrm{H}) & &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
& (\mathrm{q}) \arrow[dl] \arrow[dd, Rightarrow] \\
(\mathrm{r}) \arrow[dr] & \\
& (\mathrm{Q})
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{array}{ccc}
(\mathrm{l}) & \to & (\mathrm{m}) \\
\boxed{\mathrm{s}} & \to & (\mathrm{t}) \\
\boxed{\mathrm{u1}} & \Rightarrow & (\mathrm{U1})
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccccc}
(\mathrm{n}) & (\mathrm{o}) & (\mathrm{p}) & & \\
\boxed{\mathrm{u2}} & (\mathrm{u3}) & (\mathrm{u4}) & (\mathrm{u5}) & (\mathrm{u6})
\end{array}$$

(a) → (b)	$\tilde u = e^u,$	$\tilde v = e^{-u}v_1$
(b) → (A)	$\tilde u = u_1/u,$	$\tilde v = uv$
(c) → (A)	$\tilde u = (u+v)/2,$	$\tilde v = -v_1$
(a) → (c)	$\tilde u = 2u_1 + v,$	$\tilde v = -v$
(d) → (e)	$\tilde u = \operatorname{atanh}(u_1/2) - v,$	$\tilde v = v$
(e) → (D)	$\tilde u = 2\tanh(u+v),$	$\tilde v = v_1$
(d″) → (f)	$\tilde u = \tanh(u+v),$	$\tilde v = -\tanh(u+v) - 2/v_1$
(g) → (j)	$\tilde u = 2/u_1,$	$\tilde v = v$
(j) → (G)	$\tilde u = 2/(u+v),$	$\tilde v = v_1$
(g) → (h″)	$\tilde u = -iu/2,$	$\tilde v = iu/2 + \operatorname{atanh}(-iv_1)$
(h″) → (G)	$\tilde u = 2iu_1,$	$\tilde v = i\tanh(u+v)$
(h′) → (I)	$\tilde u = 2/(u+v),$	$\tilde v = v_1$
(I) → (H)	$\tilde u = -uv/2,$	$\tilde v = -uv/2 - v_1/v$
(i) → (h′)	$\tilde u = 2/u_1 - v_1,$	$\tilde v = v$
(i′) → (k)	$\tilde u = e^{u+v},$	$\tilde v = -2/v_1 - e^{u+v}$
(l) → (m)	$\tilde u = y(u+v),$	$\tilde v = -2/v_1 - y(u+v)$
(q) → (r)	$\tilde u = u_1/2 + v/4,$	$\tilde v = -v/4$
(r) → (Q)	$\tilde u = 2(u+v),$	$\tilde v = -4v_1$
(s) → (t)	$\tilde u = -(u+v),$	$\tilde v = 2v_1 - (u+v)^2/2$

5. Необходимые условия интегрируемости

Утверждение 5. *Если система (210) обладает законом сохранения с плотностью $\rho(w, w_1, \dots, w_n)$ ненулевого порядка, то*

$$\operatorname{tr} A = 0, \quad \operatorname{tr}(A^{-1}F_{w_1}) \in \operatorname{Im} D_x, \quad D_t((\det A)^{-1/4}) \in \operatorname{Im} D_x, \tag{216}$$

где введено обоначение для матрицы Якоби $F_{w_1} = \begin{pmatrix} f_{u_1} & f_{v_1} \\ g_{u_1} & g_{v_1} \end{pmatrix}$. Кроме того, плотность ρ является многочленом относительно w_n, степени не выше второй.

Утверждение 5 позволяет осуществить замену, сводящую систему к более простому виду (211). Дальнейшие условия интегрируемости вычисляются для систем, уже приведённых к этой форме. Эти условия заключаются в том, что уравнения

$$D_t(\rho_k) = D_x(\sigma_k), \quad \omega_k = D_x(\phi_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots \tag{217}$$

должны быть разрешимы относительно σ_k, ϕ_k, как функций от u, v и их производных по x, причём ρ_k и ω_k определяются через правую часть системы и найденные ранее $\sigma_0, \dots, \sigma_{k-1}$, $\phi_0, \dots, \phi_{k-1}$ по формулам, указанным в следующем утверждении. Для полного описания интегрируемых случаев оказывается достаточно первых четырёх условий.

Утверждение 6. *Если система (211) обладает законами сохранения и симметриями достаточно высокого порядка, то выполняются условия (217), где*

$$\begin{aligned}
\rho_0 &= \frac{1}{2} f_{u_1} - \frac{1}{2} g_{v_1}, \\
\rho_1 &= \sigma_0 - \frac{1}{4} f_{u_1}^2 - \frac{1}{4} g_{v_1}^2 - f_{v_1} g_{u_1} + f_u + g_v, \\
\rho_2 &= \sigma_1, \\
\rho_3 &= \sigma_2 + \frac{1}{2}\rho_1^2 + \frac{1}{2}\omega_1^2 - \omega_0(\omega_2 - D_t(\phi_1)) - 4 f_v g_u + f_{v_1} D_t(g_{u_1}) - D_t(f_{v_1}) g_{u_1} \\
&\quad + D_t(f_u - g_v) - f_{v_1}^2 g_{u_1}^2 + 2 f_{v_1} g_{u_1}(f_u + g_v) - 2 D_x(f_{v_1}) D_x(g_{u_1})
\end{aligned}$$

$$+\frac{1}{2}(D_x(\omega_0))^2+\frac{1}{2}(D_x(\rho_0))^2+\rho_0(D_x(f_{v_1})g_{u_1}-f_{v_1}D_x(g_{u_1}))$$
$$+2g_uD_x(f_{v_1})+2f_vD_x(g_{u_1})-f_uD_x(f_{u_1})-g_vD_x(g_{v_1}),$$
$$\omega_0=\frac{1}{2}f_{u_1}+\frac{1}{2}g_{v_1},$$
$$\omega_1=D_t(\phi_0)-\phi_0\rho_0-f_{v_1}g_{u_1}+f_u-g_v,$$
$$\omega_2=D_t(\phi_1)+2\omega_0f_{v_1}g_{u_1}-2f_{v_1}g_u-2f_vg_{u_1},$$
$$\omega_3=D_t(\phi_2)+\rho_1\omega_1-\rho_0(\omega_2-D_t(\phi_1))+D_t(f_u+g_v)+\omega_0(D_x(f_{v_1})g_{u_1}-f_{v_1}D_x(g_{u_1}))$$
$$+D_x(\omega_0)D_x(\rho_0)-f_uD_x(f_{u_1})+g_vD_x(g_{v_1})-2D_x(f_{v_1})g_u+2f_vD_x(g_{u_1}).$$

Нётер теорема

Автор: А.Б. Шабат, 27.02.2007

Законом сохранения для системы дифференциальных уравнений

$$\omega^a(x, u, u_i, \dots) = 0, \quad i = 1, \dots, m+1, \quad a = 1, \dots, n,$$
$$u_i^a = \partial u^a / \partial x^i, \quad x^i = (x^1, x^2, \dots, x^m, t)$$

называется уравнение непрерывности

$$\sum D_i K_i \equiv 0, \quad K_i = K_i(x, u, u_j, \dots), \quad i, j = 1, \dots, m+1,$$

которое должно выполняться для любого решения системы. Любой закон сохранения определён с точностью до преобразования эквивалентности $K_i \to K_i + P_i$, $\sum D_i P_i \equiv 0$. Два закона сохранения принадлежат одному классу эквивалентности если их разность является тривиальным законом сохранения. Для тривиальных законов сохранения компоненты вектора K_i обращаются в ноль на решениях: $K_i = 0$, $(i, j = 1, \dots, m{+}1)$, либо уранение непрерывности выполнено во всём пространстве: $\sum D_i K_i \equiv 0$; тривиальность первого и второго рода, соответственно.

Рассмотрим функции $u = u(x)$, определённые в области D $(m+1)$-мерного пространства-времени. Пусть

$$S = \int_D L(x^i, u^a, u_i^a, \dots) d^{m+1} x$$

функционал действия с лагранжианом L. Тогда уравнения движения имеют вид

$$E^a(L) = \omega^a(x, u, u_i, u_{ij} \dots) = 0, \quad i, j = 1, \dots, m+1, \quad a = 1, \dots, n$$

где E оператор Эйлера-Лагранжа

$$E^a = \frac{\partial}{\partial u^a} - \sum_i D_i \frac{\partial}{\partial u_i^a} + \sum_{i \le j} D_i D_j \frac{\partial}{\partial u_{ij}^a} + \dots .$$

Рассмотрим эволюционное векторное поле

$$X_\alpha = \alpha^a \frac{\partial}{\partial u^a} + \sum_i (D_i\alpha^a)\frac{\partial}{\partial u^a_i} + \sum_{i\le j}(D_iD_j\alpha^a)\frac{\partial}{\partial u^a_{ij}} + \dots \quad \alpha^a = \alpha^a(x,u,u_i,\dots). \tag{218}$$

Вариация функционала S при инфинитезимальном преобразовании с оператором X_α равна

$$\delta S = \int_D X_\alpha L d^{m+1}x.$$

X_α является вариационной (нётеровой) симметрией, если

$$X_\alpha L = D_i M_i, \quad M_i = M_i(x,u,u_j,\dots), \quad i = 1,\dots,m+1, \tag{219}$$

Тождество Нётер

$$X_\alpha = \alpha^a E^a + D_i R_{\alpha i}, \quad R_{\alpha i} = \alpha^a \frac{\partial}{\partial u^a_i} + \left\{\sum_{k\ge i}(D_k\alpha^a) - \alpha^a \sum_{k\le i} D_k\right\}\frac{\partial}{\partial u^a_{ik}} + \dots$$

в приложении к (219) даёт

$$D_i(M_i - R_{\alpha i}L) = \alpha^a\omega^a \equiv 0 \tag{220}$$

на многообразии решений ($\omega = 0$, $D_i\omega = 0, \dots$).

Таким образом, любое 1-парметрическое преобразование вариационной симметрии X_α (218) ведёт к закону сохранения (220).

Нижника-Веселова-Новикова уравнение eDDD

[1065, 1374, 334]

$$u_t = \alpha(u_{xx} + 3p_x u)_x + \beta(u_{yy} + 3q_y u)_y, \quad p_y = u, \quad q_x = u$$

Редукция $v = 1$ симметрии 3-го порядка (141) системы Дэви-Стюартсона.
Высшая симметрия:

$$u_{t_5} = (u_{xxxx} + 5(u_x w_x)_x + 5u(w_{xxx} + w_x^2 + w_{1,x}))_x, \quad w_y = u, \quad w_{1,y} = uw_x.$$

Нижника-Веселова-Новикова уравнение модифицированное eDDD

[319]

$$u_t = u_{xxx} + 3u_x w_x + \frac{3}{2} u w_{xx}, \quad w_y = u^2$$

Редукция $v = u$ симметрии 3-го порядка (141) системы Дэви-Стюартсона.

Нулевой кривизны представление

Нелинейное уравнение обладает ***представлением нулевой кривизны*** (ZCR), если оно эквивалентно условию совместности пары вспомогательных линейных систем. Дифференциальным уравнениям в частных производных, дифференциально-разностным и дискретным соответствуют вспомогательные задачи следующих типов:

DD	$\Psi_x = U\Psi,$	$\Psi_t = V\Psi$	$\Rightarrow$	$U_t = V_x + [V, U]$
DΔ	$\Psi_{n,x} = U_n\Psi_n,$	$\Psi_{n+1} = L_n\Psi_n$	$\Rightarrow$	$L_{n,x} = U_{n+1}L_n - L_nU_n$
$\Delta\Delta$	$\Psi_{m,n+1} = L_{m,n}\Psi_{m,n},$	$\Psi_{m+1,n} = M_{m,n}\Psi_{m,n}$	$\Rightarrow$	$M_{m+1,n}L_{m,n} = L_{m,n+1}M_{m,n}$

где матрицы зависят от переменных уравнения, их производных или сдвигов и спектрального параметра λ.

Представление нулевой кривизны называется тривиальным, если его можно свести к скалярному, или если спектральный параметр можно исключить.

Важным специальным случаем ZCR является Лаксова пара.

Одевающая цепочка hDΔ

[1376]

$$v'_{n+1} + v'_n = (v_{n+1} - v_n)^2 + \beta_n$$

Эта цепочка определяет преобразование Дарбу для уравнения Шрёдингера и x-часть преобразования Бэклунда для потенциального уравнения КдФ. Разности $f_n = v_{n+1} - v_n$ удовлетворяют уравнению

$$f'_{n+1} + f'_n = f^2_{n+1} - f^2_n + \beta_{n+1} - \beta_n \tag{221}$$

также известному, как одевающая цепочка.
Представление нулевой кривизны : $\Psi'_n = U_n\Psi_n$, $\Psi_{n+1} = L_n\Psi_n$, where

$$U_n = \begin{pmatrix} v_n & 1 \\ v'_n - v^2_n - \lambda & -v_n \end{pmatrix}, \qquad L_n = \begin{pmatrix} v_{n+1} & 1 \\ \beta_n - v_n v_{n+1} - \lambda & -v_n \end{pmatrix}$$

or

$$U_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ u_n - \lambda & 0 \end{pmatrix}, \qquad L_n = \begin{pmatrix} f_n & 1 \\ f^2_n + \beta_n - \lambda & f_n \end{pmatrix}, \quad u_n = 2v'_n.$$

Одевающая цепочка двумеризованная DDΔ

$$f_{n,x} + f_{n+1,x} = f_n^2 - f_{n+1}^2 - \sigma(g_n - g_{n+1}), \quad g_{n,x} = f_{n,y}$$

$$(v_n + v_{n+1})_x = (v_n - v_{n+1})^2 - \sigma g_n, \quad g_{n,x} = (v_n - v_{n+1})_y.$$

Одевающая цепочка матричная hDΔ

$$v'_{n+1}+v'_n=(v_{n+1}-v_n)^2+b_n,\quad b'_n=[b_n,v_{n+1}-v_n],\quad v_n,b_n\in \mathrm{Mat}_n$$

Разности $f_n=v_{n+1}-v_n$ удовлетворяют уравнениям

$$f'_{n+1}+f'_n=f^2_{n+1}-f^2_n+b_{n+1}-b_n,\quad b'_n=[b_n,f_n]$$

Представление нулевой кривизны : $\Psi'_n=U_n\Psi_n$, $\Psi_{n+1}=L_n\Psi_n$, where

$$U_n=\begin{pmatrix} v_n & I\\ v'_n-v_n^2-\lambda I & -v_n\end{pmatrix},\qquad L_n=\begin{pmatrix} v_{n+1} & I\\ b_n-v_nv_{n+1}-\lambda I & -v_n\end{pmatrix}$$

или

$$U_n=\begin{pmatrix} 0 & I\\ u_n-\lambda I & 0\end{pmatrix},\qquad L_n=\begin{pmatrix} f_n & I\\ f_n^2+b_n-\lambda I & f_n\end{pmatrix},\quad u_n=2v'_n.$$

Одевающая цепочка двумеризованная DDΔ

$$f_{n+1,x} + f_{n,x} = f_{n+1}^2 - f_n^2 + p_{n+1} - p_n, \quad p_{n,x} = f_{n,t} + [p_n, f_n].$$

Ортогональная решётка

Автор: В.Э. Адлер, Last. mod.: 1.12.2008

Планарные решётки допускают множество важных специальных случаев. Одной из возможных редукций является следующая [1075,957,300,436,496,815,223,504,304].

Определение 9. Отображение $f : \mathbb{Z}^M \to \mathbb{R}^d$, $d > 1$, называется M-мерной ***ортогональной решёткой*** (= ***круговой решёткой*** = ***дискретной ортогональной сетью***) если образ каждого единичного квадрата в $\mathbb{Z}^M$ является плоским вписанным четырёхугольником.

Очевидно, если $d > 2$ и три 2-мерные круговые решётки заданы, как начальные данные на координатных плоскостях, то вся решётка строится только при помощи условия планарности, как в случае общих планарных решёток. То, что при этом построении сохраняется свойство вписанности гарантируется теоремой Микеля.

Теорема 21 (Микель)**.** *Пусть даны три окружности C^{ij} и семь точек $f, f_i, f_{ij} = f_{ji}$, $1 \le i, j \le 3$, $i \ne j$, таких что $f, f_i, f_j, f_{ij} \in C^{ij}$. Тогда три окружности C^{ij}_k проходящие через точки f_k, f_{ki}, f_{kj} пересекаются в одной точке: $f_{123} = C^{12}_3 \cap C^{13}_2 \cap C^{23}_1$.*

[1075] A.W. Nutbourne. The solution of frame matching equation. [125, 233–252].

[957] R.R. Martin, J. de Pont, T.J. Sharrock. Cyclide surfaces in computer aided design. [125, 253–268].

[300] A.I. Bobenko. Discrete conformal maps and surfaces. *In: SIDE III — Symmetries and integrability of difference equations (Sabaudia, 1998), CRM Proc. Lecture Notes **225*** (2000) 97–108.

[436] J. Cieśliński, A. Doliwa, P.M. Santini. The integrable discrete analogues of orthogonal coordinate systems are multidimensional circular lattices. *Phys. Lett. A **235:5*** (1997) 480–488.

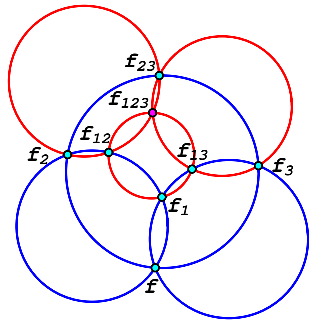
[496] A. Doliwa, S.V. Manakov, P.M. Santini. $\bar\partial$-Reductions of the multidimensional quadrilateral lattice. The multidimensional circular lattice. *Commun. Math. Phys. **196:1*** (1998) 1–18.

[815] B.G. Konopelchenko, W.K. Schief. Three-dimensional integrable lattices in Euclidean spaces: conjugacy and orthogonality. *R. Soc. Lond. Proc. Ser. A **454*** (1998) 3075–3104.

[223] A.A. Akhmetshin, I.M. Krichever, Y.S. Volvovski. Discrete analogues of the Darboux-Egoroff metrics. *Proc. Steklov Inst. Math. **2 (225)*** (1999) 16–39.

[504] A. Doliwa, P.M. Santini. The symmetric, d-invariant and Egorov reductions of the quadrilateral lattice. *J. Geom. Phys. **36*** (2000) 60–102.

[304] A.I. Bobenko, U. Hertrich-Jeromin. Orthogonal nets and Clifford algebras. *Tôhoku Math. Publ. **20*** (2001) 7–22.



f_{23}
f_{123}
f_{12}
f_{13}
f_2
f_3
f_1
f

Пенлеве свойство

[1112, 615, 51]

Определение 10. Обыкновенное дифференциальное уравнение в комплексной плоскости обладает ***свойством Пенлеве***, если положение любой существенно особой точки в его решении не зависит от начальных данных. Иными словами, *подвижные* сингулярности могут быть только полюсами.

Пенлеве тест

Гипотеза Абловица-Рамани-Сигура [188] утверждает, что нелинейное уравнение в частных производных разрешимо при помощи МОЗР, только если любая его редукция к обыкновенному уравнению обладает свойством Пенлеве.

[188] M.J. Ablowitz, A. Ramani, H. Segur. A connection between nonlinear evolution equations and ordinary differential equations of P-type. I,II. *J. Math. Phys.* ***21:4*** (1980) 715–721, 722–1006.

Пенлеве уравнение

[53, 42, 43, 54]

В работах [1112,615] были проклассифицированы ОДУ второго порядка $y'' = f(z, y, y')$ с правой частью, рациональной по y, y' и аналитической по z, удовлетворяющие свойству Пенлеве. С точностью до замен

$$\tilde{z} = f(z), \quad \tilde{y} = \frac{a(z)y + b(z)}{c(z)y + d(z)},$$

где a, b, c, d, f аналитические функции, существует 50 типов таких уравнений [51]. Из них большая часть интегрируется в элементарных и эллиптических функциях или сводится к шести неприводимым случаям, известным, как ***уравнения Пенлеве*** P_1–P_6. Их общие решения являются новыми специальными функциями, известными как ***трансцendенты Пенлеве***. Автомодельные решения нелинейных интегрируемых уравнений и цепочек часто выражаются через эти функции и их высшие аналоги. Некоторые специальные классы решений (при определённых значениях параметров и начальных условий) уравнений P_2–P_6 выражаются через элементарные функции или функции гипергеометрического типа.

Основным методом изучения уравнений Пенлеве является метод изомонодромных деформаций, основанный на представлении этих уравнений в виде условия совместности некоторых линейных уравнений. Этот метод позволяет определить асимптотику трансцендентов Пенлеве и её зависимость от начальных данных.

[1112] P. Painlevé. Sur les équations différentielles du second ordre et d'ordre superieur dont l'integral général est uniform. *Acta Math.* ***25*** (1902) 1–86.

[615] B. Gambier. *Acta Math.* ***33*** (1909) 1–55.

[51] E.L. Ince. Ordinary differential equations. Dover Publ., 1956.

Пенлеве уравнение P_1 D

$$u'' = 6u^2 + z \qquad (\mathrm{P}_1)$$

Представление решения целыми функциями: $u = -(\log f)''$,

$$ff^{\mathrm{IV}} - 4f'f''' + 3(f'')^2 + zf^2 = 0.$$

Пенлеве уравнение P_2 D

[928]

$$u'' = 2u^3 + zu + \alpha \qquad (P_2)$$

Представление решения целыми функциями: $u = g/f$,

$$ff'' - (f')^2 + g^2 = 0, \quad (f'g - fg')^2 = g^4 + zf^2g^2 + (2\alpha g + f')f^3.$$

Пенлеве уравнение P_3 D

$$u'' = \frac{(u')^2}{u} - \frac{u'}{z} + \frac{1}{z}(\alpha u^2 + \beta) + \gamma u^3 + \frac{\delta}{u} \qquad (\mathrm{P}_3)$$

Представление решения целыми функциями: $u = g/f$,

$$ff'' - (f')^2 = -\gamma e^{2z} f^2 - \alpha e^z fg, \quad gg'' - (g')^2 = \delta e^{2z} f^2 + \beta e^z fg.$$

Пенлеве уравнение P_4 D

$$u'' = \frac{(u')^2}{2u} + \frac{3}{2}u^3 + 4zu^2 + 2(z^2 - \alpha)u + \frac{\beta}{u} \tag{P_4}$$

Представление решения целыми функциями: $u = g/f$,

$$ff'' - (f')^2 = -g(g + 2zf), \quad (f'g - fg')^2 - 4f'f^2g = g^4 + 4zfg^3 + 4(z^2 - \alpha)f^2g^2 - 2\beta f^4.$$

Пенлеве уравнение P_5 D

$$u'' = \left(\frac{1}{2u} + \frac{1}{u-1}\right)(u')^2 - \frac{u'}{z} + \frac{(u-1)^2}{z^2}\left(\alpha u + \frac{\beta}{u}\right) + \gamma\frac{u}{z} + \delta\frac{u(u+1)}{u-1} \qquad (\mathrm{P}_5)$$

Представление решения целыми функциями: $u = g/f$,

$$\begin{aligned} ff'' - (f')^2 &= f(f'-g')^2 + 2\alpha g(g-f), \\ (f'g - fg')^2 &= 2fg(f-g)(f'-g') + 2(\alpha g^2 - \beta f^2)(f-g)^2 + 2\gamma e^z f^2 g(f-g) - 2\delta e^{2z} f^2 g^2. \end{aligned}$$

Пенлеве уравнение P_6 D

$$u'' = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{u} + \frac{1}{u-1} + \frac{1}{u-z}\right)(u')^2 - \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{z-1} + \frac{1}{u-z}\right)u' + \frac{u(u-1)(u-z)}{z^2(z-1)^2}\left(\alpha + \beta\frac{z}{u^2} + \gamma\frac{z-1}{(u-1)^2} + \delta\frac{z(z-1)}{(u-z)^2}\right) \tag{P_6}$$

Пенлеве уравнения дискретные

Известно большое число неавтономных разностных уравнений, которые можно интерпретировать, как дискретные аналоги уравнений Пенлеве [647].

Версии dP_1, согласно [1057] :

$$\frac{an+b}{u_{n+1}+u_n}+\frac{a(n-1)+b}{u_n+u_{n-1}}=c-u_n^2 \tag{222}$$

$$u_{n+1}+u_n+u_{n-1}=\frac{an+b}{u_n}+c \tag{223}$$

$$u_{n+1}+u_{n-1}=\frac{an+b}{u_n}+\frac{c}{u_n^2} \tag{224}$$

$$u_{n+1}+u_{n-1}=\frac{an+b}{u_n}+c \tag{225}$$

$$u_{n+1}u_{n-1}=\frac{e^{an+b}}{u_n}+\frac{c}{u_n^2} \tag{226}$$

Уравнение (223) введено в [357,735].

Версии dP_2:

$$u_{n+1}+u_{n-1}=\frac{(an+b)u_n+a}{u_n^2-1} \tag{227}$$

$$\frac{an+b}{u_nu_{n+1}+1}+\frac{a(n-1)+b}{u_{n-1}u_n+1}=\frac{1}{u_n}-u_n+an+b+c \tag{228}$$

---

[647] B. Grammaticos, A. Ramani. Discrete Painlevé equations: a review. *Lect. Notes Phys.* ***644*** (2004) 245–321.

[1057] F.W. Nijhoff, J. Satsuma, K. Kajiwara, B. Grammaticos, A. Ramani. A study of the alternate discrete Painlevé II equation. *Inverse Problems* ***12*** (1996) 697–716.

[357] E. Brezin, V. Kazakov. *Phys. Lett. B* ***236*** (1990) 144.

[735] A.R. Its, A.V. Kitaev, A.S. Fokas. The isomonodromy approach in the theory of two-dimensional quantum gravitation. *Russ. Math. Surveys* ***45:6*** (1987) 155–157.

$$u_{n+1}u_{n-1}=\alpha\frac{1+q^n/u_n}{1+q^nu_n} \tag{229}$$

Уравнение (227) введено в [1053], в [1148] найдена подстановка в dP_{34}:

$$(u_{n+1}+u_n)(u_n+u_{n-1})=\frac{m^2-4u_n^2}{\lambda u_n+n\alpha+\beta+(-1)^n\gamma}.$$

Alternate dP_2 интерпретируется, как принцип нелинейной суперпозиции для (P_3), см. [1057].

dP_4 [1150,689]:

$$(u_{n+1}+u_n)(u_n+u_{n-1})=\frac{(u_n+\alpha+\beta)(u_n+\alpha-\beta)(u_n-\alpha+\beta)(u_n-\alpha-\beta)}{(u_n+\delta n+\varepsilon+\gamma)(u_n+\delta n+\varepsilon-\gamma)}$$

[1053] F.W. Nijhoff, V.G. Papageorgiou. Similarity reductions of integrable lattices and discrete analogues of Painlevé PII equation. *Phys. Lett. A* ***153:6–7*** (1991) 337–344.

[1148] A. Ramani, B. Grammaticos. Miura transforms for discrete Painlevé equations. *J. Phys. A* ***25:11*** (1992) L633–637.

[1057] F.W. Nijhoff, J. Satsuma, K. Kajiwara, B. Grammaticos, A. Ramani. A study of the alternate discrete Painlevé II equation. *Inverse Problems* ***12*** (1996) 697–716.

[1150] A. Ramani, B. Grammaticos, J. Hietarinta. Discrete versions of the Painlevé equations. *Phys. Rev. Let.* ***67:14*** (1991) 1829–1832.

[689] J. Hietarinta, K. Kajiwara. Rational solutions to d-P_{IV}. *solv-int 9705002*

Периодическое замыкание

Периодическое замыкание превращает бесконечные цепочки в конечномерные динамические системы. В типичной ситуации интегрируемой цепочке отвечают интегрируемые же замыкания, что объясняется тем, что представление нулевой кривизны порождает представление Лакса:

$$W_{n,x} = U_{n+1}W_n - W_nU_n, \quad U_{n+N} = U_n \qquad \Rightarrow \qquad \hat{W}_{n,x} = [U_n, \hat{W}_n], \quad \hat{W}_n = W_{n+N-1} \dots W_{n+1}W_n$$

и след $\operatorname{tr} \hat{W}_n$ служит производящей функцией интегралов движения. Разумеется, в каждом отдельном случае полнота этих первых интегралов нуждается в обосновании.

Если исходная цепочка описывает преобразования Бэклунда для какого-то уравнения, то периодическое замыкание выделяет некоторый подкласс его решений. Эта возможность была отмечена в работах [1397,1398], а в работе [1376] было показано, что данная конструкция для оператора Шрёдингера даёт в точности описание конечнозонных решений уравнения КдФ, см. также [604].

Периодическое замыкание можно комбинировать с точечными преобразованиями, оставляющими цепочку инвариантной. Вообще говоря, это портит свойство интегрируемости, но зато приводит к интересным примерам, являющимся точно-решаемыми в квантово-механическом смысле и связанными с трансцендентами Пенлеве и их q-разностными аналогами [1235, 199] [1376, 1235, 199].

Следуя [1376], рассмотрим периодические решения одевающей цепочки:

$$f'_n + f'_{n+1} = f_n^2 - f_{n+1}^2 + \alpha_{n+1}, \quad n \in \mathbb{Z}_N, \quad \varepsilon = -\alpha_1 - \dots - \alpha_N \neq 0. \tag{230}$$

При этой редукции, применение операторов A_n^+ приводит через N шагов к ψ-функциям потенциала, сдвинутого на ε. Это означает, в предположении регулярности потенциала и правильной асимптотики ψ-функций, что спектр данного потенциала состоит из N арифметических прогрессий, как показано

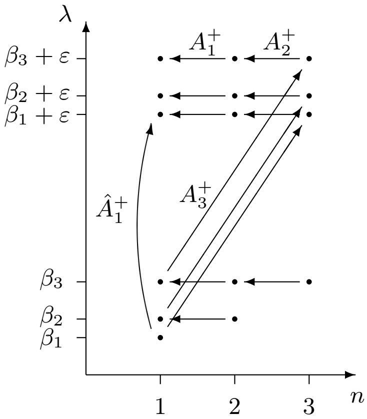
[1397] J. Weiss. Periodic fixed points of Bäcklund transformations and the Korteweg-de Vries equation. *J. Math. Phys.* ***27:11*** (1986) 2647–2656.

[1398] J. Weiss. Periodic fixed points of Bäcklund transformations. *J. Math. Phys.* ***28:9*** (1987) 2025–2039.

[1376] A.P. Veselov, A.B. Shabat. Dressing chain and the spectral theory of Schrödinger operators. *Funct. Anal. Appl.* ***27:2*** (1993) 81–96.

[604] A.P. Fordy, A.B. Shabat, A.P. Veselov. Factorisation and Poisson correspondences. *Theor. Math. Phys.* ***105:2*** (1995) 1369–1386.

на рисунке, отвечающем $N=3$. Собственные функции оператора L_n строятся при помощи взаимно сопряжённых операторов рождения-уничтожения N-го порядка



$$\hat A_n^+ = A_n^+ \dots A_{n+N-1}^+,\quad \hat A_n = A_{n+N-1}\dots A_n.$$

Легко показать, что эти операторы удовлетворяют соотношениям

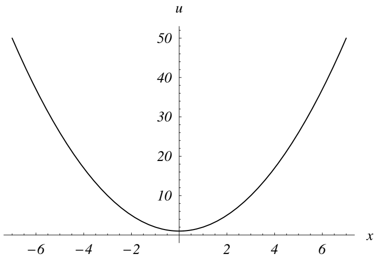
$$\begin{gathered}\hat A_n^+\hat A_n = P(L_n),\quad \hat A_n\hat A_n^+ = P(L_n+\varepsilon),\\ P(\lambda)=(\lambda-\beta_n)\dots(\lambda-\beta_{n+N-1}),\\ [L_n,\hat A_n^+]=\varepsilon\hat A_n^+,\quad [L_n,\hat A_n]=-\varepsilon\hat A_n\end{gathered}$$

обобщающим алгебру гармонического осциллятора, отвечающую $N=1$. Конечно, вопрос об аналитических свойствах решений системы (230) и отвечающих им потенциалов и ψ-функций требует дополнительного изучения.

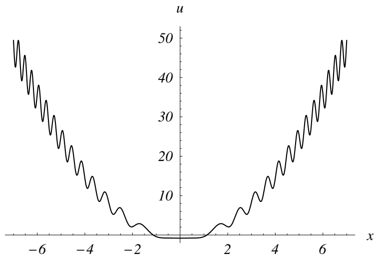
При $N=3,4$ система (230) оказывается эквивалентной уравнениям Пенлеве P_4 и P_5 соответственно. По-видимому, при $N\ge 5$ система также обладает свойством Пенлеве. Однако, для спектральной теории более важной является качественная информация о регулярности потенциала и его асимптотике. Соотношение $2\sum f_n=-\varepsilon x$ подсказывает, что

$$f_n=-\frac{\varepsilon x}{2N}+O(1),\quad u_n=\frac{\varepsilon^2x^2}{4N^2}+O(x),\quad x\to\pm\infty.$$

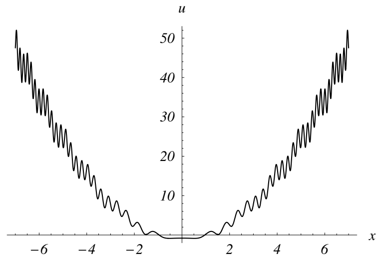
При нечётном N численные эксперименты демонстрируют, что эта асимптотическая формула верна и потенциал u_1 регулярен на всей оси для довольно большой области в пространстве параметров и начальных значений системы. Для таких случаев легко доказать, что формула (108) даёт собственные функции оператора L_1. На представленных графиках выбрано значение $\varepsilon=2N$, что отвечает ведущему члену x^2 в асимптотике. Выбор начальных данных $f_n(0)=0$ приводит к чётному потенциалу $u(-x)=u(x)$.



$N = 1$ (harmonic oscillator)

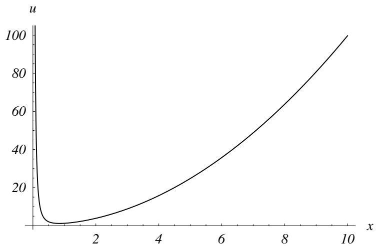


$N = 3$ (P_4)

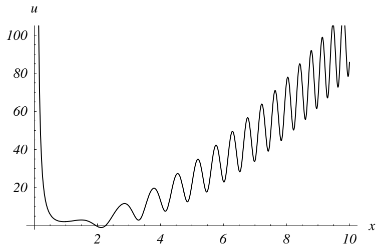


$N = 5$

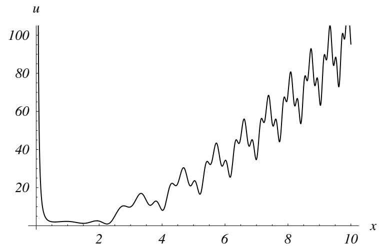
Для чётных N потенциалы имеют сингулярность при $x = 0$, так что правильной формулировкой является спектральная задача на полуоси.



$N = 2$ (задача Кеплера)



$N = 4$ (P_5)



$N = 6$

Петель алгебра

[78]

Алгеброй петель называется алгебра Ли формальных рядов Лорана с коэффициентами в некоторой алгебре Ли L:

$$L(\lambda) = \{u_0\lambda^n + u_1\lambda^{n-1} + u_2\lambda^{n-2} + \dots \mid n \in \mathbb{Z},\ u_i \in L\}.$$

С алгебрами петель связаны несколько схем построения и исследования интегрируемых систем, различной степени универсальности.

В качестве первого, наиболее простого, но уже вполне содержательного примера рассмотрим уравнения Лакса на $L(\lambda)$ вида

$$U_{t_n} = [U_n, U], \quad U = u_0 + u_1/\lambda + u_2/\lambda^2 + \dots, \quad U_n = (\lambda^n U)_+ = u_0\lambda^n + u_1\lambda^{n-1} + \dots + u_n. \tag{231}$$

Для коэффициентов это даёт бесконечную систему уравнений

$$\begin{array}{llll}
u_{0,t_0} = 0, & u_{0,t_1} = 0, & u_{0,t_2} = 0, & \dots \\
u_{1,t_0} = [u_0, u_1], & u_{1,t_1} = [u_0, u_2], & u_{1,t_2} = [u_0, u_3], & \dots \\
u_{2,t_0} = [u_0, u_2], & u_{2,t_1} = [u_0, u_3] + [u_1, u_2], & u_{2,t_2} = [u_0, u_4] + [u_1, u_3], & \dots \\
u_{3,t_0} = [u_0, u_3], & u_{3,t_1} = [u_0, u_4] + [u_1, u_3], & u_{3,t_2} = [u_0, u_5] + [u_1, u_4] + [u_2, u_3], & \dots \\
\dots & \dots & \dots & \dots
\end{array}$$

основные свойства которой сформулированы в следующем утверждении. Оно носит общий характер, в том смысле, что никак не связано со структурой алгебры Ли L.

Утверждение 7. *1) Потоки D_{t_n}, определённые уравнениями (231) коммутируют, то есть $D_{t_n}(D_{t_m}(u_j))$ $D_{t_m}(D_{t_n}(u_j))$, для всех j, m, n;*

2) выполняются тождества $u_{m+1,t_n} = u_{n+1,t_m}$, что позволяет определить потенциал $v \in L$ согласно формулам $u_n = v_{t_{n-1}}$;

3) поток D_τ, определённый уравнением

$$U_\tau = [v, U] - \lambda^2 U_\lambda \quad \Leftrightarrow \quad u_{k,\tau} = [v, u_k] + (k+1)u_{k+1} \tag{232}$$

является мастер-симметрией иерархии (231):

$$[D_\tau, D_{t_n}] = nD_{t_{n+1}}.$$

Доказательство. 3) Имеем

$$\begin{aligned}[D_\tau, D_{t_n}](U) &= [U_n, U]_\tau - ([v, U] - \lambda^2 U_\lambda)_{t_n} \\ &= [U_{n,\tau} - v_{t_n}, U] + [U_n, [v, U] - \lambda^2 U_\lambda] - [v, [U_n, U]] + \lambda^2 [U_n, U]_\lambda \\ &= [(\lambda^n U_\tau)_+ - u_{n+1} + [U_n, v] + \lambda^2 U_{n,\lambda}, U] \\ &= [-(\lambda^{n+2} U_\lambda)_+ - u_{n+1} + \lambda^2 U_{n,\lambda}, U] = n[U_{n+1}, U],\end{aligned}$$

так как

$$\begin{aligned}-(\lambda^{n+2} U_\lambda)_+ - u_{n+1} + \lambda^2 U_{n,\lambda} = u_1\lambda^n + 2u_2\lambda^{n-1} + \dots + (n+1)u_{n+1} - u_{n+1} \\ + \lambda^2(nu_0\lambda^{n-1} + (n-1)u_1\lambda^{n-2} + \dots + u_{n-1}) = nU_{n+1}.\end{aligned}$$

■

Выбор конкретной алгебры L приводит к различным интегрируемым моделям.

Пример 12. В случае конечномерной алгебры Ли L уравнения (231) сводятся к (1+1)-мерным интегрируемым системам типа НУШ или модели N-волн. При этом важен также выбор начального элемента u_0, являющегося постоянным в силу уравнений.

Пример 13. Интересные примеры бездисперсионных уравнений произвольной размерности возникают в случае, когда L есть бесконечномерная алгебра Ли векторных полей на каком-либо многообразии. Пусть, например, L состоит из векторных полей на прямой, то есть u_i являются функциями, зависящими от дополнительной переменной x и коммутатор определён формулой $[u, v] = uv_x - vu_x$ (при отождествлении $u \leftrightarrow u\partial_x$). Очевидно, на языке ψ-функций этому примеру отвечают вспомогательные линейные задачи вида $\psi_{t_n} = (\lambda^n + u_1\lambda^{n-1} + \dots + u_n)\psi_x$. Полагая $u_0 = 1$ можно отождествить D_x с D_{t_0}. В этом случае уравнения (231) образуют (2+1)-мерную бездисперсионную иерархию, простейшим представителем которой служит уравнение для потенциала

$$v_{xt_2} - v_{t_1 t_1} + v_x v_{xt_1} - v_{xx} v_{t_1} = 0.$$

В более общем случае, пусть L алгебра Ли векторных полей в N-мерном пространстве, то есть $u_i = (u_i^1, \dots, u_i^N)$ и коммутатор определён в соответствии с отождествлением $u_i \to \sum u_i^k \partial_{x_k}$. Опять, можно считать $D_{t_0} = D_x = D_{x_1}$ без потери общности, полагая $u_0 = (1, 0, 0, \dots)$. При этом вектор-потенциал $v = (v^1, \dots, v^N)$ удовлетворяет уравнению

$$v_{xt_2} - v_{t_1 t_1} + [v_x, v_{t_1}] = 0$$

содержащему частные производные по $2+N$ независимым переменным t_1, t_2 и $x = x_1, \dots, x_N$. Формула (232) приводит к мастер-симметрии этого уравнения

$$v_{xT} = [v, v_x] + 2v_{t_1} + t_1(v_{t_1 t_1} - [v_x, v_{t_1}]).$$

Интересные редукции отвечают подалгебрам Ли контактных или гамильтоновых векторных полей. Например, в случае $N = 2$, $v = (H_p, -H_x)$ здесь возникает 4D-уравнение

$$H_{xt_2} - H_{t_1 t_1} + H_{xt_1} H_{xp} - H_{xx} H_{pt_1} = 0. \tag{233}$$

Приведённая конструкция не единственна и допускает множество вариаций, связанных с различными способами определения элемента U_n в (231). В частности, эти способы связаны с разложениями алгебры Ли L на подалгебры и соответствующими градуировками на $L(\lambda)$. В качестве ещё одного примера можно указать, что выбор $U_n = u_0\lambda^n + u_1\lambda^{n-1} + \dots + u_{n-1}\lambda$ также ведёт к коммутирующим потокам. В случае $L = sl_2$ здесь вместо НУШ возникает уравнение магнетика Гайзенберга, а в случае алгебры гамильтоновых векторных полей на плоскости вместо (233) возникает уравнение

$$H_{t_1 t_1} = H_{pt_1} H_{xt_2} - H_{pt_2} H_{xt_1}, \tag{234}$$

связанное с уравнением Плебанского.

Планарные решётки

Автор: В.Э. Адлер, Last. mod.: 1.12.2008

Следующее понятие, введённое в [89] ($M=2$) и [501] ($M>2$) является наиболее простой и фундаментальной моделью в интегрируемой дискретной геометрии.

Определение 11. Отображение $f:\mathbb{Z}^M\to\mathbb{RP}^d$, $d>2$, называется M-мерной ***планарной решёткой*** или ***дискретной сопряжённой сетью***, если образ каждого единичного квадрата из $\mathbb{Z}^M$ является плоским четырёхугольником.

В аффинных координатах, 2-мерная планарная решётка однозначно определяется (в квадранте $\mathbb{Z}^2_+$) уравнениями вида

$$(T_1-1)(T_2-1)f=c^{21}(T_1-1)f+c^{12}(T_2-1)f$$

с произвольными скалярными параметрами $c^{12}(m,n)$, $c^{21}(m,n)$ и произвольными начальными данными $f(n,0)$, $f(0,n)$ вдоль координатных линий (ясно, что начальные услоия можно определять и иными способами).

При $M=3$, планарная решётка однозначно определяется своими значениями на координатных плоскостях, то есть, 2-мерными планарными решётками $f(m,n,0)$, $f(m,0,n)$ и $f(0,m,n)$. Действительно, пусть Π^{ij} обозначает 2-мерную плоскость проходящую через точки f,f_i,f_j. Здесь и ниже в этом разделе нижние индексы используются для обозначения сдвигов, то есть $f_i=f(\dots,n_i+1,\dots)$. Рассмотрим три такие плоскости Π^{ij}_k, $i\ne j\ne k\ne i$. По построению, эти плоскости лежат в 3-мерном аффинном пространстве Π^{123} проходящем через точки f,f_1,f_2,f_3 и следовательно их пересечение однозначно определяет f_{123}.

С вычислительной точки зрения, это означает, что мы можем одновременно удовлетворить линейные уравнения

$$(T_i-1)(T_j-1)f=c^{ji}(T_i-1)f+c^{ij}(T_j-1)f,\quad i\ne j \tag{235}$$

[89] R. Sauer. Differenzengeometrie. Berlin: Springer-Verlag, 1970.

[501] A. Doliwa, P.M. Santini. Multidimensional quadrilateral lattices are integrable. *Phys. Lett. A* ***233:4–6*** (1997) 365–372.

при i, j принимающих значения $1, 2, 3$. Это приводит к условию совместности для коэффициентов (по повторяющимся индексам нет суммирования)

$$c^{ij}_k - c^{ij} = (c^{ik}_j - c^{ij}_k)c^{kj} + c^{ki}_j c^{ij}, \quad i \neq j \neq k \neq i \tag{236}$$

которые могут быть разрешены относительно сдвинутых коэффициентов, так что возникает некоторое бирациональное отображение

$$(c^{12}, c^{21}, c^{13}, c^{31}, c^{23}, c^{32}) \mapsto (c^{12}_3, c^{21}_3, c^{13}_2, c^{31}_2, c^{23}_1, c^{32}_1).$$

Это отображение довольно громоздко (в немного других обозначениях оно выписано в [1232]), но, к счастью, существует замена переменных, приводящая его к очень красивому виду. Именно, альтернирование (236) по i, k даёт соотношение

$$(c^{ij}_k + 1)(c^{kj} + 1) = (c^{kj}_i + 1)(c^{ij} + 1)$$

которое можно разрешить, введя величины h^i (ассоциированные с направленными рёбрами решётки) согласно формуле

$$c^{ij} + 1 = h^j_i / h^j.$$

Далее, введя векторы $v^i = (h^i)^{-1}(T_i - 1)f$ мы приведём линейную задачу (235) к виду

$$(T_i - 1)v^j = \beta^{ji} v^i, \quad \beta^{ji} := \frac{(T_j - 1)h^i}{h^j_i}.$$

Новые параметры β^{ij} называются ***дискретными коэффициентами вращения***. Их эволюция описывается уравнениями (см. также [322])

$$\beta^{kj}_i = \frac{\beta^{kj} + \beta^{ki}\beta^{ij}}{1 - \beta^{ij}\beta^{ji}}, \quad i \neq j \neq k \neq i. \tag{237}$$

[1232] S.M. Sergeev. On exact solution of a classical 3D integrable model. *J. Nonl. Math. Phys.* ***7:1*** (2000) 57–72.

[322] L.V. Bogdanov, B.G. Konopelchenko. Lattice and q-difference Darboux-Zakharov-Manakov systems via $\bar\partial$-dressing method. *J. Phys. A* ***28:5*** (1995) L173–178.

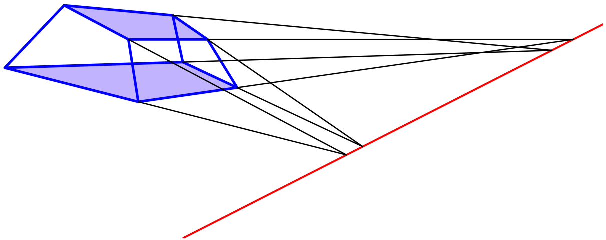
Важным свойством этой эволюции является то, что она может быть корректно определена на решётке произвольной размерности, так что индексы i, j, k могут принимать любое целое значение и выполняется свойство коммутативности $\beta^{ij}_{kl} = \beta^{ij}_{lk}$. Иными словами, отображение $\{\beta^{ij}\} \to \{\beta^{ij}_k\}$ 4D-совместно. Это нетрудно проверить вычислением, но более простое и глубокое доказательство вытекает из исходной геометрической картины.

Теорема 22 (Долива, Сантини)**.** *3-мерные планарные решётки 4D-совместны.*

Доказательство. Начальными данными для 4-мерной кубической ячейки служат векторы f, f_i, f_{ij}, $1 \le i < j \le 4$, такие что $f_{ij} \in \Pi^{ij}$. Это определяет $f_{123} = \Pi^{12}_3 \cap \Pi^{13}_2 \cap \Pi^{23}_1$ и аналогично для f_{124}, f_{134} и f_{234}. Значение f_{1234} может быть найдено как пересечение $\Pi^{12}_{34} \cap \Pi^{13}_{24} \cap \Pi^{23}_{14}$, но очевидно имеется ещё три способа сделать это. Следовательно, нам надо доказать, что 6 плоскостей Π^{ij}_{kl} пересекаются в одной точке. Но $\Pi^{ij}_{kl} = \Pi^{ijk}_l \cap \Pi^{ijl}_k$, так что мы фактически имеем пересечение четырёх 3-мерных подпространств в 4-мерном пространстве Π^{1234}, что даёт единственную точку. ■

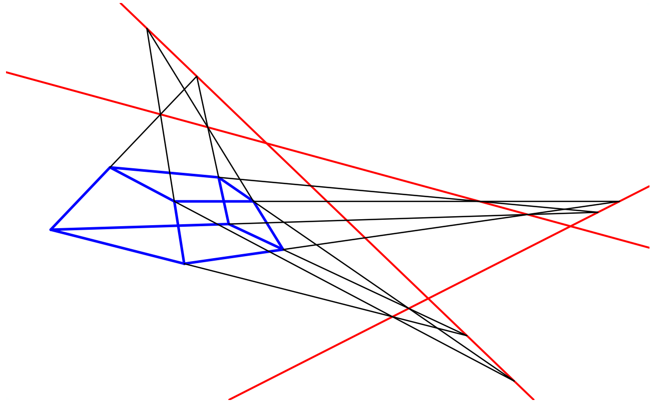
Отметим, что это доказательство “общего положения” требует некоторой модификации в случае, когда все начальные данные лежат в одном 3-мерном подпространстве (что может быть, если тотальная размерность $d = 3$ или просто в результате случайного вырождения). Это можно сделать, рассматривая 4-мерную фигуру с заданной 3-мерной проекцией, подобно доказательству теоремы Дезарга на плоскости. Более того, аналогичный трюк позволяет определить планарную решётку и в случае $d = 2$, когда Определение 11 теряет смысл: достаточно потребовать, чтобы решётка была проекцией некоторой решёткой в $\mathbb{RP}^3$. Способ построения такой проекции описывается следующей теоремой.

Теорема 23 ([206]). *Рассмотим комбинаторный куб на плоскости. Если, для некоторой пары противоположных граней, точки пересечения (продолжений) соответствующих рёбер лежат на прямой, то это же верно для любой другой пары.*



[206, 66]

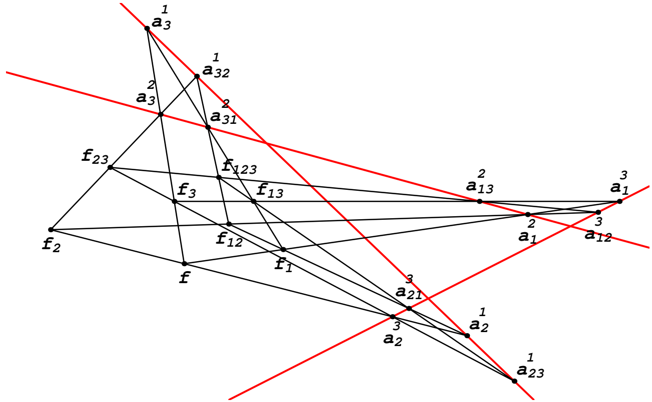
Теорема 23 ([206]). *Рассмотим комбинаторный куб на плоскости. Если, для некоторой пары противоположных граней, точки пересечения (продолжений) соответствующих рёбер лежат на прямой, то это же верно для любой другой пары.*



Доказательство. Коллинеарность одной четвёрки точек пересечения позволяет построить комбинаторный куб с плоскими гранями в пространстве, такой, что наша фигура является его проекцией. Для такой фигуры точки пересечения рёбер лежат на пересечении трёх пар плоскостей. ■

[206, 66]

Теорема 23 ([206]). *Рассмотим комбинаторный куб на плоскости. Если, для некоторой пары противоположных граней, точки пересечения (продолжений) соответствующих рёбер лежат на прямой, то это же верно для любой другой пары.*



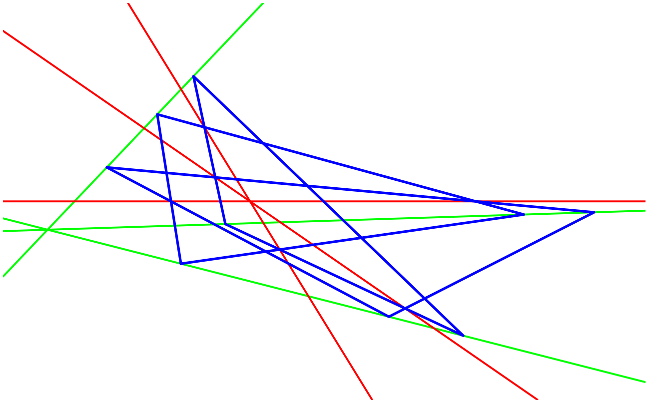
Коллинеарность 4-х точек пересечения является условием, позволяющим построить одну вершину комбинаторного куба по остальным. Это определяет отображение $(\mathbb{RP}^2)^7 \to \mathbb{RP}^2$. Пусть $f, f_1, \dots, f_{23}$ даны, тогда f_{123} определяется следующим образом:

$$a_1^3 = ff_1 \cap f_3f_{13}, \quad a_2^3 = ff_2 \cap f_3f_{23}$$
$$a_{12}^3 = f_2f_{12} \cap a_1^3a_2^3, \quad a_{21}^3 = f_1f_{12} \cap a_1^3a_2^3$$
$$f_{123} = a_{12}^3f_{23} \cap a_{21}^3f_{13}.$$

Теорема означает, что результат инвариантен относительно перестановок индексов.

[206, 66]

Теорема 23 ([206]). *Рассмотим комбинаторный куб на плоскости. Если, для некоторой пары противоположных граней, точки пересечения (продолжений) соответствующих рёбер лежат на прямой, то это же верно для любой другой пары.*



Отметим, что все прямые и точки в приведённой выше фигуре равноправны. Именно, 8 вершин куба + 12 точек пересечения и 12 сторон + 3 прямые пересечения образуют *регулярную* конфигурацию с символом $(20_3 15_4)$. Эта конфигурация приводится в [66], в связи со следующим утверждением (эквивалентным Теореме 23):

Пусть три треугольника перспективны с общим центром. Тогда три оси перспективы трёх пар треугольников пересекаются в одной точке.

[206, 66]

Плебанского уравнения

[1124, 652, 653, 568]

первое: $$u_{xy}u_{zt} - u_{xt}u_{zy} = 1 \qquad (238)$$

второе: $$u_{tx} + u_{zy} = u_{xy}^2 - u_{xx}u_{yy} \qquad (239)$$

Также: heavenly equation

Полмайера-Лунда-Редже система hDD

[1125, 932]

$$s_{xy} + \langle s_x, s_y\rangle s = 0, \quad s \in \mathbb{R}^d, \quad |s| = 1 \tag{240}$$

Также: $O(n)$ σ-модель

Благодаря наличию псевдоконстант $\langle s_x, s_x\rangle_y = 0$, $\langle s_y, s_y\rangle_x = 0$, уравнение (240) допускает нормировку $|s_x| = |s_y| = 1$. При $d = 3$, подстановка $\langle s_x, s_y\rangle = \cos u$ приводит к уравнению sin-Гордон $u_{xy} = -\sin u$.

Аналогично, при $d = 4$ возникает система [931]

$$u_{xy} - \sin u \cos u + \frac{\cos u}{\sin^3 u} v_x v_y = 0, \quad (v_y \cot^2 u)_x + (v_x \cot^2 u)_y = 0. \tag{241}$$

Редукция $v = 0$ опять приводит к уравнению sin-Гордон. Систему (241) можно привести к рациональному виду

$$u_{xy} = \frac{v u_x u_y}{uv + 1} + u(uv + 1), \quad v_{xy} = \frac{u v_x v_y}{uv + 1} + v(uv + 1) \tag{242}$$

при помощи точечной замены ...

Связт с НУШ установлена в [250].

Преобразование Бэклунда [1246]:

$$\begin{aligned} u_{n,x} &= (u_n v_n + 1) u_{n+1}, & u_{n,y} &= (u_n v_n + 1) u_{n-1} \\ -v_{n,x} &= (u_n v_n + 1) v_{n-1}, & -v_{n,y} &= (u_n v_n + 1) v_{n+1} \end{aligned}$$

Эти цепочки принадлежат иерархии цепочки Абловица-Ладика.

---

[931] F. Lund. Example of a relativistic, completely integrable, Hamiltonian system. *Phys. Rev. Let.* ***38:21*** (1977) 1175–1178.

[250] H. Aratyn, L.A. Ferreira, J.F. Gomes, A.H. Zimerman. The complex sine-Gordon equation as a symmetry flow of the AKNS hierarchy. *J. Phys. A* ***33:35*** (2000) L331–L337.

[1246] A.B. Shabat, R.I. Yamilov. Symmetries of nonlinear chains. *Len. Math. J.* ***2:2*** (1991) 377–399.

Полмайера-Лунда-Редже типа системы

$$u_{xy} = f(u_x, u_y, u, v), \quad v_{xy} = g(v_x, v_y, v, u). \tag{243}$$

Основными примерами являются:

$$u_{xy} = 2uvu_y - u, \quad v_{xy} = -2uvv_y - v \tag{244}$$

$$u_{xy} = h^{-1}u_xu_y + h(1-u_y), \quad v_{xy} = h^{-1}v_xv_y + h(1+v_y), \quad h = u+v \tag{245}$$

$$u_{xy} = h^{-1}u_x(vu_y - 1) + hu_y, \quad v_{xy} = h^{-1}v_x(uv_y + 1) - hv_y, \quad h = uv + \delta \tag{246}$$

$$u_{xy} = h^{-1}vu_xu_y - uh, \quad v_{xy} = h^{-1}uv_xv_y - vh, \quad h = uv - 1 \tag{247}$$

$$\begin{gathered} u_{xy} = h^{-1}(h_uu_xu_y + g(u_x+u_y) + g_vh - gh_v), \quad v_{xy} = h^{-1}(h_vv_xv_y - g(v_x+v_y) + g_uh - gh_u), \\ g = hh_{uv} - h_uh_v, \quad h(u,v) = h(v,u), \quad h_{uuu} = 0 \end{gathered} \tag{248}$$

Собственно система Полмайера-Лунда-Редже [1125,932] точечно эквивалентна системе (247). Все выписанные выше системы лагранжевы, например, для системы (248) [204]:

$$L = \int\int h^{-1}(u_xv_y + h_uu_x - h_vv_y + g)dxdy.$$

Возможны комплексные редукции, например система (244) переходит в

$$u_{xy} = u - 2i|u|^2u_y$$

при замене $\partial_x \to i\partial_x$, $\partial_y \to i\partial_y$ и редукции $v = \bar{u}$.

[1125] K. Pohlmeyer. Integrable Hamiltonian systems and interaction through quadratic constraints. *Commun. Math. Phys.* ***46:3*** (1976) 207–218.

[932] F. Lund, T. Regge. Unified approach to strings and vortices with soliton solutions. *Phys. Rev. D* ***14:6*** (1976) 1524–1535.

[204] V.E. Adler. Discretizations of the Landau-Lifshitz equation. *Theor. Math. Phys.* ***124:1*** (2000) 897–908.

При $h = \mathrm{const}(u-v)^2$ система (248) принимает вид

$$u_{xy} = \frac{2u_x u_y}{u-v} - i(u_x + u_y), \quad v_{xy} = \frac{2v_x v_y}{v-u} + i(v_x + v_y). \tag{249}$$

Следующая теорема устанавливает соответствие между системами типа ПЛР и цепочками типа НУШ.

Теорема 24. *Системы (244) — (248) возникают при исключении сдвигов в следующих совместных парах цепочек ($x_+ = x$, $x_- = y$):*

$$(244): \quad \begin{aligned} &u_{n,x} = u_{n+1} + u_n^2 v_n, \quad -v_{n,x} = v_{n-1} + v_n^2 u_n, \\ &u_{n,y} = \frac{u_{n-1}}{v_n u_{n-1} - 1}, \quad -v_{n,y} = \frac{v_{n+1}}{u_n v_{n+1} - 1} \end{aligned}$$

$$(245): \quad \begin{aligned} &u_{n,x} = (u_n + v_n)(u_{n+1} - u_n), \quad -v_{n,x} = (u_n + v_n)(v_{n-1} - v_n), \\ &u_{n,y} = \frac{u_n + v_n}{v_n + u_{n-1}}, \qquad -v_{n,y} = \frac{u_n + v_n}{u_n + v_{n+1}} \end{aligned}$$

$$(246): \quad \begin{aligned} &u_{n,x} = (u_n v_n + \delta)(u_{n+1} + u_n), \quad -v_{n,x} = (u_n v_n + \delta)(v_{n-1} + v_n), \\ &u_{n,y} = \frac{u_n + u_{n-1}}{v_n u_{n-1} - \delta}, \qquad -v_{n,y} = \frac{v_n + v_{n+1}}{u_n v_{n+1} - \delta} \end{aligned}$$

$$(247): \quad u_{n,x_\pm} = (u_n v_n - 1)u_{n\pm1}, \quad -v_{n,x_\pm} = (u_n v_n - 1)v_{n\mp1}$$

$$(248): \quad u_{n,x_\pm} = \frac{2h}{u_{n\pm1} - v_n} + h_{v_n}, \quad v_{n,x_\pm} = \frac{2h}{u_n - v_{n\mp1}} - h_{u_n}, \quad h = h(u_n, v_n).$$

Эти формулы интерпретируются, как явные преобразования Бэклунда для систем типа ПЛР. Например, для системы (244) получаем следующую пару автопреобразований $(u,v) \to (u,v)_{\pm1}$

$$u_1 = u_x - u^2 v, \quad v_1 = \frac{v_y}{uv_y + 1},$$
$$u_{-1} = \frac{u_y}{vu_y - 1}, \quad v_{-1} = -v_x - v^2 u,$$

которые взаимно обратны в силу системы.

В заключение, следует отметить, что полная иерархия высших симметрий для систем типа ПЛР состоит из двух иерархий типа НУШ, одна их которых содержит уравнения с производными по x, а другая по y. Например, простейшими высшими симметриями (244) являются

$$u_{t_1} = u_{xx} - 2(u^2 v_x + u^3 v^2), \quad -v_{t_1} = v_{xx} + 2(v^2 u_x - v^3 u^2)$$
$$u_{t_{-1}} = u_{yy} + 2u_y^2 v_y, \quad -v_{t_{-1}} = v_{yy} - 2v_y^2 u_y.$$

Их можно получить исключением сдвигов из высших симметрий соответствующих цепочек.

Редукция

Уменьшение числа зависимых переменных системы или понижение её размерности посредством наложения дополнительных связей. Наиболее общий способ построения редукций заключается в использовании условия инвариантности относительно некоторой подгруппы непрерывных или дискретных симметрий.

Примеры:

Реймана система двумеризованная eDDD

$$u_t = (u_x + u^2 - 2w_x)_x, \quad v_t = (-v_x + 2uv)_x, \quad w_y = v$$

Матер-симметрия :

$$u_\tau = (x(u_x + u^2 - 2w_x) - w)_x, \quad v_\tau = (x(-v_x + 2uv) - v)_x$$

Следующий поток $D_{t_3} = \frac{1}{2}[D_\tau, D_t]$:

$$u_{t_3} = (u_{xx} + 3uu_x + u^3 - 3uw_x - 3q_x)_x, \quad v_{t_3} = (v_{xx} - 3uv_x + 3u^2v - 3vw_x)_x, \quad q_y = uv.$$

Вспомогательные линейные задачи:

$$\psi_{xy} = u\psi_y + v\psi, \quad \psi_T = A(x)\psi_{xx} - (2Aw_x + A_xw)\psi$$

где $A = 1$ и $A = x$ отвечают $T = t$ и $T = \tau$.

Релятивистские цепочки типа Тоды eDΔ

$$z_{n,x} = r(z_n)(z_{n+1}f_n(y_n) - z_{n-1}f_{n-1}(y_{n-1}) + g_n(y_n) - g_{n-1}(y_{n-1})), \quad z_n := q_{n,x},\ y_n := q_{n+1} - q_n \tag{250}$$

Цепочка такого вида является уравнением Эйлера для лагранжиана

$$L = c(q_{n,x}) - q_{n,x}a_n(q_{n+1} - q_n) - b_n(q_{n+1} - q_n), \qquad r = 1/c'', \quad f_n = a'_n, \quad g_n = b'_n.$$

Цепочка (250) интегрируема если и только если

$$r(z) = r_2z^2 + r_1z + r_0, \quad f'_n = s_1f_n - r_1f_n^2 + 2r_2f_ng_n, \quad g'_n = s_0 + s_1g_n + r_2g_n^2 - r_0f_n^2.$$

В частности, простейшая высшая симметрия имеет вид

$$q_{n,t} = r(z_n)(z_{n+1}f_n(y_n) + z_{n-1}f_{n-1}(y_{n-1}) + g_n(y_n) + g_{n-1}(y_{n-1})) + s_1z_n^2. \tag{251}$$

Система для f, g сводится к уравнению

$$(f'_n)^2 = (r_1^2 - 4r_2r_0)f_n^4 + (4\alpha_nr_2 - 2s_1r_1)f_n^3 + (s_1^2 - 4r_2s_0)f_n^2$$

которое решается в элементарных функциях, благодаря первому интегралу

$$(r_2g_n^2 + s_1g_n + s_0)/f_n - r_1g_n + r_0f_n =: \alpha_n.$$

Если f, g не зависят от n, то интегрируемую цепочку (250) можно привести к одной из следующих при помощи замен вида $q_n \to c_1q_n + c_2t + c_3n$, $x \to c_4x$:

$$z_{n,x} = z_{n+1}e^{y_{n+1}} - z_{n-1}e^{y_n} - e^{2y_{n+1}} + e^{2y_n} \tag{252a}$$

$$z_{n,x} = z_n\left(\frac{z_{n+1}}{y_{n+1}} - \frac{z_{n-1}}{y_n} + y_{n+1} - y_n\right) \tag{252b}$$

$$z_{n,x} = z_n\left(\frac{z_{n+1}}{1 + \mu e^{-y_{n+1}}} - \frac{z_{n-1}}{1 + \mu e^{-y_n}} + \nu(e^{y_{n+1}} - e^{y_n})\right) \tag{252c}$$

$$z_{n,x} = z_n(z_n + 1)\Big(\frac{z_{n+1}}{y_{n+1}} - \frac{z_{n-1}}{y_n}\Big) \tag{252d}$$

$$z_{n,x} = z_n(z_n - \mu)\Big(\frac{z_{n+1}}{\mu + e^{y_{n+1}}} - \frac{z_{n-1}}{\mu + e^{y_n}}\Big) \tag{252e}$$

$$z_{n,x} = (z_n^2 + \mu)\Big(\frac{z_{n+1} - y_{n+1}}{\mu + y_{n+1}^2} - \frac{z_{n-1} - y_n}{\mu + y_n^2}\Big) \tag{252f}$$

$$z_{n,x} = \frac{1}{2}(z_n^2 + 1 - \mu^2)\Big(\frac{z_{n+1} - \sinh y_{n+1}}{\mu + \cosh y_{n+1}} - \frac{z_{n-1} - \sinh y_n}{\mu + \cosh y_n}\Big) \tag{252g}$$

Рекурсии оператор

[82]

Дифференциальный или псевдо-дифференциальный оператор R называется ***оператором рекурсии*** [589] для уравнения $E=0$, если он переводит эволюционные симметрии этого уравнения в эволюционные симметрии: $G\in \mathrm{Sym}(E) \;\Rightarrow\; R(G)\in \mathrm{Sym}(E)$.

В частности, если само уравнение E эволюционное, то есть имеет вид $u_t=F$, то уравнения $u_{t_k}=R^k(F)$, $k=1,2,3,\dots$ должны быть его симметриями. В этом случае оператор рекурсии удовлетворяет уравнению

$$R_t=[F_*,R],$$

совпадающим с уравнением для формальной симметрии. Разница между этими двумя понятиями заключается в том, что формальная симметрия, вообще говоря представляет собой бесконечный ряд, действие которого на $\mathrm{Sym}(E)$ не определено. Наоборот, оператор рекурсии, по определению, должен действовать на этом множестве. Как правило, оператор рекурсии представляется в виде отношения дифференциальных операторов $R=JK^{-1}$, и требуется доказать, что результат его применения к локальным симметриям снова локален. Пример такого обоснования дан для уравнения КдФ.

Одним из механизмов, обеспечивающих существование оператора рекурсии, является схема Ленарда-Магри (операторы J,K должны образовывать бигамильтонову пару).

Примеры операторов рекурсии указаны в соответствующих статьях, см. напр. уравнение Бюргерса, НУШ и т.д..

[589] A.S. Fokas, B. Fuchssteiner. Symplectic structures, their Bäcklund transformations, and hereditary symmetries. *Physica D* ***4:1*** (1981) 47–66.

Розенау-Хаймана уравнение eDD

[1168, 631]

$$u_t = uu_{xxx} + 3u_x u_{xx} + uu_x$$

Розохатиуса система D

[1169, 1018, 1160, 1286, 96]

$$\ddot{q}_k = \dot{p}_k = -\omega_k q_k + \frac{\mu_k^2}{q_k^3} - q_k \sum_{j=1}^{N} \left(\dot{q}_j^2 - \omega_j q_j^2 + \frac{\mu_j^2}{q_j^2} \right), \quad \langle q, q \rangle = 1, \quad q = (q_1, \dots, q_N)^\mathsf{T}$$

Пуассонова структура определяется, как редукция Дирака канонической скобки на множестве уровня $\langle q, q \rangle = 1$, $\langle q, p \rangle = 0$:

$$\{q_k, q_j\} = 0, \quad \{p_k, q_j\} = \delta_{kj} - q_k q_j, \quad \{p_k, p_j\} = q_k p_j - q_j p_k, \qquad H = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N} \left(p_k^2 + \omega_k q_k^2 + \frac{\mu_k^2}{q_k^2} \right).$$

Имеется $N - 1$ независимых первых интегралов в инволюции (при условии $\omega_k \neq \omega_j$, $\forall\ k, j$):

$$F_k = q_k^2 + \sum_{j \neq k} \frac{1}{\omega_k - \omega_j} \left((p_k q_j - p_j q_k)^2 + \frac{\mu_k^2 q_j^2}{q_k^2} + \frac{\mu_j^2 q_k^2}{q_j^2} \right), \quad \sum_{k=1}^{N} F_k = \langle q, q \rangle = 1, \quad \sum_{k=1}^{N} \omega_k F_k = H.$$

Пара Лакса $\dot{L} = [M, L]$:

$$L = -\operatorname{diag}(\omega_1, \dots, \omega_N) + \lambda \left(pq^\mathsf{T} - qp^\mathsf{T} + i\frac{\mu}{q} q^\mathsf{T} + iq \left(\frac{\mu}{q} \right)^\mathsf{T} \right) + \lambda^2 qq^\mathsf{T}, \qquad M = \lambda qq^\mathsf{T} + i \operatorname{diag}\left(\frac{\mu_1}{q_1^2}, \dots, \frac{\mu_N}{q_N^2} \right)$$

где $p, q, \dfrac{\mu}{q}$ векторы столбцы с k-й компонентой p_k, q_k, $\dfrac{\mu_k}{q_k}$ соответственно.

См. также системy Войцеховского

Руйзенарса-Шнайдера система D

[1177]

$$\ddot{u}_k = \sum_{j\neq k} \frac{\dot{u}_k \dot{u}_j f'(u_k - u_j)}{c - f(u_k - u_j)}, \quad j,k = 1,\dots,n, \qquad f(x) = \begin{cases} x^{-2} & \text{рациональный случай} \\ \sinh^{-2} x & \text{гиперболический случай} \\ \wp(x) & \text{эллиптический случай} \end{cases}$$

Пара Лакса найдена в [364] (отметим функциональные уравнения

$$\alpha(x)\alpha'(y) - \alpha(y)\alpha'(x) = (\alpha(x+y) - \alpha(x)\alpha(y))(\eta(x) - \eta(y)),$$
$$\alpha(x+y) = \alpha(x)\alpha(y) + \phi(x)\phi(y)\psi(x+y)$$

решённые в этой работе).

См. также модель Калоджеро-Мозера

[364] M. Bruschi, F. Calogero. The Lax representation for an integrable class of relativistic dynamical systems. *Commun. Math. Phys.* ***109:3*** (1987) 481–492.

Савады-Котеры уравнение eDD

[1212, 416, 509]

$$u_t = u_5 + 5uu_3 + 5u_1u_2 + 5u^2u_1$$

Пара Лакса $L = D^3 + 2uD + u_1, \quad A = -9L_+^{5/3}$
Преобразование Бэклунда $(u = 6w_x)$

$$(\bar{w} - w)_{xx} + 3(\bar{w} - w)(\bar{w} + w)_x + (\bar{w} - w)^3 = \beta$$

Симметрийный подход

Автор: А.Б. Шабат, 28.04.2007

[1261, 994, 993, 216]

Классификация интегрируемых уравнений представляет собой интересную и чрезвычайно сложную задачу. К настоящему моменту, исчерпывающие результаты получены лишь для немногих типов уравнений, и дальнейшее продвижение требует значительных усилий. Во многих случаях удалось получить лишь частные классификационные результаты при некоторых дополнительных предположениях, таких как полиномиальность, однородность, гамильтоновость или какое-нибудь другое специальное свойство рассматриваемых уравнений.

Данный раздел посвящён описанию метода, основанного на понятии высших симметрий и зарекомендовавшего себя, как наиболее эффективный инструмент для решения классификационных задач. Обзор некоторых альтернативных подходов дан в разделе .

1. Симметрии, как тест на интегрируемость

Наличие даже единственной высшей симметрии является очень жёстким условием, которое может быть с успехом использовано в качестве теста на интегрируемость. Однако, оно не может гарантировать, что все найденные ответы действительно интегрируемы. Долгое время казалось, что верна следующая гипотеза.

Гипотеза 3 (Фокас)**.**
- *Если скалярное эволюционное уравнение имеет одну высшую симметрию, не зависящую от времени, то оно имеет бесконечно много таких симметрий* [728,584]*.*
- *Для n-компонентых систем достаточно n симметрий* [585]*.*

---

[728] N.H. Ibragimov, A.B. Shabat. Evolutionary equations with nontrivial Lie-Bäcklund group. *Funct. Anal. Appl.* ***14:1*** (1980) 25–36.

[584] A.S. Fokas. A symmetry approach to exactly solvable evolution equations. *J. Math. Phys.* ***21:6*** (1980) 1318–1325.

[585] A.S. Fokas. Symmetries and integrability. *Stud. Appl. Math.* ***77*** (1987) 253–299.

Для $n = 2$, первый контрпример системы 4-го порядка, обладающей только одной высшей симметрией (6-го порядка) был найден Бакировым[273]. Камп и Сандерс доказали, что на самом деле существует бесконечно много систем 4-го порядка с конечным числом симметрий и нашли систему 7-го порядка у которой имеется ровно 2 высшие симметрии (порядков 11 и 29) [757].

Первая часть гипотезы до сих пор остаётся открытым вопросом, но, во всяком случае, проблема классификации исходя из минималистского требования существования лишь одной высшей симметрии является неоправданно усложнённой. Чтобы сделать задачу более конструктивной, в качестве *определения* интегрируемости удобно принять существование *бесконечной иерархии* высших симметрий. Технически, это ведёт к следующему понятию.

Определение 12. Скалярное эволюционное уравнение

$$u_t = F(x, u, u_1, u_2, \dots, u_n) \tag{253}$$

с одной пространственной переменной обладает ***формальной симметрией***, если уравнение

$$D_t(A) = [F_*, A], \quad F_* := F_n D_x^n + \dots + F_1 D_x + F_0 \tag{254}$$

допускает решение $A = a_{-1}D_x + a_0 + a_1 D_x^{-1} + a_2 D_x^{-2} + \dots$ где все коэффициенты a_k являются локальными функциями от $x, u, u_1, \dots$.

Обоснование этого определения приведено в следующем подразделе. В некоторых отношениях анализ уравнения (254) аналогичен классической задаче описания коммутирующих дифференциальных операторов, см. Теорему 8.

Оказывается, что уравнение (254) эквивалентно бесконечной последовательности препятствий для интегрируемости, вида

$$D_x(a_k) = \text{выражение, зависящее от } F \text{ и } a_{k-1}, \dots, a_0, a_{-1},$$

причём их удаётся переписать в эквивалентой форме законов сохранения

$$D_x(\sigma_k) = D_t(\rho_k), \quad k = -1, 0, 1, \dots \tag{255}$$

[273] I.M. Bakirov. On the symmetries of some system of evolution equations. *Preprint Inst. of Math.*, Ufa, 1991. (in Russian)
[757] P.H. van der Kamp, J.A. Sanders. On testing integrability. *J. Nonl. Math. Phys.* ***8:4*** (2001) 561–574.

где так называемые ***канонические плотности*** ρ_k выражаются по определённому алгоритму, описанному ниже, через правую часть уравнения и σ_i, определённые ранее. Для заданного уравнения это даёт легко проверяемый тест на интегрируемость. Он может быть также использован для классификации интегрируемых уравнений фиксированного порядка.

2. Необходимые условия интегрируемости

Согласно (105), условие совместности для двух эволюционных уравнений

$$D_{t_1}(u) = F_1(x, u, u_1, u_2, \dots, u_{n_1}), \quad D_{t_2}(u) = F_2(x, u, u_1, u_2, \dots, u_{n_2}) \tag{256}$$

можно переписать в виде

$$[D_{t_1} - (F_1)_*, D_{t_2} - (F_2)_*] = 0 \quad \Leftrightarrow \quad D_{t_1}((F_2)_*) - D_{t_2}((F_1)_*) = [(F_1)_*, (F_2)_*]. \tag{257}$$

Определение 13. ***Интегрируемой иерархией, (ИИ)*** называется ряд

$$A = a_0 D + a_1 + a_2 D^{-1} + a_3 D^{-2} + \dots, \quad a_j \in \mathcal{U} \tag{258}$$

вместе с набором функций

$$\mathcal{H}(A) = \{F_n \in \mathcal{U} \ : D_n(A) = D_n(a_0)D + D_n(a_1) + D_n(a_2)D^{-1} + \dots = [F_{n,*}, A]\} \tag{259}$$

где $D_n(u) := F_n$.

Будем называть A ***базисным*** оператором иерархии и рассматривать, как идентичный другой базисный оператор $\tilde{A} = \alpha(D)A$ полученный умножением на ряд

$$\alpha_0 D + \alpha_1 + \alpha_2 D^{-1} + \alpha_3 D^{-2} + \dots, \quad \alpha_j \in \mathbb{C}$$

с постоянными коэффициентами.

Ясно, что для F_1, $F_2 \in \mathcal{H}(A)$ можно определить $F_3 \in \mathcal{U}$ при помощи следующих общих формул:

$$F_3 = D_1(F_2) - D_2(F_1) \quad \Leftrightarrow \quad F_3 = F_{2,*}(F_1) - F_{1,*}(F_2) := \{F_1, F_2\}. \tag{260}$$

Тогда

$$D_3 = [D_1, D_2], \quad D_3 - (F_3)_* = [D_1 - (F_1)_*, D_2 - (F_2)_*]$$

и из тождества Якоби следует $F_3 \in \mathcal{H}(A)$. Таким образом $\mathcal{H}(A) \subset \mathcal{U}$ является алгеброй Ли с умножением (260). Понятно, что $f_1 = u_1$ принадлежит любой иерархии так как $f_{1,*} = D$ и для любого формального ряда (258) имеем

$$[D, A] = D(a_0)D + D(a_1) + D(a_2)D^{-1} + \cdots = D(A).$$

С другой стороны, условие совместности (259) стало чрезвычайно ограничительным в случае функции $F \in \mathcal{U}$ высокого порядка $m \geq 2$. Большинство известных ИИ носят имя соответствующего уравнения $u_t = F \in \mathcal{H}$ минимального порядка n_0. Здесь имеется аналогия с ДО B минимального порядка $m > 1$ в нетривиальном централизаторе $B \in \mathcal{C}(A)$ (см. конец предыдущего раздела). Более того, в силу Теоремы Свинолупова, этот минимальный порядок для “нетривиальных” ИИ удовлетворяет условию $n_0 > 2$. Хорошо известные интегрируемые иерархии отвечают следующему списку уравнений третьего порядка.

Уравнения типа КдФ

$$u_t = u_3 + P(u)u_1, \quad P''' = 0, \tag{261}$$

$$u_t = u_3 - \frac{1}{2}u_1^3 + (\alpha e^{2u} + \beta e^{-2u})u_1, \tag{262}$$

$$u_t = u_3 - \frac{3}{2}\frac{u_2^2}{u_1} + \frac{r(u)}{u_1}, \quad r^{(5)} = 0. \tag{263}$$

Для сравнения друг с другом различных интегрируемых иерархий полено следующее определение.

Определение 14. Интегрируемая иерархия $\mathcal{H}(A_2)$ называется ***приводимой*** к $\mathcal{H}(A_1)$ если существует дифференциальный оператор B скоэффициентами из $\mathcal{U}$, такой, что

$$A_2 = B \circ A_1 \circ B^{-1}.$$

Пример 14 (Иерархия Бюргерса). Легко проверить, что $A_t = [f_*, A]$ в случае

$$u_t = u_{xx} + 2uu_x = f, \quad A = D + u + u_1 D^{-1}.$$

Таким образом, базисный оператор для уравнения Бюргерса,

$$A = D + u + u_1 D^{-1} = D(D+u)D^{-1},$$

связан с $\hat{A} = D + u$ сопряжением. Можно проверить, что эволюционное уравнение

$$D_\tau(u) = D_x(u_2 + 3uu_x + u^3)$$

также принадлежит иерархии Бюргерса $\mathcal{H}(A)$.

Нетрудно доказать, что

$$A_t = [F_*, A] \quad \Leftrightarrow \quad (A^j)_t = [F_*, A^j], \quad j = -1, 1, 2, \ldots .$$

Следовательно, порядок формального ряда (258) в определении интегрируемой иерархии может быть произвольным.

Далее, пусть $F \in \mathcal{U}$ и $\operatorname{ord} F_* = m > 1$, то есть

$$F_* = f_0 D^m + f_1 D^{m-1} + \cdots + f_m.$$

Подставим в условие совместности $A_t = [f_*, A]$

$$A = a_0 D^m + a_1 D^{m-1} + a_2 D^{m-2} + \ldots$$

с неопределёнными коэффициентами. Собирание коэффициентов при D^k, $k = 2m-1, 2m-2, \ldots, m+1$ показывает, что в Определении 13 можно положить, не теряя общности,

$$A = F_* + g_0 D + g_1 + g_2 D^{-1} + \ldots . \tag{264}$$

Другими словами, первые $m-1$ коэффициентов ряда (258) связаны с коэффициентами дифференциального оператора m-го порядка F_*, если $F \in \mathcal{H}(A)$.

Пример 15 (Линейные уравнения). Иерархии $\mathcal{H}(A)$ с дифференциальными операторами A отвечают линейным уравнениям (253). В случае второго порядка с $A = D^2 + a$ получаем $F_j = A^j(u) \in \mathcal{H}$ и, в частности,

$$u_t = u_{xx} + a(x)u = F \quad \Leftrightarrow \quad A_t = [F_*, A].$$

Для "специальных потенциалов" a, когда имеется ДО нечётного порядка $B \in \mathcal{C}(A)$ в иерархии появляются дополнительные члены $\tilde{F}_k = B^k(u)$.

Пример 16 (Иерархия КдФ). В случае КдФ можно найти оператор рекурсии A (ср. (264)):

$$u_t = u_{xxx} + 6uu_x := F, \quad F_* = D^3 + 6uD + 6u_x, \quad A = D^2 + 4u + 2u_x D^{-1} \tag{265}$$

Условие совместности $A_t = [F_*, A]$ проверяется просто:

$$4F + 2D(F)D^{-1} = [D^3 + 6Du, D^2 + 4u + 2u_1 D^{-1}].$$

Непосредственным следствием формулы (265) и Теоремы 25 ниже является последовательность локальных законов сохранения уравнения КдФ, то есть дифференциальных следствий уравнения (265) в дивергентной форме:

$$D_t(\rho) = D_x(\sigma), \quad \rho, \sigma \in \mathcal{U}.$$

Плотности ρ этих законов сохранения общие для всех членов иерархии и определяются следующим образом.

Определение 15. Для интегрируемой иерархии $\mathcal{H}(A)$ с определяющим оператором (258) ***канонической серией*** плотностей $\rho_j \in \mathcal{U}$, $j = -1, 1, 2, \ldots$ называются

$$\rho_j = \operatorname{res} A^j, \quad j = -1, 1, 2, \ldots. \tag{266}$$

Лемма 14. *Для всех* $m, n \in \mathbb{Z}$

$$\operatorname{res}[aD^m, bD^n] = D_x \alpha_{m,n}$$

где $\alpha_{m,n}$ *дифференциальный многочлен от* a *и* b.

Доказательство. Вычет обращается в ноль если степени m, n удовлетворяют условию $mn \geq 0$. Например, в случае $n = 0$ коммутатор $aD^m b - baD^m$ является ДО если $m \geq 0$, и ПДО порядка $m - 1 \leq -2$ если $m < 0$. Очевидно, коэффициент при D^{-1} равен нулю в обоих случаях. Очевидно также, что вычет равен нулю если $m + n < 0$.

Пусть теперь m, n имеют разные знаки и $m + n = k \geq 0$. Тогда

$$\operatorname{res}[aD^m, bD^n] = \binom{m}{k+1}(aD^{k+1}(b) + (-1)^k D^{k+1}(a)b)$$

так как

$$m + n = k \quad \Rightarrow \quad m(m-1)\cdots(m-k) = \pm n(n-1)\cdots(n-k).$$

Стандартное “интегрирование по частям” завершает доказательство. В частности, при $k = 0, 1$ имеем, соответственно

$$aD(b) + D(a)b = D(ab) \quad aD^2(b) - D^2(a)b = D(aD(b) - D(a)b). \qquad \blacksquare$$

Теорема 25. *пусть A базисный оператор (258) интегрируемой иерархии $\mathcal{H}(A)$. Тогда, для любого $F \in \mathcal{H}(A)$, уравнение $u_t = F$ обладает серией законов сохранения с каноническими плотностями (266).*

Доказательство. Используя Лемму 14 находим

$$A_t = [f_*, A] \quad \Rightarrow \quad A_t^j = [f_*, A^j] \quad \Rightarrow \quad D_t(\operatorname{res} A^j) = \operatorname{res}[f_*, A^j] \in \operatorname{Im} D.$$

В случае ρ_0 имеем

$$A_t = [f_*, A] \quad \Rightarrow \quad A_t A^{-1} = F_* - AF_*A^{-1} = [A^{-1}, AF_*].$$

Следовательно

$$\operatorname{res}(A_t A^{-1}) = \operatorname{res}\{(a_{0,t}D + a_{1,t} + \dots)(b_0 D^{-1} + b_1 D^{-2} + \dots)\} = \left(\frac{a_1}{a_0}\right)_t \in \operatorname{Im} D.$$

Мы использовали здесь равенства $a_0 b_0 = 1$, $a_0 b_1 + a_1 b_0 = 0$. $\blacksquare$

В частности, из этой теорема следует, что каноническая плотность $\rho_{-1} = a_0^{-1}$ порождает локальный закон сохранения для любого уравнения n-го порядка $u_t = F_n \in \mathcal{H}(A)$. Из формул (264) следует, что $a_0^n = \partial F_n / \partial u_n$ и это порждает ***первое условие интегрируемости***

$$D_t \left(\frac{\partial F_n}{\partial u_n} \right)^{-\frac{1}{n}} \in \operatorname{Im} D \tag{267}$$

которое является необходимым условием того, что $u_t = F_n$ принадлежит некоторой интегрируемой иерархии $\mathcal{H}(A)$.

Напомним, что два закона сохранения с плотностями ρ_1 и ρ_2 считаются эквивалентными, если $\rho_2 \sim \rho_2$ и $\rho \sim 0$ означает

$$\rho = D_x(\sigma) \quad \Rightarrow \quad D_t(\rho) = D_x(D_t \sigma).$$

Такой закон сохранения считается тривиальным.

Условия интегрируемости, аналогичные (267) играют важную роль при классификации ИИ и уравнение (264) позволяет явно выписать несколько первых канонических плотностей.

Пример 17. Для эволюционного уравнения (253) вида

$$u_t = u_n + F(u, u_1, \ldots, u_k), \quad k < n, \quad n \geq 2 \tag{268}$$

$F_k = \partial_{u_k} F$ является плотностью локального закона сохранения. Для уравнений третьего порядка

$$u_t = u_3 + F(x, u, u_1), \quad \rho_1 = F_1, \quad \rho_2 = F_0, \quad \rho_3 = \sigma_1 \tag{269}$$

Синус-Гордона уравнение hDD

$$u_{xy} = \sin u$$

Преобразование Бэклунда

$$\hat{u}_x + u_x = 2a \sin \frac{\hat{u} - u}{2}, \quad \hat{u}_y - u_y = \frac{2}{a} \sin \frac{\hat{u} + u}{2}$$

Представление нулевой кривизны

$$U = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \lambda & -u_x \\ u_x & -\lambda \end{pmatrix}, \quad V = \frac{1}{2\lambda} \begin{pmatrix} \cos u & \sin u \\ \sin u & -\cos u \end{pmatrix}, \quad W = \begin{pmatrix} \lambda + a \cos \frac{\hat{u}-u}{2} & -a \sin \frac{\hat{u}-u}{2} \\ a \sin \frac{\hat{u}-u}{2} & -\lambda + a \sin \frac{\hat{u}-u}{2} \end{pmatrix}$$

Кинки и бризеры уравнения sin-Гордона

Уравнение и преобразование Бэклунда можно привести к рациональному виду заменой $z = \exp(iu/2)$:

$$zz_{xy} - z_x z_y = \frac{1}{4}(z^4 - 1), \quad (z\hat{z})_x = \frac{a}{2}(\hat{z}^2 - z^2), \quad z\hat{z}_y - z_y\hat{z} = \frac{1}{2a}(z^2\hat{z}^2 - 1), \quad a_1(zz_2 - z_1z_{12}) = a_2(zz_1 - z_2z_{12}).$$

Последнее уравнение, определяющее принцип нелинейной суперпозиции, совпадает с уравнением ($\mathrm{H}_3|_{\delta=0}$). Однако, если нас интересуют вещественные решения, то эти формулы больше подходят для гиперболической версии уравнения, $u_{xy} = \sinh u$, $z = \exp(u/2)$. В тригонометрическом случае вещественность восстанавливается при дополнительной дробно-линейной замене $(z-1)/(z+1) = iv \Rightarrow v = \tan(u/4)$. Это даёт

$$v_{xy} = \frac{v}{1+v^2}(2v_xv_y + 1 - v^2), \quad (1+v^2)\hat{v}_x + (1+\hat{v}^2)v_x = a(\hat{v} - v)(1 + v\hat{v}), \quad (1+v^2)\hat{v}_y - (1+\hat{v}^2)v_y = \frac{1}{a}(\hat{v} + v)(1 - v\hat{v})$$

и результат двух ПБ определяется формулой

$$v_{12} = \frac{(a_1 - a_2)v(1 + v_1v_2) - (a_1 + a_2)(v_1 - v_2)}{(a_1 - a_2)(1 + v_1v_2) + (a_1 + a_2)v(v_1 - v_2)}. \tag{270}$$

Применяя ПБ к затравочному решению $u = 0$, немедленно получаем решение-кинк

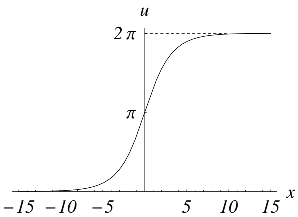
$$v = \tan(u/4) = c\exp(ax + y/a),$$

а формула (270) позволяет строить много-кинковые решения. Общая формула для 2-кинкового решения имеет вид

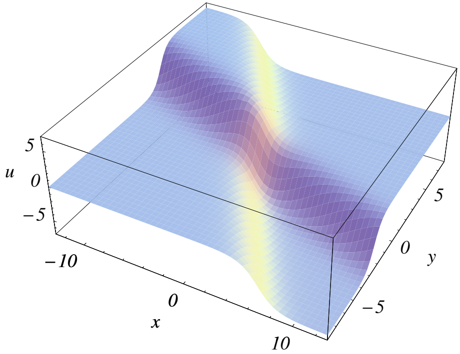
$$\tan\frac{u}{4} = \frac{(a_1 + a_2)(c_2\exp(a_2x + y/a_2) - c_1\exp(a_1x + y/a_1))}{(a_1 - a_2)(1 + c_1c_2\exp((a_1 + a_2)x + y(1/a_1 + 1/a_2)))}.$$

Решение v_{12} остаётся вещественным, если промежуточные решения v_1, v_2 комплексно сопряжены. В частности, полагая $a_1 = \alpha + i\beta$, $a_2 = \alpha - i\beta$ и $c_1 = \bar{c}_2$, приходим к решению-бризеру

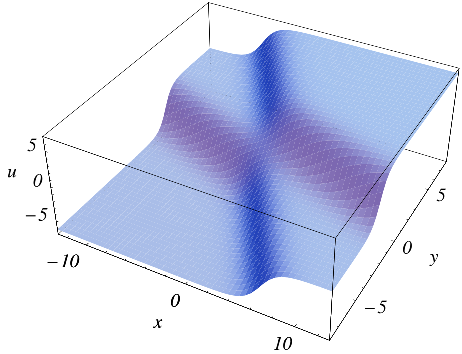
$$\tan\frac{u}{4} = \frac{\alpha\sin(\beta(x - y/\gamma) + \phi_1)}{\beta\cosh(\alpha(x + y/\gamma) + \phi_2)}, \quad \gamma = \alpha^2 + \beta^2.$$



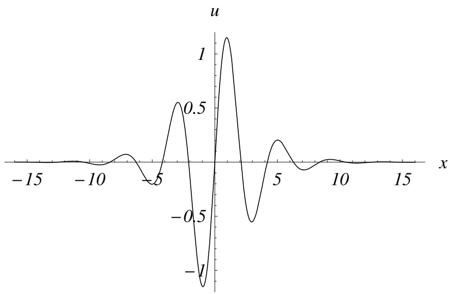
профиль кинка
$a = 0.5,\ c = 1,\ y = 0$



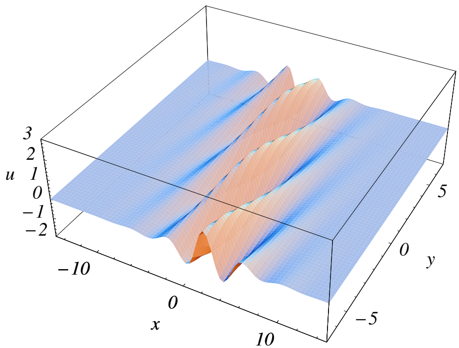
кинк-антикинк
$a_1 = 0.5,\ a_2 = 1,\ c_1 = c_2 = 0$



двухкинковое решение
$a_1 = 0.5,\ a_2 = -1,\ c_1 = c_2 = 0$



профиль бризера ($t = 0$)



$\alpha = 0.5,\ \beta = 1.5,\ \phi_1 = \phi_2 = 0$

Синус-Гордона уравнение двойное hDD

[30, 1394]

$$u_{xt} = \sin u + a \sin \frac{u}{2}$$

Синус-Гордона уравнение многомерное hND

[1395]

$$u_{x_1x_1} + \cdots + u_{x_nx_n} = \sin u$$

Склянина цепочка DΔ

Цепочка Склянина[1253] определяется скобками Пуассона

$$\{s_n^a, s_n^0\} = (J_b - J_c) s_n^b s_n^c, \quad \{s_n^a, s_n^b\} = -s_n^0 s_n^c \tag{271}$$

(приводятся только ненулевые скобки; $n \in \mathbb{Z}$, индексы a, b, c есть циклическая перестановка $1, 2, 3$) и гамильтонианом

$$H = \sum_n \log\Big(s_n^0 s_{n+1}^0 + \sum_{a=1}^3 \Big(\frac{c_1}{c_0} - J_a\Big) s_n^a s_{n+1}^a\Big), \quad c_0 = \sum_{a=1}^3 (s_n^a)^2, \quad c_1 = (s_n^0)^2 + \sum_{a=1}^3 J_a (s_n^a)^2.$$

Величины c_0, c_1 являются функциями Казимира рассматриваемой пуассоновой структуры.

В работе [204] показано, что цепочка Склянина эквивалентна сумме коммутирующих потоков

$$u_{n,x_\pm} = \frac{2h_n}{u_{n\pm1} - v_n} + h_{n,v_n}, \quad v_{n,x_\pm} = \frac{2h_n}{u_n - v_{n\mp1}} - h_{n,u_n}, \quad h_n = h(u_n, v_n) \tag{272}$$

где $h(u, v)$ симметричный биквадратичный полином: $h(u, v) = h(v, u)$, $h_{uuu} = 0$ (так называемая ***цепочка Шабата-Ямилова***[1246], возникающая как преобразование Бэклунда для уравнения Ландау-Лифшица). Скобка Пуассона и (инволютивные) гамильтонианы для потоков (272) имеют вид

$$\{u_n, v_n\} = 2h(u_n, v_n), \quad H_\pm = \sum_n \Big(\frac{1}{2} \log h(u_n, v_n) - \log(u_{n\pm1} - v_n)\Big).$$

Эквивалентность обеих моделей описывается следующим утверждением, использующей комплексифицированную стереографическую проекцию

$$S(u, v) = \frac{1}{u - v}(1 - uv, i + iuv, u + v), \quad \langle S, S\rangle = 1.$$

[1253] E.K. Sklyanin. On some algebraic structures related to Yang-Baxter equation. *Funct. Anal. Appl.* ***16:4*** (1982) 27–34.
[204] V.E. Adler. Discretizations of the Landau-Lifshitz equation. *Theor. Math. Phys.* ***124:1*** (2000) 897–908.
[1246] A.B. Shabat, R.I. Yamilov. Symmetries of nonlinear chains. *Len. Math. J.* ***2:2*** (1991) 377–399.

Утверждение 8. *Пусть* $J = \mathrm{diag}(J_1, J_2, J_3)$, $K = \mathrm{diag}(K_1, K_2, K_3)$, $J = CI - \det K \cdot K^{-1}$ *и многочлен* $h(u,v)$ *задан формулой*

$$h(u,v) = \frac{i}{4}(u-v)^2 \langle S(u,v), KS(u,v)\rangle.$$

По переменным u_n, v_n *определим вектор на сфере* $S_n = S(u_n, v_n)$, *тогда переменные*

$$s^0_n = \rho\sqrt{\det K}\langle S_n, KS_n\rangle^{-1/2}, \quad s_n = -\rho\langle S_n, KS_n\rangle^{-1/2}K^{1/2}S_n$$

удовлетворяют скобкам (271), значения функций Казимира равны $c_0 = \rho^2$, $c_1 = C\rho^2$, *а гамильтониан равен* $H = -H_+ - H_- + \mathrm{const}$.

Общая линейная комбинация потоков (272) в терминах спиновых переменных S имеет вид (a и b произвольные вещественные постоянные)

$$\begin{gathered} S_{n,t} = a\langle S_n, KS_n\rangle\Big(\frac{[S_n, S_{n+1}]}{1+\langle S_n, S_{n+1}\rangle} + \frac{[S_n, S_{n-1}]}{1+\langle S_n, S_{n-1}\rangle}\Big) - 2a[S_n, KS_n] \\ + b\langle S_n, KS_n\rangle\Big(\frac{S_n + S_{n+1}}{1+\langle S_n, S_{n+1}\rangle} - \frac{S_n + S_{n-1}}{1+\langle S_n, S_{n-1}\rangle}\Big), \qquad |S_n| = 1. \end{gathered}$$

Цепочка Склянина отвечает случаю $b = 0$. При $K = I$, $\rho = -1$ переменные S и s совпадают. При этом мы приходим к ***цепочке Гейзенберга***

$$S_{n,t} = a\Big(\frac{[S_n, S_{n+1}]}{1+\langle S_n, S_{n+1}\rangle} + \frac{[S_n, S_{n-1}]}{1+\langle S_n, S_{n-1}\rangle}\Big) + b\Big(\frac{S_n + S_{n+1}}{1+\langle S_n, S_{n+1}\rangle} - \frac{S_n + S_{n-1}}{1+\langle S_n, S_{n-1}\rangle}\Big), \qquad |S_n| = 1 \qquad (273)$$

введённой, при любых a и b, в работе [1143], см. также [301,313] где рассматривались приложения в дискретной геометрии. Следует отметить также, что цепочка, отвечающая случаю $a = 0$, остаётся интегрируемой на сфере произвольной размерности.

[1143] O. Ragnisco, P.M. Santini. A unified algebraic approach to integral and discrete evolution equations. *Inverse Problems* ***6:3*** (1990) 441–452.

[301] A.I. Bobenko. Discrete integrable systems and geometry. *In: XIIth Int. Congress of Math. Phys. (ICMP'97, Brisbane), 219–226*, Cambridge: Internat. Press, 1999.

[313] A.I. Bobenko, Yu.B. Suris. Discrete time Lagrangian mechanics on Lie groups, with an application to the Lagrange top. *Commun. Math. Phys.* ***204:1*** (1999) 147–188.

Сомоса последовательности Δ

[613, 614]

$$
\begin{aligned}
&S_4: \quad a_n a_{n-4} = a_{n-1}a_{n-3} + a_{n-2}^2, && a_0 = \cdots = a_3 = 1\\
&S_5: \quad a_n a_{n-5} = a_{n-1}a_{n-4} + a_{n-2}a_{n-3}, && a_0 = \cdots = a_4 = 1\\
&S_6: \quad a_n a_{n-6} = a_{n-1}a_{n-5} + a_{n-2}a_{n-4} + a_{n-2}^2, && a_0 = \cdots = a_5 = 1\\
&S_7: \quad a_n a_{n-7} = a_{n-1}a_{n-6} + a_{n-2}a_{n-5} + a_{n-3}a_{n-4}, && a_0 = \cdots = a_6 = 1
\end{aligned}
$$

Эти рекуррентные соотношения порождают целые числа для любого n. В более общей постановке, a_n являются полиномами Лорана от начальных данных, то есть, последовательности Сомоса удовлетворяют свойству Лорана. Для высших последовательностей S_k при $k > 7$ это неверно.

Солитонные решения

Многие нелинейные уравнения в частных производных допускают частные точные решения в виде локализованных бегущих волн, как правило с амплитудой, зависящей от скорости:

$$u(x,t) = A(k)f(kx + \omega(k)t + \delta; \alpha), \quad f(x;\alpha) \to 0, \quad x \to \pm\infty.$$

Здесь α обозначает дополнительные параметры, например поляризацию. Профиль волны f, амплитуда A и закон дисперсии ω зависят от вида уравнения. Такие решения называются ***уединёнными волнами***. Вообще говоря, столкновение двух уединённых волн ведёт к их распаду или появлению малых осцилляций. Однако, некоторые уравнения допускают точные решения, представляющие упрогое взаимодействие произвольного числа уединённых волн. Такие решения называются ***многосолитонными***[1434].

Более строго, решение называется ***N-солитонным*** если оно асимптотически эквивалентно сумме N локализованных бегущих волн, которые взаимодействуют без изменения формы, амплитуд и скоростей, так что единственным результатом взаимодействия являются сдвиги фаз, и возможно, некоторых параметров:

$$u(x,t) \sim \sum_{i=1}^{N} A(k_i)f(k_i x + \omega(k_i)t + \delta_i^{\pm}; \alpha_i^{\pm}), \quad t \to \pm\infty.$$

Существуют уравнения, которые допускают 2-солитонные решения, но не допускают 3-солитонные. Однако, во всех известных примерах, существование 3-солитонного решения означает существование N-солитонного для любого N.

В некоторых случаях приведённое определение оказывается слишком ограничительным. Например, число солитонов сожет меняться при 3-волновом взаимодействии.

См.:
солитоны КдФ

[1434] N.J. Zabusky, M.D. Kruskal. Interaction of “solitons” in a collisionless plasma and the recurrence of initial states. *Phys. Rev. Let.* ***15:6*** (1965) 240–243.

Тоды цепочка eDΔ

[1342, 99]

$$q_{n,xx} = e^{q_{n+1}-q_n} - e^{q_n-q_{n-1}}$$

Высшие симметрии

$$q_{n,t_2} = q_{n,x}^2 + e^{q_{n+1}-q_n} + e^{q_n-q_{n-1}}, \qquad q_{n,t_3} = q_{n,x}^3 + (q_{n+1}+2q_n)_x e^{q_{n+1}-q_n} + (2q_n+q_{n-1})_x e^{q_n-q_{n-1}}, \quad \dots$$

можно переписать в виде иерархии НУШ для переменных $u = e^{q_n}$, $v = e^{-q_{n-1}}$:

$$u_{t_2} = u_{xx} + 2u^2 v, \quad -v_{t_2} = v_{xx} + 2v^2 u; \qquad u_{t_3} = u_{xxx} + 6uvu_x, \quad v_{t_3} = v_{xxx} + 6uvv_x; \quad \dots$$

Гамильтонова структура ($p_n = q_{n,x}$):

$$\{p_n, q_n\} = 1, \quad H = \sum\Big(\frac{1}{2}p_n^2 + e^{q_{n+1}-q_n}\Big).$$

Представление нулевой кривизны :

$$L_n = \begin{pmatrix} q_{n,x}+2\lambda & e^{q_n} \\ -e^{-q_n} & 0 \end{pmatrix}, \quad U_n = \begin{pmatrix} -\lambda & -e^{q_n} \\ e^{-q_{n-1}} & \lambda \end{pmatrix}$$

Тоды цепочка двумеризованная eDDΔ

[987, 67]

$$q_{n,xy} = e^{q_{n+1}-q_n} - e^{q_n - q_{n-1}}$$

Тоды цепочка релятивистская eDΔ

[1171, 1173]

$$q_{n,xx} = g^2 q_x \left(q_{n-1,x} \frac{e^{q_{n-1}-q_n}}{1 + g^2 e^{q_{n-1}-q_n}} - q_{n+1,x} \frac{e^{q_n - q_{n+1}}}{1 + g^2 e^{q_n - q_{n+1}}} \right)$$

Томаса уравнение hDD

$$u_{xt} = au_t + bu_x + cu_x u_t$$

Точечные преобразования

Пусть $u = (u^1, \ldots, u^m)$ и $x = (x_1, \ldots, x_n)$ обозначают соответственно зависимые и независимые переменные. Для производных будем использовать мультииндексные обозначения u_s, $s = (s_1, \ldots, s_n)$. ***Точечное преобразование*** определяется произвольной невырожденной заменой

$$\tilde{x}_i = f_i(x, u), \quad \tilde{u}^j = g^j(x, u). \tag{274}$$

Продолжение преобразования на переменные u_s задаётся формулой

$$\tilde{u}^j_s = \tilde{D}^s(\tilde{u}^j) = \tilde{D}_1^{s_1} \cdots \tilde{D}_n^{s_n}(\tilde{u}^j), \tag{275}$$

где операторы $\tilde{D}_i$ связаны с операторами полных производных

$$D_i = \partial_{x_i} + \sum_{j=1}^{m} \sum_s u^j_{s+1_i} \partial_{u^j_s}, \quad 1_i = (\delta_{1,i}, \ldots, \delta_{n,i})$$

посредством системы линейных алгебраических уравнений

$$D_i(\tilde{x}_1)\tilde{D}_1 + \cdots + D_i(\tilde{x}_n)\tilde{D}_n = D_i, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{276}$$

Определитель этой системы отличен от нуля в силу невырожденности преобразования (274). Более того, уравнения (274), (275) определяют обратимое преобразование набора переменных $J^r = \{x, u_s : |s| = s_1 + \cdots + s_n \leq r\}$ для любого r.

Факторизации метод

Приложения преобразования Дарбу в квантовой механике были стимулированы работами Шрёдингера [1224,1225,1226] где метод был применён к целому ряду задач, таких как построение присоединённых сферических гармоник, гипергеометрическому уравнению, задаче Кеплера в плоском пространстве и на гиперсфере. Подробное изложение результатов, полученных в тот период имеется в статье [730]. Следуя этой работе, будем искать решения одевающей цепочки (221)

$$f'_{n+1} + f'_n = f^2_{n+1} - f^2_n + \beta_{n+1} - \beta_n$$

в виде

$$f_n = (n+c)f + g + h/(n+c) \tag{277}$$

(если $c \in \mathbb{Z}$, то рассматривается только половина цепочки, при $n < -c$ или $n > -c$). При такой подстановке цепочка становится эквивалентной уравнениям

$$f' + f^2 = c_1, \quad g' + fg = c_2, \quad gh = c_3, \quad h^2 = c_4, \quad c_i = \mathrm{const},$$
$$-\beta_n = c_1 m^2 + 2c_2 m + 2c_3/m + c_4/m^2, \quad u_n = -m(m-1)f' - (2m-1)g' + g^2 + 2fh.$$

Анализ всех возможных случаев приводит к приведённой ниже таблице. Ответы, по возможности, упрощены при помощи растяжений и отражения:

$$\tilde f_n(x) = af_n(ax+b), \quad \tilde\beta_n = a^2\beta_n + \beta, \quad \tilde u_n(x) = a^2 u_n(ax+b) + \beta,$$
$$\tilde f_n = -f_{-n}, \quad \tilde\beta_n = \beta_{-n}, \quad \tilde u_n = u_{-n+1}.$$

Для решений (A) и (E) существенно различными являются три случая: $a = 1, b = 0$; $a = i, b = 0$; $a = i, b = \pi/2$.

[1224] E. Schrödinger. A method of determining quantum-mechanical eigenvalues and eigenfunctions. *Proc. Roy. Irish Acad.* ***A 46*** (1940) 9–16.

[1225] E. Schrödinger. Further studies on solving eigenvalue problems by factorization. *Proc. Roy. Irish Acad.* ***A 46*** (1941) 183–206.

[1226] E. Schrödinger. The factorization of hypergeometric equation. *Proc. Roy. Irish Acad.* ***A 47*** (1941) 53–54.

[730] L. Infeld, T.E. Hull. The factorization method. *Rev. Modern Phys.* ***23:1*** (1951) 21–68.

Очень простая формула (277) замечательна тем, что все решения ведут к потенциалам, представляющим интерес в квантовой механике. Первое и самое простое приложение было связано с хорошо известным гармоническим осциллятором, но некоторые из других потенциалов были впервые открыты именно этим методом.

[1126, 1015, 951, 1167] **Упрощённая классификация типов факторизации по Инфельд**

	f_n	β_n	u_n	
(A)	$am\cot(ax+b)+\dfrac{d}{\sin(ax+b)}$	a^2m^2	$\dfrac{1}{\sin^2(ax+b)}(a^2m(m-1)+d^2$ $+ad(2m-1)\cos(ax+b))$	[1126]
(B)	e^x-m	$-m^2$	$e^{2x}-(2m-1)e^x$	[1015]
(C)	$\dfrac{m}{x}+dx$	$-d(4m+1)$	$\dfrac{m(m-1)}{x^2}-2dm+d^2x^2$	
(D)	$-x$	$2n+1$	x^2+2n	
(E)	$am\cot(ax+b)+\dfrac{d}{m}$	$a^2m^2-d^2/m^2$	$m(m-1)\dfrac{a^2}{\sin^2(ax+b)}$ $+2ad\cot(ax+b)$	[951, 1167]
(F)	$\dfrac{m}{x}+\dfrac{d}{m}$	$-d^2/m^2$	$\dfrac{m(m-1)}{x^2}+\dfrac{2d}{x}$	

Ферми-Паста-Улама-Тсингоу цепочка eDΔ

Автор: В.Э. Адлер, 26.12.2008

$$\omega^{-2}u_{n,tt} = u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1} + a(u_{n+1} - u_n)^2 - a(u_n - u_{n-1})^2 \tag{278}$$

Система, описывающая одномерную цепочку ангармонических осцилляторов. Её численное исследование было предпринято в работе [572]. Предполагалось, что нелинейность взаимодействия приведёт к быстрому равномерному распределению энергии по всем модам, в согласии с теорией Дебая [464], но оказалось, что энергообмен происходит лишь между несколькими низшими модами. В силу периодических граничных условияй $u_n = u_{n+N}$, наблюдалось явление возвращения системы в исходное состояние. (Возможности первого в мире компьютера MANIAC-I, на котором проводился этот первый в математической физике компьютерный эксперимент, позволяли брать $N = 64$.) Качественное объяснение явления возвращения было дано в работе [1434] на основе понятия солитонов, то есть нелинейных бегущих волн, упруго взаимодействующих друг с другом. Точнее, это понятие было введено не для самой цепочки (278), а для уравнения Кортевега-де Фриза, которое служит её непрерывным пределом. В свою очередь, уравнение КдФ заменялось, при численном исследовании, разностной схемой

$$u_n^{j+1} = u_n^{j-1} - \frac{k}{3h}(u_{n+1}^j + u_n^j + u_{n-1}^j)(u_{n+1}^j - u_{n-1}^j) - \frac{\delta^2 k}{h^3}(u_{n+2}^j - 2u_{n+1}^j + 2u_{n-1}^j - u_{n+2}^j)$$

с условием периодичности $u_n^j = u_{n+2N}^j$. Следует подчеркнуть, что как эта дискретизация, так и сама цепочка (278) неинтегрируемы, то есть волны, наблюдавшиеся в обоих вычислительных экспериментах, демонстрировали, строго говоря, лишь солитоно-подобное поведение. Тем не менее, дальнейшее развитие привело к построению точной теории солитонных решений и открытию метода интегрирования уравнения КдФ при помощи обратной задачи рассеяния. Полное объяснение явление возвращения

[572] E. Fermi, J. Pasta, S. Ulam. Studies of nonlinear problems. I. Los Alamos report LA-1940 (1955).

[464] P. Debye. Vorträge über der kinetische Theorie die Materie und der Elektrizität. Leipzig, 1914.

[1434] N.J. Zabusky, M.D. Kruskal. Interaction of “solitons” in a collisionless plasma and the recurrence of initial states. *Phys. Rev. Let.* ***15:6*** (1965) 240–243.

получило после разработки теории конечнозонных решений (солитонные решения отвечают пределу $N \to \infty$).

Непрерывный предел для цепочки (278): полагая $u_n(t) = u(x,\tau)$, $x = nh$, $\tau = \omega ht$, и разлагая $u_{n\pm1}$ в ряд Тейлора

$$u_{n\pm1} = u \pm hu_x + \frac{h^2}{2}u_{xx} \pm \frac{h^3}{6}u_{xxx} + \frac{h^4}{24}u_{xxxx} + o(h^5), \quad h \to 0,$$

получаем приближённое уравнение типа Буссинеска

$$u_{\tau\tau} = u_{xx} + 2ahu_x u_{xx} + \frac{h^2}{12}u_{xxxx} + o(h^3),$$

описывающие распространение волн в обоих направлениях. Далее, будем считать, что параметр a также мал, $a = \kappa h$, тогда замена $u(x,\tau) = v(X,T)$, $X = x + \tau$, $T = \kappa h^2 \tau$, $24\kappa = \delta^{-1}$ приводит к

$$V_{XT} = V_X V_{XX} + \delta V_{XXXX} + o(h),$$

то есть уравнению КдФ для V_X.

Подробное обсуждение эксперимента ФПУ содержится в книгах [5,30,78]. Препринт [572] был воспроизведён в ряде изданий, их список и некоторые интересные, но малоизвестные исторические сведения можно найти в [463]. Следует отметить, что цепочка, аналогичная (278) была предложена ранее в работе [822].

[5] M.J. Ablowitz, H. Segur. Solitons and the Inverse Scattering Transform. Philadelphia: SIAM, 1981.
[30] R.K. Dodd, J.C. Eilbeck, J.D. Gibbon, H.C. Morris. Solitons and nonlinear wave equations. London: Academic Press, 1982.
[78] A.C. Newell. Solitons in mathematics and physics. Philadelphia: SIAM, 1985.
[463] T. Dauxois. Fermi, Pasta, Ulam and a mysterious lady. arXiv:0801.1590v1
[822] T.A. Kontorova, Ya.I. Frenkel. *JETP* ***8*** (1938) 89.

Фишера уравнение eDD

[574, 716]

$$u_t = u_{xx} + u - u^2$$

Неинтегрируемо [5,192]. Приложения в биологии и химической кинетике. Некоторые точные решения найдены в [839].

См. также: уравнения Бюргерса-Хаксли, Колмогорова-Петровского-Пискунова.

[5] M.J. Ablowitz, H. Segur. Solitons and the Inverse Scattering Transform. Philadelphia: SIAM, 1981.

[192] M.J. Ablowitz, A. Zeppetella. Explicit solutions of Fischer's equation for a special wave speed. *Bull. Math. Biol.* ***41:6*** (1979) 835–840.

[839] N.A. Kudryashov. On exact solutions of families of Fischer equations. *Theor. Math. Phys.* ***94:2*** (1993) 211–218.

Форнберга-Уизема уравнение DD

[605, 1404, 105, 631]

$$u_t - u_{xxt} + u_x = uu_{xxx} + 3u_x u_{xx} - uu_x$$

Френкеля-Конторовой цепочка eDΔ

[822, 356]

$$u_{n,tt} = \gamma(u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}) - \sin u_n$$

Хироты уравнение ΔΔΔ

[699]

$$\alpha u_1u_{23}+\beta u_2u_{13}+\gamma u_3u_{12}=0,\quad u_i=T_i(u) \tag{279}$$

Это 3-мерное дискретное уравнение обладает свойством 4-мерной совместности и проходит singularity confinement тест [1152]. Параметры α,β,γ не очень существенны и могут быть уничтожены при помощи растяжения $u(i,j,k)\to u(i,j,k)\exp(\lambda ij+\mu ik+\nu jk)$.

Уравнение (279) выводится из следующих линейных задач [1144,1142]:

$$\phi_1=a\phi+\phi_2,\quad \phi_3=b\phi+\phi_2\quad\Rightarrow\quad a_3+b_2=a_2+b_1,\quad a_3b=ab_1.$$

Уравнения для a,b можно интерпретировать как законы сохранения, что подсказывает замену

$$a=\frac{u_{12}u}{u_1u_2},\quad b=\frac{u_{23}u}{u_2u_3}$$

которая и приводит к (279). Иначе, исключение a и b приводит к уравнению

$$\frac{\phi_{13}-\phi_{12}}{\phi_1}+\frac{\phi_{12}-\phi_{23}}{\phi_2}+\frac{\phi_{23}-\phi_{13}}{\phi_3}=0. \tag{280}$$

Уравнение (279) можно рассматривать как предельный случай уравнения Хироты-Мивы (283), тогда как (280) служит предельным случаем уравнения с двойными отношениями (281).

[1152] A. Ramani, B. Grammaticos, J. Satsuma. Integrability of multidimensional discrete systems. *Phys. Lett. A* ***169:5*** (1992) 323–328.

[1144] O. Ragnisco, P.M. Santini, S. Chitlaru-Briggs, M.J. Ablowitz. An example of $\bar\partial$-problem arising in a finite difference context: Direct and inverse problem for the discrete analog of the equation $\psi_{xx}+u\psi=\sigma\psi_y$. *J. Math. Phys.* ***28:4*** (1987) 777–780.

[1142] O. Ragnisco, P.M. Santini. Recursion operator and bi-Hamiltonian structure for integrable multidimensional lattices. *J. Math. Phys.* ***29:7*** (1988) 1593–1603.

Хироты-Мивы уравнение ΔΔΔ

Уравнение с двойными отношениями $$\frac{(\psi_i-\psi_k)(\psi_j-\psi_{ijk})}{(\psi_k-\psi_j)(\psi_{ijk}-\psi_i)}=\frac{(\psi-\psi_{ik})(\psi_{ij}-\psi_{jk})}{(\psi_{ik}-\psi_{ij})(\psi_{jk}-\psi)} \tag{281}$$

Отображение звезда-треугольник $$a^{ij}_k=-\frac{a^{ij}}{a^{ij}a^{jk}+a^{ki}a^{ij}+a^{jk}a^{ki}},\quad a^{ij}=-a^{ji} \tag{282}$$

Уравнение Хироты-Мивы $$uu_{ijk}=\varepsilon^{ij}\varepsilon^{ik}u_iu_{jk}+\varepsilon^{ji}\varepsilon^{jk}u_ju_{ik}+\varepsilon^{ki}\varepsilon^{kj}u_ku_{ij},\quad \varepsilon^{ij}=\mathrm{sign}(i-j) \tag{283}$$

[1008,1063,817]

Во всех формулах подразумевается, что $i\neq j\neq k\neq i$. Линейная задача:

$$(T_iT_j+a^{ij}(T_i-T_j)-1)\psi=0. \tag{284}$$

Условие совместности $T_k(\psi_{ij})=T_j(\psi_{ik})$ ведёт к отображению звезда-треугольник. С другой стороны, (284) позволяет исключить переменные a^{ij}, что ведёт к уравнению с двойными отношениями. Переменная u вводится в силу законов сохранения

$$\frac{T_i(a^{jk})}{a^{jk}}=\frac{T_j(a^{ik})}{a^{ik}}=\frac{T_k(a^{ij})}{a^{ij}}\quad\Rightarrow\quad a^{ij}=\varepsilon^{ij}\frac{u_iu_j}{uu_{ij}},$$

что даёт уравнения (283).

[1008] T. Miwa. On Hirota difference equations, *Proc. Japan Acad. A* ***58*** (1982) 9–12.

[1063] J.J.C. Nimmo, W.K. Schief. An integrable discretization of a 2+1-dimensional sine-Gordon equation. *Stud. Appl. Math.* ***100:3*** (1998) 295–309.

[817] B.G. Konopelchenko, W.K. Schief. Reciprocal figures, graphical statics and inversive geometry of the Schwarzian BKP hierarchy. *Stud. Appl. Math.* ***109:2*** (2002) 89–124.

Уравнения (281)–(283) 4-мерно совместны [207], то есть

$$T_l(u_{ijk}) = T_k(u_{ijl}), \quad T_l(\psi_{ijk}) = T_k(\psi_{ijl}), \quad T_l(a_k^{ij}) = T_k(a_l^{ij}).$$

[207] V.E. Adler, A.I. Bobenko, Yu.B. Suris. Classification of integrable equations on quad-graphs. The consistency approach. *Commun. Math. Phys.* ***233*** (2003) 513–543.

Хироты-Сатсумы уравнение eDD

[705, 1395, 1396]

$$u_t = (au_{xx} + 3au^2 - 3v^2)_x, \quad v_t = -v_{xxx} - 3v_x u$$

Преобразование Бэклунда [1396]

[1396] J. Weiss. Modified equations, rational solutions and the Painlevé property for the Kadomtsev-Petviashvili and Hirota-Satsuma equations. *J. Math. Phys.* ***26:9*** (1985) 2174–2180.

Хохлова-Заболоцкой уравнение dDDD

[1431]

$$u_{xt} = u_x u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}$$

Редукция $u_z = 0$ отвечает бездисперсионному пределу в уравнении КП.
Лагранжиан $L = -u_x u_t + \frac{1}{3}u_x^3 + u_y^2 + u_z^2$.

Цицейки уравнение hDD

[1360]

$$u_{xy} = e^{2u} - e^{-u}$$

Также: уравнение Булло-Додда [484], Жибера-Шабата [1461]

Является редукцией $v = 0$ системы (Fordy, Gibbons)

$$u_{xy} = e^{2u} - \cosh(3v)e^{-u}, \quad v_{xy} = \sin^3(v)e^{-u}$$

[484] R.K. Dodd, R.K. Bullough. *Proc. Roy. Soc. London A* ***351*** (1976) 499.

[1461] A.V. Zhiber, A.B. Shabat. Nonlinear Klein-Gordon equations with nontrivial group. *Dokl. Akad. Nauk SSSR* ***247:5*** (1979) 1103–1107.

Чена-Ли-Лю система eDD

[423]

$$u_t = u_{xx} + 2uvu_x, \quad v_t = -v_{xx} + 2uvv_x$$

Также: НУШП-II

Преобразование Бэклунда

$$u_{n,x} = (u_n v_{n+1} + \beta_n)(u_{n+1} - u_n), \quad v_{n,x} = (u_{n-1} v_n + \beta_{n-1})(v_n - v_{n-1})$$

Принцип нелинейной суперпозиции

$$\tilde{u}_n = u_n + (\beta_{n+1} - \beta_n)\frac{u_{n-1} - u_n}{\beta_n + u_{n-1}v_{n+1}}, \quad \tilde{v}_n = v_n - (\beta_{n+1} - \beta_n)\frac{v_{n+1} - v_n}{\beta_{n-1} + u_{n-1}v_{n+1}}$$

Представление нулевой кривизны

$$U = \begin{pmatrix} r & \lambda u \\ \lambda v & -r \end{pmatrix}, \quad V = 2rU + \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(u_x v - u v_x) & \lambda u_x \\ -\lambda v_x & \frac{1}{2}(u v_x - u_x v) \end{pmatrix}, \quad 2r = uv - \lambda^2$$

$$L_n = (u_n v_{n+1} + \beta_n)^{-\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} u_n v_{n+1} + \beta_n - \lambda^2 & \lambda u_n \\ \lambda v_{n+1} & \beta_n \end{pmatrix}$$

Многополевое обобщение [1097,1098]: пусть u, v принадлежат ассоциативной алгебре, тогда система

$$u_t = u_{xx} + 2u_x vu, \quad v_t = -u_{xx} + 2vuv_x$$

обладает симметрией третьего порядка

$$u_{t_3} = u_{xxx} + 3u_{xx}vu + 3u_x vu_x + 3u_x vuvu, \quad v_{t_3} = v_{xxx} - 3vuv_{xx} - 3v_x uv_x + 3vuvuv_x.$$

[1097] P.J. Olver, V.V. Sokolov. Integrable evolution equations on associative algebras. *Commun. Math. Phys.* ***193:2*** (1998) 245–268.

[1098] P.J. Olver, V.V. Sokolov. Non-abelian integrable systems of the derivative nonlinear Schrödinger type. *Inverse Problems* ***14:6*** (1998) L5–L8.

В случае $u \in \mathrm{Mat}_{M,N}$, $v \in \mathrm{Mat}_{N,M}$ матрицы размера $M \times M$

$$U = -2u_x v, \quad W = 2u_x v_x - 2u_{xx} v - 4u_x vuv$$

удовлетворяют матричному уравнению КП

$$4U_{t_3} = U_{xxx} - 3(U_x U + UU_x - W_t + [W,U]), \quad W_x = U_t$$

а матрицы размера $N \times N$

$$F = vu, \quad P = vu_x - v_x u + F^2$$

удовлетворяют матричному уравнению мКП

$$4F_{t_3} = F_{xxx} + 3([F_{xx}, F] - 2FF_x F + P_t + [P, F^2] + F_x P + PF_x), \quad F_t = P_x + [P, F].$$

Шабата уравнение D_q

[1235]

$$q^2v'(qx) + v'(x) = (qv(qx) - v(x))^2 - 1, \quad v(0) = \alpha \tag{285}$$

ОДУ с отклоняющимся аргументом возникающее, как автомодельная редукция одевающей цепочки. Решение единственно в классе мероморфных функций в $\mathbb{C}$. Спектр соответствующего оператора Шрёдингера с потенциалом $u = 2v'$ состоит из бесконечной геометрической прогрессии $-q^{2n}$, $n = 0, 1, \dots$ [469,470].

Аналитические свойства решения изучались в работах [923,924,925]. Рациональные решения, отвечающие специальным значениям α построены в [201]. Некоторые обобщения, отвечающие автомодельному замыканию одевающей цепочки через несколько шагов обсуждались в [1256]

[469] A. Degasperis, A.B. Shabat. Construction of reflectionless potentials with infinitely many discrete eigenvalues, [108].

[470] A. Degasperis, A.B. Shabat. Construction of reflectionless potentials with infinite discrete spectra. *Theor. Math. Phys.* ***100:2*** (1994) 970–984

[923] Yunkang Liu. On functional differential equations with proportional delays. *Ph. D. Thesis,* Cambridge University, 1996.

[924] Yunkang Liu. Regular solutions of the Shabat equation. *J. Diff. Eq.* ***154*** (1999) 1–41.

[925] Yunkang Liu. An existence result for the Shabat equation. *Aeq. Math.* ***64*** (2002) 104–109.

[201] V.E. Adler. On the rational solutions of the Shabat equation. Proc. of Int. Workshop 'Nonlinear Physics', pp. 53–61, World Scientific, 1996.

[1256] S. Skorik, V. Spiridonov. Self-similar potentials and the q-oscillator algebra at roots of unity. *Lett. Math. Phys.* ***28*** (1993) 59–74.

Эволюционные уравнения

Эволюционными называются уравнения в частных производных вида $\vec{u}_t = F[\vec{x}, \vec{u}]$, где функция F зависит от частных производных $\vec{u}$ (некоторого ограниченного порядка) по пространственным независимым переменным $\vec{x}$. Часто допускается также зависимость от нелокальностей, то есть величин, связанных с $\vec{u}$ некоторой дифференциальной связью. Простейшим примером нелокальности, служит выражение типа $D_x^{-1}(u)$, входящее в уравнение КП. Задача классификации интегрируемых эволюционных уравнений с двумя пространственными переменными x, y рассматривалась в работе [997].

Наиболее развита теория скалярных локальных эволюционных уравнений с одной пространственной переменной

$$u_t = f(x, u, u_1, \ldots, u_n), \quad u_k = D_x^k(u).$$

Можно доказать, что такие уравнения чётного порядка не могут обладать законами сохранения старших порядков. Следовательно, порядок канонических плотностей ограничен сверху, что существенно упрощает классификацию интегрируемых уравнений. Для уравнений 2-го порядка она была получена Свинолуповым [1311], Теорема 1, он же проклассифицировал и уравнения 4-го порядка [1312]. Оказывается, что все эти уравнения линеаризуются при помощи дифференциальных подстановок. Так как наиболее известными примером является уравнение Бюргерса, линеаризуемое подстановкой Коула-Хопфа, то и весь класс часто называют уравнениями типа Бюргерса.

Интегрируемые уравнения нечётного порядка делятся на две части. Одна состоит из уравнений типа Бюргерса и не является особенно интересной. Природа уравнений второго типа совершенно другая. Это уравнения, разрешимые при помощи МОЗР, они обладают бесконечным набором высших законов сохранения и их высшие симметрии также имеют нечётный порядок. Естественно, что класс уравнений

$$u_t = F(u_3, u_2, u_1, u, x, t) \tag{286}$$

содержащий знаменитое уравнение КдФ превлёк внимание большого числа исследователей. Один из

[997] A.V. Mikhailov, R.I. Yamilov. Towards classification of (2+1)-dimensional integrable equations. Integrability conditions I. *J. Phys. A* ***31:31*** (1998) 6707–6715.

[1311] S.I. Svinolupov. Second-order evolution equations with symmetries. *Russ. Math. Surveys* ***40:5*** (1985) 241–242.

[1312] S.I. Svinolupov. Analogues of the Burgers equations of arbitrary order. *Theor. Math. Phys.* ***65:2*** (1985) 1177–1180.

ранних результатов был получен Ибрагимовым и Шабатом [729], доказавшими что все интегрируемые уравнения вида (286) делятся на три подкласса:

$$u_t = au_3 + b; \qquad u_t = \frac{1}{(au_3+b)^2} + c; \qquad u_t = \frac{2au_3+b}{\sqrt{au_3^2+bu_3+c}} + d, \quad b^2 \neq 4ac,$$

где a, b, c, d зависят от u_2, u_1, u, x, t. Первый классификационный результат, а именно, для уравнений частного вида

$$u_t = u_3 + f(u_1, u)$$

был получен в [728,584]. Полный список интегрируемых уравнений типа КдФ с постоянной *сепарантой*, то есть, вида

$$u_t = u_3 + f(u_2, u_1, u, x) \tag{287}$$

был представлен в [1317]. Этот результат оказался важным шагом в развитии симметрийного подхода. Частный квазилинейный случай

$$u_t = a(u_1, u, t)u_3$$

был проклассифицирован в [167]. Классификация общего случая (286) была предпринята в статьях [682,683,677,678], однако полное решение этой чрезвычайно сложной задачи не получено до сих пор. Вероятнее

---

[729] N.H. Ibragimov, A.B. Shabat. On infinite dimensional Lie-Bäcklund algebras. *Funct. Anal. Appl.* ***14:4*** (1980) 79–80.

[728] N.H. Ibragimov, A.B. Shabat. Evolutionary equations with nontrivial Lie-Bäcklund group. *Funct. Anal. Appl.* ***14:1*** (1980) 25–36.

[584] A.S. Fokas. A symmetry approach to exactly solvable evolution equations. *J. Math. Phys.* ***21:6*** (1980) 1318–1325.

[1317] S.I. Svinolupov, V.V. Sokolov. On evolution equations with nontrivial conservation laws. *Funct. Anal. Appl.* ***16:4*** (1982) 86–87.

[167] L. Abellanas, A. Galindo. A Harry Dym class of bihamiltonian evolution equations. *Phys. Lett. A* ***107:4*** (1985) 159–160.

[682] R. Hernández Heredero, V.V. Sokolov, S.I. Svinolupov. Toward the classification of third order integrable evolution equations. *J. Phys. A* ***27:13*** (1994) 4557–4568.

[683] R. Hernández Heredero, V.V. Sokolov, S.I. Svinolupov. Classification of third order integrable evolution equations. *Physica D* ***87:1–4*** (1995) 32–36.

[677] R. Hernández Heredero. Integrable quasilinear equations. *Theor. Math. Phys.* ***133:2*** (2002) 1514–1526.

[678] R. Hernández Heredero. Classification of fully nonlinear integrable evolution equations of third order. *J. Nonl. Math. Phys.* ***12:4*** (2005) 567–585.

всего, в оставшихся случаях существенно новых уравнений уже не буйдет найдено, согласно следующей гипотезе.

Гипотеза 4 ([683]). *Любое интегрируемое уравнение (286) связано контактным преобразованием или дифференциальной подстановкой либо с уравнением КдФ, либо с уравнением Кричевера-Новикова либо линейным* $u_t = u_3 + a(x,t)u_1 + b(x,t)u$.

Не ясно также, сколько высших симметрий фактически необходимо, чтобы обеспечить интегрируемость уравнения (286). Возможно, что для данного класса уравнений верна гипотеза Фокаса, то есть интегрируемость следует уже из существования одной симметрии 5-го порядка.

Интегрируемые уравнения 5-го порядка проклассифицированы только в случае постоянной сепаранты [993]

$$u_t = u_5 + F(u_4, u_3, u_2, u_1, u).$$

Они делятся на три типа: симметрии уравнений типа Бюргерса, симметрии уравнений типа КдФ (287) и уравнения без симметрий младшего порядка. Наиболее известными представителями последнего подкласса являются уравнения Каупа-Купершмидта и Савады-Котеры. Уравнения этого типа обладают представлениями нулевой кривизны в матрицах размера 3×3, в отличие от уравнений (287) для которых достаточно матриц 2×2.

Относительно уравнений 7-го и высших порядков известны только частные результаты [1191,1192].

Двух-компонентные эволюционные системы вида

$$\vec{u}_t = A(\vec{u})\vec{u}_{xx} + F(\vec{u}, \vec{u}_x), \quad \vec{u} = (u, v)$$

---

[993] A.V. Mikhailov, A.B. Shabat, V.V. Sokolov. The symmetry approach to classification of integrable equations. [162, 115–184]

[1191] J.A. Sanders, J.P. Wang. On the integrability of homogeneous scalar evolution equations. *J. Diff. Eq.* ***147:2*** (1998) 410–434.

[1192] J.A. Sanders, J.P. Wang. On the integrability of non-polynomial scalar evolution equations. *J. Diff. Eq.* ***166:1*** (2000) 132–150.

проклассифицированы в статьях [991,994,995]. Они также делятся на три подкласса: уравнения типа НУШ и типа Буссинеска с представлениями нулевой кривизны в матрицах размера 2×2 и 3×3 соответственно, и линеаризуемые уравнения.

[991] A.V. Mikhailov, A.B. Shabat. Integrability conditions for systems of two equations of the form $\vec{u}_t = A(\vec{u})\vec{u}_{xx} + F(\vec{u}, \vec{u}_x)$. I, II. *Theor. Math. Phys.* ***62:2*** (1985) 107–122; *Theor. Math. Phys.* ***66:1*** (1986) 32–44.

[994] A.V. Mikhailov, A.B. Shabat, R.I. Yamilov. The symmetry approach to classification of nonlinear equations. Complete lists of integrable systems. *Russ. Math. Surveys* ***42:4*** (1987) 1–63.

[995] A.V. Mikhailov, A.B. Shabat, R.I. Yamilov. Extension of the module of invertible transformations. Classification of integrable systems. *Commun. Math. Phys.* ***115:1*** (1988) 1–19.

Эйлера волчок D

$$\dot{M} = [M, \Omega], \quad M = J\Omega + \Omega J, \quad M, \Omega \in \mathrm{so}(d)$$

Уравнения описывают вращение тяжёлого твёрдого d-мерного тела около закреплённого центра тяжести. Случай $d = 3$ был проинтегрирован Эйлером в эллиптических функциях. Общий случай впервые рассмотрен в работе [1002], где предъявлены некоторые первые интегралы. Полный набор первых интегралов и представление Лакса

$$\frac{d}{dt}(M + \lambda J^2) = [M + \lambda J^2, \Omega + \lambda J]$$

найдены в [942].

[1002] A.S. Mischenko, *Funct. Anal. Appl.* ***4:3*** (1970) 73–78.

[942] S.V. Manakov. On the complete integrability and stochastization of discrete dynamical systems. *Sov. Phys. JETP* ***40*** (1974) 269–274.

Эйлера волчок в квадратичном потенциале D

$$\dot{M} = [M, \Omega] + [P, J], \quad \dot{P} = [P, \Omega], \quad M = J\Omega + \Omega J, \quad M, \Omega \in \mathrm{so}(d), \quad P = P^{\mathsf{T}}$$

Отвечает вращению d-мерного таёрдого тела около закреплённого центра масс в Ньютоновском гравитационном поле с произвольным квадратичным потенциалом. Интегрируемость этой задачи доказана в [1161,17,332].

[1161] A.G. Reyman. Integrable Hamiltonian systems connected with graded Lie algebras. *J. Sov. Math.* **19** (1982) 1507–1545.
[17] O.I. Bogoyavlensky. Breaking solitons. Nonlinear integrable equations. Moscow: Nauka, 1991.
[332] O.I. Bogoyavlensky. Euler equations on finite-dimensional Lie coalgebras, arising in problems of mathematical physics. *Russ. Math. Surveys* ***47*** (1992) 117–189.

Эйлера волчок дискретный Δ

[96]

$$M_{n+1} = W_n^{\intercal} M_n W_n, \quad M_n = W_n J - J W_n^{\intercal}, \quad M_n \in \mathrm{so}(d), \quad W_n \in \mathrm{SO}(d)$$

Непрерывный предел: $W_n = I + \varepsilon\Omega(\varepsilon n) + o(\varepsilon^2)$, $M_n = \varepsilon M(\varepsilon n)$.

Эйлера волчок дискретный в квадратичном потенциале Δ

[96]

$$M_{n+1} = W_n^{\intercal} M_n W_n + [P_{n+1}, JW_n + W_n^{\intercal} J], \quad P_{n+1} = W_n^{\intercal} P_n W_n,$$

$$M_n = W_n J - JW_n^{\intercal} + \frac{1}{2}(JW_n^{\intercal} P_n - P_n W_n J), \quad M_n \in \mathrm{so}(d), \quad W_n \in \mathrm{SO}(d), \quad P_n = P_n^{\intercal}$$

Непрерывный предел: $W_n = I + \varepsilon\Omega(\varepsilon n) + o(\varepsilon^2)$, $M_n = \varepsilon M(\varepsilon n)$, $P_n = \varepsilon^2 P(\varepsilon n)$.

Эйлера-Дарбу уравнение hDD

Автор: В.Г. Марихин, 27.08.2007

$$u_{xy} + \frac{\alpha u_x - \beta u_y}{x - y} = 0 \tag{288}$$

Общее “решение” имеет вид

$$u = \int \rho(t)(x-t)^\beta (y-t)^\alpha dt$$

Оператор Эйлера-Дарбу $L = \partial_x \partial_y + \frac{\alpha}{x-y}\partial_x - \frac{\beta}{x-y}\partial_y$ и операторы квантового спина

$$S^1 = -\frac{1}{2}(x^2-1)\partial_x - \frac{1}{2}(y^2-1)\partial_y + \frac{1}{2}(\beta x + \alpha y),$$
$$S^2 = -\frac{i}{2}(x^2+1)\partial_x - \frac{i}{2}(y^2+1)\partial_y + \frac{i}{2}(\beta x + \alpha y),$$
$$S^3 = -x\partial_x - y\partial_y + \frac{1}{2}(\alpha+\beta)$$

порождают алгебру с тождествами

$$[S^a, S^b] = i\varepsilon^{abc} S^c, \quad [S^1, L] = (x+y)L, \quad [S^2, L] = i(x+y)L, \quad [S^3, L] = 2L$$
$$S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 + (x-y)^2 L = s(s+1), \quad s = \frac{1}{2}(\alpha+\beta).$$

Следовательно S^i являются операторами Бэклунда для уравнения Эйлера-Дарбу, то есть, если u есть решение (288), то и $u^i = S^i u$ также являются решениями. Например, затравочное решение $u_0 = (x - y)^{\alpha+\beta+1}$ порождает семейство решений $u_n = P_n(x,y)u_0$, где

$$P_1 = (\alpha+1)x + (\beta+1)y, \quad P_2 = (\alpha+1)(\alpha+2)x^2 + 2xy(\alpha+1)(\beta+1) + (\beta+1)(\beta+2)y^2,$$
$$P_3 = (\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)x^3 + 3(\alpha+1)(\alpha+2)(\beta+1)x^2y + 3(\alpha+1)(\beta+1)(\beta+2)xy^2 + (\beta+1)(\beta+2)(\beta+3$$

$$\dots$$

Эйлера-Пуассона уравнения D

$$u' = [u, Ju] + [\gamma, v], \quad v' = [v, Ju], \quad u, v, \gamma \in \mathbb{R}^3, \quad J = \mathrm{diag}(J_1, J_2, J_3), \quad \gamma, J = \mathrm{const}$$

Система описывает движение твёрдого тела, вращающегося около неподвижной точки в однородном поле тяжести, в 3-мерном пространстве. Система неинтегрируема для общих значений параметров γ, J. Однако, известны некоторые интегрируемые случаи. Три квадратичных интеграла движения существуют при любом наборе параметров:

$$\langle v, v\rangle = 1, \quad \langle u, v\rangle = \sigma, \quad \langle u, Ju\rangle - 2\langle \gamma, v\rangle = \varepsilon.$$

Полная интегрируемость требует ещё одного первого интеграла. Он существует в следующих случаях:

случай	параметры	первый интеграл
Эйлера	$\gamma = 0$	$\langle u, u\rangle$
Лагранжа	$J_1 = J_2, \quad \gamma_1 = \gamma_2 = 0$	u_3
Ковалевской	$2J_1 = 2J_2 = J_3, \quad \gamma_3 = 0$	$\lvert J_1(u_1 + iu_2)^2 + 2(\gamma_1 + i\gamma_2)(v_1 + iv_2)\rvert^2$

Случай Лагранжа содержит, в частности, изотропный подслучай $J = \mathrm{id}$ с первым интегралом $\langle \gamma, u\rangle$. Случай Ковалевской был открыт при решении следующей задачи: найти случаи, когда общее решение системы мероморфно по t. С точностью до очевидных замен, приведённый список покрывает все случаи, удовлетворяющие этому свойству. В отличие от двух первых случаев, для котрых решение выражается через эллиптические функции, решение волчка Ковалевской выражается через гиперэллиптические функции рода 2.

Ещё несколько случаев являются частично интегрируемыми, то есть, интегрируемыми на некоторм множестве уровня первых интегралов: случаи Горячёва, Гесса-Аппельрота, Бобылёва-Стеклова и Н. Ковалевского.

Эквивалентности проблема

[83, 48, 82]

Проблема эквивалентности заключается в определении необходимых и достаточных условий того, что два уравнения из заданного класса сводятся друг к другу по модулю заданных преобразований, а также в эффективном построении такого преобразования, если оно существует. В качестве допустимых преобразований рассматриваются обычно точечные и контактные преобразования или их подгруппы, сохраняющие общий вид рассматриваемых уравнений, реже — дифференциальные подстановки.

Важность данной проблемы обусловлена тем, что дифференциальные уравнения являются весьма неинвариантным объектом и изучение их преобразований составляет существенную часть общей теории.

Классическая работа [101] показывает, насколько сложна задача даже в простейшем случае ОДУ второго порядка.

[101] M.A. Tresse. Determination des invariants ponctuels de l'equation differentielle ordinaire du second ordre $y'' = w(x, y, y')$. Leipzig: Hirzel, 1896.

Экхауса уравнение eDD

$$iu_t = u_{xx} + 2au(|u|^2)_x + |a|^2|u|^4u$$

Линеаризуется подстановкой [407] ...

Многополевые обобщения рассматривались в [400]. Дискретизация предложена в [169].

[407] F. Calogero, S. de Lillo. The Eckhaus PDE $i\psi_t + \psi_{xx} + 2(|\psi|^2)_x\psi + |\psi|^4\psi = 0$. *Inverse Problems* ***3*** (1987) 633–681.

[400] F. Calogero, A. Degasperis, S. de Lillo. The multicomponent Eckhaus equation. *J. Phys. A* ***30:16*** (1997) 5805–5814.

[169] M.J. Ablowitz, C.D. Ahrens, S. de Lillo. On a “quasi” integrable discrete Eckhaus equation. *J. Nonl. Math. Phys.* ***12:1*** suppl. (2005) 1–12.

Эллиптические функции

Функции Вейерштрасса

$$\sigma(z) = z\prod{}'\Big(1-\frac{z}{w}\Big)\exp\Big(\frac{z}{w}+\frac{z^2}{2w^2}\Big), \qquad \zeta = \frac{\sigma'}{\sigma}$$
$$\zeta(z) = \frac{1}{z}+\sum{}'\Big(\frac{1}{z-w}+\frac{1}{w}+\frac{z}{w^2}\Big), \qquad \zeta' = -\wp$$
$$\wp(z) = \frac{1}{z^2}+\sum{}'\Big(\frac{1}{(z-w)^2}-\frac{1}{w^2}\Big), \qquad (\wp')^2 = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3 = 4(\wp-e_1)(\wp-e_2)(\wp-e_3)$$

где сумма и произведение берутся по решётке

$$w = 2m\omega_1 + 2n\omega_2, \quad m,n\in\mathbb{Z}, \quad \operatorname{Im}\omega_2/\omega_1>0, \quad e_1=\wp(\omega_1), \quad e_2=\wp(\omega_2), \quad e_3=\wp(\omega_1+\omega_2)$$

и штрих означает, что точка $w=0$ исключена.

$$\sigma(-z) = -\sigma(z), \quad \sigma(z+2\omega_j) = -e^{2\eta_j(z+\omega_j)}\sigma(z), \quad j=1,2$$
$$\zeta(-z) = -\zeta(z), \quad \zeta(z+2\omega_j) = \zeta(z)+2\eta_j, \quad \eta_j=\zeta(\omega_j), \quad \eta_1\omega_2-\eta_2\omega_1 = \frac{1}{2}\pi i$$
$$\wp(-z) = \wp(z), \quad \wp(z+2\omega_j) = \wp(z)$$

Любая эллиптическая функция $f(z)$ (с периодамми w) может быть представлена формулой

$$f(z) = \mathrm{const}\,\frac{\sigma(z-a_1)\cdots\sigma(z-a_r)}{\sigma(z-b_1)\cdots\sigma(z-b_r)}$$

где a_j, b_j есть, соответственно, нули и полюсы $f(z)$ в фундаментальном параллелограмме $\Omega = \{z = t_1\omega_1 + t_2\omega_2 : \ 0\le t_1,t_2<2\}$.
Некоторые наиболее полезные тождества:

$$\sigma(x+\alpha)\sigma(x-\alpha)\sigma(\beta+\gamma)\sigma(\beta-\gamma)=\sigma(x+\beta)\sigma(x-\beta)\sigma(\alpha+\gamma)\sigma(\alpha-\gamma)$$
$$-\sigma(x+\gamma)\sigma(x-\gamma)\sigma(\alpha+\beta)\sigma(\alpha-\beta)$$
$$\zeta(x)+\zeta(y)+\zeta(z)-\zeta(x+y+z)=\frac{\sigma(x+y)\sigma(y+z)\sigma(z+x)}{\sigma(x)\sigma(y)\sigma(z)\sigma(x+y+z)}$$
$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix}1 & \wp(x) & \wp'(x)\\ 1 & \wp(y) & \wp'(y)\\ 1 & \wp(z) & \wp'(z)\end{vmatrix}=\frac{\sigma(x+y+z)\sigma(x-y)\sigma(y-z)\sigma(z-x)}{\sigma^3(x)\sigma^3(y)\sigma^3(z)}$$
$$\wp(x)-\wp(y)=-\frac{\sigma(x+y)\sigma(x-y)}{\sigma^2(x)\sigma^2(y)}$$
$$\frac{1}{4}\left(\frac{\wp'(x)+\wp'(y)}{\wp(x)-\wp(y)}\right)^2=\wp(x)+\wp(y)+\wp(x-y) \tag{289}$$

Биквадратичный многочлен

$$H(u,v,w)=(uv+vw+wu+g_2/4)^2-(u+v+w)(4uvw-g_3)$$

удовлетворяет тождеству $H_v^2-2HH_{vv}=r(u)r(w)$, $r(u)=4u^3-g_2u-g_3$ (см. дробно-линейные инварианты). Из тождества

$$H(\wp(x),\wp(y),\wp(z))=-\frac{\sigma(x+y+z)\sigma(-x+y+z)\sigma(x-y+z)\sigma(x+y-z)}{\sigma^4(x)\sigma^4(y)\sigma^4(z)}$$
$$=(\wp(x)-\wp(y))^2(\wp(x+y)-\wp(z))(\wp(x-y)-\wp(z))$$

следует форма Эйлера теоремы сложения (289) $H(\wp(x),\wp(y),\wp(x\pm y))=0$.

Эно-Хейлеса система D

[1395, 601]

$$u'' = -au - 2duv, \quad v'' = -bv + cv^2 - du^2$$

гамильтониан: $H = \frac{1}{2}((u')^2 + (v')^2 + au^2 + bv^2) + du^2v - \frac{1}{3}cv^3$.
Интегрируемые случаи: $d = -c$, $b = a$; $6d = -c$; $16d = -c$, $b = 16a$.

Эрнста уравнение hDD

$$\mathrm{Re}(u)\left(u_{xx} + u_{yy} + \frac{u_x}{x}\right) = u_x^2 + u_y^2$$

Янга-Бакстера отображения

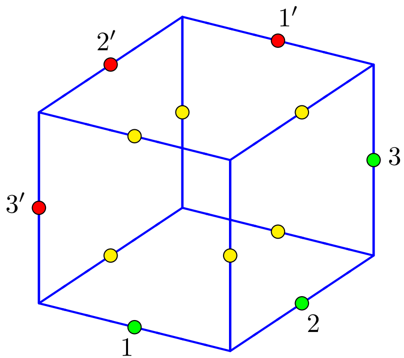
Автор: В.Э. Адлер, 21.07.2005

$3D$-совместность

Рассмотрим отображения $R_{ij} : C_i \times C_j \to C_i \times C_j$ где C_i некоторые пространства или многообразия. Пусть отображение $\hat{R}_{ij} : C_1 \times C_2 \times C_3 \to C_1 \times C_2 \times C_3$ действует как R_{ij} на i-м и j-м сомножителях и тождественно на оставшемся.

Определение 16. R_{ij} называется отображением Янга-Бакстера, если

$$\hat{R}_{23} \circ \hat{R}_{13} \circ \hat{R}_{12} = \hat{R}_{12} \circ \hat{R}_{13} \circ \hat{R}_{23}$$



- начальные данные на *змейке*
- промежуточные значения
- результаты совпадают

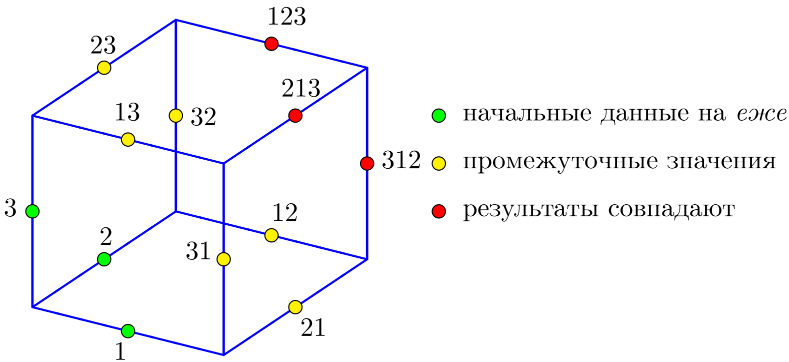
Следующее определение по существу эквивалентно.

Пусть $F_{ij} : C_i \times C_j \to C_i \times C_j$ и

$$F_{ij} : (X_i, X_j) \mapsto (X_{ij}, X_{ji}), \quad F_{ij} : (X_{ik}, X_{jk}) \mapsto (X_{ikj}, X_{jki}).$$

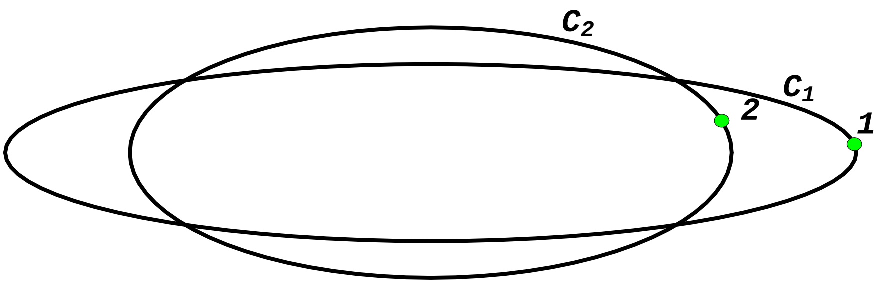
Определение 17. Отображения F_{ij} 3D-совместны, если

$$X_{ijk} \equiv X_{ikj}$$



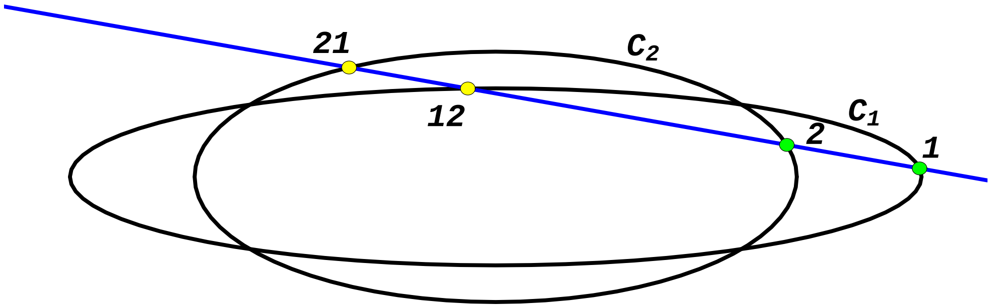
Отображения Янга-Бакстера на линейном пучке коник

Пусть X_1, X_2 точки на конических сечениях C_1, C_2 соответственно.

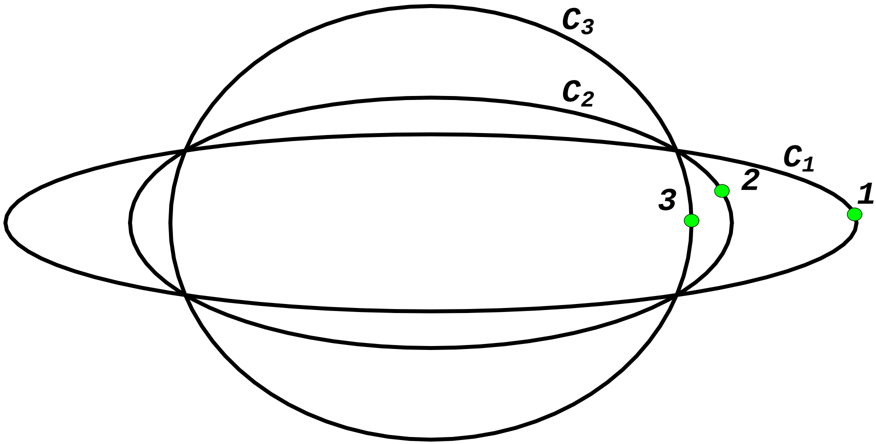


Определим отображение $F_{12} : C_1 \times C_2 \to C_1 \times C_2$ следующим образом:

$$X_{12} = X_1X_2 \cap C_1, \quad X_{21} = X_1X_2 \cap C_2$$

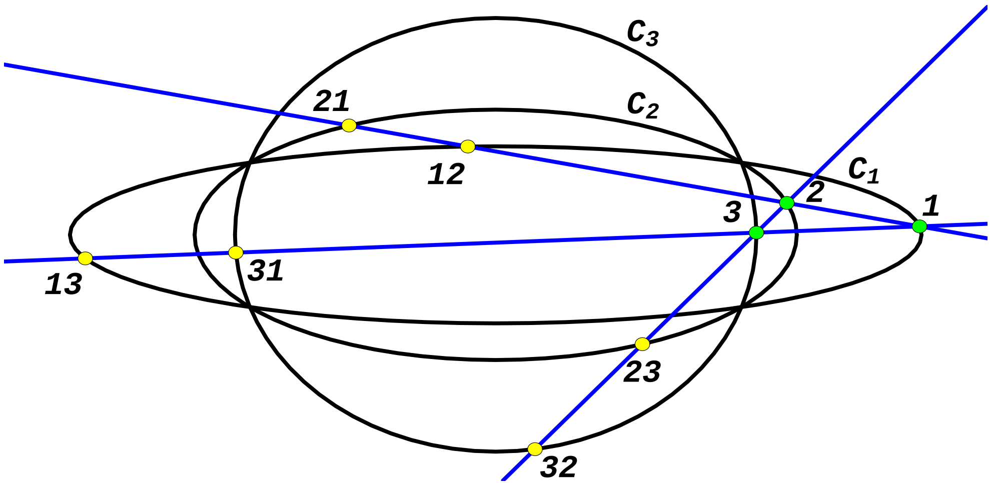


Рассмотрим начальные данные на трёх кониках из линейного пучка.



Рассмотрим начальные данные на трёх кониках из линейного пучка.

Применим отображения $F_{ij} : (X_i, X_j) \mapsto (X_{ij}, X_{ji})$.

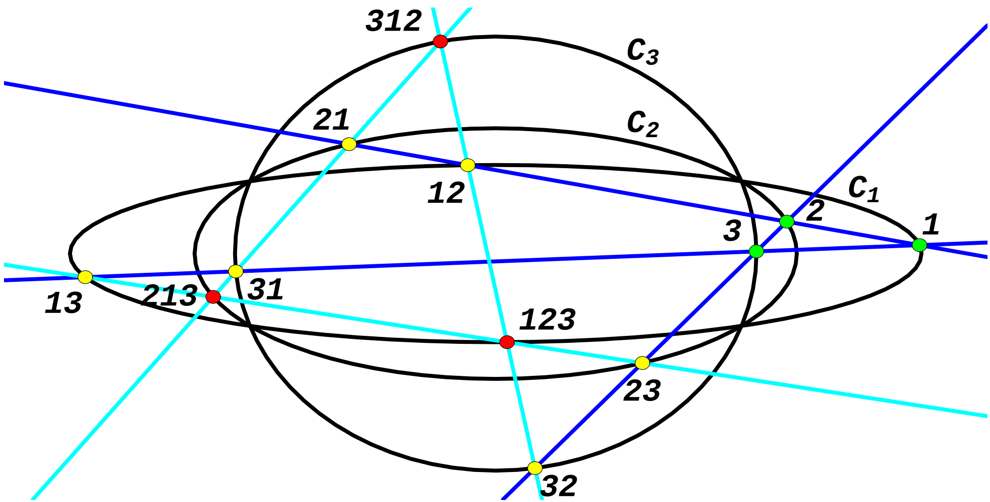


Рассмотрим начальные данные на трёх кониках из линейного пучка.

Применим отображения $F_{ij} : (X_i, X_j) \mapsto (X_{ij}, X_{ji})$.

Применим отображения ещё раз. Пусть $F_{ij} : (X_{ik}, X_{jk}) \mapsto (X_{ikj}, X_{jki})$.

Теорема 26. *Отображения F_{ij} являются 3D-совместными: $X_{ijk} = X_{ikj}$.*



При рациональной параметризации коник $C_i : X_i = X_i(x_i)$ отображение F_{12} превращается в бирациональное отображение на $\mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1$. Существует 5 проективных типов линейных пучков коник $C_i = C + a_i K$ [13]. Эти типы приводят к следующему списку отображений ($i, j \in \{1, 2\}$):

$$
\begin{aligned}
x_{ij} &= a_i x_j \frac{(1-a_2)x_1 + a_2 - a_1 + (a_1 - 1)x_2}{a_2(1-a_1)x_1 + (a_1 - a_2)x_2 x_1 + a_1(a_2 - 1)x_2} \\
x_{ij} &= \frac{x_j}{a_i} \cdot \frac{a_1 x_1 - a_2 x_2 + a_2 - a_1}{x_1 - x_2} \\
x_{ij} &= \frac{x_j}{a_i} \cdot \frac{a_1 x_1 - a_2 x_2}{x_1 - x_2} \\
x_{ij} &= x_j \left(1 + \frac{a_2 - a_1}{x_1 - x_2}\right) \\
x_{ij} &= x_j + \frac{a_1 - a_2}{x_1 - x_2}
\end{aligned}
\tag{290}
$$

Первое отвечает приведённым выше рисункам с 4-точечным локусом.

Все эти отображения получаются из тех quad-уравнений, перечисленных в Теореме 10, которые являются инвариантными относительно сдвига $u \to u + c$ или растяжения $u \to cu$, посредством замены $x_i = u_i - u$ или $x_i = u_i/u$.

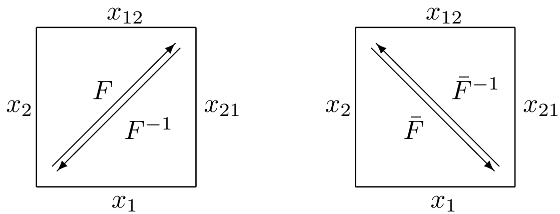
Квадрирациональные отображения

Определение 18 ([537,208]). Отображение $F : C_1 \times C_2 \to C_1 \times C_2$ называется квадрирациональным, если оно, а также отображения $F(x_1, \cdot) : C_2 \to C_2$, $F(\cdot, x_2) : C_1 \to C_1$ являются бирациональными изоморфизмами для почти всех $x_i \in C_i$.

[13] M. Berger. Geometry. Berlin: Springer-Verlag, 1987.

[537] P. Etingof. Geometric crystals and set-theoretical solutions to the quantum Yang-Baxter equation. *Preprint math.QA/0112278.*

[208] V.E. Adler, A.I. Bobenko, Yu.B. Suris. Geometry of Yang-Baxter maps: pencils of conics and quadrirational mappings. *Comm. Anal. and Geom.* ***12:5*** (2004) 967–1007.



В случае $C_1 = C_2 = \mathbb{CP}^1$, квадрирациональное отображение имеет вид

$$F: \quad x_{12} = f(x_1, x_2) = \frac{a(x_2)x_1 + b(x_2)}{c(x_2)x_1 + d(x_2)}, \quad x_{21} = g(x_1, x_2) = \frac{A(x_1)x_2 + B(x_1)}{C(x_1)x_2 + D(x_1)}$$

с некоторми специальными коэффициентами, такими, что отображения F^{-1}, $\bar{F}$,$\bar{F}^{-1}$ также имеют этот вид.

Налагая условия невырожденности

$$f_{x_1}g_{x_2} - f_{x_2}g_{x_1} \not\equiv 0, \quad f_{x_1} \not\equiv 0, \quad f_{x_2} \not\equiv 0, \quad g_{x_1} \not\equiv 0, \quad g_{x_2} \not\equiv 0,$$

можно доказать что коэффициенты полиномиальны и не более чем квадратичны. Кроме того, отображение F определяется парой полиномиальных уравнений

$$P(x_2, x_1, x_{21}) = 0, \quad Q(x_2, x_{12}, x_{21}) = 0,$$

где либо

- P, Q первой степени по каждому аргументу

либо

- P, Q первой степени по x_2, x_{21} и второй по x_1, x_{12}, и связаны соотношением

$$Q(x_2, x_{12}, x_{21}) = (\gamma x_{12} + \delta)^2 P\Big(x_2, \frac{\alpha x_{12} + \beta}{\gamma x_{12} + \delta}, x_{21}\Big).$$

Теорема 27. *С точностью до дробно-линейных замен, все невырожденные квадрирациональные отображения, такие что* $\max\deg(a, b, c, d) = \max\deg(A, B, C, D) = 2$ *исчерпываются списком (290).*

Многополевые отображения Янга-Бакстера Геометрическая конструкция отображений Янга-Бакстера работает также в случае линейного пучка *квадрик.* Действительно, все точки лежат в плоскости, определяемой начальными данными X_1, X_2, X_3, поэтому $3D$-совместность наследуется из плоской ситуации. Тем не менее, само отображение нельзя свести к скалярному. В общем виде оно записывается, как

$$X_{ij} = X_j + \frac{(a_i - a_j)(\langle X_j, SX_j\rangle + \langle s, X_j\rangle + \sigma)}{\langle X_i - X_j, (a_iS + T)(X_i - X_j)\rangle}(X_i - X_j)$$

где S, T произвольные симметричные матрицы, s произвольный вектор и σ произвольный скаляр.

Другие примеры многополевых отображений Янга-Бакстера были получены в [1373] при рассмотрении взаимодействия матричных солитонов с нетривиальными внутренними параметрами (векторный аналог сдвига фаз).

[1373] A.P. Veselov. Yang-Baxter maps and integrable dynamics. *Phys. Lett. A* ***314:3*** (2003) 214–221.

Янга-Миллса уравнение HD

[170]

$$(U^{-1}U_{z_1})_{\bar{z}_1} + (U^{-1}U_{z_2})_{\bar{z}_2} = 0$$

Ящиков-шаров система CA

[1334, 1345]

$$x_n^t \in \{0,1\}, \qquad \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n^t < \infty, \qquad x_n^{t+1} = \begin{cases} 1 & \text{if} \quad x_n^t = 0 \quad \text{and} \quad \sum_{k=-\infty}^{n-1} (x_k^t - x_k^{t+1}) > 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Альтернативно, этот клеточный автомат можно определить так. Пусть 0 представляет пустой ящик и 1 ящик, в котором лежит шар. Число шаров конечно. Занумеруем их слева направо и по порядку переместим каждый в ближайший справа пустой ящик.

⊛	⊛						⊛										
		⊛	⊛					⊛									
				⊛	⊛				⊛								
						⊛	⊛			⊛							
								⊛	⊛		⊛						
										⊛		⊛	⊛				
											⊛			⊛	⊛		
												⊛				⊛	⊛
													⊛				
														⊛			

3-волн уравнение eDD

[1441, 773, 774]

$$u_t = \alpha u_x + ivw^*, \quad v_t = \beta v_x + iuw, \quad w_t = \gamma w_x + iuv$$

N волн уравнение двумеризованное eDDD

[1450, 173, 775, 776, 802]

$$u_{ij,t} = \frac{\omega_i - \omega_j}{\alpha_i - \alpha_j} u_{ij,x} + \frac{\alpha_j \omega_i - \alpha_i \omega_j}{\alpha_i - \alpha_j} u_{ij,y} + \sum_{k=1, k \neq i,j}^{N} \Big(\frac{\omega_i - \omega_k}{\alpha_i - \alpha_k} + \frac{\omega_k - \omega_j}{\alpha_k - \alpha_j} \Big) u_{ik} u_{kj} \tag{291}$$

где $i, j = 1, \ldots, N$, $i \neq j$, $\alpha_i \neq \alpha_j$, $\omega_i \neq \omega_j$.
hDD

φ^4-уравнение hDD

[841, 267, 624, 937]

$$\varphi_{xx} - \varphi_{tt} = \pm(\varphi - \varphi^3)$$

φ^6-equation hDD

$$\varphi_{xx} = \Delta\varphi_{tt} + c\varphi^5$$

Хотя это уравнение неинтегрируемо, оно обладает богатыми семействами солитоноподобных решений [1416].

[1416] P. Winternitz, A.M. Grundland, J.A. Tuszynski. Exact solutions of the multidimensional classical ϕ^6 field equations obtained by symmetry reduction. *J. Math. Phys.* ***28:9*** (1987) 2194–2212.

Таблицы подстановок

Обозначения:

- в подстановке, помеченной $A \to B$ переменные с тильдой отвечают уравнению B;
- следовательно, в последовательности $A \to B \to C$ переменные, отвечающие B, пишутся с тильдой в первой подстановке и без во второй;
- для краткости, немое n в индексах цепочек $\dots, n-1, n, n+1, \dots$ опускается;
- буквы α, β, γ резервируются для обозначения параметров в преобразованиях Бэклунда. Они всегда считаются зависящими от n.

Уравнения типа КдФ. I

$$\begin{array}{ccccc} 1 & \rightarrow & 2 & \leftarrow & 3 \\ \downarrow & \searrow & \downarrow & \swarrow & \\ 4 & \rightarrow & 5 & & \\ & \searrow & \downarrow & & \\ & & 6 & & \\ & & \downarrow & & \\ & & 7 & & \end{array}$$

$$u_t = u_{xxx} - 6u_x^2, \quad u_{1,x} + u_x = (u_1 - u)^2 + \beta \qquad \text{pot-KdV (1)}$$

$$u_t = u_{xxx} - 6uu_x, \quad u_{1,x} + u_x = (u_1 - u)\sqrt{2(u_1 + u) - 4\beta} \qquad \text{KdV (2)}$$

$$u_t = u_{xxx} - \frac{3u_{xx}^2}{4u_x} - 4u_x^{3/2} \qquad (3)$$

$$(y + 4\beta)\sqrt{2y - 4\beta} = 3(u_1 - u), \quad y = \sqrt{u_{1,x}} + \sqrt{u_x}$$

$$u_t = u_{xxx} - \frac{3u_{xx}^2}{4(u_x - \beta)} - 3u_x^2, \quad \sqrt{u_{1,x} - \beta_1} + \sqrt{u_x - \beta} = u_1 - u \qquad (4)$$

$$u_t = u_{xxx} - 6(u^2 + \beta)u_x \qquad \text{mKdV (5)}$$

$$u_{1,x} + u_x = u_1^2 - u^2 + \alpha, \quad \alpha = \beta_1 - \beta$$

$$u_t = u_{xxx} - 3u_x\left(\frac{u_{xx}}{u} - \frac{u_x^2 - \alpha^2}{2u^2} + \frac{u^2}{2} - \beta - \beta_{-1}\right) \qquad \text{exp-CD (6)}$$

$$(u_1 u)_x = u_1 u(u_1 - u) + \alpha_1 u + \alpha u_1$$

$$u_t = u_{xxx} - \frac{3u_x(u_{xx} + 2r'(u))^2}{2(u_x^2 + 4r(u))} + 6(2u - \beta_1 + \beta - \beta_{-1})u_x \qquad \wp\text{-CD (7)}$$

$$(R_1 + u_{1,x})(R + u_x) = 4u_1(u_1 + \alpha_1)(u + \alpha)$$

$$r(u) = u(u + \alpha)(u - \alpha_1), \quad R^2 = u_x^2 + 4r(u)$$

$1 \to 2: \quad \tilde{u} = 2u_x$

$1 \to 4: \quad \tilde{u} = u_1 + u$

$1 \to 5: \quad \tilde{u} = u_1 - u$

$2 \to 5: \quad 2(\tilde{u}^2 + \beta) = u_1 + u$

$\qquad u = \tilde{u}^2 - \tilde{u}_x + \beta$

$\qquad 2\tilde{u}_x = u_1 - u$

$3 \to 2: \quad \tilde{u}^2 = u_x$

$3 \to 5: \quad \tilde{u}^3 + 3\beta\tilde{u} = \frac{3}{4}(u_1 - u$

$4 \to 5: \quad \tilde{u}^2 + \beta = u_x$

$4 \to 6: \quad \tilde{u}_1 = u_1 - u$

$5 \to 6: \quad \tilde{u}_1 = u_1 + u$

$\qquad 2u = \tilde{u} + \frac{\tilde{u}_x - \alpha}{\tilde{u}}$

$6 \to 7: \quad \tilde{u} = u_1 u$

$\qquad 2u = \frac{R(\tilde{u}) - \tilde{u}_x}{\tilde{u} - \alpha_1}$

Уравнения типа КдФ. II

$$u_t = u_{xxx} - \frac{3u_{xx}^2}{2u_x}, \quad u_{1,x}u_x = (u_1 - \beta u)^2 \qquad \text{Schwarz-KdV} \quad (1)$$

$$u_t = u_{xxx} - 2u_x^3, \quad u_{1,x} + u_x = e^{u_1 - u} - \beta e^{u - u_1} \qquad (2)$$

$$u_t = u_{xxx} - 6u^2 u_x, \quad u_{1,x} + u_x = (u_1 - u)\sqrt{(u_1 + u)^2 + 4\beta} \qquad \text{mKdV} \quad (3)$$

$$u_t = u_{xxx} - \frac{3u_{xx}^2}{4u_x} - 3u_x^2, \quad (\sqrt{u_{1,x}} + \sqrt{u_x})^2 = (u_1 - u)^2 - 4\beta \qquad (4)$$

$$u_t = u_{xxx} - \frac{3u_x u_{xx}^2}{2(u_x^2 + \beta)} - 2u_x^3 \qquad (5)$$

$$(u_{1,x} + \sqrt{u_{1,x}^2 + \beta_1})(u_x + \sqrt{u_x^2 + \beta}) = e^{2(u_1 - u)}$$

$$u_t = u_{xxx} - \frac{3u_x u_{xx}}{u} + \frac{3u_x^3}{2u^2} - \frac{3}{2}\left(u - \frac{\beta}{u}\right)^2 u_x \qquad \text{exp-CD} \quad (6)$$

$$(u_1 u)_x = u_1 u(u_1 - u) - \beta_1 u + \beta u_1$$

$$u_t = u_{xxx} - \frac{3u_x(u_{xx} + 2r'(u))^2}{2(u_x^2 + 4r(u))} + 6(2u + \beta + \beta_{-1})u_x \qquad \wp\text{-CD} \quad (7)$$

$$(R_1 + u_{1,x})(R + u_x) = 4u_1(u_1 + \beta)(u + \beta_{-1})$$

$$r(u) = u(u + \beta)(u + \beta_{-1}), \quad R^2 = u_x^2 + 4r(u)$$

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] \arrow[dr] & 2 \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr] & 3 \arrow[d] & 4 \arrow[l] \arrow[dl] \\
 & 5 \arrow[r] \arrow[dr] & 6 \arrow[d] & \\
 & & 7 &
\end{tikzcd}$$

$1 \to 2: \quad e^{2\tilde u} = u_x$

$1 \to 5: \quad 2\tilde u = \log(u_1 - \beta u)$

$2 \to 3: \quad \tilde u = u_x$

$2 \to 5: \quad 2\tilde u = u_1 + u$

$\qquad 2u = 2\tilde u - \log(\tilde u_x + \sqrt{\tilde u_x^2 + \beta}$

$2 \to 6: \quad \tilde u = e^{u_1 - u}$

$3 \to 6: \quad \tilde u - \beta/\tilde u = u_1 + u$

$\qquad 2u = \tilde u - (\tilde u_x + \beta)/\tilde u$

$4 \to 3: \quad \tilde u^2 = u_x$

$4 \to 6: \quad \tilde u + \beta/\tilde u = u_1 - u$

$5 \to 6: \quad \tilde u - \beta/\tilde u = 2u_x$

$5 \to 7: \quad \tilde u_1 = e^{2(u_1 - u)}$

$6 \to 7: \quad \tilde u_1 = u_1 u$

$$2u = \frac{R(\tilde u) + \tilde u_x}{\tilde u + \beta_{-1}}$$

Литература

[A] Books

[1] F. Abdullaev. Theory of solitons in inhomogeneous media. Chichester: Wiley, 1994.

[2] F. Abdullaev, S. Darmanyan, P. Khabibullaev. Optical solitons. Berlin: Springer-Verlag, 1993.

[3] M.J. Ablowitz, P.A. Clarkson. Solitons, nonlinear evolution equations and inverse scattering. *LMS Lect. Note Series* ***149***, Cambridge Univ. Press, 1991.

[4] M.J. Ablowitz, A.S. Fokas. Complex variables: introduction and applications. Cambridge Univ. Press, 1997.

[5] M.J. Ablowitz, H. Segur. Solitons and the Inverse Scattering Transform. Philadelphia: SIAM, 1981.

[6] N.I. Akhiezer. Elements of the theory of elliptic functions. Moscow: Nauka, 1970. (in Russian)

[7] N.N. Akhmediev, A. Ankiewicz. Solitons. London: Chapman & Hall, 1997.

[8] R.L. Anderson, N.H. Ibragimov. Lie-Bäcklund transformations in applications. Philadelphia: SIAM, 1979.

[9] V.I. Arnold. Mathematical Methods of Classical Mechanics. Springer: 1978, 1989.

[10] N. Asano, Y. Kato. Algebraic and spectral methods for nonlinear wave equations. Essex: Longman, 1990.

[11] R. Beals, P. Deift, C. Tomei. Direct and inverse scattering on the line. AMS, Providence, 1988.

[12] E.D. Belokolos, A.I. Bobenko, V.Z. Enolski, A.R. Its, V.B. Matveev. Algebro-geometric approach to nonlinear integrable equations. *Springer-Verlag Series in Nonlinear Dynamics*, Berlin: Springer, 1994.

[13] M. Berger. Geometry. Berlin: Springer-Verlag, 1987.

[14] L. Bianchi. Lezioni di geometria differenziale. 3 ed., Pisa: Enrico Spoerri, 1923.

[15] A.I. Bobenko, Yu.B. Suris. Discrete differential geometry: integrable structure, AMS, Providence, 2009.

[16] A.V. Bocharov et al. Symmetries and conservation laws of the equations of mathematical physics. Moscow: Factorial, 1997. (in Russian)

[17] O.I. Bogoyavlensky. Breaking solitons. Nonlinear integrable equations. Moscow: Nauka, 1991.

[18] R.W. Boyd. Nonlinear optics. London: Academic Press, 1992.

[19] V.M. Buchstaber, S.P. Novikov. Solitons, geometry, and topology: on the crossroad. AMS Translations, Providence, RI, 1997.

[20] F. Calogero. Classical many-body problems amenable to exact treatments. *Lecture Notes in Physics Monograph* ***66***, Springer-Verlag, 2001.

[21] F. Calogero, A. Degasperis. Spectral transform and solitons: tools to solve and investigate nonlinear evolution equations, I. Amsterdam: North-Holland, 1982.

[22] R.W. Caroll. Topics in soliton theory. Amsterdam: North-Holland, 1991.

[23] I. Cherednik. Basic methods of soliton theory. Singapore: World Scientific, 1996.

[24] R. Courant. Partial differential equations, 1962.

[25] G. Darboux. Leçons sur les systémes orthogonaux et les coordonneés curvilignes. 2 ed., Paris: Gauthier-Villars, 1910.

[26] G. Darboux. Leçons sur la théorie générale des surfaces et les applications géométriques du calcul infinitésimal. T. I-IV. 3 ed., Paris: Gauthier-Villars, 1914-1927.

[27] A.S. Davydov. Solitons in molecular systems. Dordrecht: Reidel, 1985.

[28] L. Debnath. Nonlinear partial differential equations for scientists and engineers. Boston: Birkhäuser, 1997.

[29] L.A. Dickey. Soliton equations and Hamiltonian systems. Singapore: World Scientific, 1991.

[30] R.K. Dodd, J.C. Eilbeck, J.D. Gibbon, H.C. Morris. Solitons and nonlinear wave equations. London: Academic Press, 1982.

[31] P.G. Drazin, R.S. Johnson. Solitons: an introduction. Cambridge University Press, 1988.

[32] L. Dresner. Similarity solutions of nonlinear partial differential equations. *Res. Notes in Math.* ***88***, Boston: Pitman, 1983.

[33] B.A. Dubrovin. Riemannian surfaces and nonlinear equations. Izhevsk, 2001.

[34] W. Eckhaus, A. van Harten. The inverse scattering transformation and theory of solitons. Amsterdam: North-Holland, 1981.

[35] G. Eilenberger. Solitons. Mathematical method for physicists. Berlin: Springer-Verlag, 1981.

[36] L.P. Eisenhart. A treatise on the differential geometry of curves and surfaces. Boston: Ginn, 1909.

[37] L.P. Eisenhart. Transformations of surfaces. Princeton University Press, 1923.

[38] A.R. Forsyth. Theory of differential equations. New York: Dover Publ., 1959.

[39] W.I. Fushchych, A.G. Nikitin. Symmetry of equations of quantum mechanics. New York: Allerton, 1994.

[40] F. Gesztesy, R. Svirsky. (m)KdV solitons on the background of quasi-periodic finite-gap solutions. AMS, Providence, RI, 1995.

[41] E. Goursat. Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre à deux variables independantes. Paris: Hermann, 1896.

[42] V.I. Gromak, I. Laine, S. Shimomura. Painlevé differential equations in the complex plane. Berlin: Walter de Grugter, 2002.

[43] V.I. Gromak, N.A. Lukashevich. Analytical properties of the Painlevé transcendents. Minsk Univ. Press, 1990. (in Russian)

[44] A. Hasegawa. Optical solitons in fibers. Berlin: Springer-Verlag, 1990.

[45] R. Hermann. The geometry of nonlinear differential equations, Bäcklund transformations, and solitons. Math. Sci. Press, Brookline, 1977.

[46] E. Hille. Ordinary differential equations in the complex domain. New York: Wiley, 1976.

[47] J. Hoppe. Lectures on integrable systems. Berlin: Springer-Verlag, 1992.

[48] N.H. Ibragimov. Transformation groups applied to mathematical physics. Dordrecht: Reidel, 1985.

[49] N.H. Ibragimov, ed. CRC handbook of Lie group to differential equations. V.1. Symmetries, exact solutions and conservation laws. V.2. Applications in engineering and physical sciences. Boca Raton: CRC Press, 1994, 1995.

[50] I.D. Iliev, E.Kh. Khristov, K.P. Kirchev. Spectral methods in soliton equations. Essex: Longman, 1994.

[51] E.L. Ince. Ordinary differential equations. Dover Publ., 1956.

[52] E. Infeld, G. Rowlands. Nonlinear waves, solitons, and chaos, 2nd ed. Cambridge Univ. Press, 1990.

[53] A.R. Its, V.Yu. Novokshenov. The Isomonodromic Deformation Method in the theory of Painlevé equations. *Lect. Notes in Math.* (1986) A. Dodd, Eckmann ed., Springer-Verlag, 1191.

[54] K. Iwasaki, H. Kimura, S. Shimomura, M. Yoshida. From Gauss to Painlevé: a modern theory of special functions. Braunschweig: Vieweg, 1991.

[55] M. Koecher. Jordan algebras and their applications. Minneapolis: Univ. Minnesota, 1962.

[56] B.G. Konopelchenko. Nonlinear integrable equations. *Lecture notes in physics* ***270***, Berlin: Springer-Verlag, 1987.

[57] B.G. Konopelchenko. Solitons in multidimensions. Singapure: World Scientific, 1993.

[58] S.B. Kuksin. Nearly integrable infinite-dimensional Hamiltonian systems. Berlin: Springer-Verlag, 1993.

[59] B.A. Kupershmidt. Discrete Lax equations and differential-difference calculus. Paris: Asterisque, 1985.

[60] B.A. Kupershmidt. Elements of superintegrable systems. Dordrecht: Reidel, 1987.

[61] B.A. Kupershmidt. The variational principles of dynamics. Singapore: World Scientific, 1992.

[62] B.A. Kupershmidt. KP or mKP. Noncommutative mathematics of Lagrangian, Hamiltonian, and integrable systems. *Math. Surveys and Monographs* ***78***, Providence, RI: AMS, 2000.

[63] O. Ladyzhenskaya. Boundary value problems of mathematical physics. Moscow: Nauka, 1973.

[64] G.L. Lamb, jr. Elements of soliton theory. New York: J. Wiley, 1980.

[65] P.S. Laplace. Oeuvres complètes. Paris, 1893.

[66] F. Levi. Geometrische Konfigurationen, Leipzig: 1929.

[67] A.N. Leznov, M.V. Savel'ev. Group methods for integrating of nonlinear dynamical systems. Moscow: Nauka, 1985.

[68] O. Loos. Jordan pairs. *Lecture Notes in Math.* ***480*** (1975).

[69] V.G. Makhankov. Soliton phenomenology. Dordrecht: Kluwer, 1990.

[70] V.A. Marchenko. Sturm-Liouville operators and their applications. Kiev: Naukova dumka, 1977.

[71] V.A. Marchenko. Nonlinear equations and operator algebras. Boston: Reidel, 1988.

[72] Y. Matsuno. Bilinear transformation method. Orlando: Academic Press, 1984.

[73] V. Matveev, M. Salle. Darboux transformations and solitons. Springer-Verlag, 1991.

[74] W. Miller, Jr. Symmetry and separation of variables, Reading: Addison-Wesley, 1977.

[75] T. Miwa, M. Jimbo, E. Date. Solitons: differential equations, symmetries and infinite dimensional algebras. Cambridge Univ. Press, 2000.

[76] J. Moser. Stable and random motions in dynamical systems. Princeton: Univ. Press, 1973.

[77] E. Neher. Jordan triple systems by the grid approach. *Lecture Notes in Math.* ***1280***, 1987.

[78] A.C. Newell. Solitons in mathematics and physics. Philadelphia: SIAM, 1985.

[79] A.C. Newell, J.V. Moloney. Nonlinear optics. Redwood City: Addison-Wesley, 1992.

[80] M.V. Nezlin, E.N. Snezhkin. Rossby vortices, spiral structures, solitons. Berlin: Springer-Verlag, 1993.

[81] S.P. Novikov, S.V. Manakov, L.P. Pitaevskii, V.E. Zakharov. Theory of Solitons. The Inverse Scattering Method, New York: Plenum, 1984.

[82] P.J. Olver. Applications of Lie groups to differential equations, 2nd ed., *Graduate Texts in Math.* ***107***, New York: Springer-Verlag, 1993.

[83] L.V. Ovsyannikov. Group analysis of differential equations, New York: Academic Press, 1982.

[84] A.M. Perelomov. Integrable systems in classical mechanics and Lie algebras. Basel: Birkhäuser-Verlag, 1990.

[85] V.I. Petviashvili, O.A. Pohotelov. Solitary waves in plasma and atmosphere. Moscow: Energoatomizdat, 1989. (in Russian)

[86] J. Pöschel, E. Trubowitz. Inverse spectral theory. New York: Academic Press, 1987.

[87] C. Rogers, W.K. Schief. Bäcklund and Darboux transformations. Geometry and modern applications in soliton theory. Cambridge University Press, Cambridge, 2002.

[88] C. Rogers, W.F. Shadwick. Bäcklund transformations and their applications. New York: Academic Press, 1982.

[89] R. Sauer. Differenzengeometrie. Berlin: Springer-Verlag, 1970.

[90] E.G. Sauter. Nonlinear optics. New York: Wiley, 1996.

[91] R.D. Schafer. An introduction to nonassociative algebras. New York: Dover, 1996.

[92] M.U. Schmidt. Integrable systems and Riemann surfaces of infinite genus. AMS, Providence, RI, 1996.

[93] P.C. Schuur. Asymptotic analysis of soliton problems. Berlin: Springer-Verlag, 1986.

[94] W.H. Steeb, N. Euler. Nonlinear evolution equations and Painlevé test. Singapore: World Scientific, 1988.

[95] C. Sulen, P. Sulen. The NLSE: self-focusing ans wave collapse. New York: Springer, 1999.

[96] Yu.B. Suris. The problem of integrable discretization: Hamiltonian approach. Basel: Birkhäuser, 2003.

[97] L.A. Takhtajan, L.D. Faddeev. Hamiltonian approach in the soliton theory. Moscow: Nauka, 1986.

[98] T. Taniuti, K. Nishihara. Nonlinear waves. London: Pitman, 1983.

[99] M. Toda. Theory of nonlinear latticies. *Solid-State Sci.* ***20***, Springer-Verlag, 1981.

[100] M. Toda. Nonlinear waves and solitons. Tokyo: KTK scientific, 1989.

[101] M.A. Tresse. Determination des invariants ponctuels de l'equation differentielle ordinaire du second ordre $y'' = w(x, y, y')$. Leipzig: Hirzel, 1896.

[102] J.A. Tuszynski, J.M. Dixon, P.A. Clarkson. From Nonlinearity to coherence: universal features of nonlinear behaviour in many-body physics. Oxford University Press, 1997.

[103] P. Vanhaecke. Integrable systems in the realm of algebraic geometry. Berlin: Springer-Verlag, 1996.

[104] V. Volterra. Lecons sur la theorie mathematique de la luttre pour la vie. Paris: Gauthier-Villars, 1931.

[105] G.B. Whitham. Linear and nonlinear waves, N.Y.: Wiley, 1974.

[106] G.M. Zaslavsky, R.Z. Sagdeev. Introduction to nonlinear physics. Moscow, Nauka, 1988.

[B] Proceedings, transactions and topical issues

[107] Algebraic aspects of integrable systems: in memory of Irene Dorfman. (A.S. Fokas, I.M. Gelfand eds). *Progress in Nonlinear Diff. Eq.* ***26***, Boston: Birkhäuser, 1996.

[108] Applications of analytic and geometric methods to nonlinear differential equations. (P.A. Clarkson ed). *NATO Advanced Study Institute Series C: Math. and Phys. Sci.* ***413***, Dordrecht: Kluwer, 1993.

[109] Bäcklund transformations, the Inverse Scattering Method, solitons, and their applications. NSF Research Workshop on Contact Transformations (Nashville, Tennessee 1974, R.M. Miura ed). *Lect. Notes in Math.* ***515***, Springer-Verlag, 1976.

[110] Davydov's soliton revisited. (P.L. Christiansen, A.C. Scott ed). New York: Plenum, 1990.

[111] Differential geometry and its applications. (D. Krupka, A. Svec eds). Boston: Reidel.

[112] Discrete integrable geometry and physics. (A.I. Bobenko, R. Seiler eds). Oxford Univ. Press, 1998.

[113] Discrete integrable systems. (B. Grammaticos, Y. Kosmann-Schwarzbach, T. Tamizhmani eds). *Lect. Notes Phys.* ***644***, Berlin: Springer-Verlag, 2004.

[114] Dynamical problems in soliton systems. (S. Takeno ed). Berlin: Springer-Verlag, 1985.

[115] Dynamical systems, theory and applications. (J. Moser ed). *Lect. Notes in Phys.* ***38***, Heidelberg: Springer, 1975.

[116] Exact treatment of nonlinear lattices waves. (M. Toda ed). *Prog. Theor. Phys.* ***59****, suppl.* (1976).

[117] Geometric aspects of the Einstein equations and integrable systems. (R. Martini ed). *Lecture notes in Physics* ***239***, Berlin: Springer-Verlag, 1985.

[118] The geometric theory of nonlinear waves. (R. Hermann ed). Math. Sci. Press, Brookline, 1977.

[119] Harmonic maps and integrable systems. (A.P. Fordy, J.C. Wood eds). Wiesbaden: Vieweg, 1994.

[120] Important developments in soliton theory. (A.S. Fokas, V.E. Zakharov eds). Berlin: Springer-Verlag, 1993.

[121] Integrable and superintegrable systems. (B.A. Kupershmidt ed). Singapore: World Scientific, 1990.

[122] Inverse methods in action. (P.C. Sabatier ed). Berlin: Springer-Verlag, 1990.

[123] Inverse problems: an interdisciplinary study. (P.C. Sabatier ed). London: Academic Press, 1987.

[124] KdV'95. (M. Hazewinkel, H.W. Capel, E.M. de Jager eds). Dordrecht: Kluwer Academic Press, 1995.

[125] The mathematics of surfaces. (J.A. Gregory ed). Oxford: Clarendon Press, 1986.

[126] New trends in integrability and partial solvability. (A.B. Shabat et al eds). Kluwer Acad. Publ., 2004.

[127] Nonlinear evolution equations solvable by the spectral transform. (F. Calogero ed). London: Pitman, 1978.

[128] Nonlinear evolution equations and dynamical systems (NEEDS'79). (M. Boiti, F. Pempinelli, G. Soliani eds). *Lecture Notes in Physics* ***120***, Berlin: Springer-Verlag, 1980.

[129] NEEDS–VIII (Dubna 1992, V.G. Makhankov, I. Puzynin, O.K. Pashaev eds). Singapore: World Scientific, 1993.

[130] Nonlinear evolution equations: integrability and spectral methods. (A. Degasperis, A.P. Fordy, M. Lakshmanan eds). Manchester Univ. Press, 1989.

[131] Nonlinear integrable systems — classical theory and quantum theory. (M. Jimbo, T. Miwa eds). Singapure: World Scientific, 1983.

[132] Nonlinear phenomena in physics and biology. (R.H. Enns, B.L. Jones, R.M. Miura, S.S. Rangnekar eds). New York: Plenum, 1981.

[133] Nonlinear Physics: Theory and Experiment (Lecce'95). (E. Alfinito, M. Boiti, L. Martina, F. Pempinelli eds). Singapore: World Scientific, 1996.

[134] Nonlinear Physics: Theory and Experiment II. (M.J. Ablowitz, M. Boiti, F. Pempinelli, B. Prinari eds). Singapore: World Scientific, 2003.

[135] Nonlinear problems in theoretical physics. (A.F. Rañada ed). *Lecture Notes in Physics* ***98***, Berlin: Springer-Verlag, 1979.

[136] Nonlinear processes in physics. (A.S. Fokas, D.J. Kaup, A.C. Newell, V.E. Zakharov eds). Berlin: Springer-Verlag, 1993.

[137] Nonlinear wave motion. (A.C. Newell ed). *Lectures in Appl. Math.* ***15***, AMS, Providence, RI, 1974.

[138] Nonlinear waves and weak turbulence. (V.E. Zakharov ed). *Series: Adv. in the Math. Sci.*, AMS, Providence, RI, 1998.

[139] Plasma theory and nonlinear and turbulent processes in physics, vol. 1,2. (V.G. Bar'yakhtar, V.M. Chernousenko, N.S. Erokhin, A.G. Sitenko, V.E. Zakharov eds). Singapore: World Scientific, 1988.

[140] Reductive perturbation method for nonlinear wave propagation. (T. Taniuti ed). *Prog. Theor. Phys.* ***55***, *suppl.* (1974).

[141] Recent developments in soliton theory. (M. Wadati ed). *Prog. Theor. Phys.* ***94***, *suppl.* (1988).

[142] The Riemann problem, complete integrability and arithmetic applications. (D. Chudnovsky, G. Chudnovsky eds). Berlin: Springer-Verlag, 1982.

[143] Soliton theory. (S.V. Manakov, V.E. Zakharov eds). *Physica D* ***3:1,2*** (1981).

[144] Solitons. (R.K. Bullough, P.J. Caudrey eds). *Topics in current physics* ***17***, Springer-Verlag, 1980.

[145] Solitons and applications. (V.G. Makhankov, V.K. Fedyanin, O.K. Pashaev eds). Singapore: World Scientific, 1990.

[146] Solitons and chaos. (I. Antoniou, F.J. Lambert eds). Berlin: Springer-Verlag, 1991.

[147] Solitons and coherent structures. (D.K. Campbell, A.C. Newell, R.J. Schrieffer, H. Segur eds). Amsterdam: North-Holland, 1986.

[148] Solitons and condensed matter physics. (A.R. Bishop, T. Schneider eds). Berlin: Springer-Verlag, 1978.

[149] Solitons and particles. (C. Rebbi, G. Soliani eds). Singapure: World Scientific, 1984.

[150] Solitons and symmetries. (M.J. Ablowitz, P.A. Clarkson eds). *J. of Engineering Math. 36:1,2* special issue (1999).

[151] Solitons in action. (K. Lonngren, A.C. Scott eds). New York: Academic Press, 1978.

[152] Solitons in physics. (H. Wilhelmson ed). *Phys. Scr. Phys. Ser.* ***20*** (1979).

[153] Solitons, introduction and applications. (M. Lakshmanan ed). Berlin: Springer-Verlag, 1988.

[154] Some topics on inverse problems. (P.C. Sabatier ed). Singapure: World Scientific, 1988.

[155] Symmetries and integrability of difference equations. (P.A. Clarkson, F.W. Nijhoff eds). *LMS Lect. Note Series* ***255***, Cambridge University Press, 1999.

[156] Symmetries and Integrability of difference equations: SIDE-IV. (J. Hietarinta, F.W. Nijhoff, J. Satsuma eds). *J. Phys. A* ***34:48*** (2001) 10337–10744.

[157] Symmetries and nonlinear phenomena. (D. Levi, P. Winternitz eds). Singapore: World Scientific, 1988.

[158] Symmetry and perturbation theory. (A. Degasperis, G. Gaeta eds). World Scientific, 1999.

[159] Theory and applications of solitons. (H. Flaschka, D.W. McLaughlin eds). *Rocky Mountain J. Math.* ***8:1,2*** (1978).

[160] Topics in Modern Physics. A tribute to E.U. Condon. (E. Britton, H. Odabasi eds). Boulder: Colorado Univ. Press, 1971.

[161] Topics in soliton theory and exactly solvable nonlinear equations. (M.J. Ablowitz, B. Fuchssteiner, M.D. Kruskal eds). Singapore: World Scientific, 1987.

[162] What is Integrability? (V.E. Zakharov ed). Springer-Verlag, 1991.

[163] Workshop on nonlinearity, integrability and all that: twenty years after NEEDS'79 (Gallipoli 1999). River Edge: World Scientific, 2000.

[C] Journal articles

[164] L. Abellanas, A. Galindo. Conserved densities for nonlinear evolution equations. I. Even order case. *J. Math. Phys.* ***20:6*** (1979) 1239–1243. Erratum: **21** (1980) 1267.

[165] L. Abellanas, A. Galindo. Conserved densities for nonlinear evolution equations. II. Odd order case. *J. Math. Phys.* ***22:3*** (1981) 445.

[166] L. Abellanas, A. Galindo. Evolution equations with high order conservation laws. *J. Math. Phys.* ***24:3*** (1983) 504.

[167] L. Abellanas, A. Galindo. A Harry Dym class of bihamiltonian evolution equations. *Phys. Lett. A* ***107:4*** (1985) 159–160.

[168] M.J. Ablowitz. Nonlinear evolution equations — continuous and discrete. *SIAM Review* ***19:4*** (1977) 663–684.

[169] M.J. Ablowitz, C.D. Ahrens, S. de Lillo. On a "quasi" integrable discrete Eckhaus equation. *J. Nonl. Math. Phys.* ***12:1*** suppl. (2005) 1–12.

[170] M.J. Ablowitz, D.G. Costa, K. Tenenblat. Solutions of multidimensional extensions of the anti-self-dual Yang-Mills equation. *Stud. Appl. Math.* ***77*** (1987) 37–46.

[171] M.J. Ablowitz, A.S. Fokas. On a unified approach to transformations and elementary solutions of Painlevé equations. *J. Math. Phys.* ***23:11*** (1982) 2033–2042.

[172] M.J. Ablowitz, A.S. Fokas, J. Satsuma, H. Segur. On the periodic intermediate long wave equation. *J. Phys. A* ***15:3*** (1982) 781–786.

[173] M.J. Ablowitz, R. Haberman. Nonlinear evolution equations — two and three dimensions. *Phys. Rev. Let.* ***35*** (1975) 1185–1188.

[174] M.J. Ablowitz, R. Haberman. Resonantly coupled nonlinear evolution equations. *J. Math. Phys.* ***16:11*** (1975) 2301–2305.

[175] M.J. Ablowitz, R. Halburd, B.M. Herbst. On the extension of the Painleve property to difference equations. *Nonlinearity* ***13:3*** (2000) 889–905.

[176] M.J. Ablowitz, B.M. Herbst. On homoclinic structure and numerically induced chaos for the nonlinear Schrödinger equation. *SIAM J. on Appl. Math.* ***50:2*** (1990) 339–351.

[177] M.J. Ablowitz, D.J. Kaup, A.C. Newell, H. Segur. Method for solving the sine-Gordon equation. *Phys. Rev. Let.* ***30:25*** (1973) 1262–1264.

[178] M.J. Ablowitz, D.J. Kaup, A.C. Newell, H. Segur. Nonlinear evolution equations of physical significance. *Phys. Rev. Let.* ***31*** (1973) 125–127.

[179] M.J. Ablowitz, J.F. Ladik. Nonlinear differential-difference equations. *J. Math. Phys.* ***16:3*** (1975) 598–603.

[180] M.J. Ablowitz, J.F. Ladik. Nonlinear differential-difference equations and Fourier analysis. *J. Math. Phys.* ***17:6*** (1976) 1011–1018.

[181] M.J. Ablowitz, S. De Lillo. Parametric forcing, bound states and solutions of a nonlinear Schrödinger type equation. *Nonlinearity* ***7:4*** (1994) 1143–1153.

[182] M.J. Ablowitz, S. De Lillo. On a Burgers-Stefan problem, *Nonlinearity* ***13:2*** (2000) 471–478.

[183] M.J. Ablowitz, M.D. Kruskal, J.F. Ladik. Solitary wave collisions. *SIAM J. on Appl. Math.* ***36:3*** (1979) 428–437.

[184] M.J. Ablowitz, Y.-C. Ma. The periodic cubic Schrödinger equation. *Stud. Appl. Math.* ***65*** (1981) 113–158.

[185] M.J. Ablowitz, Y. Ohta, A.D. Trubatch. On discretizations of the vector Nonlinear Schrödinger Equation, *Phys. Lett. A* ***253*** (1999) 287–304.

[186] M.J. Ablowitz, Y. Ohta, A.D. Trubatch. On integrability and chaos in discrete systems. *Chaos, Solitons & Fractals 11:1–3* (2000) 159–169.

[187] M.J. Ablowitz, B. Prinari, A.D. Trubatch. Discrete vector solitons: composite solitons, Yang-Baxter maps and computation. *Stud. Appl. Math.* ***116:1*** (2005) 97–133.

[188] M.J. Ablowitz, A. Ramani, H. Segur. A connection between nonlinear evolution equations and ordinary differential equations of P-type. I,II. *J. Math. Phys.* ***21:4*** (1980) 715–721, 722–1006.

[189] M.J. Ablowitz, J. Satsuma. Solitons and rational solutions of nonlinear evolution equations. *J. Math. Phys.* ***19:10*** (1978) 2180–2186.

[190] M.J. Ablowitz, H. Segur. The inverse scattering transform: semi-infinite interval. *J. Math. Phys.* ***16:5*** (1975) 1054–1056.

[191] M.J. Ablowitz, H. Segur. Exact linearization of a Painlevé transcendent. *Phys. Rev. Let.* ***38:20*** (1977) 1103–1106.

[192] M.J. Ablowitz, A. Zeppetella. Explicit solutions of Fischer's equation for a special wave speed. *Bull. Math. Biol.* ***41:6*** (1979) 835–840.

[193] M. Adler. Some finite-dimensional integrable systems and their scattering behaviour. *Commun. Math. Phys.* ***55*** (1977) 195–230.

[194] M. Adler. On a trace functional for formal pseudo-differential operators and the symplectic structure of the Korteweg-de Vries type equations. *Invent. math.* ***50*** (1979) 219–248.

[195] M. Adler, P. van Moerbeke. The Kowalevski and Hénon-Heiles motions as Manakov geodesic flows on $SO(4)$ — a two-dimensional family of Lax pairs. *Commun. Math. Phys.* ***113:4*** (1988) 659–700.

[196] M. Adler, P. van Moerbeke. Toda versus Pfaff lattice and related polynomials. *Duke Math. J.* ***112:1*** (2002) 1–58.

[197] M. Adler, J. Moser. On a class of polynomials connected with the Korteweg-de Vries equation. *Commun. Math. Phys.* ***61:1*** (1978) 1–30.

[198] V.E. Adler. Nonlinear superposition formula for Jordan NLS equations. *Phys. Lett. A* ***190*** (1994) 53–58.

[199] V.E. Adler. Nonlinear chains and Painlevé equations. *Physica D* ***73:4*** (1994) 335–351.

[200] V.E. Adler. Integrable deformations of a polygon. *Physica D* ***87:1–4*** (1995) 52–57.

[201] V.E. Adler. On the rational solutions of the Shabat equation. Proc. of Int. Workshop 'Nonlinear Physics', pp. 53–61, World Scientific, 1996.

[202] V.E. Adler. Bäcklund transformation for the Krichever-Novikov equation. *Int. Math. Res. Notices* (1998) 1–4.

[203] V.E. Adler. Legendre transformations on the triangular lattice, *Funct. Anal. Appl.* ***34:1*** (2000) 1–9.

[204] V.E. Adler. Discretizations of the Landau-Lifshitz equation. *Theor. Math. Phys.* ***124:1*** (2000) 897–908.

[205] V.E. Adler. On the structure of the Bäcklund transformations for the relativistic lattices. *J. Nonl. Math. Phys.* ***7:1*** (2000) 34–56.

[206] V.E. Adler. Some incidence theorems and integrable discrete equations. *Discrete Comput. Geom.* ***36*** (2006) 489–498.

[207] V.E. Adler, A.I. Bobenko, Yu.B. Suris. Classification of integrable equations on quad-graphs. The consistency approach. *Commun. Math. Phys.* ***233*** (2003) 513–543.

[208] V.E. Adler, A.I. Bobenko, Yu.B. Suris. Geometry of Yang-Baxter maps: pencils of conics and quadrirational mappings. *Comm. Anal. and Geom.* ***12:5*** (2004) 967–1007.

[209] V.E. Adler, I.T. Habibullin, A.B. Shabat. The boundary value problem on half-axis for KDV equation. *Theor. Math. Phys.* ***110:1*** (1997) 78–90.

[210] V.E. Adler, V.G. Marikhin, A.B. Shabat. Canonical Bäcklund transformations and Lagrangian chains. *Theor. Math. Phys.* ***129:2*** (2001) 1448–1465.

[211] V.E. Adler, A.B. Shabat. On a class of Toda chains. *Theor. Math. Phys.* ***111:3*** (1997) 647–657.

[212] V.E. Adler, A.B. Shabat. Generalized Legendre transformations. *Theor. Math. Phys.* ***112:2*** (1997) 935–948.

[213] V.E. Adler, A.B. Shabat. First integrals for the generalized Toda lattices. *Theor. Math. Phys.* ***115:3*** (1998) 639–647

[214] V.E. Adler, A.B. Shabat. Dressing chain for the acoustic spectral problem. *Theor. Math. Phys.* ***149:1*** (2006) 1324–1337.

[215] V.E. Adler, A.B. Shabat. On the one class of hyperbolic systems. *SIGMA* ***2*** (2006) 093.

[216] V.E. Adler, A.B. Shabat, R.I. Yamilov. Symmetry approach to the integrability problem. *Theor. Math. Phys.* ***125:3*** (2000) 1603–1661.

[217] V.E. Adler, Yu.B. Suris. Q4: Integrable master equation related to an elliptic curve. *Int. Math. Res. Notices* (2004) 2523–2553.

[218] V.E. Adler, S.I. Svinolupov, R.I. Yamilov. Multi-component Volterra and Toda type integrable equations. *Phys. Lett. A* ***254*** (1999) 24–36.

[219] S.I. Agafonov, E.V. Ferapontov. Systems of conservation laws in the setting of the projective theory of congruences: reducible and linearly degenerate systems. *Diff. Geom. and Appl.* ***17:2,3*** (2002) 153–173.

[220] S. Ahmed, M. Bruschi, F. Calogero, M.A. Olshanetsky, A.M. Perelomov. Properties of the zeroes of the classical polynomials and of the Bessel functions. *Nouvo Cimento* ***B 49:2*** (1979) 173–199.

[221] H. Airault. Rational solutions of Painlevé equations. *Stud. Appl. Math.* ***61:1*** (1979) 33–54.

[222] H. Airault, H.P. McKean, J. Moser. Rational and elliptic solutions of the KdV equation and a related many-body problem. *Comm. Pure Appl. Math.* ***30:1*** (1977) 94–148.

[223] A.A. Akhmetshin, I.M. Krichever, Y.S. Volvovski. Discrete analogues of the Darboux-Egoroff metrics. *Proc. Steklov Inst. Math.* ***2 (225)*** (1999) 16–39.

[224] S.J. Alber. Investigation of equations of Korteweg-de Vries type by the method of recurrence relations. *J. Lond. Math. Soc.* ***19*** (1979) 467–480.

[225] S.J. Alber. On finite-zone solutions of relativistic Toda lattice. *Lett. Math. Phys.* ***17:2*** (1989) 149–155.

[226] M.S. Alber, S.J. Alber. Hamiltonian formalism for finite-zone solutions of integrable equations. *C. R. Acad. Sci. Paris* ***301*** (1985) 777–781.

[227] M.S. Alber, R. Camassa, M. Gekhtman. On billiard weak solutions of nonlinear PDE's and Toda flows. *CRM Proc. and Lecture Notes* ***25*** (2000) 1–11.

[228] M.S. Alber, R. Camassa, D.D. Holm, J.E. Marsden. The geometry of peaked solitons and billiard solutions of a class of integrable PDE's. *Lett. Math. Phys.* ***32*** (1994) 137–151.

[229] M.S. Alber, R. Camassa, D.D. Holm, J.E. Marsden. On the link between umbilic geodesics and soliton solutions of nonlinear PDE's. *Proc. R. Soc.* ***450*** 677–692.

[230] M.S. Alber, R. Camassa, Yu.N. Fedorov, D.D. Holm, J.E. Marsden. On billiard solutions of nonlinear PDE's. *Phys. Lett. A* ***264:2–3*** (1999) 171–178.

[231] M.S. Alber, R. Camassa, Yu.N. Fedorov, D.D. Holm, J.E. Marsden. The complex geometry of weak piecewise smooth solutions of integrable nonlinear PDE's of shallow water and Dym type. *Commun. Math. Phys.* ***221*** (2001) 197–227.

[232] M.S. Alber, Yu.N. Fedorov. Wave solutions of evolution equations and Hamiltonian flows on nonlinear subvarieties of generalized Jacobians. *J. Phys. A* ***33*** (2000) 8409–8425.

[233] M.S. Alber, Yu.N. Fedorov. Algebraic geometrical solutions for certain evolution equations and Hamiltonian flows on nonlinear subvarieties of generalized Jacobians. *Inverse Problems* ***17*** (2001) 1017–1042.

[234] M.S. Alber, G.G. Luther, J.E. Marsden Energy dependent Schrödinger operators and complex Hamiltonian systems on Riemann surfaces. *Nonlinearity* ***10*** (1997) 223–241.

[235] M.S. Alber, C. Miller. On peakon solutions of the shallow water equation. *Appl. Math. Lett.* ***14*** (2001) 93–98.

[236] L.M. Alonso On the asymptotic properties of solutions of the Korteweg-de Vries equation. *J. Phys. A* ***17:13*** (1984) 2729–2731.

[237] L. Martínez Alonso, M. Manas. Additional symmetries and solutions of the dispersionless KP hierarchy. *J. Math. Phys.* ***44:8*** (2003) 3294.

[238] L. Martínez Alonso, A.B. Shabat. Energy dependent potentials revisited. A universal hierarchy of hydrodynamic type. *Phys. Lett. A* ***300:1*** (2002) 58–64.

[239] L. Martínez Alonso, A.B. Shabat. Towards a theory of differential constraints of a hydrodynamic hierarchy. *J. Nonl. Math. Phys.* ***10:2*** (2003) 229–242.

[240] L. Martínez Alonso, A.B. Shabat. Hydrodynamic reductions and solutions of the universal hierarchy. *Theor. Math. Phys.* ***140:2*** (2004) 1073–1085.

[241] S.C. Anco, T. Wolf. Some symmetry classifications of hyperbolic vector evolution equations. *J. Nonl. Math. Phys.* ***12:1*** (2005) 1–19.

[242] I.M. Anderson, M. Juras. Generalized Laplace invariants and the method of Darboux. *Duke Math. J.* ***89:2*** (1997) 351–375.

[243] I.M. Anderson, N. Kamran. The variational bicomplex for second order scalar partial differential equations in the plane. *Duke Math. J.* ***87:2*** (1997) 265–319.

[244] F.V. Andreev, A.V. Kitaev. Connection formulae for asymptotics of the fifth Painlevé transcendent on the real axis. *Nonlinearity* ***13*** (2000) 1801–1840.

[245] M. Antonowicz, A.P. Fordy. Coupled KdV equations with multi-Hamiltonian structures. *Physica D* ***28:3*** (1987) 345–357.

[246] M. Antonowicz, A.P. Fordy. Coupled Harry Dym equations with multi-Hamiltonian structures. *J. Phys. A* ***21:5*** (1988) L269–L275.

[247] M. Antonowicz, A.P. Fordy. Factorisation of energy dependent Schrödinger operators: Miura maps and modified systems. *Commun. Math. Phys.* ***124:3*** (1989) 465–486.

[248] M. Antonowicz, A.P. Fordy. Multi-component Schwarzian KdV hierarchies. *Rep. Math. Phys.* ***32*** (1993) 223–233.

[249] M. Antonowicz, A.P. Fordy, Q.P. Liu. Energy-dependent third-order Lax operators. *Nonlinearity* ***4:3*** (1991) 669–684.

[250] H. Aratyn, L.A. Ferreira, J.F. Gomes, A.H. Zimerman. The complex sine-Gordon equation as a symmetry flow of the AKNS hierarchy. *J. Phys. A* ***33:35*** (2000) L331–L337.

[251] H. Aratyn, J.F. Gomes, A.H. Zimerman. On negative flows of the AKNS hierarchy and a class of deformations of a bihamiltonian structure of hydrodynamic type. *J. Phys. A* ***39:5*** (2006) 1099–1114.

[252] V.I. Arnold. Proof of a theorem of A.N. Kolmogorov of the invariance of periodic motions under small perturbations of the Hamiltonian. *Russ. Math. Surveys* ***18:5*** (1963) 9–36.

[253] D.J. Arrigo, J.M. Hill. On a class of linearizable Monge-Ampére equations. *J. Nonl. Math. Phys.* ***5:2*** (1998) 115–119.

[254] C. Athorne. Local Hamiltonian structures of multicomponent KdV equations. *J. Phys. A* ***21:24*** (1988) 4549–4556.

[255] C. Athorne. On a subclass of Ince equations. *J. Phys. A* ***23:4*** (1990) L137–L139.

[256] C. Athorne. Rational Ermakov systems of Fuchsian type. *J. Phys. A* ***24:5*** (1991) 945–961.

[257] C. Athorne. Kepler-Ermakov problems. *J. Phys. A* ***24:24*** (1991) L1385–1389.

[258] C. Athorne. On the characterization of Moutard transformations. *Inverse Problems* ***9:2*** (1993) 217–232.

[259] C. Athorne. A $\mathbb{Z}^2 \times \mathbb{R}^3$ Toda system. *Phys. Lett. A* ***206*** (1995) 162–166.

[260] C. Athorne. Symmetries of linear ordinary differential equations. *J. Phys. A* ***30:13*** (1997) 4639–4649.

[261] C. Athorne. On the Lie symmetry algebra of a general ordinary differential equation. *J. Phys. A* ***31:31*** (1998) 6605–6614.

[262] C. Athorne, A.P. Fordy. Generalized KdV and MKdV equations associated with symmetric spaces. *J. Phys. A* ***20:6*** (1987) 1377–1386.

[263] C. Athorne, A.P. Fordy. Integrable equations in (2+1) dimensions associated with symmetric and homogeneous spaces. *J. Math. Phys.* ***28:9*** (1987) 2018–2024.

[264] C. Athorne, J.J.C. Nimmo. Darboux theorems and factorization of second- and third-order ordinary differential operators. *Inverse Problems* ***7:5*** (1991) 645–654.

[265] C. Athorne, J.J.C. Nimmo. On the Moutard transformation for integrable partial differential equations. *Inverse Problems* ***7:6*** (1991) 809–826.

[266] M.F. Atiyah, N.J. Hitchin, V.G. Drinfeld, Yu.I. Manin. Construction of instantons. *Phys. Lett. A* ***65*** (1978) 285.

[267] S. Aubry. A unified approach to the interpretation of displasive and order-disorder systems. II. *J. Chem. Phys.* ***64*** (1976) 3392–3402.

[268] A.V. Bäcklund. Einigies über Curven- und Flächentransformationen. *Lunds Universitëts Års-skrift* ***10*** (1873) 1–12.

[269] A.V. Bäcklund. Über Flächentrasformationen. *Math. Ann.* ***9:3*** (1875) 297–320.

[270] A.V. Bäcklund. Zur Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung. *Math. Ann.* ***17:3*** (1880) 285–328.

[271] A.V. Bäcklund. Zur Theorie der Flächentransformationen. *Math. Ann.* ***19:3*** (1881) 387–422.

[272] A.V. Bäcklund. Om ytor med konstant negativ krökning. *Lunds Universitëts Års-skrift* ***19*** (1883).

[273] I.M. Bakirov. On the symmetries of some system of evolution equations. *Preprint Inst. of Math.*, Ufa, 1991. (in Russian)

[274] M. Yu. Balakhnev. On a class of integrable evolutionary vector equations. *Theor. Math. Phys.* ***142:1*** (2005) 13–20.

[275] M. Yu. Balakhnev, A.G. Meshkov. Integrable anisotropic evolution equations on a sphere. *SIGMA* ***1*** (2005) 027.

[276] M. Yu. Balakhnev, A.G. Meshkov. On a classification of integrable vectorial evolutionary equations. *J. Nonl. Math. Phys.* ***15:2*** (2008) 212–226.

[277] S.P. Balandin, V.V. Sokolov. On the Painlevé test for non-Abelian equations. *Phys. Lett. A* ***246:3–4*** (1998) 267–272.

[278] A. Balk, E.V. Ferapontov. Invariants of 4-wave interactions. *Physica D* ***65:3*** (1993) 274–288.

[279] A. Balk, E.V. Ferapontov. Wave systems with an infinite number of invariants. *Physica D* ***70:1–2*** (1994) 100–114.

[280] V. Bargmann. On the connection between phase shifts and scattering potential. *Rev. Mod. Phys.* ***21*** (1949) 488–493.

[281] A.P. Bassom, P.A. Clarkson, A.C. Hicks. Bäcklund transformations and soliton hierarchies for the fourth Painlevé equation. *Stud. Appl. Math.* ***95*** (1995) 1–71.

[282] A.P. Bassom, P.A. Clarkson, A.C. Hicks, J.B. McLeod. Integral equations and exact solutions for the fourth Painlevé equation. *Proc. Math. and Phys. Sci. ser. A* ***437(1899)*** (1992) 1–24.

[283] V. Bazhanov, S. Sergeev. Zamolodchikov's tetrahedron equation and hidden structure of quantum groups. *J. Phys. A* ***39:13*** (2006) 3295–3310.

[284] R. Beals, M. Rabelo, K. Tenenblat. Bäcklund transformations and inverse scattering solutions for some pseudospherical surface equations. *Stud. Appl. Math.* ***81*** (1989) 125–151.

[285] R. Beals, D. Sattinger, J. Szmigielski. Acoustic scattering and the extended Korteweg-de Vries hierarchy. *Adv. Math.* ***140*** (1998) 190–206.

[286] R. Beals, D. Sattinger, J. Szmigielski. Multi-peakons and a theorem of Stieltjes. *Inverse Problems* ***15:1*** (1999) L1–L4.

[287] R. Beals, D. Sattinger, J. Szmigielski. Multipeakons and the classical moment problem. *Adv. Math.* ***154*** (2000) 229–257.

[288] R. Beals, D. Sattinger, J. Szmigielski. Peakon-antipeakon interaction. *J. Nonl. Math. Phys.* ***8*** (2001) 23–27.

[289] A.A. Belov, K.D. Chaltikian. Lattice analogues of W-algebras and classical integrable equations. *Phys. Lett. B* ***309*** (1993) 268–274.

[290] A.A. Belov, K.D. Chaltikian. Lattice analogue of the W_∞ algebra and discrete KP hierarchy. *Phys. Lett. B* ***317*** (1993) 64–72.

[291] M.P. Bellon, J.-M. Maillard, C.-M. Viallet. Rational mappings, arborescent iterations, and the symmetries of integrability. *Phys. Rev. Let.* ***67:11*** (1991) 1373–1376.

[292] T.B. Benjamin, J.L. Bona, J. Mahoney. *Phil. Trans. R. Soc. Lond. Ser. A* ***272*** (1972) 47–78.

[293] D.J. Benney. Some properties of long nonlinear waves. *Stud. Appl. Math.* ***52*** (1973) 45–50.

[294] F. Beukers, J.A. Sanders, J.P. Wang. One symmetry does not imply integrability. *J. Diff. Eq.* ***146:1*** (1998) 251–260.

[295] F. Beukers, J.A. Sanders, J.P. Wang. On integrability of systems of evolution equations. *J. Diff. Eq.* ***172:2*** (2001) 396–408.

[296] L. Bianchi. Ricerche sulle superficie a curvatura costante e sulle elicoidi. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa* ***2*** (1879) 285.

[297] R.F. Bikbaev, V.O. Tarasov. Initial-boundary value problem for the nonlinear Schrödinger equation. *J. Phys. A* ***24:11*** (1991) 2507–2516.

[298] A.H. Bilge. On the equivalence of linearization and formal symmetries as integrability tests for evolution equations. *J. Phys. A* ***26:24*** (1993) 7511–7519.

[299] P. Bizon, Yu.N. Ovchinnikov, I.M. Sigal. Collapse of instanton. *Nonlinearity* ***17:4*** (2004) 1179–1191.

[300] A.I. Bobenko. Discrete conformal maps and surfaces. *In: SIDE III — Symmetries and integrability of difference equations (Sabaudia, 1998), CRM Proc. Lecture Notes* ***225*** (2000) 97–108.

[301] A.I. Bobenko. Discrete integrable systems and geometry. *In: XIIth Int. Congress of Math. Phys. (ICMP'97, Brisbane), 219–226*, Cambridge: Internat. Press, 1999.

[302] A.I. Bobenko. Discrete Differential Geometry. Integrability as consistency. [113, 85–110].

[303] A.I. Bobenko, M. Bordemann, C. Gunn, U. Pinkall. On two integrable cellular automata. *Commun. Math. Phys.* ***158:1*** (1993) 127–134.

[304] A.I. Bobenko, U. Hertrich-Jeromin. Orthogonal nets and Clifford algebras. *Tôhoku Math. Publ.* ***20*** (2001) 7–22.

[305] A.I. Bobenko, T. Hoffmann, Yu.B. Suris. Hexagonal circle patterns and integrable systems: patterns with the multi-ratio property and Lax equations on the regular triangular lattice. *Int. Math. Res. Notices* (2002) 111–164.

[306] A.I. Bobenko, B. Lorbeer, Yu.B. Suris. Integrable discretizations of the Euler top. *J. Math. Phys.* ***39:12*** (1998) 6668–6683.

[307] A.I. Bobenko, Ch. Mercat, Yu.B. Suris. Linear and nonlinear theories of discrete analytic functions. Integrable structure and isomonodromic Green's function. *J. Reine Angew. Math.* ***583*** (2005) 117–161.

[308] A.I. Bobenko, U. Pinkall. Discrete surfaces with constant negative Gaussian curvature and the Hirota equation. *J. Differential Geom.* ***43:3*** (1996) 527–611.

[309] A.I. Bobenko, U. Pinkall. Discrete isothermic surfaces. *J. Reine Angew. Math.* ***475*** (1996) 187–208.

[310] A.I. Bobenko, U. Pinkall. Discretization of surfaces and integrable systems. *In: Discrete integrable geometry and physics (Vienna, 1996), 3–58, Oxford Lecture Ser. Math. Appl.* ***16***, Oxford UP, New York, 1999.

[311] A.I. Bobenko, W.K. Schief. Affine spheres: discretization via duality relations. *CRM Proc. and Lecture Notes* ***9*** (1996) 253–264.

[312] A.I. Bobenko, Yu.B. Suris. Discrete Lagrangian reduction, discrete Euler-Poincaré equations, and semidirect products. *Lett. Math. Phys.* ***49:1*** (1999) 79–93.

[313] A.I. Bobenko, Yu.B. Suris. Discrete time Lagrangian mechanics on Lie groups, with an application to the Lagrange top. *Commun. Math. Phys.* ***204:1*** (1999) 147–188.

[314] A.I. Bobenko, Yu.B. Suris. A discrete time Lagrange top and discrete elastic curves. pp. 39–62 in: L.D. Faddeev's Seminar on Math. Phys., *AMS Transl. Ser. 2* ***201***, Providence, 2000.

[315] A.I. Bobenko, Yu.B. Suris. Integrable systems on quad-graphs. *Int. Math. Res. Notices* (2002) 573–611.

[316] A.I. Bobenko, Yu.B. Suris. Integrable non-commutative equations on quad-graphs. The consistency approach. *Lett. Math. Phys.* ***61*** (2002) 241–254.

[317] A.I. Bobenko, Yu.B. Suris. Discrete differential geometry. Consistency as integrability. math.DG/0504358v1

[318] A.I. Bobenko, Yu.B. Suris. On organizing principles of discrete differential geometry. Geometry of spheres. math.DG/0608291v2

[319] L.V. Bogdanov. Veselov-Novikov equation as a natural two-dimensional generalization of the Korteweg-de Vries equation. *Theor. Math. Phys.* ***70:2*** (1987) 219–223.

[320] L.V. Bogdanov. On the two-dimensional Zakharov-Shabat problem. *Theor. Math. Phys.* ***72:1*** (1987) 790–793.

[321] L.V. Bogdanov, V.S. Dryuma, S.V. Manakov. Dunajski generalization of the second heavenly equation: dressing method and the hierarchy. *J. Phys. A* ***40*** (2007) 14383–14393.

[322] L.V. Bogdanov, B.G. Konopelchenko. Lattice and q-difference Darboux-Zakharov-Manakov systems via $\bar{\partial}$-dressing method. *J. Phys. A* ***28:5*** (1995) L173–178.

[323] L.V. Bogdanov, B.G. Konopelchenko. Generalized integrable hierarchies and Combescure symmetry transformations. *J. Phys. A* ***30:5*** (1997) 1591–1603.

[324] L.V. Bogdanov, B.G. Konopelchenko. Analytic-bilinear approach to integrable hierarchies. I. Generalized KP hierarchy; II. Multicomponent KP and 2D Toda lattice equations. *J. Math. Phys.* ***39:9*** (1998) 4683–4700; 4701–4728.

[325] L.V. Bogdanov, B.G. Konopelchenko. Möbius invariant integrable lattice equations associated with KP and 2DTL hierarchies. *Phys. Lett. A* ***256*** (1999) 39–46.

[326] L.V. Bogdanov, B.G. Konopelchenko. Generalized KP hierarchy: Möbius symmetry, symmetry constraints and Calogero-Moser system. *Physica D* ***152–153*** (2001) 85–96.

[327] L.V. Bogdanov, B.G. Konopelchenko. On the heavenly equation hierarchy and its reductions. *J. Phys. A* ***39*** (2006) 11793–11802.

[328] L.V. Bogdanov, S.V. Manakov. The non-local $\bar{\partial}$-problem and (2+1)-dimensional soliton equations. *J. Phys. A* ***21:10*** (1988) L537–544.

[329] L.V. Bogdanov, V.E. Zakharov. Integrable (1+1)-dimensional systems and the Riemann problem with a shift. *Inverse Problems* ***10:4*** (1994) 817.

[330] O.I. Bogoyavlensky. Geometrical methods of the qualitative theory of dynamical systems in problems of theoretical physics. *Math. Phys. Rev.* ***2*** (1981) 117.

[331] O.I. Bogoyavlensky. Algebraic constructions of integrable dynamical systems — extensions of the Volterra system. *Russ. Math. Surveys* ***46:3*** (1991) 1–64.

[332] O.I. Bogoyavlensky. Euler equations on finite-dimensional Lie coalgebras, arising in problems of mathematical physics. *Russ. Math. Surveys* ***47*** (1992) 117–189.

[333] M. Boiti, B.G. Konopelchenko, F. Pempinelli. Bäcklund transformations via gauge transformations in 2+1 dimensions. *Inverse Problems* ***1*** (1985) 33–56.

[334] M. Boiti, J.J.-P. Leon, M. Manna, F. Pempinelli. On the spectral transform of a Korteweg-de Vries equation in two spatial dimensions. *Inverse Problems* ***2*** (1986) 271–279.

[335] M. Boiti, J.J.-P. Leon, M. Manna, F. Pempinelli. Scattering of localized solitons in the plane. *Phys. Lett. A* ***132:8–9*** (1988) 432–439.

[336] M. Boiti, J.J.-P. Leon, F. Pempinelli. Integrable two-dimensional generalisation of the sine- and sinh-Gordon equations. *Inverse Problems* ***3:1*** (1987) 37–49.

[337] M. Boiti, J.J.-P. Leon, F. Pempinelli. Spectral transform for a two spatial dimension extension of the dispersive long wave equation. *Inverse Problems* ***3:3*** (1987) 371–387.

[338] M. Boiti, J.J.-P. Leon, F. Pempinelli. Bifurcations of solitons in multidimensions. *Inverse Problems* ***6:5*** (1990) 715–723.

[339] M. Boiti, J.J.-P. Leon, F. Pempinelli. Waves in the Davey-Stewartson equation. *Inverse Problems* ***7:2*** (1991) 175–185.

[340] M. Boiti, F. Pempinelli. Similarity solutions of the Korteweg-de Vries equation. *Il Nuovo Cim.* ***51B*** (1979) 70–78.

[341] M. Boiti, F. Pempinelli. Similarity solutions and Bäcklund transformations of the Boussinesq equation. *Il Nuovo Cim.* ***56B*** (1980) 148–156.

[342] M. Boiti, F. Pempinelli. Some integrable finite-dimensional systems and their continuous counterparts. *Inverse Problems* ***13:4*** (1997) 919–937.

[343] M. Boiti, F. Pempinelli, V.G. Marikhin, A.B. Shabat. Similarity solutions of NLS-type dynamical systems. *Sov. Phys. JETP* ***90:3*** (2000) 553–561.

[344] M. Boiti, F. Pempinelli, A.K. Pogrebkov. Solutions of the KPI equation with smooth initial data. *Inverse Problems* ***10:3*** (1994) 505–519.

[345] M. Boiti, F. Pempinelli, A.K. Pogrebkov. Solving the Kadomtsev-Petviashvili equation with initial data not vanishing at large distances. *Inverse Problems* ***13:3*** (1997) L7-L10.

[346] M. Boiti, F. Pempinelli, A.K. Pogrebkov, M.C. Polivanov. New features of Bäcklund and Darboux transformations in 2+1 dimensions. *Inverse Problems* ***7:1*** (1991) 43–56.

[347] M. Boiti, F. Pempinelli, A.K. Pogrebkov, M.C. Polivanov. Resolvent approach for the nonstationary Schrodinger equation. *Inverse Problems* ***8:3*** (1992) 331–364.

[348] M. Boiti, F. Pempinelli, P.C. Sabatier. First and second order nonlinear evolution equations from an inverse spectral problem. *Inverse Problems* ***9:1*** (1993) 1–37.

[349] L.A. Bordag, A.B.Yanovski. Polynomial Lax pairs for the chiral $O(3)$-field equations and the Landau-Lifshitz equation. *J. Phys. A* ***28:14*** (1995) 4007–4013.

[350] A.B. Borisov. Vortices in the sine-Gordon system and solution of the boundary value problem by the inverse scattering problem. *Phys. Lett. A* ***143:1–2*** (1990) 52–56.

[351] A.B. Borisov, M.P. Pavlov, S.A. Zykov. Proliferation scheme for Kaup-Boussinesq system. *Physica D* ***152–153*** (2001) 104–109.

[352] M. Born, L. Infeld. Foundations of a new field theory. *Proc. Roy. Soc. A* ***144*** (1934) 425–451.

[353] J. de Boussinesq. Theorie de l'intumescence liquid appelée onde solitaire ou de translation, se propagente dans un canal rectangulaire. *Comptes Rendus Acad. Sci. Paris* ***72*** (1871) 755–759.

[354] J. de Boussinesq. Theorie des ondes et de remous qui se propagent. *J. Math. Pures et Appl., Ser. 2,* ***17*** (1872) 55–108.

[355] C.P. Boyer, J.D. Finley. Killing vectors in self-dual Euclidean Einstein spaces. *J. Math. Phys.* ***23*** (1982) 1126–1130.

[356] O.M. Braun, Yu.S. Kivshar. Nonlinear dynamics of the Frenkel-Kontorova model. *Phys. Reports* ***306*** (1998) 1–108.

[357] E. Brezin, V. Kazakov. *Phys. Lett. B* ***236*** (1990) 144.

[358] L.J.F. Broer. *Appl. Sci. Res.* ***31*** (1975) 377.

[359] D.S. Broomhead, R. Indik, A.C. Newell, D.A. Rand. Local adaptive Galerkin bases for large-dimensional dynamical systems. *Nonlinearity* ***4:2*** (1991) 159–197.

[360] J.C. Brunelli. The bi-Hamiltonian structure of the short pulse equation. *Phys. Lett. A* ***353:6*** (2006) 475–478.

[361] J.C. Brunelli. The short pulse hierarchy. *J. Math. Phys.* ***46*** (2005) 123507.

[362] M. Bruschi. Zeros of arbitrary polynomials as eigenvalues of simple matrices. *Inverse Problems* ***3:3*** (1987) L41–43.

[363] M. Bruschi. Determinantal solution of the logistic map. *J. Phys. A* ***31:7*** (1998) L153–155.

[364] M. Bruschi, F. Calogero. The Lax representation for an integrable class of relativistic dynamical systems. *Commun. Math. Phys.* ***109:3*** (1987) 481–492.

[365] M. Bruschi, D. Levi, O. Ragnisco. Discrete version of the modified Korteweg-de Vries equation with x-dependent coefficients. *Nuovo Cim. A* ***48*** (1978) 213–226.

[366] M. Bruschi, D. Levi, O. Ragnisco. Toda lattice and generalised Wronskian technique. *J. Phys. A* ***13:7*** (1980) 2531–2533.

[367] M. Bruschi, O. Ragnisco. Nonlinear differential-difference equations, associated Bäcklund transformations and Lax technique. *J. Phys. A* ***14:5*** (1981) 1075–1081.

[368] M. Bruschi, O. Ragnisco. On new solvable many-body dynamical systems with velocity-dependent forces. *Inverse Problems* ***4:3*** (1988) L15–20.

[369] M. Bruschi, O. Ragnisco. Recursion operator and Bäcklund transformation for the Ruijsenaars-Toda lattices. *Phys. Lett. A* ***129:1,2*** (1988) 21–25.

[370] M. Bruschi, O. Ragnisco. Lax representation and complete integrability for the periodic relativistic Toda lattice. *Phys. Lett. A* ***134:6*** (1989) 365–370.

[371] O. Ragnisco, M. Bruschi. The periodic relativistic Toda lattice: direct and inverse problems. *Inverse Problems* ***5:3*** (1989) 389–405.

[372] M. Bruschi, O. Ragnisco. On a new integrable Hamiltonian system with nearest-neighbour interaction. *Inverse Problems* ***5:6*** (1989) 983–998.

[373] M. Bruschi, O. Ragnisco, P.M. Santini, T.G. Zhang. Integrable symplectic maps. *Physica D* ***49:3*** (1991) 273–294.

[374] M. Bruschi, P.M. Santini. Cellular automata in 1+1, 2+1 and 3+1 dimensions, constants of motion and coherent structures. *Physica D* ***70:1–2*** (1994) 185–209.

[375] M. Bruschi, P.M. Santini, O. Ragnisco. Integrable cellular automata. *Phys. Lett. A* ***169:3*** (1992) 151–160.

[376] V.M. Buchshtaber. The Yang-Baxter transformation. *Russ. Math. Surveys* ***53:6*** (1998) 1343–1345

[377] V.M. Buchstaber, G. Felder, A.P. Veselov. Elliptic Dunkl operators, root systems, and functional equations. *Duke Math. J.* ***76*** (1994) 885–911.

[378] V.M. Buchstaber, A.P. Veselov. Integrable correspondences and algebraic representations of multivalued groups. *Int. Math. Res. Notices* (1996) 381–400.

[379] C. Budd, V. Dorodnitsyn. Symmetry-adapted moving mesh schemes for the nonlinear Schrödinger equation. *J. Phys. A* ***34:48*** (2001) 10387–10400.

[380] J.L. Burchnall, T.W. Chaundy. Commutative ordinary differential operators. *Proc. London Soc. Ser. 2* ***21*** (1923) 420–440.

[381] J.M. Burgers. A mathematical model illustrating the theory of turbulence. *Adv. Appl. Mech.* ***1*** (1948) 171–199.

[382] S.P. Burtsev, D.J. Kaup. Integrable stimulated Raman scattering systems with damping. *J. Phys. A* ***27:16*** (1994) 5623–5635.

[383] S.P. Burtsev, V.E. Zakharov, A.V. Mikhailov. Inverse scattering method with the variable spectral parameter. *Theor. Math. Phys.* ***70:3*** (1987) 227–240.

[384] F. Calogero. Solution of the one-dimensional N-body problem with quadratic and/or inversely quartic pair potentials. *J. Math. Phys.* ***12:3*** (1971) 419–436.

[385] F. Calogero. Exactly solvable one-dimensional many-body problems. *Lett. Nuovo Cimento* ***13:11*** (1975) 411–416.

[386] F. Calogero. One-dimensional many-body problems with pair interactions whose exact ground state wave function is of product type. *Lett. Nuovo Cimento* ***13:13*** (1975) 507–511.

[387] F. Calogero. A sequence of Lax matrices for certain integrable hamiltonian systems. *Lett. Nuovo Cimento* ***16*** (1976) 22–24.

[388] F. Calogero. Equilibrium configuration of the one-dimensional n-body problem with quadratic and inversely quadratic pair potentials. *Lett. Nuovo Cimento* ***20*** (1977) 251–253.

[389] F. Calogero. Motion of poles and zeros of special solutions of nonlinear and linear partial differential equations and related "solvable" many-body problems. *Nuovo Cimento* ***B 43*** (1978) 177–241.

[390] F. Calogero. A solvable nonlinear wave equation. *Stud. Appl. Math.* ***70:3*** (1984) 189–199.

[391] F. Calogero. Why are certain nonlinear PDEs both widely applicable and integrable? [162, 1–62].

[392] F. Calogero. Remarks on certain integrable one-dimensional many-body problems. *Phys. Lett. A* ***183:1*** (1993) 85–88.

[393] F. Calogero. A class of C-integrable PDES in multidimensions. *Inverse Problems* ***10:6*** (1994) 1231–1234.

[394] F. Calogero. An integrable Hamiltonian system. *Phys. Lett. A* ***201:4*** (1995) 306–310.

[395] F. Calogero. Exact solution of an N-body problem in one dimension: two comments. *J. Phys. A* ***29:19*** (1996) 6455.

[396] F. Calogero. A solvable N-body problem in the plane. I. *J. Math. Phys.* ***37:4*** (1996) 1735–1759.

[397] F. Calogero. A solvable many-body problem in the plane. *J. Nonl. Math. Phys.* ***5:3*** (1998) 289–293.

[398] F. Calogero. Solvable three-body problem and Painlevé conjectures. *Theor. Math. Phys.* ***133:2*** (2002) 1445–1454.

[399] F. Calogero, A. Degasperis. *Lett. Nuovo Cim.* ***23*** (1978) 150.

[400] F. Calogero, A. Degasperis, S. de Lillo. The multicomponent Eckhaus equation. *J. Phys. A* ***30:16*** (1997) 5805–5814.

[401] F. Calogero, W. Eckhaus. Nonlinear evolution equations, rescalings, model PDEs and their integrability. I, II. *Inverse Problems* ***3*** (1987) 229–262; *Inverse Problems* ***4*** (1988) 11–33.

[402] F. Calogero, J.-P. Francoise. Integrable dynamical systems obtained by duplication. *Ann. Inst. H. Poincare* ***57*** (1992) 167–181.

[403] F. Calogero, J.-P. Francoise. A completely integrable Hamiltonian system, J. Math. Phys. 37 (1996) 2863-2871.

[404] F. Calogero, J.-P. Francoise. Hamiltonian character of the motion of the zeros of a polynomial whose coefficients oscillate over time. *J. Phys. A* ***30:1*** (1997) 211–218.

[405] F. Calogero, F. Leyvraz. A new solvable model of aggregation kinetics. *J. Phys. A* ***32:44*** (1999) 7697–7717.

[406] F. Calogero, F. Leyvraz. New results on a parity-dependent model of aggregation kinetics. *J. Phys. A* ***33:32*** (2000) 5619–5629.

[407] F. Calogero, S. de Lillo. The Eckhaus PDE $i\psi_t + \psi_{xx} + 2(|\psi|^2)_x\psi + |\psi|^4\psi = 0$. *Inverse Problems* ***3*** (1987) 633–681.

[408] F. Calogero, S. de Lillo. Burgers equation on the semiline. *Inverse Problems* ***5:4*** (1989) L37–L40.

[409] F. Calogero, S. de Lillo. The Eckhaus equation in an external potential. *J. Phys. A* ***25:7*** (1992) L287–290.

[410] F. Calogero, O. Ragnisco, C. Marchioro. Exact solution of the classical and quantal one-dimensional many-body problems with two-body potential $V_a(x) = g^2a^2/\sinh^2(ax)$. *Lett. Nuovo Cimento* ***13:10*** (1975) 383–387.

[411] F. Calogero, Ji Xiaoda. C-integrable nonlinear PDEs. IV. *J. Phys. A* ***29:21*** (1996) 6781–6794.

[412] R. Camassa, D.D. Holm. An integrable shallow water equation with peaked solitons. *Phys. Rev. Let.* ***71:11*** (1993) 1661–1664.

[413] R. Camassa, D.D. Holm, J.M. Hyman. A new integrable shallow water equation. *Adv. Appl. Mech.* ***31*** (1994) 1–33.

[414] R. Camassa, A.I. Zenchuk. On the initial value problem for a completely integrable shallow water wave equation. *Phys. Lett. A* ***281:1*** (2001) 26–33.

[415] K.M. Case, M. Kac. A discrete version of the inverse scattering problem. *J. Math. Phys.* ***14:5*** (1973) 594–603.

[416] P.J. Caudrey, R.K. Dodd, J.D. Gibbon. A new hierarchy of Korteweg-de Vries equations. *Proc. Roy. Soc. London A* ***351*** (1976) 407–422.

[417] O.A. Chalykh, M.V. Feigin, A.P. Veselov. Multidimensional Baker-Akhiezer functions and Huygens' principle. *Commun. Math. Phys.* ***206:3*** (1999) 533–566.

[418] S.-J. Chang, B. Crespi, K.-J. Shi. Elliptical billiard systems and the full Poncelet's theorem in n dimensions. *J. Math. Phys.* ***34:6*** (1993) 2242–2256.

[419] S.-J. Chang, B. Crespi, K.-J. Shi. Elliptical billiards and hyperelliptic functions. *J. Math. Phys.* ***34:6*** (1993) 2257–2289.

[420] H.H. Chen. General derivation of Bäcklund transformations from inverse scattering problems. *Phys. Rev. Let.* ***33:15*** (1974) 925–928.

[421] H.H. Chen. A Bäcklund transformation in two dimensions. *J. Math. Phys.* ***16:12*** (1975) 2382–2384.

[422] H.H. Chen. Relation between Bäcklund transformations and inverse scattering problems. [109, 241–252].

[423] H.H. Chen, Y.C. Lee, C.S. Liu. Integrability of nonlinear Hamiltonian systems by inverse scattering method. *Physica Scr.* ***20*** (1979) 490–492.

[424] H.H. Chen, C.S. Liu. Bäcklund transformation solutions of the Toda lattice equation. *J. Math. Phys.* ***16:7*** (1975) 1428–1430.

[425] Y. Cheng, Y. Li. The constraint of the Kadomtsev-Petviashvili equation and its special solutions. *Phys. Lett. A* ***157:1*** (1991) 22–26.

[426] Y. Cheng, Y. Li. Constraints of the 2+1 dimensional integrable soliton systems. *J. Phys. A* ***25:2*** (1992) 419–431.

[427] Y. Cheng, Y. Li, R.K. Bullough. Integrable non-isospectral flows associated with the Kadomtsev-Petviashvili equations in 2+1 dimensions. *J. Phys. A* ***21:8*** (1988) L443–449.

[428] Y. Cheng, Y. Li, G.-X. Tang. The gauge equivalence of the Davey-Stewartson equation and (2+1)-dimensional continuous Heisenberg ferromagnetic model. *J. Phys. A* ***23:10*** (1990) L473–477.

[429] I.Yu. Cherdantsev, R.I. Yamilov. Master symmetries for differential-difference equations of the Volterra type. *Physica D* ***87:1–4*** (1995) 140–144.

[430] I.Yu. Cherdantsev, R.I. Yamilov. Local master symmetries of differential-difference equations. pp. 51–61 in: *Symmetries and Integrability of Difference Equations (Estrel, 1994), CRM Proc. Lecture Notes* ***9***, Providence, 1996.

[431] D.V. Choodnovsky, G.V. Choodnovsky. Pole expansions of nonlinear partial differential equations. *Nuovo Cimento B* ***11:40*** (1977) 339–353.

[432] F.Y.F. Chu. Stimulated Raman and Brillouin scattering and the inverse method. [109, 25–39]

[433] Y. Chung, C.K.R.T. Jones, T. Schäfer, C.E. Wayne. Ultra-short pulses in linear and nonlinear media. *Nonlinearity* ***18*** (2005) 1351–1374.

[434] Y. Chung, T. Schäfer. Nonlocal stabilization of ultra-short pulses in cubic nonlinear media. [nlin.SI/0512029].

[435] J. Cieśliński. Geometry of submanifolds derived from spin-valued spectral problems. *Theor. Math. Phys.* ***137:1*** (2003) 1396-1405.

[436] J. Cieśliński, A. Doliwa, P.M. Santini. The integrable discrete analogues of orthogonal coordinate systems are multidimensional circular lattices. *Phys. Lett. A* ***235:5*** (1997) 480–488.

[437] P.A. Clarkson. The Painlevé property, a modified Boussinesq equation and a modified Kadomtsev-Petviashvili equation. *Physica D* ***19:3*** (1986) 447–450.

[438] P.A. Clarkson, A.S. Fokas, M.J. Ablowitz. Hodograph transformations of linearizable partial differential equations. *SIAM J. on Appl. Math.* ***49:4*** (1989) 1188–1209.

[439] P.A. Clarkson, E.L. Mansfield. Algorithms for the nonclassical method of symmetry reductions. *SIAM J. on Appl. Math.* ***54:6*** (1994) 1693–1719.

[440] P.A. Clarkson, E.L. Mansfield. On a shallow water wave equation. *Nonlinearity* ***7:3*** (1994) 975–1000.

[441] P.A. Clarkson, E.L. Mansfield. Symmetry reductions and exact solutions of a class of nonlinear heat equations. *Physica D* ***70:3*** (1994) 250–288.

[442] A. Clebsch. Über die Bewegung eines Körpers in einer Flüssigkeit. *Math. Annalen* ***3*** (1870) 238–262.

[443] J.D. Cole. On a quasilinear parabolic equation occuring in aerodynamics. *Q. Appl. Math.* ***9*** (1950) 225–236.

[444] A.K. Common. A solution of the initial value problem for half-infinite integrable lattice systems. *Inverse Problems* ***8*** (1992) 393–408.

[445] A.K. Common. The half-infinite discretized Hirota equation and the trigonometric moment problem. *Inverse Problems* ***9:6*** (1993) 641–648.

[446] A.K. Common, S.T. Hafez. Linearization of the relativistic and discrete-time Toda lattice for particular boundary conditions. *Inverse Problems* ***8*** (1992) 59–69.

[447] A. Constantin. On the scattering problem for the Camassa-Holm equation. *R. Soc. Lond. Proc. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci.* ***457*** (2001) 953–970.

[448] A. Constantin, B. Kolev. On the geometric approach to the motion of inertial mechanical systems. *J. Phys. A* ***35:32*** (2002) R51–79.

[449] A. Constantin, B. Kolev. Geodesic flow on the diffeomorphism group of the circle. *Comment. Math. Helv.* ***78*** (2003) 787–804.

[450] A. Constantin, H.P. McKean. A shallow water equation on the circle. *Comm. Pure Appl. Math.* ***52*** (1999) 949–982.

[451] A. Constantin, L. Molinet. Global weak solutions for a shallow water equation. *Commun. Math. Phys.* ***211:1*** (2000) 45–61.

[452] A. Constantin, L. Molinet. Orbital stability of solitary waves for a shallow water equation. *Physica D* ***157:1–2*** (2001) 75–89.

[453] A. Constantin, W. Strauss. Stability of peakons. *Comm. Pure Appl. Math.* ***53*** (2000) 603–610.

[454] R. Conte. [130, pp. 187–192].

[455] R. Conte, M. Musette. Painlevé analysis and Bäcklund transformation in the Kuramoto-Sivashinsky equation. *J. Phys. A* ***22:2*** (1989) 169–177.

[456] G. Contopoulos, B. Grammaticos, A. Ramani. Painlevé analysis for the mixmaster universe model. *J. Phys. A* ***26:21*** (1993) 5795–5799.

[457] J.P. Corones, F.J. Testa. Pseudopotentials and their applications. [109, 184–198]

[458] M.M. Crum. Associated Sturm-Liouville systems. *Quart. J. Math. Oxford Ser. 2* ***6*** (1955) 121–127.

[459] G. Darboux. *Compt. Rend.* ***94*** 1456–1459.

[460] G. Darboux. Leçons sur la théorie générale des surfaces. Paris: Gauthier-Villars, 1894.

[461] E. Date, M. Jimbo, M. Kashiwara, T. Miwa. Operator approach to the Kadomtsev-Petviashvili equation. Transformation groups for solitonic equations. III. *J. Phys. Soc. Japan* ***50*** (1981) 3806–3812.

[462] E. Date, M. Jimbo, M. Kashiwara, T. Miwa. Landau-Lifshitz equation: solitons, quasi-periodic solutions and infinite-dimensional Lie algebras. *J. Phys. A* ***16:2*** (1983) 221–236.

[463] T. Dauxois. Fermi, Pasta, Ulam and a mysterious lady. arXiv:0801.1590v1

[464] P. Debye. Vorträge über der kinetische Theorie die Materie und der Elektrizität. Leipzig, 1914.

[465] A. Degasperis, M. Procesi. Asymptotic integrability. [158, pp. 23–37].

[466] A. Degasperis, A.N.W. Hone, D.D. Holm. A new integrable equation with peakon solutions. *Theor. Math. Phys.* ***133:2*** (2002)1463-1474.

[467] A. Degasperis, A.N.W. Hone, D.D. Holm. Integrable and non-integrable equations with peakons. [134, pp. 37–43].

[468] A. Degasperis, C. Rogers, W.K. Schief. Isothermic surfaces generated via Bäcklund and Moutard transformations: boomeron and zoomeron connections. *Stud. Appl. Math.* ***109:1*** (2001) 39–65.

[469] A. Degasperis, A.B. Shabat. Construction of reflectionless potentials with infinitely many discrete eigenvalues, [108].

[470] A. Degasperis, A.B. Shabat. Construction of reflectionless potentials with infinite discrete spectra. *Theor. Math. Phys.* ***100:2*** (1994) 970–984

[471] P.A. Deift. Applications of a commutation formula. *Duke Math. J.* ***45*** (1978) 267–310.

[472] P.A. Deift, A.R. Its, A. Kapaev, X. Zhou. On the algebro-geometric integration of the Schlesinger equations. *Commun. Math. Phys.* ***203:3*** (1999) 613–633.

[473] P.A. Deift, R. Killip. On the absolutely continuous spectrum of one-dimensional Schrödinger operators

with square summable potentials. *Commun. Math. Phys.* ***203:2*** (1999) 341–347.

[474] P.A. Deift, L.-C. Li, C. Tomei. Loop groups, discrete versions of some classical integrable systems, and rank 2 extensions. *Mem. Amer. Math. Soc.* ***479*** (1992).

[475] P.A. Deift, E. Trubowitz. Inverse scattering on the line. *Comm. Pure Appl. Math.* ***32*** (1979) 121–251.

[476] L.A. Dickey. Field-theoretical (multi-time) Lagrange-Hamilton formalism and integrable equations. in: Lectures on Integrable Systems (Sophia-Antipolis, 1991) 103–161, World Sci. Publishing, River Edge, NJ, 1994.

[477] L.A. Dickey. On the constrained KP hierarchy. I,II. *Lett. Math. Phys.* ***34:4*** (1995) 379–384; ***35:3*** (1995) 229–236.

[478] L.A. Dickey. On additional symmetries of the KP hierarchy and Sato's Bäcklund transformation. *Commun. Math. Phys.* ***167:1*** (1995) 227–233.

[479] L.A. Dickey. Modified KP and discrete KP. *Lett. Math. Phys.* ***48:3*** (1999) 277–289.

[480] L.A. Dmitrieva. Finite-gap solutions of the Harry Dym equation. *Phys. Lett. A* ***182:1*** 65–70.

[481] L.A. Dmitrieva. The higher-times approach to multisoliton solutions of the Harry Dym equation. *J. Phys. A* ***26*** 6005–6020.

[482] L.A. Dmitrieva, M.A. Khlabystova. Scheme of constructing soliton-type solutions of (2+1)-dimensional Harry Dym equation. *Math. Comput. Modelling* (1995)

[483] L.A. Dmitrieva, M.A. Khlabystova. Multisoliton solutions of (2+1)-dimensional Harry Dym equation. *Phys. Lett. A* ***237:6*** (1998) 369–380.

[484] R.K. Dodd, R.K. Bullough. *Proc. Roy. Soc. London A* ***351*** (1976) 499.

[485] R.K. Dodd, A.P. Fordy. Prolongation structures of complex quasi-polynomial evolution equations. *J. Phys. A* ***17:16*** (1984) 3249–3266.

[486] A. Doliwa. Geometric discretization of the Toda system. *Phys. Lett. A* ***234*** (1997) 187–192.

[487] A. Doliwa. Quadratic reductions of quadrilateral lattices. *J. Geom. Phys.* ***30*** (1999) 169–186.

[488] A. Doliwa. Asymptotic lattices and W-congruences in integrable discrete geometry. *J. Nonl. Math. Phys.* ***8*** suppl. (2001) 88–92.

[489] A. Doliwa. Discrete asymptotic nets and W-congruences in Plücker line geometry. *J. of Geometry and Physics* ***39*** (2001) 9–29.

[490] A. Doliwa. The Darboux-type transformations of integrable lattices. *Rep. Math. Phys.* ***48*** (2001) 59–66.

[491] A. Doliwa. Geometric discretization of the Koenigs nets. *J. Math. Phys.* ***44*** (2003) 2234–2249.

[492] A. Doliwa. Generalized isothermic lattices. *J. Phys. A* ***40*** (2007) 12539–12561.

[493] A. Doliwa. The B-quadrilateral lattice, its transformations and the algebro-geometric construction. *J. Geom. Phys.* ***57*** (2007) 1171–1192.

[494] A. Doliwa. The C-(symmetric) quadrilateral lattice, its transformations and the algebro-geometric construction. arXiv: 0710.5820 [nlin.SI]

[495] A. Doliwa, P. Grinevich, M. Nieszporski, P.M. Santini. Integrable lattices and their sub-lattices: from the discrete Moutard (discrete Cauchy-Riemann) 4-point equation to the self-adjoint 5-point scheme. *J. Math. Phys.* ***48*** (2007) 013513.

[496] A. Doliwa, S.V. Manakov, P.M. Santini. $\bar\partial$-Reductions of the multidimensional quadrilateral lattice. The multidimensional circular lattice. *Commun. Math. Phys.* ***196:1*** (1998) 1–18.

[497] A. Doliwa, M. Mañas, L. Martínez Alonso. Generating quadrilateral and circular lattices in KP theory. *Phys. Lett. A* ***262*** (1999) 330–343.

[498] A. Doliwa, M. Mañas, L. Martínez Alonso, E. Medina, P.M. Santini. Charged free fermions, vertex operators and the classical theory of conjugate nets. *J. Phys. A* ***32:7*** (1999) 1197–1216.

[499] A. Doliwa, M. Nieszporski, P.M. Santini. Integrable lattices and their sub-lattices II. From the B-quadrilateral lattice to the self-adjoint schemes the triangular and the honeycomb lattices. *J. Math. Phys.* ***48*** (2007) 113056.

[500] A. Doliwa, P.M. Santini. Integrable dynamics of a discrete curve and the Ablowitz-Ladik hierarchy. *J. Math. Phys.* ***36:3*** (1995) 1259–1273.

[501] A. Doliwa, P.M. Santini. Multidimensional quadrilateral lattices are integrable. *Phys. Lett. A* ***233:4–6*** (1997) 365–372.

[502] A. Doliwa, P.M. Santini. Geometry of discrete curves and lattices and integrable difference equations. in: Discrete Integrable Geometry and Physics (Vienna, 1996) 139–154, *Oxford Lecture Ser. Math. Appl.* ***16***, Oxford UP (New York, 1999).

[503] A. Doliwa, P.M. Santini. Planarity and integrability. in: Symmetry and Perturbation Theory (Rome, 1998) 167–177, World Sci. Publishing (River Edge, NJ, 1999).

[504] A. Doliwa, P.M. Santini. The symmetric, d-invariant and Egorov reductions of the quadrilateral lattice. *J. Geom. Phys.* ***36*** (2000) 60–102.

[505] A. Doliwa, P.M. Santini, M. Mañas. Transformations of quadrilateral lattices. *J. Math. Phys.* ***41*** (2000) 944–990.

[506] I.Y. Dorfman, A.S. Fokas. Hamiltonian theory over noncommutative rings and integrability in multidimensions. *J. Math. Phys.* ***33:7*** (1992) 2504–2514.

[507] B. Dorizzi, B. Grammaticos, A. Ramani, P. Winternitz. Integrable Hamiltonian systems with velocity dependent potentials. *J. Math. Phys.* ***26:12*** (1985) 3070–3079.

[508] V.G. Drinfeld. On some unsolved problems in quantum group theory. pp. 1–8 in *Quantum groups,* Lect. Notes in Math. **1510**, Springer, 1992.

[509] V.G. Drinfeld, V.V. Sokolov. Lie algebras and equations of Korteweg-de Vries type. *J. Soviet Math.* ***30*** (1985) 1975–2036.

[510] V.G. Drinfeld, S.I. Svinolupov, V.V. Sokolov. Classification of fifth order evolution equations with infinite series of conservation laws. *Dokl. Akad. Nauk Ukr.SSR* ***10 A*** (1985) 8–10.

[511] V.S. Dryuma. On the analytic solution of the two-dimensional Korteweg-de Vries equation. *JETP Lett.* ***19:12*** (1974) 753–755.

[512] V.S. Dryuma. *Izvestiya AN MSSR* ***1976:3*** (1976) 89.

[513] B.A. Dubrovin. Theta functions and nonlinear equations. *Russ. Math. Surveys* ***36*** (1981) 11–92.

[514] B.A. Dubrovin. Geometry of 2D topological field theories. pp. 120–348 in: Lecture Notes in Math., Vol. 1620, Berlin: Springer.

[515] B.A. Dubrovin, V.B. Matveev, S.P. Novikov. Nonlinear equations of KdV type, finite-zone linear operators and abelian varieties. *Russ. Math. Surveys* ***31:1*** (1976) 59–146.

[516] B.A. Dubrovin, S.P. Novikov. Hamiltonian formalism of one-dimensional systems of hydrodynamic type and the Bogolyubov-Whitham averaging method. *Sov. Math. Dokl.* ***27*** (1983) 665–669.

[517] B.A. Dubrovin, S.P. Novikov. On Poisson brackets of hydrodynamic type. *Sov. Math. Dokl.* ***30*** (1984) 651–654.

[518] B.A. Dubrovin, S.P. Novikov. Hydrodynamics of weakly deformed soliton lattices. Differential geometry and Hamiltonian theory. *Russ. Math. Surveys* ***44:6*** (1989) 35–124.

[519] B.A. Dubrovin, S.P. Novikov. Hydrodynamics of soliton lattices. *Sov. Sci. Rev. C Math. Phys.* ***9:4*** (1993) 1–136.

[520] B.A. Dubrovin, S.P. Novikov, I.M. Krichever. Integrable Systems. I. VINITI 4, Moscow 1985. (Engl. Transl.: Encyclopaedia of Math. Sci. vol. 4, Berlin: Springer, 1989)

[521] B.A. Dubrovin, Y. Zhang. Bihamiltonian hierarchies in 2D topological field theory at one-loop approximation. *Commun. Math. Phys.* ***198:2*** (1998) 311–361.

[522] B.A. Dubrovin, Y. Zhang. Frobenius manifolds and Virasoro constraints. *Sel. math., New ser.* ***5*** (1999) 423–466.

[523] V.G. Dubrovsky, B.G. Konopelchenko. The 2+1 dimensional integrable generalization of the sine-Gordon equation. II. Localized solutions. *Inverse Problems* ***9:3*** (1993) 391–416.

[524] V.G. Dubrovsky, B.G. Konopelchenko. $\bar{\partial}$-dressing and exact solutions for the $(2+1)$-dimensional Harry Dym equation. *J. Phys. A* ***27:13*** (1994) 4619–4628.

[525] J.J. Duistermaat, F.A. Grünbaum. Differential equations in the spectral parameter. *Commun. Math. Phys.* ***103:2*** (1986) 177–240.

[526] H.R. Dullin, G.A. Gottwald, D.D. Holm. Camassa-Holm, Korteweg-de Vries-5 and other asymptotically equivalent equations for shallow water. *Fluid Dynamics Research* ***33*** (2003) 73–95.

[527] H.R. Dullin, G.A. Gottwald, D.D. Holm. On asymptotically equivalent shallow water wave equations. *Physica D* ***190:1–2*** (2004) 1–14.

[528] M. Dunajski. A class of Einstein-Weyl spaces associated to an integrable system of hydrodynamic type. *J. Geom. Phys.* ***51*** (2004) 126–137.

[529] I.A. Dynnikov, S.P. Novikov. Laplace transformations and simplicial connections. *Russian Math. Surveys* ***52:6*** (1997) 1294–1295.

[530] C. Eckart. The penetration of a potential barrier by electrons. *Phys. Rev.* ***35:11*** (1930) 1303–1309.

[531] G.S. Emmerson. John Scott Russel. A great Victorian engineer and naval architect. (John Murray: London, 1977); Encyclopedia Britannica, 9th edn., p. 66.

[532] V.P. Ermakov. Second order differential equations. Integrability conditions in closed form. *Izv. Kievskogo Univ.* ***9*** (1880) 1–25. [in Russian]

[533] G. Esposito, B.G. Konopelchenko. Ellipticity conditions for the Lax operator of the KP equations. *J. Phys. A* ***33:40*** (2000) 7123–7135.

[534] F.B. Estabrook. Some old and new techniques for the practical use of exterior differential forms. [109, 136–161]

[535] F.B. Estabrook, H.D. Wahlquist. The geometric approach to sets of orindary differential equations and Hamiltonian dynamics. *SIAM Review* ***17:2*** (1975) 201–220.

[536] P.G. Estevez, P.R. Gordoa, L. Martínez Alonso, E. Medina Reus. On the characterization of a new soliton sector in the classical Boussinesq system. *Inverse Problems* ***10:4*** (1994) L23–L27.

[537] P. Etingof. Geometric crystals and set-theoretical solutions to the quantum Yang-Baxter equation. *Preprint math.QA/0112278.*

[538] P. Etingof, I.M. Gelfand, V.S. Retakh. Factorization of differential operators, quasideterminants, and nonabelian Toda field equations. *Math. Res. Lett.* ***4*** (1977) 413–425.

[539] P. Etingof, D. Nikshych. Dynamical quantum groups at roots of 1. *Duke Math. J.* ***108*** (2001) 135–168.

[540] P. Etingof, T. Schedler, A. Soloviev. Set-theoretical solutions to the quantum Yang-Baxter equation. *Duke Math. J.* ***100:2*** (1999) 169–209.

[541] L.D. Faddeev, B. Seckler. The inverse problem in the quantum theory of scattering. *J. Math. Phys.* ***4:1*** (1963) 72–104.

[542] L.D. Faddeev, V.E. Korepin. Quantum theory of solitons. *Phys. Reports C* ***42:1*** (1978).

[543] L.D. Faddeev, L.A. Takhtajan. Liouville model on the lattice. *Lect. Notes Phys.* ***246*** (1986) 166–179.

[544] D.B. Fairlie, A.P. Veselov. Faulhaber and Bernoulli polynomials and solitons. *Physica D* ***152–153*** (2001) 47–50.

[545] G. Falqui. On a Camassa-Holm type equation with two dependent variables. *arXiv:nlin.SI/0505059.*

[546] G. Falqui, F. Magri, M. Pedroni. Bihamiltonian geometry, Darboux coverings, and linearization of the KP hierarchy. *Commun. Math. Phys.* ***197:2*** (1998) 303–324.

[547] G. Falqui, F. Magri, M. Pedroni. Bihamiltonian geometry and separation of variables for Toda lattices. *J. Nonl. Math. Phys.* ***8*** Suppl. (2001) 118–127.

[548] G. Falqui, C.-M. Viallet. Singularity, complexity, and quasi-integrability of rational mappings. *Commun. Math. Phys.* ***154:1*** (1993) 111–125.

[549] E. Fan. Darboux transformation and soliton-like solutions for the Gerdjikov-Ivanov equation. *J. Phys. A* ***33:39*** (2000) 6925–6933.

[550] E. Fan. Integrable systems of derivative nonlinear Schrödinger type and their multi-Hamiltonian structure. *J. Phys. A* ***34:3*** (2001) 513–519.

[551] E.V. Ferapontov. Differential geometry of nonlocal Hamiltonian operators of hydrodynamic type. *Funct. Anal. Appl.* ***25*** (1991) 195–204.

[552] E.V. Ferapontov. Integration of weakly nonlinear hydrodynamic systems in Riemann invariants. *Phys. Lett. A* ***158:3,4*** (1991) 112–118.

[553] E.V. Ferapontov. On the matrix Hopf equation and integrable Hamiltonian systems of hydrodynamic type, which do not possess Riemann invariants. *Phys. Lett. A* ***179:6*** (1993) 391–397.

[554] E.V. Ferapontov. On integrability of semi-Hamiltonian hydrodynamic type systems $u^i_t = v^i_j(u)u^j_x$ which do not possess Riemann invariants. *Physica D* ***63:1–2*** (1993) 50–70.

[555] E.V. Ferapontov. Dupin hypersurfaces and integrable hamiltonian systems of hydrodynamic type, which do not possess Riemann invariants. *Diff. Geom. and Appl.* ***5:2*** (1995) 121–152.

[556] E.V. Ferapontov. Isoparametric hypersurfaces in spheres, integrable nondiagonalizable systems of hydrodynamic type, and N-wave systems. *Diff. Geom. and Appl.* ***5:2*** (1995) 335–369.

[557] E.V. Ferapontov. Nonlocal Hamiltonian operators of hydrodynamic type: differential geometry and applications. *Amer. Math. Soc. Transl. (2) 170* (1995) 33–58.

[558] E.V. Ferapontov. Laplace transformations of hydrodynamic-type systems in Riemann invariants: Periodic sequences. *J. Phys. A* ***30:19*** (1997) 6861–6878.

[559] E.V. Ferapontov. Stationary Veselov-Novikov equation and isothermally asymptotic surfaces in projective differential geometry. *Diff. Geom. and Appl.* ***11:2*** (1999) 117–128.

[560] E.V. Ferapontov. Systems of conservation laws within the framework of the projective theory of congruences: the Levy transformations of semi-Hamiltonian systems. 33:39 (2000) 6935–6952.

[561] E.V. Ferapontov. Surfaces with flat normal bundle: an explicit construction. *Diff. Geom. and Appl.* ***14:1*** (2001) 15–37.

[562] E.V. Ferapontov, A.P. Fordy. Separable Hamiltonians and integrable systems of hydrodynamic type. *J. of Geometry and Physics* ***21:2*** (1997) 169–182.

[563] E.V. Ferapontov, A.P. Fordy. Non-homogeneous systems of hydrodynamic type, related to quadratic Hamiltonians with electromagnetic term. *Physica D* ***108:4*** (1997) 350–364.

[564] E.V. Ferapontov, A.P. Fordy. Commuting quadratic Hamiltonians with velocity dependent potentials. *Rep. Math. Phys.* ***44:1,2*** (1999) 53–70.

[565] E.V. Ferapontov, A.M. Grundland. Links between different analytic descriptions of constant mean curvature surfaces. *J. Nonl. Math. Phys.* ***7:1*** (2000) 14–21.

[566] E.V. Ferapontov, K.R. Khusnutdinova, S.P. Tsarev. On a class of three-dimensional integrable Lagrangians, *Commun. Math. Phys.* ***261:1*** (2006) 225–243.

[567] E.V. Ferapontov, M.V. Pavlov. Quasiclassical limit of coupled KdV equations. Riemann invariants and multi-Hamiltonian structure. *Physica D* ***52:2–3*** (1991) 211–219.

[568] E.V. Ferapontov, M.V. Pavlov. Hydrodynamic reductions of the heavenly equation. *Class. Quantum Grav.* ***20*** (2003) 1–13.

[569] E.V. Ferapontov, C. Rogers, W.K. Schief. Reciprocal transformations of two-component hyperbolic systems and their invariants. *J. of Math. An. Appl.* ***228:2*** (1998) 365–376.

[570] E.V. Ferapontov, W.K. Schief. Surfaces of Demoulin: differential geometry, Bäcklund transformation and integrability. *J. of Geometry and Physics* ***30:4*** (1999) 343–363.

[571] E.V. Ferapontov, A.P. Veselov. Integrable Schrödinger operators with magnetic fields: factorisation method on curved surfaces. *J. Math. Phys.* ***42:2*** (2001) 590–607.

[572] E. Fermi, J. Pasta, S. Ulam. Studies of nonlinear problems. I. Los Alamos report LA-1940 (1955).

[573] L.A. Ferreira, J.F. Gomes, A.V. Razumov, M.V. Saveliev, A.H. Zimerman. Riccati-type equations, generalised WZNW equations, and multidimensional Toda systems. *Commun. Math. Phys.* ***203:3*** (1999) 649–666.

[574] R.A. Fischer. The wave of advance of an advantageous gene. *Ann. Eugen.* ***7*** (1937) 355–369.

[575] R. Fitzhugh. Impulses and physiological states in theoretical models of nerve membrane. *Biophys. J.* ***1*** (1961) 445–466.

[576] S. Flach, C.R. Willis. Discrete breathers. *Phys. Reports* ***295*** (1998) 181–264.

[577] H. Flaschka. An asymptotic property of the roots of polynomials. *Proc. AMS* ***27:3*** (1971) 451–456.

[578] H. Flaschka. On the Toda lattice. I. Existence of integrals. II. Inverse scattering solution. *Phys. Rev. B* ***9:4*** (1974) 1924–1925; *Progr. Theor. Phys.* ***51:3*** (1974) 703–716.

[579] H. Flaschka. A commutator representation of Painlevé equations. *J. Math. Phys.* ***21:5*** (1980) 1016–1018.

[580] H. Flaschka. Construction of conservation laws for Lax equations: comments on a paper by G. Wilson. *Quart. J. Math. Oxford (2)* ***34*** (1983) 61–65.

[581] H. Flaschka, D.W. McLaughlin. Some comments on Bäcklund transformations, canonical transformations, and the inverse scattering method. [109, 253–295]

[582] H. Flaschka, A.C. Newell. Monodromy and spectrum preserving deformations. *Commun. Math. Phys.* ***76:1*** (1980) 67–116.

[583] H. Flaschka, A.C. Newell, M. Tabor. Integrability. [162, 73–114]

[584] A.S. Fokas. A symmetry approach to exactly solvable evolution equations. *J. Math. Phys.* ***21:6*** (1980) 1318–1325.

[585] A.S. Fokas. Symmetries and integrability. *Stud. Appl. Math.* ***77*** (1987) 253–299.

[586] A.S. Fokas. An initial-boundary value problem for the nonlinear Schrödinger equation. *Physica D* ***35:1–2*** (1989) 167–185.

[587] A.S. Fokas, M.J. Ablowitz. Linearization of the Korteweg-de Vries and Painlevé II equations. *Phys. Rev. Let.* ***47:16*** (1981) 1096–1100.

[588] A.S. Fokas, B. Fuchssteiner. The hierarchy of the Benjamin-Ono equation. *Phys. Lett. A* ***86:6–7*** (1981) 341–345.

[589] A.S. Fokas, B. Fuchssteiner. Symplectic structures, their Bäcklund transformations, and hereditary symmetries. *Physica D* ***4:1*** (1981) 47–66.

[590] A.S. Fokas, A.R. Its. An initial-boundary value problem for the sine-Gordon equation in laboratory coordinates. *Theor. Math. Phys.* ***92:3*** (1992) 964–978.

[591] A.S. Fokas, U. Mũgan. Schlesinger transformations of Painlevé II-V. *J. Math. Phys.* ***33:6*** (1992) 2031–2045.

[592] A.S. Fokas, P.J. Olver, P. Rosenau. A plethora of integrable bi-Hamiltonian equations. [107, 93–101]

[593] A.S. Fokas, E.P. Papadopoulou, Y.G. Saridakis. Particles in soliton cellular automata. *Complex Systems* ***3*** (1989) 615–633.

[594] A.S. Fokas, E.P. Papadopoulou, Y.G. Saridakis. Coherent structures in cellular automata. *Phys. Lett. A* ***147:7*** (1990) 369–379.

[595] A.S. Fokas, E.P. Papadopoulou, Y.G. Saridakis. Soliton cellular automata. *Physica D* ***41:3*** (1990) 297–321.

[596] A.S. Fokas, E.P. Papadopoulou, Y.G. Saridakis, M.J. Ablowitz. Interaction of simple particles in soliton cellular automata. *Stud. Appl. Math.* ***81*** (1989) 153–180.

[597] A.S. Fokas, Y.C. Yortsos. The transformation properties of the sixth Painlevé equation and one-parameter families of solutions. *Lett. Nuovo Cimento* ***30:17*** (1981) 539–544.

[598] S. Fomin, A.N. Kirillov. The Yang-Baxter equation, symmetric functions and Schubert polynomials. *Discrete Math.* ***153*** (1996) 123–143.

[599] S. Fomin, A. Zelevinsky. The Laurent phenomenon. arXiv:math.CO/0104241.

[600] A.P. Fordy. Derivative nonlinear Schrödinger equations and Hermitian symmetric spaces. *J. Phys. A* ***17:6*** (1984) 1235–1245.

[601] A.P. Fordy. The Hénon-Heiles system revisited. *Physica D* ***52:2–3*** (1991) 204–210.

[602] A.P. Fordy, J.D. Gibbons. Some remarkable nonlinear transformations. *Phys. Lett. A* ***75:5*** (1980) 325.

[603] A.P. Fordy, P.P. Kulish. Nonlinear Schrödinger equations and simple Lie algebras. *Commun. Math. Phys.* ***89:3*** (1983) 427–443.

[604] A.P. Fordy, A.B. Shabat, A.P. Veselov. Factorisation and Poisson correspondences. *Theor. Math. Phys.* ***105:2*** (1995) 1369–1386.

[605] B. Fornberg, G.B. Whitham. A numerical and theoretical study of certain nonlinear wave phenomena. *Phil. Trans. R. Soc. London A* ***289*** (1978) 373–404.

[606] N.C. Freeman. A two dimensional distributed soliton solution of the KdV equation. *Proc. Roy. Soc. Lond. A* ***366*** (1979) 185–204.

[607] N.C. Freeman. Soliton interactions in two dimensions. *Adv. Appl. Mech.* ***20*** (1980) 1–37.

[608] O. Fringer, D.D. Holm. Integrable vs. nonintegrable geodesic soliton behaviour. *Physica D* ***150:3–4*** (2001) 237–263.

[609] B. Fuchssteiner. Master symmetries, higher order time-dependent symmetries and conserved densities of nonlinear evolution equations. *Progr. Theor. Phys.* ***70:6*** (1983) 1508–1522.

[610] B. Fuchssteiner. On the hierarchy of the Landau-Lifshitz equation. *Physica D* ***13:3*** (1984) 387–394.

[611] Fujimoto, Watanabe (1983)

[612] I.R. Gabitov, V.E. Zakharov, A.V. Mikhailov. Maxwell-Bloch equation and the inverse scattering method. *Theor. Math. Phys.* ***63:1*** (1985) 328–343.

[613] D. Gale. The strange and surprising saga of the Somos sequences. *Math. Intell.* ***13*** (1991) 40–42.

[614] D. Gale. Somos sequence update. *Math. Intell.* ***13*** (1991) 49–50.

[615] B. Gambier. *Acta Math.* ***33*** (1909) 1–55.

[616] C.S. Gardner, J.M. Greene, M.D. Kruskal, R.M. Miura. Method for solving the Korteweg-de Vries equation. *Phys. Rev. Let.* ***19:19*** (1967) 1095–1097.

[617] C.S. Gardner. The Korteweg-de Vries equation and generalizations. IV. The Korteweg-de Vries equation as a Hamiltonian system. *J. Math. Phys.* ***12*** (1971) 1548–1551.

[618] C.S. Gardner, J.M. Greene, M.D. Kruskal, R.M. Miura. The Korteweg-de Vries equation and generalizations. VI. Methods for exact solutions. *Comm. Pure Appl. Math.* ***27*** (1974) 97–133.

[619] I.M. Gelfand, I.Ya. Dorfman. Hamiltonian operators and algebraic structures related to them. *Funct. Anal. Appl.* ***13:4*** (1979) 248–262.

[620] I.M.Gelfand, I.Ya.Dorfman. Hamiltonian operators and infinite-dimensional Lie algebras. *Funct. Anal. Appl.* ***15:3*** (1981) 173–187.

[621] I.M. Gelfand, I. Zakharevich. Webs, Lenard schemes, and the local geometry of bi-Hamiltonian Toda and Lax structures. *Selecta mathematica* ***6:2*** (2000) 131–183.

[622] V.S. Gerdjikov, M.I. Ivanov. *Bulg. J. Phys.* ***10*** (1983) 130.

[623] V.S. Gerdjikov, D.J. Kaup, N.A. Kostov, T.I. Valchev. How many types of soliton solutions do we know? arXiv:0708.1253 [nlin.SI]

[624] B.S. Getmanov. *Sov. Phys. JETP Lett.* ***24*** (1976) 291.

[625] J. Gibbons. Collisionless Boltzmann equations and integrable moment equations. *Physica D* ***3*** (1981) 503–511.

[626] J.D. Gibbons, M. McGuinness. A derivation of the Lorenz equations for some unstable dispersive physical systems. *Phys. Lett. A* ***77:5*** (1980) 295–299.

[627] J. Gibbons, B.A. Kupershmidt. Time discretization of lattice integrable systems. *Phys. Lett. A* ***165:2*** (1992) 105–110.

[628] C.R. Gilson, J.J.C. Nimmo. The relation between a 2D Lotka-Volterra equation and a 2D Toda Lattice. *J. Nonl. Math. Phys.* ***12*** *Suppl.* (2005) 169–179.

[629] C.R. Gilson, J.J.C. Nimmo, Y. Ohta. Quasideterminant solutions of a non-Abelian Hirota-Miwa equation. *J. Phys. A* ***40*** (2007) 12607–12617.

[630] C.R. Gilson, M.C. Ratter. Three-dimensional three-wave interactions: a bilinear approach. *J. Phys. A* ***31:1*** (1998) 349–367.

[631] C.R. Gilson, A. Pickering. Factorization and Painlevé analysis of a class of nonlinear third-order partial differential equations. *J. Phys. A* ***28:10*** (1995) 2871–2888.

[632] R.E. Goldstein, D.M. Petrich. The Korteweg-de Vries hierarchy as dynamics of closed curves in the plane. *Phys. Rev. Let.* ***67:23*** (1991) 3203–3206.

[633] I.Z.Golubchik, V.V.Sokolov. On some generalizations of the factorization method. *Theor. Math. Phys.* ***110:3*** (1997) 267–276.

[634] I.Z. Golubchik, V.V. Sokolov. Generalized operator Yang-Baxter equations, integrable ODEs and nonassociative algebras. *J. Nonl. Math. Phys.* ***7:2*** (2000) 184–197.

[635] I.Z. Golubchik, V.V. Sokolov. Multicomponent generalization of the hierarchy of the Landau-Lifshitz equation. *Theor. Math. Phys.* ***124:1*** (2000) 909–917.

[636] I.Z. Golubchik, V.V. Sokolov, S.I. Svinolupov. A new class of nonassociative algebras and a generalized factorization method. *Preprint ESI* ***53***, Wien, 1993.

[637] V.M. Goncharenko. Multisoliton solutions of the matrix KdV equation. *Theor. Math. Phys.* ***126:1*** (2001) 81–91.

[638] V.M. Goncharenko, A.P. Veselov. Monodromy of the matrix Schrodinger equations and Darboux transformations. *J. Phys. A* ***31:23*** (1998) 5315–5326.

[639] K.S. Govinder, C. Athorne, P.G.L. Leach. The algebraic structure of generalized Ermakov systems in three dimensions. *J. Phys. A* ***26:16*** (1993) 4035–4046.

[640] B. Grammaticos, B. Dorizzi, A. Ramani. Integrability of Hamiltonians with third and fourth degree polynomial potentials. *J. Math. Phys.* ***24:9*** (1983) 2289.

[641] B. Grammaticos, F.W. Nijhoff, V.G. Papageorgiou, A. Ramani. Isomonodromic deformation problem for discrete analogues of Painlevé equations. *INS preprint no. 178* (1991).

[642] B. Grammaticos, F.W. Nijhoff, V. Papageorgiou, A. Ramani, J. Satsuma. Linearization and solutions of the discrete Painlevé-III equation. *solv-int 9310003*

[643] B. Grammaticos, F.W. Nijhoff, A. Ramani. Discrete Painlevéquations. in: The Painlev Property, CRM Ser. Math. Phys. New York: Springer, 1999, pp. 413–516.

[644] B. Grammaticos, Y. Ohta, A. Ramani, H. Sakai. Degeneration through coalescence of the q-Painleve VI equation. *J. Phys. A* ***31:15*** (1998) 3545–3558.

[645] B. Grammaticos, Y. Ohta, A. Ramani, D. Takahashi, K.M. Tamizhmani. Cellular automata and ultra-discrete Painlevé equations. *Phys. Lett. A* ***226:1–2*** (1997) 53–58.

[646] B. Grammaticos, A. Ramani. From continuous Painleve IV to the asymmetric discrete Painleve I. *J. Phys. A* ***31:27*** (1998) 5787–5798.

[647] B. Grammaticos, A. Ramani. Discrete Painlevé equations: a review. *Lect. Notes Phys.* ***644*** (2004) 245–321.

[648] B. Grammaticos, A. Ramani, V.G. Papageorgiou. Do integrable mappings have the Painlevé property? *Phys. Rev. Let.* ***67:14*** (1991) 1825–1828.

[649] B. Grammaticos, A. Ramani, V.G. Papageorgiou, F.W. Nijhoff. Quantization and integrability of discrete system. *J. Phys. A* ***25:23*** (1992) 6419–6427.

[650] B. Grammaticos, A. Ramani, K.M. Tamizhmani. Painlevé analysis and singularity confinemnt: the ultimate conjecture. *J. Phys. A* ***26:2*** (1993) L53–58.

[651] Ya.I. Granovsky, A.C. Zhedanov. Domain-type solutions in anisotropic magnetic chains. *Theor. Math. Phys.* ***71:1*** (1987) 438–446

[652] J.D.E. Grant. On self-dual gravity. *Phys. Rev. D* **48:6** (1993) 2606–2612.

[653] J.D.E. Grant, I.A.B. Strachan. Hypercomplex integrable systems. *Nonlinearity* ***12*** (1999) 1247–1261.

[654] R. Grimshaw, M. Pavlov. Exact periodic steady solutions for nonlinear wave equations: a new approach. *Phys. Lett. A* ***251:1*** (1999) 25–30.

[655] V.I. Gromak. One-parameter systems of solutions of Painlevé equations. *Diff. Eq.* ***14*** (1977) 1510–1513.

[656] A.M. Grundland, D. Levi. On higher-order Riccati equations as Bäcklund transformations. *J. Phys. A* ***32:21*** (1999) 3931–3937.

[657] P. Guha, M. Olshanetsky. Quest for universal integrable models. *J. Nonl. Math. Phys.* ***6:3*** (1999) 273–293.

[658] F. Guil, M. Mañas. AKNS hierarchy, self-similarity, string equations and the Grassmannian. *J. Phys. A* ***27:6*** (1994) 2129.

[659] N. Gupta. Integrals of motion for the Lorenz system, *J. Math. Phys.* ***34:2*** (1993) 801–804.

[660] B. Gürel, M. Gürses, I.T.Habibullin. Boundary value problems, compatible with symmetries. *Phys. Lett. A* ***190:3–4*** (1994) 231–237.

[661] B. Gürel, M. Gürses, I.T.Habibullin. Boundary value problems for integrable equations compatible with the symmetry algebra. *J. Math. Phys.* ***36:12*** (1995) 6809–6821.

[662] B. Gürel, I.T. Habibullin. Boundary conditions for two-dimensional integrable chains. *Phys. Lett. A* ***233:1–2*** (1997) 68–72.

[663] M. Gürses, A. Karasu. Degenerate Svinolupov KdV systems. *Phys. Lett. A* ***214:1–2*** (1996) 21–26.

[664] M. Gũrses, A. Karasu, R. Turhan. Non-autonomous Svinolupov Jordan KdV Systems. SI/0101031 (2001).

[665] I.T. Habibullin. Boundary problems for integrable equations, [129].

[666] I.T. Habibullin. Symmetries of boundary problems. *Phys. Lett. A* ***178:5–6*** (1993) 369–375.

[667] I.T. Habibullin. Boundary conditions for integrable chains. *Phys. Lett. A* ***207:5*** (1995) 263–268.

[668] I.T. Habibullin. Symmetry approach in boundary value problems. *J. Nonl. Math. Phys.* ***3*** (1996) 147–151.

[669] I.T. Habibullin, V.V. Sokolov, R.I. Yamilov. Multi-component integrable systems and nonassociative structures, [133, pp. 139–168].

[670] I.T. Habibullin, S.I. Svinolupov. Integrable boundary value problem for the multi-component Schrödinger equations. *Physica D* ***87:1–4*** (1995) 101–106.

[671] I.T. Habibullin, A.N. Vil'danov. Integrable boundary conditions for nonlinear lattices. pp. 173–180 in: SIDE III (Sabaudia, 1998), *CRM Proc. Lect. Notes* ***25***, AMS, Providence, 2000.

[672] R. Halburd. Integrable relativistic models and the generalized Chazy equation. *Nonlinearity* ***12*** (1999) 931–938.

[673] T. Hartl, C. Athorne. Solvable structures and hidden symmetries. *J. Phys. A* ***27:10*** (1994) 3463–3474.

[674] M. Hénon. Integrals of the Toda lattice. *Phys. Rev. B* ***9:4*** (1974) 1921–1923.

[675] M. Hénon. A two-dimensional mapping with a strange attractor. *Commun. Math. Phys.* ***50:1*** (1976) 69–77.

[676] M. Hénon. On the numerical computation of Poincaré maps. *Physica D* ***5:2–3*** (1982) 412–414.

[677] R. Hernández Heredero. Integrable quasilinear equations. *Theor. Math. Phys.* ***133:2*** (2002) 1514–1526.

[678] R. Hernández Heredero. Classification of fully nonlinear integrable evolution equations of third order. *J. Nonl. Math. Phys.* ***12:4*** (2005) 567–585.

[679] R. Hernández Heredero, D. Levi, M.A. Rodriguez, P. Winternitz. Lie algebra contractions and symmetries of the Toda hierarchy. *J. Phys. A* ***33:28*** (2000) 5025–5040.

[680] R. Hernández Heredero, D. Levi, M.A. Rodriguez, P. Winternitz. Relation between Bäcklund transformations and higher continuous symmetries of the Toda equation. *J. Phys. A* ***34:11*** (2001) 2459–2465.

[681] R. Hernández Heredero, D. Levi, P. Winternitz. Symmetries of the discrete Burgers equation. *J. Phys. A* ***32:14*** (1999) 2685–2695.

[682] R. Hernández Heredero, V.V. Sokolov, S.I. Svinolupov. Toward the classification of third order integrable evolution equations. *J. Phys. A* ***27:13*** (1994) 4557–4568.

[683] R. Hernández Heredero, V.V. Sokolov, S.I. Svinolupov. Classification of third order integrable evolution equations. *Physica D* ***87:1–4*** (1995) 32–36.

[684] U. Hertrich-Jeromin. Transformations of discrete isothermic nets and discrete CMC-1 surfaces in hyperbolic space. *Manuscripta Mathematica* ***102:4*** 465–486.

[685] J. Hietarinta. Permutation-type solutions to the Yang-Baxter and other n-simplex equations. *J. Phys. A* ***30:13*** (1997) 4757–4771.

[686] J. Hietarinta. A new two-dimensional lattice model that is "consistent around a cube". *J. Phys. A* ***37:6*** (2004) L67–73.

[687] J. Hietarinta. Searching for CAC-maps. *J. Nonl. Math. Phys.* ***12*** Suppl. 2 (2005) 223–230.

[688] J. Hietarinta, R. Hirota. Multidormion solutions of the Davey-Stewartson equation. *Phys. Lett. A* ***145:5*** (1990) 237–244.

[689] J. Hietarinta, K. Kajiwara. Rational solutions to d-P_{IV}. *solv-int 9705002*

[690] J. Hietarinta, A. Ramani, B. Grammaticos. Continuous vacua in bilinear soliton equations. *J. Phys. A* ***27:9*** (1994) 3149–3158.

[691] J. Hietarinta, C.-M. Viallet. Singularity confinement and chaos in discrete systems. *Phys. Rev. Let.* ***81:2*** (1991) 325–328.

[692] R. Hirota. Exact solution of the Korteweg-de Vries equation for multiple collisions of solitons. *Phys. Rev. Let.* ***27:18*** (1971) 1192–1194.

[693] R. Hirota. Direct method of finding exact solutions of nonlinear evolution equations. [109, 40–68]

[694] R. Hirota. Nonlinear partial difference equations. I. A difference analog of the Korteweg-de Vries equation. *J. Phys. Soc. Japan* ***43*** (1977) 1424–1433.

[695] R. Hirota. Nonlinear partial difference equations. II. Discrete-time Toda equation. *J. Phys. Soc. Japan* ***43*** (1977) 2074–2078.

[696] R. Hirota. Nonlinear partial difference equations. III. Discrete sine-Gordon equation. *J. Phys. Soc. Japan* ***43*** (1977) 2079–2086

[697] R. Hirota. Nonlinear partial difference equations. IV. Bäcklund transformations for the discrete-time Toda equation. *J. Phys. Soc. Japan* ***45*** (1978) 1321–1332.

[698] R. Hirota. Nonlinear partial difference equations. V. Nonlinear equations reducible to linear equations. *J. Phys. Soc. Japan* ***46:1*** (1979) 312–319.

[699] R. Hirota. Discrete analog of a generalized Toda equation. *J. Phys. Soc. Japan* ***50:11*** (1981) 3785–3791.

[700] R. Hirota. "Molecule Solutions" of coupled modified KdV equations. *J. Phys. Soc. Japan* ***66*** (1997) 2530–2532.

[701] R. Hirota, K. Kimura, H. Yahagi. How to find the conserved quantities of nonlinear discrete equations. *J. Phys. A* ***34*** (2001) 10377–10386.

[702] R. Hirota, Y. Ohta, J. Satsuma. Wronskian structures of solutions for soliton equations. *Progr. Theor. Phys.* ***94*** suppl. (1988) 59–72.

[703] R. Hirota, J. Satsuma. A variety of nonlinear network equations generated from the Bäcklund transformation for the Toda lattice. *Progr. Theor. Phys.* ***59*** suppl. (1976) 64–100.

[704] R. Hirota, J. Satsuma. Nonlinear evolution equations generated from the Bäcklund transformation for the Boussinesq equation. *Progr. Theor. Phys.* ***57*** (1977) 797–807.

[705] R. Hirota, J. Satsuma. Soliton solutions of a coupled Korteweg-de Vries equation. *Phys. Lett. A* ***85:8–9*** (1981) 407–408.

[706] D.D. Holm, A.N.W. Hone. Nonintegrability of a fifth order equation with integrable twobody dynamics. *Theor. Math. Phys.* ***137:1*** (2003) 1459–1471.

[707] D.D. Holm, M.F. Staley. Wave structures and nonlinear balances in a family of 1+1 evolutionary PDEs. *SIAM J. Appl. Dyn. Syst.* ***2:3*** (2003) 323–380.

[708] A.N.W. Hone. Non-autonomous Henon-Heiles systems. *Physica D* ***118:1–2*** (1998) 1–16.

[709] A.N.W. Hone. The associated Camassa-Holm equation and the KdV equation. *J. Phys. A* ***32:27*** (1999) L307–314.

[710] A.N.W. Hone. Reciprocal link for 2+1-dimensional extensions of shallow water equations. *Appl. Math. Lett.* ***13*** (2000) 37–42.

[711] A.N.W. Hone, V.B. Kuznetsov, O. Ragnisco. Bäcklund transformations for many-body systems related to KdV. *J. Phys. A* ***32:27*** (1999) L299–306.

[712] A. Hone, V.S. Novikov, C. Verhoeven. An integrable hierarchy with a perturbed Henon-Heiles system. *Inverse Problems* ***22*** (2006) 2001–2020.

[713] A.N.W. Hone, J.P. Wang. Prolongation algebras and Hamiltonian operators for peakon equations. *Inverse Problems* ***19*** (2003) 129–145.

[714] E. Hopf. A mathematical example displaying features of turbulence (excerpt). *Commun. Pure Appl. Math.* ***1*** (1948) 303.

[715] E. Hopf. The partial differential equation $u_t = uu_x + \mu u_{xx}$. *Comm. Pure and Appl. Math.* ***3*** (1950) 201–230.

[716] F. Hoppenstaedt. Mathematical theories of populations: demographics, genetics and epidemics. *CBMS Regional Conference Series in Appl. Math.* ***20*** (1975) SIAM, Philadelphia.

[717] L. Hsu, N. Kamran, P.J. Olver. Equivalence of higher order Lagrangians. II. The Cartan form for particle Lagrangians. *J. Math. Phys.* ***30:4*** (1989) 902–906.

[718] X.B. Hu, P.A. Clarkson. Rational solutions of a differential-difference KdV equation, the Toda equation and the discrete KdV equation. *J. Phys. A* ***28:17*** (1995) 5009–5016.

[719] X.B. Hu, P.A. Clarkson. Bäcklund transformations and nonlinear superposition formulae of a differential-difference KdV equation. *J. Phys. A* ***31:5*** (1998) 1405–1414.

[720] X.B. Hu, P.A. Clarkson, R. Bullough. New integrable differential-difference systems. *J. Phys. A* ***30:20*** (1997) L669–676.

[721] J.K. Hunter, R. Saxton. Dynamics of director fields. *SIAM J. on Appl. Math.* ***51:6*** (1991) 1498–1521.

[722] J.C. Hurtubise, N. Kamran. Projective connections, double fibrations, and formal neighbourhoods of lines. *Math. Ann.* ***292*** (1992) 383–409.

[723] A. Iatrou. Three dimensional integrable mappings, nlin.SI/0306052.

[724] A. Iatrou. Higher dimensional integrable mappings. *Physica D* ***179*** (2003) 229–254.

[725] A. Iatrou, J.A.G. Roberts. Integrable mappings of the plane preserving biquadratic invariant curves. *J. Phys. A* ***34:34*** (2001) 6617–6636.

[726] A. Iatrou, J.A.G. Roberts. Integrable mappings of the plane preserving biquadratic invariant curves: II. *Nonlinearity* ***15*** (2002) 459–489.

[727] N.H. Ibragimov, A.B.Shabat. Group theoretical approach to the Korteweg-de Vries equation. *Dokl. Akad. Nauk SSSR* ***244:1*** (1979) 57–61.

[728] N.H. Ibragimov, A.B. Shabat. Evolutionary equations with nontrivial Lie-Bäcklund group. *Funct. Anal. Appl.* ***14:1*** (1980) 25–36.

[729] N.H. Ibragimov, A.B. Shabat. On infinite dimensional Lie-Bäcklund algebras. *Funct. Anal. Appl.* ***14:4*** (1980) 79–80.

[730] L. Infeld, T.E. Hull. The factorization method. *Rev. Modern Phys.* ***23:1*** (1951) 21–68.

[731] J.Ishimori. Multi vortex solutions of a two-dimentional nonlinear wave equation. *Progress of Theor. Phys.* ***72*** (1984) 33–37.

[732] M. Ito. Symmetries and conservation laws of a coupled nonlinear wave equation. *Phys. Lett. A* ***91:7*** (1982) 335–338.

[733] Y. Itoh. Integrals of a Lotka-Volterra system of odd number of variables. *Progr. Theor. Phys.* ***78*** (1987) 507–510.

[734] A.R. Its, A.G. Izergin, V.E. Korepin, V.Yu. Novokshenov. Temperature autocorrelations of the transverse Ising chain at the critical magnetic field. *Nucl. Phys. B* ***340*** (1990) 752.

[735] A.R. Its, A.V. Kitaev, A.S. Fokas. The isomonodromy approach in the theory of two-dimensional quantum gravitation. *Russ. Math. Surveys* ***45:6*** (1987) 155–157.

[736] A.R. Its, V.P. Kotlyarov. Explicit formulas for solutions of a nonlinear Schrödinger equation. *Dokl. Ukr. Akad. Nauk A* ***11*** (1976) 965–968.

[737] R. Ivanov. Conformal properties and Bäcklund transform for the Associated Camassa-Holm equation. *arXiv:nlin.SI/0507005, 3 Jul 2005.*

[738] N. Jacobson. Structure and representations of Jordan algebras. *AMS Colloquium Publ.* ***39***, Providence, 1968.

[739] M. Jaworski, D. Kaup. Direct and inverse scattering problem associated with the elliptic sinh-Gordon equation. *Inverse Problems* ***6:4*** (1990) 543–556.

[740] M. Jimbo, T. Miwa, K. Ueno. Monodromy preserving deformation of linear ordinary differential equations with rational coefficients I. General theory and τ-function. *Physica D* ***2*** (1981) 306.

[741] M. Jimbo, T. Miwa. Monodromy preserving deformation of ordinary differential equations with rational coefficients II. *Physica D* ***2*** (1981) 407.

[742] M. Jimbo, T. Miwa. Monodromy preserving deformation of ordinary differential equations with rational coefficients III. *Physica D* ***4*** (1981) 26.

[743] M. Jimbo, T. Miwa. *Publ. RIMS* ***19:3*** (1983) 943.

[744] M. Jimbo, T. Miwa, Y. Mori, M. Sato. Density matrix of an impenetrable Bose gas and the fifth Painlevé transcendent. *Physica D* ***1:1*** (1980) 80–158.

[745] R.S. Johnson. On the inverse scattering transform, the cylindrical Korteweg-de Vries equation and similarity solutions. *Phys. Lett. A* ***72:3*** (1979) 197–199.

[746] R.S. Johnson. *J. Fluid Mech.* ***97:4*** (1980) 701–719.

[747] R.S. Johnson. Camassa-Holm, Korteweg-de Vries and related models for water waves. *J. Fluid Mech.* ***455*** (2002) 63–82.

[748] H. Jonas. Über die Transformation der konjugierten systeme und über den gemeinsamen Ursprung der Bianchischen Permutabilitätstheoreme. *Sitzungsber. Berl. Math. Ges.* ***14*** (1915) 96–118.

[749] P. Jordan. Über eine Klasse nichtassoziativer hyperkomplexer Algebren. *Nachr. Ges. Wiss. Göttingen* (1932) 569–575.

[750] M. Kac, P. van Moerbeke. On an explicitly soluble system of nonlinear differential equations related to certain Toda lattices. *Adv. in Math.* ***16*** (1975) 160–169.

[751] B.B. Kadomtsev, V.I. Petviashvili. On the stability of the solitary waves in the weak-dispersive media. *Dokl. Akad. Nauk SSSR* ***192*** (1970) 753–756.

[752] W. Kahan. Unconventional numerical methods for trajectory calculations. Unpublished lecture notes (1993).

[753] W. Kahan, R.-C. Li. Unconventional schemes for a class of ordinary differential equations — with applications to the Korteweg-de Vries equation. *Jour. Comp. Phys.* ***134*** (1997) 316–331.

[754] K. Kajiwara, T. Masuda, M. Noumi, Y. Ohta, Y. Yamada. ${}_{10}E_9$ solution to the elliptic Painlevé equation. *J. Phys. A* ***36*** (2003) L263–272.

[755] K. Kajiwara, T. Masuda, M. Noumi, Y. Ohta, Y. Yamada. Hypergeometric solutions to the q-Painlevé equations. *Int. Math. Res. Notices* (2004) 2497–2521.

[756] K. Kajiwara, J. Satsuma. The conserved quantities and symmetries of the two-dimensional Toda lattice hierarchy. *J. Math. Phys.* ***32:2*** (1991) 506–514.

[757] P.H. van der Kamp, J.A. Sanders. On testing integrability. *J. Nonl. Math. Phys.* ***8:4*** (2001) 561–574.

[758] N. Kamran, K.G. Lamb, W.F. Shadwick. The local equivalence problem $d^2y/dx^2 = F(x, y, dy/dx)$ and the Painlevé transcendents. *J. Diff. Geom.* ***22*** (1985) 139–150.

[759] N. Kamran, P.J. Olver. Equivalence problems for first order Lagrangians on the line. *J. of Diff. Eq.* ***80:1*** (1989) 32–78.

[760] N. Kamran, P.J. Olver. Equivalence of higher order Lagrangians. I. Formulation and reduction. *J. Math. pures et appl.* ***70*** (1991) 369–391.

[761] N. Kamran, P.J. Olver. Equivalence of higher order Lagrangians. III. New invariant differential equations. *Nonlinearity* ***5*** (1992) 601–621.

[762] N. Kamran, W.F. Shadwick. A differential geometric characterization of the first Painlevé transcendent. *Math. Ann.* ***279*** (1987) 117–123.

[763] E. Kartashova. Weakly nonlinear theory of finite-size effects in resonators. *J. Phys. Rev. Letters* ***72*** (1994) 2013–2016.

[764] E. Kartashova. Clipping — a new investigation method for PDE-s in compact domains. *J. Theor. Math. Phys.* ***99*** (1994) 675–680.

[765] E. Kartashova. Wave resonances in systems with discrete spectra, [138, pp. 95–129].

[766] R.M. Kashaev. On discrete three-dimensional equation associated with the local Yang-Baxter relation. *Lett. Math. Phys.* ***38*** (1996) 389–397.

[767] R.M. Kashaev, I.G. Korepanov, S.M. Sergeev. The functional tetrahedron equation. *Theor. Math. Phys.* ***117:3*** (1998) 1402–1413.

[768] R.M. Kashaev, N. Reshetikhin. Affine Toda field theory as a 3-dimensional integrable system. *Commun. Math. Phys.* ***188:2*** (1997) 251–266.

[769] T. Kato, J.B. McLeod. The functional-differential equation $y'(x) = ay(\lambda x) + by(x)$. *Bull. Amer. Math. Soc.* ***77*** (1971) 891–937.

[770] D.J. Kaup. Finding eigenvalue problems for solving nonlinear evolution equations. *Progr. Theor. Phys.* ***54:1*** (1975) 72–78.

[771] D.J. Kaup. A higher-order water-wave equation and the method for solving it. *Progr. Theor. Phys.* ***54*** (1975) 396–408.

[772] D.J. Kaup. *J. Math. Anal. Appl.* ***54*** (1976) 849.

[773] D.J. Kaup. *Stud. Appl. Math.* ***55*** (1976) 9.

[774] D.J. Kaup. *Rocky Mountain J. Math.* ***8:1,2*** (1978) 283.

[775] D.J. Kaup. The inverse scattering solution for the full three dimensional three-wave resonant interaction. *Physica D* ***1:1*** (1980) 45–67.

[776] D.J. Kaup. *Stud. Appl. Math.* ***62*** (1980) 75–79.

[777] D.J. Kaup. On the inverse scattering problem for cubic eigenvalue problems of the class $\psi_{xxx} + 6Q\psi_x + 6R\psi = \lambda\psi$. *Stud. Appl. Math.* ***62*** (1980) 189–216.

[778] D.J. Kaup. The lump solutions and the Bäcklund transformation for the three-dimensional three-wave resonant interaction. *J. Math. Phys.* ***22:6*** (1981) 1176–1181.

[779] D.J. Kaup. Asymptotic expansions for the transmission coefficients of the so-called Davey-Stewartson I system. *Inverse Problems* ***9:3*** (1993) 417–432.

[780] D.J. Kaup, T.I. Lakoba, Y. Matsuno. Perturbation theory for the Benjamin-Ono equation. *Inverse Problems* ***15:1*** (1999) 215–240.

[781] D.J. Kaup, A.C. Newell. The Goursat and Cauchy Problems for the Sine-Gordon Equation *SIAM J. on Appl. Math.* ***34:1*** (1978) 37–54.

[782] D.J. Kaup, A.C. Newell. An exact solution for a derivative nonlinear Schrödinger equation. *J. Math. Phys.* ***19:4*** (1978) 798–801.

[783] D.J. Kaup, N.N. Rao. A new class of exact solutions for coupled scalar field equations. *J. Phys. A* ***24:17*** (1991) L993–999.

[784] D.J. Kaup, V.I. Rupasov. Exactly solvable one-dimensional model of resonance energy transfer. *J. Phys. A* ***29:9*** (1996) 2149–2162.

[785] D.J. Kaup, V.I. Rupasov. Exactly solvable 3D model of resonance energy transfer. *J. Phys. A* ***29:21*** (1996) 6911–6923.

[786] I. Kay, H.E. Moses. The determination of the scattering potential from the spectral measure function. I. Continuous spectrum; II. Point eigenvalues and proper eigenfunctions; III. Calculation of the scattering potential from the scattering operator of the one-dimensinal Schrödinger equation. *Nuovo Cimento* ***2*** (1955) 917–961; ***3*** (1956) 66–84; 276–304.

[787] I. Kay, H.E. Moses. Reflectionless transmission through dielectrics and scattering potentials. *J. Appl. Phys.* ***27:12*** (1956) 1503–1508.

[788] F.A. Khalilov, E.Ya. Khruslov. Matrix generalization of the modified Korteweg-de Vries equation. *Inverse Problems* ***6:2*** (1990) 193–204.

[789] S. Kichenassamy, P.J. Olver. Existence and non-existence of solitary wave solutions to higher order model evolution equations. *SIAM J. Math. Anal. 23:5* (1992) 1141–1166.

[790] K. Kimura, R. Hirota. Discretization of the Lagrange top. *J. Phys. Soc. Japan* ***69*** (2000) 3193–3199.

[791] K. Kimura, H. Yahagi, R. Hirota, A. Ramani, B. Grammaticos, Y. Ohta. A new class of integrable discrete systems. *J. Phys. A* ***35*** (2002) 9205–9512.

[792] A.D. King, W.K. Schief. Tetrahedra, octahedra and cubo-octahedra: integrable geometry of multi-ratios. *J. Phys. A* ***36:3*** (2003) 785–802.

[793] A.D. King, W.K. Schief. Application of an incidence theorem for conics: Cauchy problem and integrability of the dCKP equation. *J. Phys. A* ***39:8*** (2006) 1899–1913.

[794] O.M. Kiselev. Hard loss of stability in Painlevë-2 equation. *J. Nonl. Math. Phys.* ***8:1*** (2001) 65–95.

[795] Kiyotsugu, Toshio. *J. Phys. Soc. Japan* ***50:2*** (1981) 361–362.

[796] Y. Kodama, M.J. Ablowitz, J. Satsuma. Direct and inverse scattering problems of the Nonlinear Intermediate Long Wave equation. *J. Math. Phys.* ***23*** (1982) 564–576.

[797] Y. Kodama, J. Satsuma, M.J. Ablowitz. Nonlinear Intermediate Long-Wave equation: analysis and method of solution. *Phys. Rev. Let.* ***46:11*** (1981) 687–690.

[798] A.N. Kolmogorov, I.G. Petrovsky, N.S. Piskunov. The study of a diffusion equation related to the increase of the quantity of matter, and its application to one biological problem. *Bull. Univ. Moscow, Ser. Internat. Sect. A Math. mech.* ***1*** (1937) 1–26.

[799] I.V. Komarov, V.B. Kuznetsov. Quantum Euler-Manakov top on the three-sphere S_3. *J. Phys. A* ***24:13*** (1991) L737–742.

[800] K. Konno, Y.H. Ichikawa, M. Wadati. A loop soliton propagating along a stretched rope. *J. Phys. Soc. Jpn.* ***50*** (1981) 1025–1026.

[801] B.G. Konopelchenko. The polynomial spectral problem of arbitrary order: a general form of the integrable equations and Backlund transformations. *J. Phys. A* ***14:12*** (1981) 3125–3141.

[802] B.G. Konopelchenko. On the general structure of nonlinear evolution equations integrable by the two-dimensional matrix spectral problem. *Commun. Math. Phys.* ***87:1*** (1982) 105–125.

[803] B.G. Konopelchenko. On the gauge-invariant description of the evolution equations integrable by Gelfand-Dikij spectral problems. *Phys. Lett. A* ***92:7*** (1982) 323–327.

[804] B.G. Konopelchenko. Nonlinear transformations and integrable evolution equations. *Fortschr. Phys.* ***31*** (1983) 253–296.

[805] B.G. Konopelchenko. The two-dimensional second-order differential spectral problem: compatibility conditions, general BTs and integrable equations. *Inverse Problems* ***4:1*** (1988) 151–163.

[806] B.G. Konopelchenko. Recursion and group structures of the integrable equations in 1+1 and 1+2 dimensions. Bilocal approach. *Inverse Problems* ***4:3*** (1988) 785–814.

[807] B.G. Konopelchenko. The nonabelian 1+1-dimensional Toda lattice as the periodic fixed point of the Laplace transform for the 2+1-dimensional integrable system. *Phys. Lett. A* ***156:5*** (1991) 221–222.

[808] B.G. Konopelchenko. Nets in $\mathbb{R}^3$, their integrable evolutions and the DS hierarchy. *Phys. Lett. A* ***183:2–3*** (1993) 153–159.

[809] B.G. Konopelchenko. Surfaces of revolution and their integrable dynamics via the Schrödinger and KdV equations. *Inverse Problems* ***12:4*** (1996) L13–18.

[810] B.G. Konopelchenko. Soliton curvatures of surfaces and spaces. *J. Math. Phys.* ***38:1*** (1997) 434–457.

[811] B.G. Konopelchenko. Gauss-Codazzi equations for generic surfaces: equivalence to the DS linear problem with constraint, linearizability and reductions. *J. Phys. A* ***30:13*** (1997) L437–L441.

[812] B.G. Konopelchenko, L. Martínez Alonso, E. Medina. Hidden integrable hierarchies of AKNS type. *J. Phys. A* ***32:19*** (1999) 3621–3635.

[813] B.G. Konopelchenko, W. Oevel. An r-matrix approach to nonstandard classes of integrable equations. *Publ. RIMS* ***29*** (1993) 581–666.

[814] B.G. Konopelchenko, C. Rogers. On generalized Loewner systems: novel integrable equations in 2+1 dimensions. *J. Math. Phys.* ***34:1*** (1993) 214–242.

[815] B.G. Konopelchenko, W.K. Schief. Three-dimensional integrable lattices in Euclidean spaces: conjugacy and orthogonality. *R. Soc. Lond. Proc. Ser. A* ***454*** (1998) 3075–3104.

[816] B.G. Konopelchenko, W.K. Schief. Menelaus' theorem, Clifford configurations and inversive geometry of the Schwarzian KP hierarchy, *J. Phys. A* ***35:29*** (2002) 6125–6144.

[817] B.G. Konopelchenko, W.K. Schief. Reciprocal figures, graphical statics and inversive geometry of the Schwarzian BKP hierarchy. *Stud. Appl. Math.* ***109:2*** (2002) 89–124.

[818] B.G. Konopelchenko, J. Sidorenko, W. Strampp. (1+1)-dimensional integrable systems as symmetry constraints of (2+1)-dimensional systems. *Phys. Lett. A* ***157:1*** (1991) 17–21.

[819] B.G. Konopelchenko, W. Strampp. The AKNS hierarchy as symmetry constraint of the KP hierarchy. *Inverse Problems* ***7*** (1991) L17–24.

[820] B.G. Konopelchenko, W. Strampp. Reductions of (2+1)-dimensional integrable systems via mixed potential-eigenfunction constraints *J. Phys. A* ***25:16*** (1992) 4399–4411.

[821] B.G. Konopelchenko, I.A. Taimanov. Constant mean curvature surfaces via an integrable dynamical system. *J. Phys. A* ***29:6*** (1996) 1261–1265.

[822] T.A. Kontorova, Ya.I. Frenkel. *JETP* ***8*** (1938) 89.

[823] I.G. Korepanov. Particles and strings in a 2+1-D integrable quantum model. *J. Nonl. Math. Phys.* ***7:1*** (2000) 94–119.

[824] D.J. Korteweg, G. de Vries. On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationary waves. *Phil. Mag.* ***39:241*** (1895) 422–443.

[825] B. Kostant. Quantization and representation theory. *Lect. Notes* ***34*** (1979) 287–316.

[826] B. Kostant. The solution to a generalized Toda lattice and representation theory. *Adv. in Math.* (1980).

[827] S.V. Kowalevski. Sur le probleme de la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe. *Acta Math.* ***12*** (1889) 177–232.

[828] R.A. Kraenkel, A. Zenchuk. Two-dimensional integrable generalization of the Camassa-Holm equation. *Phys. Lett. A* ***260:3–4*** (1999) 218–224.

[829] M.G. Krein. Determination of the density of an inhomogeneous symmetric string from its frequency spectrum. *Dokl. Akad. Nauk SSSR* ***76*** (1951) 345–348.

[830] M.G. Krein. On inverse problems for an inhomogeneous string. *Dokl. Akad. Nauk SSSR* ***82*** (1952) 669–672.

[831] I.M. Krichever. Elliptic solutions of the KP equation and integrable particle systems. *Funct. Anal. Appl.* ***14*** (1980) 45.

[832] I.M. Krichever. Two-dimensional periodic difference operators and algebraic geometry. *Dokl. Akad. Nauk SSSR* ***285*** (1985) 31–36.

[833] I.M. Krichever. Elliptic analog of the Toda lattice. *Int. Math. Res. Notices* (2000)383–412.

[834] I. Krichever, O. Lipan, P. Wiegmann, A. Zabrodin. Quantum integrable models and discrete classical Hirota equations. *Commun. Math. Phys.* ***188:2*** (1997) 267–304.

[835] I.M. Krichever, S.P. Novikov. Holomorphic bundles and nonlinear equations. Rank 2 finite-gap solutions. *Dokl. Akad. Nauk SSSR* ***247:1*** (1979) 33–36.

[836] I.M. Krichever, S.P. Novikov. Holomorphic bundles over algebraic curves and nonlinear equations. *Russ. Math. Surveys* ***35:6*** (1980) 53–79.

[837] I.M. Krichever, S.P. Novikov. Trivalent graphs and solitons. *Russian Math. Surveys* ***54:1*** (1999) 1248–1249.

[838] M. Kruskal. Nonlinear wave equations. [1017, pp. 310–354].

[839] N.A. Kudryashov. On exact solutions of families of Fischer equations. *Theor. Math. Phys.* ***94:2*** (1993) 211–218.

[840] N.A. Kudryashov. Fourth-order analogies to the Painlevé equations. *J. Phys. A* ***35*** (2002) 4617–4632.

[841] A.E. Kudryavtsev. Soliton-like collisions for a Higgs scalar field. *Sov. Phys. JETP Lett.* ***22*** (1975) 82–83.

[842] P.P. Kulish. Factorization of the classical and the quantum S-matrix and conservation laws. *Theor. Math. Phys.* ***26:2*** (1976) 132–137

[843] P.P. Kulish. Quantum difference nonlinear Schrödinger equation. *Lett. Math. Phys.* ***5*** (1981) 191–197.

[844] P.P. Kulish, E.K. Sklyanin. $O(N)$-invariant nonlinear Schrödinger equation — a new completely integrable system. *Phys. Lett. A* ***84:7*** (1981) 349–352.

[845] P.P. Kulish, E.K. Sklyanin. Quantum spectral transform metod. Recent developments. *Lect. Notes in Physics* ***151***, 61–119, Springer, 1982.

[846] P.P. Kulish, E.K. Sklyanin. The general $U_q(sl(2))$ invariant XXZ integrable quantum spin chain. *J. Phys. A* ***24:8*** (1991) L435–439.

[847] P.P. Kulish, E.K. Sklyanin. Algebraic structures related to reflection equations. *J. Phys. A* ***25:22*** (1992) 5963–5975.

[848] A. Kuniba, S. Nakamura, R. Hirota. Pfaffian and determinant solutions to a discretized Toda equation for B_r, C_r and D_r. *J. Phys. A* ***29:8*** (1996) 1759–1766.

[849] A. Kundu. Exact solutions to higher-order nonlinear equations through gauge transformation. *Physica D* ***25:1-3*** (1987) 399–406.

[850] A. Kundu, O. Ragnisco. A simple lattice version of the Nonlinear Schrödinger equation and its deformation with an exact quantum solution. *J. Phys. A* ***27:19*** (1994) 6335–6347.

[851] B.A. Kupershmidt, Yu.I. Manin. Long wave equation with free boundaries. I. Conservation laws. *Funct. Anal. Appl.* ***11:3*** (1977) 188–197.

[852] B.A. Kupershmidt, Yu.I. Manin. Long wave equations with a free surface. II. The Hamiltonian structure and the higher equations. *Funct. Anal. Appl.* ***12:1*** (1978) 25–37.

[853] B.A. Kupershmidt.

[854] B.A. Kupershmidt. On algebraic models of dynamical systems. *Lett. Math. Phys.* ***6:2*** (1982) 85–89.

[855] B.A. Kupershmidt. Deformations of integrable systems. *Proc. Roy. Irish Acad. Sect. A* ***83:1*** (1983) 45–74.

[856] B.A. Kupershmidt. A super KdV equation: an integrable system. *Phys. Lett. A* ***102:5–6*** (1984) 213–215.

[857] B.A. Kupershmidt. Mathematics of dispersive water waves. *Commun. Math. Phys.* ***99:1*** (1985) 51–73.

[858] B.A. Kupershmidt. Super long waves. *Mech. Res. Commun.* ***13*** (1986) 47–51.

[859] B.A. Kupershmidt. An algebraic model of graded calculus of variations. *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* ***101*** (1987) 151–166.

[860] B.A. Kupershmidt. GL_2-orbit of the Korteweg-de Vries equation. *Phys. Lett. A* ***156:1–2*** (1991) 53–60.

[861] B.A. Kupershmidt. On the nature of the Virasoro algebra. *J. Nonl. Math. Phys.* ***6:2*** (1998) 222–245.

[862] B.A. Kupershmidt. What a classical r-matrix really is. *J. Nonl. Math. Phys.* ***6:4*** (1998) 448–488.

[863] Y. Kuramoto, T. Tsuzuki. Persistent propagation of concentration waves in dissipative media far from thermal equilibrium. *Progr. Theor. Phys.* ***55*** (1976) 356–369.

[864] M. Kus. Integrals of motion for the Lorenz system, *J. Phys. A* ***16:18*** (1983) L689–692.

[865] V.B. Kuznetsov. Separation of variables for the D_n type periodic Toda lattice. *J. Phys. A* ***30:6*** (1997) 2127–2138.

[866] V.B. Kuznetsov, F.W. Nijhoff, E.K. Sklyanin. Separation of variables for the Ruijsenaars system. *Commun. Math. Phys.* ***189:3*** (1997) 855–877.

[867] V.B. Kuznetsov, M. Salerno, E.K. Sklyanin. Quantum Bäcklund transformation for the integrable DST model. *J. Phys. A* ***33:1*** (2000) 171–189.

[868] V.B. Kuznetsov, E.K. Sklyanin. Separation of variables for the A_2 Ruijsenaars model and a new integral representation for the A_2 Macdonald polynomials. *J. Phys. A* ***29:11*** (1996) 2779–2804.

[869] V.B. Kuznetsov, E.K. Sklyanin. On Bäcklund transformations for many-body systems. *J. Phys. A* ***31:9*** (1998) 2241–2251.

[870] S. Lafortune, B. Grammaticos, A. Ramani. Constructing integrable third-order systems: the Gambier approach. *Inverse Problems* ***14*** (1998) 287–298.

[871] G.L. Lamb, jr. Higher conservation laws in ultrashort optical pulse propagation. *Phys. Lett. A* ***32:4*** (1970) 251–252.

[872] G.L. Lamb, jr. Analytical descriptions of ultrashort optical pulse propagation in a resonant medium. *Rev. Mod. Phys.* ***43:2*** (1971) 99–124.

[873] G.L. Lamb, jr. Bäcklund transformations for certain nonlinear evolution equations. *J. Math. Phys.* ***15:12*** (1974) 2157–2165.

[874] G.L. Lamb, jr. Bäcklund transformations at the turn of the century. [109, 69–79]

[875] C.G. Lange, R.M. Miura. Singular perturbation analysis of boundary-value problems for differential-difference equations. *SIAM J. on Appl. Math.* ***42:3*** (1982) 502–531; II. Rapid oscillations and resonances. ***45:5*** (1985) 687–707; III. Turning point problems. ***45:5*** (1985) 708–734; V. Small shifts with layer behavior. ***54:1*** (1994) 249–272; VI. Small shifts with rapid oscillations. ***54:1*** (1994) 273–283.

[876] C.G. Lange, A.C. Newell. The post-buckling problem for thin elastic shells. *SIAM J. on Appl. Math.* ***21:4*** (1971) 605–629.

[877] C.G. Lange, A.C. Newell. A stability criterion for envelope equations. *SIAM J. on Appl. Math.* ***27:3*** (1974) 441–456.

[878] J. Langer, R. Perline. Curve motion inducing modified Korteweg-de Vries systems. *Phys. Lett. A* ***239:1–2*** (1998) 36–40.

[879] P.D. Lax. Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves. *Comm. Pure Appl. Math.* ***21*** (1968) 467–490.

[880] P.D.Lax. Periodic solutions of Korteweg-de Vries equation. *Comm. Pure Appl. Math.* ***28*** (1975) 141–188.

[881] P.G.L. Leach, G.P. Flessas. Solutions in closed form and as power series to the real Lorenz equations. *J. Phys. A* ***34:30*** (2001) 6013–6029.

[882] D.R. Lebedev, Yu.I. Manin. Conservation laws and representation of Benney's long wave equations. *Phys. Lett. A* ***74:3,4*** (1979) 154–156.

[883] D.R. Lebedev. Benney's long wave equations: Hamiltonian formalism. *Lett. Math. Phys.* ***3*** (1979) 481–488.

[884] S.B. Leble, M.A. Salle. Darboux transformation for the discrete analog of the Silin-Tikhonchuk equations. *Dokl. Akad. Nauk SSSR* ***284:1*** (1985) 110–114.

[885] M.Leo, R.A. Leo, A. Scarsella, G. Soliani. Resonance effects in nonlinear lattices. *The Eur. Phys. J. D* ***11:3*** (2000) 327–334.

[886] D. Levi. Nonlinear differential difference equations as Bäcklund transformations. *J. Phys. A* ***14:5*** (1981) 1083–1098.

[887] D. Levi. Multiple-scale analysis of discrete nonlinear partial difference equations: the reduction of the lattice potential KdV. *J. Phys. A* ***38:35*** (2005) 7677–7689.

[888] D. Levi, R. Benguria. Bäcklund transformations and nonlinear differential-difference equations. *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* ***77*** (1980) 5025–5027.

[889] D. Levi, M.C. Nicci, C. Rogers, P. Winternitz. Group theoretical analysis of a rotating shallow liquid in a rigid container. *J. Phys. A* ***22:22*** (1989) 4743–4767.

[890] D. Levi, M. Petrera, C. Scimiterna. The lattice Schwarzian KdV equation and its symmetries. *J. Phys. A* ***40*** (2007) 12753–12761.

[891] D. Levi, L. Pilloni, P.M. Santini. Integrable three-dimensional lattices. *J. Phys. A* ***14:7*** (1981) 1567–1575.

[892] D. Levi, O. Ragnisco. Non-linear differential-difference equations with N-dependent coefficients. I,II. *J. Phys. A* ***12:7*** (1979) L157–162; L163–167.

[893] D. Levi, O. Ragnisco. The inhomogeneous Toda lattice: its hierarchy and Darboux-Bäcklund transformations. *J. Phys. A* ***24:8*** (1991) 1729–1739.

[894] D. Levi, O. Ragnisco, M. Bruschi. Continuous and discrete matrix Burgers hierarchies. *Nuovo Cimento B 11:74* (1983) 33–51.

[895] D. Levi, M.A. Rodriguez. Lie symmetries for integrable evolution equations on the lattice. *J. Phys. A* ***32:47*** (1999) 8303–8316.

[896] D. Levi, L. Vinet, P. Winternitz. Lie group formalism for difference equations. *J. Phys. A* ***30:2*** (1997) 633–649.

[897] D. Levi, P. Winternitz. Non-classical symmetry reduction: example of the Boussinesq equation. *J. Phys. A* ***22:15*** (1989) 2915–2924.

[898] D. Levi, P. Winternitz. Continuous symmetries of discrete equations. *Phys. Lett. A* ***152:7*** (1991) 335–338.

[899] D. Levi, P. Winternitz. Symmetries and conditional symmetries of differential-difference equations. *J. Math. Phys.* ***34*** (1993) 3713–3730.

[900] D. Levi, R.I. Yamilov. Conditions for the existence of higher symmetries of evolutionary equations on the lattice. *J. Math. Phys.* ***38*** (1997) 6648–6674.

[901] D. Levi, R.I. Yamilov. Dilation symmetries and equations on the lattice *J. Phys. A* ***32:47*** (1999) 8317–8323.

[902] D. Levi, R.I. Yamilov. Non-point integrable symmetries for equations on the lattice. *J. Phys. A* ***33:26*** (2000) 4809–4823.

[903] D. Levi, R.I. Yamilov. Conditions for the existence of higher symmetries and nonlinear evolutionary equations on the lattice. pp. 135–148 in: Algebraic Methods in Physics (Montreal, 1997), CRM Ser. Math. Phys., New York: Springer, 2001.

[904] D. Levi, R.I. Yamilov. On the integrability of a new discrete Nonlinear Schrödinger equation. *J. Phys. A* ***34:41*** (2001) L553–562.

[905] D. Leites, A. Shapovalov. Manin-Olshansky triples for Lie superalgebras. *J. Nonl. Math. Phys.* ***7:2*** (2000) 120–125.

[906] A.N. Leznov. Exactly integrable systems connected to semisimple algebras of second rank A_2, B_2, C_2, G_2. *J. Nonl. Math. Phys.* ***6:2*** (1999) 181–197.

[907] A.N. Leznov, A.B. Shabat, R.I. Yamilov. Canonical transformations generated by shifts in nonlinear lattices. *Phys. Lett. A* ***174:5–6*** (1993) 397–402.

[908] Y. Li, Y. Zeng. On the non-hereditary recursion operator and the constraint on the potential associated with the Giachetti-Johnson equation and its gauge equivalent Yang equation, *J. Phys. A* ***23:5*** (1990) 721–733.

[909] Y. Li, Y. Zhang. Symmetries of a (2+1)-dimensional breaking soliton equation. *J. Phys. A* ***26:24*** (1993) 7487–7494.

[910] S. Lie. Zur theorie der Flächen konstanter Krümnung. III, IV. *Arch. Math. og Naturvidenskab* ***5:3*** (1880) 282–306, 328–358.

[911] J. Liouville. Sur l'equation aux différences partielles $d^2 \log\lambda/dudv \pm \lambda/2a^2 = 0$. *J. Math. Pures Appl.* ***18:1*** (1853) 71–72.

[912] J. Liouville. Note sur l'integration des equations de la dynamice. *J. Math. Pures Appl.* ***20*** (1855) 137–138.

[913] V.D. Lipovsky, V.B. Matveev, A.O. Smirnov. *Zap. Semin. LOMI* ***150*** (1986) 70–75.

[914] V.D. Lipovsky, A.V. Shirokov. *Funct. Anal. Appl.* ***23:3*** (1989) 65–66.

[915] Q.P. Liu. A new integrable hierarchy of lattice equations. *J. Phys. A* ***25:12*** (1992) 3603–3608.

[916] Q.P. Liu. On the cotangent space analog of the Korteweg-de Vries equation. *Comm. Theor. Phys.* ***24*** (1995) 117–120.

[917] Q.P. Liu. The constrained MKP hierarchy and the generalized Kupershmidt-Wilson theorem. *Lett. Math. Phys.* ***43:1*** (1998) 65–72.

[918] Q.P. Liu. Miura map between lattice Kadomtsev-Petviashvili and its modification is canonical. *J. Math. Phys.* ***42*** (2001) 2105–2112.

[919] Q.P. Liu, C. Athorne. Comment on 'Matrix generalization of the modified Korteweg-de Vries equation'. *Inverse Problems* ***7:5*** (1991) 783–785.

[920] Q.P. Liu, M. Mañas. Discrete Levy transformations and Casorati determinant solutions of quadrilateral lattices. *Phys. Lett. A* ***239:3*** (1998) 159–166.

[921] Q.P. Liu, M. Mañas. Superposition formulae for the discrete Ribaucour transformations of circular lattices. *Phys. Lett. A* ***249*** (1998) 424–430.

[922] Q.P. Liu, M. Mañas. Vectorial Darboux transformations for the Kadomtsev-Petviashvili hierarchy. *J. Nonl. Sci.* ***9:2*** (1999) 213–232.

[923] Yunkang Liu. On functional differential equations with proportional delays. *Ph. D. Thesis*, Cambridge University, 1996.

[924] Yunkang Liu. Regular solutions of the Shabat equation. *J. Diff. Eq.* ***154*** (1999) 1–41.

[925] Yunkang Liu. An existence result for the Shabat equation. *Aeq. Math.* ***64*** (2002) 104–109.

[926] K.E. Lonngren. Experiments on solitary waves. [109, 12–24]

[927] A. Lugovtsov, B. Lugovtsov. *Dynamika sploshnoi sredy* ***1*** (1969) 195–200. (in Russian)

[928] N.A. Lukashevich. The second Painlevé equation. *Diff. Eq.* ***7*** (1971) 853–854.

[929] N.A. Lukashevich. Theory of the fourth Painlevé equation. *Diff. Eq.* ***3*** (1967) 395–399.

[930] S. Lukyanov. Free field representation for massive integrable models. *Commun. Math. Phys.* ***167/1*** (1995) 183–226.

[931] F. Lund. Example of a relativistic, completely integrable, Hamiltonian system. *Phys. Rev. Let.* ***38:21*** (1977) 1175–1178.

[932] F. Lund, T. Regge. Unified approach to strings and vortices with soliton solutions. *Phys. Rev. D* ***14:6*** (1976) 1524–1535.

[933] V.S. L'vov, V.V. Lebedev, M. Paton, I. Procaccia. Proof of scale invariant solutions in the Kardar-Parisi-Zhang and Kuramoto-Sivashinsky equations in $1+1$ dimensions: analytical and numerical results. *Nonlinearity* ***6*** (1993) 25–47.

[934] F. Magri. A simple model of integrable Hamiltonian equation. *J. Math. Phys.* ***19*** (1978) 1156–1162.

[935] F. Magri, M. Pedroni, Zubelli. On the geometry of Darboux transformations for the KP hierarchy and its connection with the discrete KP hierarchy. *Commun. Math. Phys.* ***188:2*** 305–325.

[936] J.-M. Maillet, F.W. Nijhoff. Integrability for multidimensional lattice models. *Phys. Lett. B* ***224*** (1989) 389–396.

[937] V.G. Makhankov. Dynamics of classical solutions in non-integrable systems. *Phys. Rep.* ***35*** (1978) 1–128.

[938] A.Ya. Maltsev. The averaging of nonlocal Hamiltonian structures in Whitham's method. *Int. J. Math. Sci.* ***30:7*** (2002) 399–434.

[939] A.Ya. Maltsev. Weakly-nonlocal symplectic structures, Whitham method, and weakly-nonlocal symplectic structures of hydrodynamic type. *J. Phys. A* ***38:3*** (2005) 637–682.

[940] A.Ya. Maltsev, S.P. Novikov. On the local systems Hamiltonian in the weakly nonlocal Poisson brackets. *Physica D* ***156:(1–2)*** (2001) 53–80.

[941] S.V. Manakov. On the theory of two-dimensional stationary self-focusing of electromagnetic waves. *Sov. Phys. JETP* ***38:2*** (1974) 248–253.

[942] S.V. Manakov. On the complete integrability and stochastization of discrete dynamical systems. *Sov. Phys. JETP* ***40*** (1974) 269–274.

[943] S.V. Manakov. A remark on integration of the Euler equations for n-dimensional rigid body dynamics. *Funct. Anal. Appl.* ***10*** (1976) 328–329.

[944] S.V. Manakov. The inverse scattering transform for the time-dependent Schrödinger equation and Kadomtsev-Petviashvili equation. *Physica D* ***3:1–2*** (1981) 420–427.

[945] S.V. Manakov, P.M. Santini. The Cauchy problem on the plane for the dispersionless Kadomtsev-Petviashvili equation. *JETP Lett.* ***83*** (2006) 462–466.

[946] S.V. Manakov, P.M. Santini, L.A. Takhtajan. Asymptotic behavior of the solutions of the Kadomtsev-Petviashvili equation. *Phys. Lett. A* ***75*** (1980) 451–454.

[947] S.V. Manakov, V.E. Zakharov, L.A. Bordag, V.B. Matveev. Two-dimensional solitons of the KP equation and their interaction. *Phys. Lett. A* ***63:3*** (1977) 205–206.

[948] M. Mañas. Fundamental transformation for quadrilateral lattices: first potentials and τ-functions, symmetric and pseudo-Egorov reductions. *J. Phys. A* ***34*** (2001) 10413–10421.

[949] M. Mañas. From integrable nets to integrable lattices. *J. Math. Phys.* ***43*** (2002) 2523–2546.

[950] M. Mañas, A. Doliwa, P.M. Santini. Darboux transformations for multidimensional quadrilateral lattices. I. *Phys. Lett. A* ***232*** (1997) 99–105.

[951] M.F. Manning. Exact solutions of the Schrödinger equation. *Phys. Rev.* ***48:2*** (1935) 161–164.

[952] E.L. Mansfield, P.A. Clarkson. Symmetries and exact solutions for a 2+1-dimensional shallow water wave equation. *Math. and Computers in Simulation* ***43*** (1997) 39–55.

[953] V.A. Marchenko. The Cauchy problem for the KdV equation with non-decreasing initial data. [162, 273–318]

[954] V.G. Marikhin, A.B. Shabat. Integrable lattices. *Theor. Math. Phys.* ***118:2*** (1999) 173–182.

[955] V.G. Marikhin, V.V. Sokolov. Separation of variables on a non-hyperelliptic curve. *Reg. and Chaot. Dyn.* ***10:1*** (2005) 59–70.

[956] V.G. Marikhin, V.V. Sokolov. On quasi-Stäckel Hamiltonians. *Russ. Math. Surveys* ***60:5*** (2005) 981–983.

[957] R.R. Martin, J. de Pont, T.J. Sharrock. Cyclide surfaces in computer aided design. [125, 253–268].

[958] E.M. Maslov, A.G. Shagalov. On the dynamics of scalar wave collapse. *Phys. Lett. A* ***239:1–2*** (1998) 46–50.

[959] J. Matsukidaira, J. Satsuma, D. Takahashi, T. Tokihiro, M. Torii. Toda-type cellular automaton and its N-soliton solution. *Phys. Lett. A* ***225:4–6*** (1997) 287–295.

[960] J. Matsukidaira, J. Satsuma, W. Strampp. Conserved quantities and symmetries of KP hierarchy. *J. Math. Phys.* ***31*** (1990) 1426–1434.

[961] J. Matsukidaira, D. Takahashi. Third-order integrable difference equations generated by a pair of second-order equations. *J. Phys. A* ***39:5*** (2006) 1151–1161.

[962] V.B. Matveev. Darboux transformation and explicit solutions of the Kadomtcev-Petviaschvily equation, depending on functional parameters. *Lett. Math. Phys.* ***3:3*** (1979) 213–216.

[963] V.B. Matveev. Darboux transformation and the explicit solutions of differential-difference and difference-difference evolution equations. I. *Lett. Math. Phys.* ***3:3*** (1979) 217–222.

[964] V.B. Matveev. Some comments on the rational solutions of the Zakharov-Shabat equations. *Lett. Math. Phys.* ***3:6*** (1979) 503–512.

[965] V.B. Matveev, M.A. Salle. Differential-difference evolution equations. II. Darboux transformation for the Toda lattice. *Lett. Math. Phys.* ***3:5*** (1979) 425–429.

[966] H.P. McKean. Nagumo's equation. *Adv. in Math.* ***4*** (1970) 209–223.

[967] H.P. McKean. Integrable systems and algebraic curves. Global analysis. *Lect. Notes in Math.* ***775*** (1979) 83–200.

[968] H.P. McKean, P. van Moerbeke. The spectrum of Hill's equation. *Invent. Math.* ***30*** (1975) 217–274.

[969] H.P. McKean, E. Trubowitz. Hill's operator and hyperelliptic function theory in the presence of infinitely many branch points. *Comm. Pure Appl. Math.* ***29*** (1976) 143–226.

[970] H.P. McKean, E. Trubowitz. The spectral class of the quantum-mechanical harmonic oscillator. *Commun. Math. Phys.* ***82:4*** (1982) 471–495.

[971] J.B. McLeod, P.J. Olver. The connection between partial differential equations soluble by inverse scattering and ordinary differential equations of Painlevé type. *SIAM J. Math. Anal.* ***14*** (1983) 488–506.

[972] E.M. McMillan. A problem in the stability of periodic systems, [160, pp. 219–244].

[973] E. McSween, P. Winternitz. Integrable and superintegrable Hamiltonian systems in magnetic fields. *J. Math. Phys.* ***41*** (2000) 2957–2967.

[974] S.V. Meleshko, W.K. Schief. A truncated Painlevé expansion associated with the Tzitzeica equation: consistency and general solution. *Phys. Lett. A* ***299:4*** (2002) 349–352.

[975] V.K. Mel'nikov. On equations for wave interactions. *Lett. Math. Phys.* ***7:2*** (1983) 129–136.

[976] V.K. Mel'nikov. A direct method for deriving a multisoliton solution for the problem of interaction of waves on the x, y plane. *Commun. Math. Phys.* ***112:4*** (1987) 639–652.

[977] V.K. Mel'nikov. Integration method of the Korteweg-de Vries equation with a self-consistent source. *Phys. Lett. A* ***133:9*** (1988) 493–496.

[978] V.K. Mel'nikov. Interaction of solitary waves in the system described by the Kadomtsev-Petviashvili equation with a self-consistent source. *Commun. Math. Phys.* ***126:1*** (1989) 201-215.

[979] V.K. Mel'nikov. Integration of the Korteweg-de Vries equation with a source. *Inverse Problems* ***6*** (1990) 233–246.

[980] V.K. Mel'nikov. Integration of the nonlinear Schrodinger equation with a source. *Inverse Problems* ***8*** (1990) 133–147.

[981] Ch. Mercat. Discrete Riemann surfaces and the Ising model. *Commun. Math. Phys.* ***218*** (2001) 177–216.

[982] I. Merola, O. Ragnisco, T. Gui-Zhang. A novel hierarchy of integrable lattices. *Inverse Problems* ***10:6*** (1994) 1315–1334.

[983] A.G. Meshkov. Necessary conditions of the integrability. *Inverse Problems* ***10*** (1994) 635–653.

[984] A.G. Meshkov, V.V. Sokolov. Integrable evolution equations on the N-dimensional sphere. *Commun. Math. Phys.* ***232:1*** (2002) 1–18.

[985] A.G. Meshkov, V.V. Sokolov. Classification of integrable divergent N-component evolution systems. *Theor. Math. Phys.* ***139:2*** (2004) 609–622.

[986] K. Meyberg. Jordan-Tripelsysteme und die Koecher-Konstruktion von Lie-Algebren. *Math. Zeitschrift B* ***115:1*** (1970) 58–78.

[987] A.V. Mikhailov. Integrability of a two-dimensional generalisation of the Toda chain. *Sov. Phys. JETP Lett* ***30*** (1979) 414–418.

[988] A.V. Mikhailov. The reduction problem and the inverse scattering method. *Physica D* ***3:1–2*** (1981) 73–117.

[989] A.V. Mikhailov, V.S. Novikov. Perturbative symmetry approach. *J. Phys. A* ***35:22*** (2002) 4775–4790.

[990] A.V. Mikhailov, M.A. Olshanetsky, A.M. Perelomov. Two-dimensional generalised Toda lattice. *Commun. Math. Phys.* ***79:4*** (1981) 473–488.

[991] A.V. Mikhailov, A.B. Shabat. Integrability conditions for systems of two equations of the form $\vec{u}_t = A(\vec{u})\vec{u}_{xx} + F(\vec{u}, \vec{u}_x)$. I, II. *Theor. Math. Phys.* ***62:2*** (1985) 107–122; *Theor. Math. Phys.* ***66:1*** (1986) 32–44.

[992] A.V. Mikhailov, A.B. Shabat. Integrable deformations of the Heisenberg model. *Phys. Lett. A* ***116:4*** (1986) 191–194.

[993] A.V. Mikhailov, A.B. Shabat, V.V. Sokolov. The symmetry approach to classification of integrable equations. [162, 115–184]

[994] A.V. Mikhailov, A.B. Shabat, R.I. Yamilov. The symmetry approach to classification of nonlinear equations. Complete lists of integrable systems. *Russ. Math. Surveys* ***42:4*** (1987) 1–63.

[995] A.V. Mikhailov, A.B. Shabat, R.I. Yamilov. Extension of the module of invertible transformations. Classification of integrable systems. *Commun. Math. Phys.* ***115:1*** (1988) 1–19.

[996] A.V. Mikhailov, V.V. Sokolov. Integrable ODEs on associative algebras. *Commun. Math. Phys.* ***211:1*** (2000) 231–251.

[997] A.V. Mikhailov, R.I. Yamilov. Towards classification of (2+1)-dimensional integrable equations. Integrability conditions I. *J. Phys. A* ***31:31*** (1998) 6707–6715.

[998] J.W. Miles. Obliquely interacting solitary waves. *J. Fluid Mech.* ***79*** (1977) 157–169.

[999] J.W. Miles. Resonantly interacting solitary waves. *J. Fluid Mech.* ***79*** (1977) 171–179.

[1000] J.W. Miles. The Korteweg-de Vries equation, a historical essay. *J. Fluid Mech.* ***106*** (1981) 131–147.

[1001] M. Mineev-Weinstein, A. Zabrodin. Whitham-Toda hierarchy in the Laplacian growth problem. *J. Nonl. Math. Phys.* ***8*** suppl. (2001) 212–218.

[1002] A.S. Mischenko, *Funct. Anal. Appl.* ***4:3*** (1970) 73–78.

[1003] R.M. Miura. Korteveg-de Vries equation and generalizations. I. A remarkable explicit nonlinear transformation. *J. Math. Phys.* ***9:8*** (1968) 1202–1203.

[1004] R.M. Miura. The Korteweg-de Vries equation: a survey of results. *SIAM Review* ***18:3*** (1976) 412–459; Errata. ***19:4*** (1977) vi.

[1005] R.M. Miura. Accurate computation of the stable solitary wave for the FitzHugh-Nagumo equations. *J. Math. Biol.* ***13*** (1982) 247–269.

[1006] R.M. Miura, C.S. Gardner, M.D. Kruskal. Korteveg-de Vries equation and generalizations. II. Existence of conservation laws and constants of motion. *J. Math. Phys.* ***9:8*** (1968) 1204–1209.

[1007] R.M. Miura, M.D. Kruskal. Application of a nonlinear WKB method to the Korteweg-de Vries equation. *SIAM J. on Appl. Math.* ***26:2*** (1974) 376–395.

[1008] T. Miwa. On Hirota difference equations, *Proc. Japan Acad. A* ***58*** (1982) 9–12.

[1009] F.A. Möbius, Verallgemeinerung des Pascal'schen Theorems das in einen Kegelschnit beschriebene Sechseck betreffend. *J. Reine Angew. Math.* ***36*** (1848) 216–220.

[1010] O.I. Mokhov. Canonical Hamiltonian representation of the Krichever-Novikov equation. *Math. Notes* ***50*** (1991) 939–945.

[1011] O.I. Mokhov. Hamiltonian systems of hydrodynamic type and constant curvature metrics. *Phys. Lett. A* ***166:3–4*** (1992) 215–216.

[1012] O.I. Mokhov. Symplectic and Poisson structures on loop spaces of smooth manifolds, and integrable systems. *Russ. Math. Surveys* ***53:3*** (1998) 515–622.

[1013] O.I. Mokhov, E.V. Ferapontov. Non-local Hamiltonian operators of hydrodynamic type related to metrics of constant curvature. *Russ. Math. Surveys* ***45:3*** (1990) 218–219.

[1014] H.C. Morris, R.K. Dodd. *Physica scripta* ***20*** (1979) 505.

[1015] P.M. Morse. Diatomic molecules according to the wave mechanics. II. Vibrational levels. *Phys. Rev.* ***34:1*** (1929) 57–64.

[1016] J. Moser. Lectures on Hamiltonian systems. *Memoires Am. Math. Soc.* ***81*** (1968) 1.

[1017] J. Moser. Three integrable Hamiltonian systems connected with isospectral deformations. *Adv. Math.* ***16*** (1975) 197–220.

[1018] J. Moser. Geometry of quadrics and spectral theory. *Chern symposium* (1979) 147.

[1019] J. Moser. Finitely many mass points on the line under the influence of an exponential potential integrable system. *Lecture Notes in Physics* ***38*** (1985) 467–498.

[1020] J. Moser, A.P. Veselov. Discrete versions of some classical integrable systems and factorization of matrix polynomials. *Commun. Math. Phys.* ***139*** (1991) 217–243.

[1021] F.Kh. Mukminov, V.V. Sokolov. Integrable evolution equations with constraints. *Math. USSR-Sb.* ***61*** (1988) 389–410.

[1022] M. Musette, R. Conte. The two-singular-manifold method: I. Modified Korteweg-de Vries and sine-Gordon equations. 27:11 (1994) 3895–3913.

[1023] M. Musette, C. Verhoeven. Nonlinear superposition formula for the Kaup-Kupershmidt partial differential equation. *Physica D* ***144:1,2*** (2000) 211–220.

[1024] A. Nagai, J. Satsuma. The Lotka-Volterra equations and the QR algorithm. *J. Phys. Soc. Japan* ***64*** (1995) 3669–3674.

[1025] A. Nagai, J. Satsuma. Discrete soliton equations and convergence acceleration algorithms. *Phys. Lett. A* ***209:5–6*** (1995) 305–312.

[1026] A. Nagai, T. Tokihiro, J. Satsuma. The Toda molecule equation and the epsilon-algorithm. *Math. Comp.* ***67*** (1998) 1565–1575.

[1027] A. Nagai, T. Tokihiro, J. Satsuma. Conserved quantities of box and ball system. *Glasg. Math. J.* ***43A*** (2001) 91–97.

[1028] J.S. Nagumo, S. Arimoto, S. Yoshizawa. An active pulse transmission line simulating nerve axon. *Proc. IRE* ***50*** (1962) 2061–2070.

[1029] K. Nakayama, H. Segur, M. Wadati. Integrability and the motion of curves. *Phys. Rev. Let.* ***69:18*** (1992) 2603–2606.

[1030] K. Narita. Soliton solution to extended Volterra equation. *J. Phys. Soc. Japan* ***51:5*** (1982) 1682–1685.

[1031] K. Narita. Solitons for discrete systems with infinite interaction range. *J. Phys. Soc. Japan* ***52:6*** (1983) 1921–1929.

[1032] K. Narita. N-soliton solutions for nonlocal lattice equations *J. Phys. Soc. Japan* ***68:4*** (1999) 1446–1447.

[1033] K. Narita. New Lorentz invariant partial differential equations and their discrete models. *J. Phys. Soc. Japan* ***73:10*** (2004) 2655–2661.

[1034] H. Nawa. Asymptotic and limiting profiles of blow up solutions of the nonlinear Schrödinger equation with critical power. *Comm. Pure and Appl. Math.* ***52:2*** (1999) 193–270.

[1035] C. Neuman. De problemate quodam mechanica, quod ad primam integralium ultraellipticorum classem revocatur. *J. Reine Angew. Math.* ***56*** (1859) 46–69.

[1036] A.C. Newell. The interrelation between Bäcklund transformations and the inverse scattering transform, [109, 227–240].

[1037] A.C. Newell. Finite amplitude instabilities of partial difference equations. *SIAM J. on Appl. Math.* ***33:1*** (1977) 133–160.

[1038] A.C. Newell. Long waves–short waves; a solvable model. *SIAM J. on Appl. Math.* ***35:4*** (1978) 650–664.

[1039] A.C. Newell, Y. Pomeau. Turbulent crystals in macroscopic systems. *J. Phys. A* ***26:8*** (1993) L429–434.

[1040] A.C. Newell, M.Tabor, Y.B. Zeng. A unified approach to Painlevé expansions. *Physica D* ***29:1–2*** (1987) 1–68.

[1041] M. Nieszporski. Laplace ladder of discrete Laplace equations. *Theor. Math. Phys.* ***133*** (2002) 1576–1584.

[1042] M. Nieszporski. Darboux transformations for 6-point scheme. *J. Phys. A* ***40*** (2007) 4193–4207.

[1043] F.W. Nijhoff. Theory of integrable three-dimensional nonlinear lattice equations. *Lett. Math. Phys.* ***9:3*** (1985) 235–241.

[1044] F. Nijhoff. Lax pair for the Adler (lattice Krichever-Novikov) system. *Phys. Lett. A* ***297:1–2*** (2002) 49–58.

[1045] F.W. Nijhoff, H.W. Capel. The direct linearisation approach to hierarchies of integrable PDEs in 2+1 dimensions: I. Lattice equations and the differential-difference hierarchies. *Inverse Problems* ***6:4*** (1990) 567–590.

[1046] F.W. Nijhoff, H.W. Capel. Integrability and fusion algebra for quantum mappings. *J. Phys. A* ***26:22*** (1993) 6385–6407.

[1047] F.W. Nijhoff, H.W. Capel. The discrete Korteweg-de Vries equation. *Acta Appl. Math.* ***39*** (1995) 133–158.

[1048] F.W. Nijhoff, H.W. Capel, G.L. Wiersma. Integrable lattice systems in two and three dimensions. *in Geometric aspects of the Einstein equations and integrable systems, Lect. Notes Phys. 239* (1984) 263–302.

[1049] Dynamical r-matrix for the elliptic Ruijsenaars-Schneider system. *J. Phys. A* ***29:13*** (1996) L333–340.

[1050] F.W. Nijhoff, G.D. Pang. A time-discretized version of the Calogero-Moser model. *Phys. Lett. A* ***191*** (1994) 101–107.

[1051] F.W. Nijhoff, G.D. Pang. Discrete-time Calogero-Moser model and lattice KP equation. *CRM Proc. and Lecture Notes 9* (1996) 253–264.

[1052] F.W. Nijhoff, V.G. Papageorgiou. Lattice equations associated with the Landau-Lifshitz equations. *Phys. Lett. A* ***141:5–6*** (1989) 269–274.

[1053] F.W. Nijhoff, V.G. Papageorgiou. Similarity reductions of integrable lattices and discrete analogues of Painlevé PII equation. *Phys. Lett. A* ***153:6–7*** (1991) 337–344.

[1054] F.W. Nijhoff, V.G. Papageorgiou, H.W. Capel, G.R.W. Quispel. The lattice Gelfand-Dikii hierarchy. *Inverse Problems* ***8:4*** (1992) 597–621.

[1055] F.W. Nijhoff, G.R.W. Quispel, H.W. Capel. Direct linearization of nonlinear difference-difference equations. *Phys. Lett. A* ***97*** (1983) 125–128.

[1056] F.W. Nijhoff, O. Ragnisco, V.B. Kuznetsov. Integrable time-discretisation of the Ruijsenaars-Schneider model. *Commun. Math. Phys.* ***176*** (1996) 681–700.

[1057] F.W. Nijhoff, J. Satsuma, K. Kajiwara, B. Grammaticos, A. Ramani. A study of the alternate discrete Painlevé II equation. *Inverse Problems* ***12*** (1996) 697–716.

[1058] F.W. Nijhoff, A.J. Walker. The discrete and continuous Painlevé hierarchy and the Garnier system. *Glasgow Math. J.* ***43A*** (2001) 109–123.

[1059] J.J.C. Nimmo. Darboux transformations and the discrete KP equation. *J. Phys. A* ***30*** (1997) 8693–8704.

[1060] J.J.C. Nimmo. Darboux transformations for discrete systems. *Chaos, Solitons and Fractals* ***11*** (2000) 115–120.

[1061] J.J.C. Nimmo. On a non-Abelian Hirota-Miwa equation. *J. Phys. A* ***39*** (2006) 5053–5065.

[1062] J.J.C. Nimmo, W.K. Schief. Superposition principles associated with the Moutard transformation: an integrable discretization of a (2+1)-dimensional sine-Gordon system, *Proc. Roy. Soc. London A* ***453*** (1997) 255–279.

[1063] J.J.C. Nimmo, W.K. Schief. An integrable discretization of a 2+1-dimensional sine-Gordon equation. *Stud. Appl. Math.* ***100:3*** (1998) 295–309.

[1064] J.J.C. Nimmo, R. Willox. Darboux transformations for the two dimensional Toda system. *Proc. R. Soc. London A* ***453*** (1997) 2497–2525.

[1065] L.P. Nizhnik. Integration of multidimensional nonlinear equations by inverse scattering method. *Dokl. Akad. Nauk SSSR* ***254*** (1980) 332.

[1066] A. Nobe, J. Satsuma, T. Tokihiro. From cellular automaton to difference equation: a general transformation method which preserves time evolution patterns. *J. Phys. A* ***34:25*** (2001) L371–379.

[1067] M. Noumi, Y. Yamada. Affine Weyl groups, discrete dynamical systems and Painlevé equations. *Commun. Math. Phys.* ***199:2*** (1998) 281–295.

[1068] M. Noumi, Y. Yamada. Higher order Painlevé equations of type $A_l^{(1)}$. *Funkcial. Ekvac.* ***41*** (1998) 483–503.

[1069] S.P. Novikov. The Schrödinger operators on graphs and topology. *Russian Math. Surveys* ***52:6*** (1997) 1320–1321].

[1070] S.P. Novikov, I.A. Dynnikov. Discrete spectral symmetries of low-dimensional differential operators and difference operators on regular lattices and two-manifolds. *Russian Math. Surveys* ***52:5*** (1997) 1057–1116.

[1071] S.P. Novikov, A.P. Veselov. Exactly solvable two-dimensional Schrödinger operators and Laplace transformations. in: Solitons, geometry, and topology: on the crossroad, 109–132, *AMS Transl. Ser. 2* ***179***, AMS, Providence, 1997.

[1072] V.S. Novikov. Reflectionless potentials of the acoustic spectral problem. *JETP Lett.* ***72:3*** (2000) 223–228.

[1073] V.Yu. Novokshenov. Level spacing functions and connection formulas for Painlevé V transcendent. *Physica D* ***152–153*** (2001) 225–231.

[1074] M.C. Nucci, P.A. Clarkson. The nonclassical method is more general than the direct method for symmetry reductions. An example of the Fitzhugh-Nagumo equation. *Phys. Lett. A* ***164:1*** (1992) 49–56.

[1075] A.W. Nutbourne. The solution of frame matching equation. [125, 233–252].

[1076] A.A. Oblomkov. Monodromy-free Schrödinger operators with quadratically increasing potentials. *Theor. Math. Phys.* ***121:3*** (1999) 1574–1584.

[1077] W. Oevel, A.S. Fokas. *J. Math. Phys.* ***25*** (1984) 918.

[1078] W. Oevel, B. Fuchssteiner, H. Zhang, O. Ragnisco. Mastersymmetries, angle variables and recursion operator of the relativistic Toda lattice. *J. Math. Phys.* ***30*** (1989) 2664–2670.

[1079] W. Oevel, W. Schief. Darboux theorems and the KP hierarchy. in: P.A. Clarkson (ed.), Application of Analytic and Geometric Methods to Nonlinear Differential Equations, Kluwer Academic Publishers, 1993, pp. 193–206.

[1080] W. Oevel, H. Zhang, B. Fuchssteiner. Master symmetries and multi-Hamiltonian formulations for some integrable lattice systems. *Progr. Theor. Phys.* ***81:2*** (1989) 294–308.

[1081] Y. Ohta. Special solutions of discrete integrable systems. [113, 57–83].

[1082] Y. Ohta, R. Hirota, S. Tsujimoto, T. Imai. Casorati and discrete Gram type determinant representations of solutions to the discrete KP hierarchy. *J. Phys. Soc. Japan* ***62*** (1993) 1872–1886.

[1083] Y. Ohta, K. Kajiwara, J. Matsukidaira, J. Satsuma. Casorati determinant solution for the relativistic Toda lattice equation. *J. Math. Phys.* ***34*** (1993) 5190–5204.

[1084] K. Okamoto. Polynomial Hamiltonians associated with Painlevé equations. I; II. Differential equations satisfied by polynomial Hamiltonians. *Proc. Jap. Acad.* ***56*** (1980) 264; 367.

[1085] K. Okamoto. On the τ-function of the Painlevé equations. *Physica D* ***2:3*** (1981) 525–535.

[1086] K. Okamoto. *Math. Ann.* ***275*** (1986) 221.

[1087] M.A. Olshanetsky, A.M. Perelomov. Classical integrable finite dimensional systems related to Lie algebras. *Phys. Reports* ***71:5*** (1981) 313–400.

[1088] P.J. Olver. Evolution equations possessing infinitely many symmetries. *J. Math. Phys.* ***18*** (1977) 1212–1215.

[1089] P.J. Olver. Euler operators and conservation laws of the BBM equation. *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* ***85*** (1979) 143–160.

[1090] P.J. Olver. Conservation laws of free boundary problems and the classification of conservation laws for water waves. *Trans. AMS* ***277:1*** (1983) 353–380.

[1091] P.J. Olver. Hamiltonian perturbation theory and water waves. *Contemp. Math.* ***28*** (1984) 231–249.

[1092] P.J. Olver. The equivalence problem and canonical forms for quadratic Lagrangians. *Acta Appl. Math.* ***9*** (1988) 226–257.

[1093] P.J. Olver. Classical invariant theory and the equivalence problem for particle Lagrangians. *Bull. AMS 18* (1988) 21–26.

[1094] P.J. Olver, Y. Nutku. Hamiltonian structures for systems of hyperbolic conservation laws. *J. Math. Phys.* ***29*** (1988) 1610–1619.

[1095] P.J. Olver, P. Rosenau. Group-invariant solutions of differential equations. *SIAM J. on Appl. Math.* ***47:2*** (1987) 263–278.

[1096] P.J. Olver, P. Rosenau. Tri-Hamiltonian duality between solitons and solitary wave solutions having compact support. *Phys. Rev. E* ***53:2*** (1996) 1900–1906.

[1097] P.J. Olver, V.V. Sokolov. Integrable evolution equations on associative algebras. *Commun. Math. Phys.* ***193:2*** (1998) 245–268.

[1098] P.J. Olver, V.V. Sokolov. Non-abelian integrable systems of the derivative nonlinear Schrödinger type. *Inverse Problems* ***14:6*** (1998) L5–L8.

[1099] P.J. Olver, J.P. Wang. Classification of integrable one-component systems on associative algebras. *Proc. London MS (3)* ***81*** (2000) 566–586.

[1100] M. Omote, M. Wadati. The Bäcklund transformations and Inverse Scattering Method of the Ernst equation. *Progr. Theor. Phys.* ***65:5*** (1981) 1621–1631.

[1101] A.Yu. Orlov, E.I. Shulman. On additional symmetries of nonlinear Schrödinger equation. *Theor. Math. Phys.* ***64:2*** (1985) 862–866.

[1102] A.Yu. Orlov, E.I. Shulman. Additional symmetries for integrable equations and conformal algebra representation. *Lett. Math. Phys.* ***12:3*** (1986) 171–179.

[1103] Yu.N. Ovchinnikov. Weak collapse in the nonlinear Schrödinger equation. *JETP Lett.* ***69:5*** (1999) 418–422.

[1104] Yu.N. Ovchinnikov. Properties of weakly collapsing solutions to the nonlinear Schrödinger equation. *JETP Lett.* ***96:5*** (2002) 975–981.

[1105] Yu.N. Ovchinnikov, I.M. Sigal. Collapse in the Nonlinear Schrödinger equation. *JETP* ***89:1*** (1999) 5–40.

[1106] Yu.N. Ovchinnikov, I.M. Sigal. Optical bistability. *JETP* ***93:5*** (2001) 1004–1016.

[1107] Yu.N. Ovchinnikov, I.M. Sigal. The energy of Ginzburg-Landau vortices. *J. of Appl. Math.* ***13*** (2002) 153.

[1108] Yu.N. Ovchinnikov, I.M. Sigal. Collapse in the Nonlinear Schrödinger equation of critical dimension. *JETP Lett.* ***75:7*** (2002) 357–361.

[1109] Yu.N. Ovchinnikov, I.M. Sigal. Multiparameter family of collapsing solutions to the critical Nonlinear Schrödinger equation in dimension $D = 2$. *JETP* ***97:1*** (2003) 194–203.

[1110] Yu.N. Ovchinnikov, V.L. Vereshchagin. Asymptotic behavior of weakly collapsing solutions of the nonlinear Schrödinger equation. *JETP Lett.* ***74:2*** (2001) 72–76.

[1111] Yu.N. Ovchinnikov, V.L. Vereshchagin. The properties of weakly collapsing solutions to the nonlinear Schrödinger equation at large values of free parameters. *JETP* ***93:6*** (2001) 1307–1313.

[1112] P. Painlevé. Sur les équations différentielles du second ordre et d'ordre superieur dont l'integral général est uniform. *Acta Math.* ***25*** (1902) 1–86.

[1113] V.G. Papageorgiou, F.W. Nijhoff. On some integrable discrete-time systems associated with the Bogoyavlensky lattices. *Phys. A* ***228*** (1996) 172–188.

[1114] V.G. Papageorgiou, F.W. Nijhoff, H.W. Capel. Integrable mappings and nonlinear integrable lattice equations. *Phys. Lett. A* ***147:2–3*** (1990) 106–114.

[1115] T.S. Papatheodorou, A.S Fokas. Evolution theory, periodic particles, and solitons in cellular automata. *Stud. Appl. Math.* ***80*** (1989) 165–182.

[1116] M.V. Pavlov. Elliptic coordinates and multi-Hamiltonian structures of systems of hydrodynamic type. *Russian Acad. Sci. Dokl. Math.* ***59:3*** (1995) 374–377.

[1117] M.V. Pavlov. The Calogero equation and Liouville type equations. *nlin.SI/0101034*

[1118] M.V. Pavlov. Integrable hydrodynamic chains. *J. Math. Phys.* ***44:9*** (2003) 4134–4156.

[1119] H. Peregrine. *J. Fluid Mech.* ***25*** (1966) 321–330.

[1120] A.M. Perelomov. Equilibrium configurations and small oscillations of some dynamical systems. *Ann. Inst. H. Poincaré* ***28:4*** (1978) 407–415.

[1121] A.M. Perelomov. The simple relation between certain dynamical systems. *Commun. Math. Phys.* ***63:1*** (1978) 9–11.

[1122] J.H.H. Perk, H.L. Capel, G.R.W. Quispel, F.W. Nijhoff. Finite temperature correlations for the Ising chain in a transverse field. *Physica A* ***123*** (1984) 1.

[1123] J.K. Perring, T.H.R. Skyrme. A model unified theory. *Nucl. Phys.* ***31*** (1962) 550–555.

[1124] J.F. Plebański. Some solutions of complex Einstein equations. *J. Math. Phys.* ***16*** (1975) 2395–2402.

[1125] K. Pohlmeyer. Integrable Hamiltonian systems and interaction through quadratic constraints. *Commun. Math. Phys.* ***46:3*** (1976) 207–218.

[1126] G. Pöschl, E. Teller. Bemerkungen zur Quantenmechanik des anharmonischen Oszillators. *Zeits. Physik* ***83:3-4*** (1933) 143–151.

[1127] E. Previato. NLS hyperelliptic solutions. *Duke Math. J.* ***52*** (1985) 329–377.

[1128] G.R.W. Quispel. The anisotropic Heisenberg spin chain and the derivative nonlinear Schrödinger equation. *J. Phys. A* ***20:16*** (1987) L1069–1070.

[1129] G.R.W. Quispel, H.W. Capel, V.G. Papageorgiou, F.W. Nijhoff. Integrable mappings derived from soliton equations. *Physica A* ***173*** (1991) 243–266.

[1130] G.R.W. Quispel, F.W. Nijhoff, H.W. Capel, J. van der Linden. Linear integral equations and nonlinear difference-difference equations. *Physica A* ***125*** (1984) 344–380.

[1131] G.R.W. Quispel, J.A.G. Roberts, C.J. Thompson. Integrable mappings and soliton equations. *Phys. Lett. A* ***126*** (1988) 419–421.

[1132] G.R.W. Quispel, J.A.G. Roberts, C.J. Thompson. Integrable mappings and soliton equations: II. *Physica D* ***34:1–2*** (1989) 183–192.

[1133] G.R.W. Quispel, G.S. Turner. Discrete gradient methods for solving ODEs numerically while preserving a first integral. *J. Phys. A* ***29:13*** (1996) L341–349.

[1134] M.L. Rabelo. On equations which describe pseudospherical surfaces. *Stud. Appl. Math.* ***81*** (1989) 221–248.

[1135] O. Ragnisco. A discrete Neumann system. *Phys. Lett. A* ***167:2*** (1992) 165–171.

[1136] O. Ragnisco. Dynamical r-matrices for integrable maps. *Phys. Lett. A* ***198:4*** (1995) 295–305.

[1137] O. Ragnisco, M. Bruschi. Peakons, r-matrix and Toda lattice. *Phys. A* ***228*** (1996) 150–159.

[1138] O. Ragnisco, C.W. Cao, Y.T. Wu. On the relation of the stationary Toda equation and the symplectic maps. *J. Phys. A* ***28:3*** (1995) 573–588.

[1139] O. Ragnisco, S. Rauch-Wojciechowski. Restricted flows of the AKNS hierarchy. *Inverse Problems* ***8:2*** (1992) 245–262.

[1140] O. Ragnisco, S. Rauch-Wojciechowski. Integrable mechanical systems related to the Harry-Dym hierarchy. *J. Math. Phys.* ***35*** (1994) 834–847.

[1141] O. Ragnisco, S. Rauch-Wojciechowski. Integrable maps for the Garnier and for the Neumann system. *J. Phys. A* ***29:5*** (1996) 1115–1124.

[1142] O. Ragnisco, P.M. Santini. Recursion operator and bi-Hamiltonian structure for integrable multidimensional lattices. *J. Math. Phys.* ***29:7*** (1988) 1593–1603.

[1143] O. Ragnisco, P.M. Santini. A unified algebraic approach to integral and discrete evolution equations. *Inverse Problems* ***6:3*** (1990) 441–452.

[1144] O. Ragnisco, P.M. Santini, S. Chitlaru-Briggs, M.J. Ablowitz. An example of $\bar{\partial}$-problem arising in a finite difference context: Direct and inverse problem for the discrete analog of the equation $\psi_{xx} + u\psi = \sigma\psi_y$. *J. Math. Phys.* ***28:4*** (1987) 777–780.

[1145] O. Ragnisco, Yu.B. Suris. On the r-matrix structure of the Neumann system and its discretizations. *In: Algebraic aspects of integrable systems, 285–300, Progr. Nonl. Diff. Eq. Appl.* ***26***, Boston: Birkhäuser, 1997.

[1146] O. Ragnisco, Yu.B. Suris. Integrable discretizations of the spin Ruijsenaars-Schneider models. *J. Math. Phys.* ***38*** (1997) 4680–4691.

[1147] A. Ramani, B. Dorizzi, B. Grammaticos. Painlevé conjecture revisited. *Phys. Rev. Let.* ***49:21*** (1982) 1539–1541.

[1148] A. Ramani, B. Grammaticos. Miura transforms for discrete Painlevé equations. *J. Phys. A* ***25:11*** (1992) L633–637.

[1149] A. Ramani, B. Grammaticos, T. Bountis. The Painlevé property and singularity analysis of integrable and nonintegrable systems. *Phys. Rep.* ***180*** (1989) 160.

[1150] A. Ramani, B. Grammaticos, J. Hietarinta. Discrete versions of the Painlevé equations. *Phys. Rev. Let.* ***67:14*** (1991) 1829–1832.

[1151] A. Ramani, B. Grammaticos, Y. Ohta. The q-Painlevé V equation and its geometrical description. *J. Phys. A* ***34:11*** (2001) 2505–2513.

[1152] A. Ramani, B. Grammaticos, J. Satsuma. Integrability of multidimensional discrete systems. *Phys. Lett. A* ***169:5*** (1992) 323–328.

[1153] A. Ramani, B. Grammaticos, J. Satsuma. Bilinear discrete Painlevé equations. *J. Phys. A* ***28:16*** (1995) 4655–4665.

[1154] A. Ramani, B. Grammaticos, T. Tamizhmani. Quadratic relations in continuous and discrete Painleve equations. *J. Phys. A* ***33:15*** (2000) 3033–3044.

[1155] A. Ramani, B. Grammaticos, T. Tamizhmani, K.M. Tamizhmani. On a transcendental equation related to Painleve III, and its discrete forms. *J. Phys. A* ***33:3*** (2000) 579–590.

[1156] A. Ramani, B. Grammaticos, S. Tremblay. Integrable systems without the Painleve property. *J. Phys. A* ***33:15*** (2000) 3045–3052.

[1157] A. Ramani, N. Joshi, B. Grammaticos, T. Tamizhmani. Deconstructing an integrable lattice equation. *J. Phys. A* ***39:8*** (2006) L145–149.

[1158] A. Ramani, Y. Ohta, B. Grammaticos. Discrete integrable systems from continuous Painlevé equations through limiting procedures. *Nonlinearity* ***13*** (2000) 1073–1085.

[1159] A. Ramani, D. Takahashi, B. Grammaticos, Y. Ohta. The ultimate discretisation of the Painleve equations. *Physica D* ***114:3–4*** (1998) 185–196.

[1160] T. Ratiu. The Lie-algebraic interpretation of the complete integrability of the Rosochatius system. *Math. Methods in Hydrodynamics and Integrability in Dynamical Systems, American Institute of Physics,* (1982) 108.

[1161] A.G. Reyman. Integrable Hamiltonian systems connected with graded Lie algebras. *J. Sov. Math.* **19** (1982) 1507–1545.

[1162] R.L. Ricca. Intrinsic equations for the kinematics of a classical vortex string in higher dimensions. *Phys. Rev. A* ***43:8*** (1991) 4281–4288.

[1163] R.L. Ricca. Rediscovery of Da Rios equations. *Nature* ***352*** (1991) 561–562.

[1164] J.F. Ritt. Differential Algebra. *AMS Colloquim Publ.* ***33***, 1948.

[1165] C. Rogers. On application of generalized Bäcklund transformations to continuum mechanics. [109, 106–135].

[1166] C. Rogers, W.K. Schief. Intrinsic geometry of the NLS equation and its auto-Bäcklund transformation. *Stud. Appl. Math.* ***101:3*** (1998) 267–287.

[1167] N. Rosen, P.M. Morse. On the vibrations of polyatomic molecules. *Phys. Rev.* ***42:2*** (1932) 210–217.

[1168] P. Rosenau, J.M. Hyman. Compactons: solitons with finite wavelength. *Phys. Rev. Let.* ***70:5*** (1993) 564–567.

[1169] E. Rosochatius. Über die Bewegung eines Punktes. *Inaugural dissertation*, Berlin, 1877.

[1170] J. Le Roux. Extensions de la méthode de Laplace aux équations linéaires aux derivées partielles d'ordre supérieur au second. *Bull. Soc. Math. de France* ***27*** (1899) 237–262.

[1171] S.N.M. Ruijsenaars. Relativistic Toda system. Preprint Stichting Centre for Math. and Comp. Sciences, Amsterdam, 1986.

[1172] S.N.M. Ruijsenaars. Complete integrability of Relativistic Calogero-Moser systems and elliptic function identities. *Commun. Math. Phys.* ***110:2*** (1987) 191–213.

[1173] S.N.M. Ruijsenaars. Relativistic Toda systems *Commun. Math. Phys.* ***133:2*** (1990) 217–247.

[1174] S.N.M. Ruijsenaars. Finite-dimensional soliton systems. [121, 165–206]

[1175] S.N.M. Ruijsenaars. Relativistic Lame functions: the special case $g = 2$. *J. Phys. A* ***32:9*** (1999) 1737–1772.

[1176] S.N.M. Ruijsenaars. Reflectionless analytic difference operators (AΔOs): examples, open questions and conjectures. *J. Nonl. Math. Phys.* ***8*** suppl. (2001) 240–248.

[1177] S.N.M. Ruijsenaars, H. Schneider. A new class of integrable systems and its relation to solitons. *Ann. Phys.* ***170*** (1986) 370–405.

[1178] H. Rund. Variational problems and Bäcklund transformations associated with the sine-Gordon and Korteweg-de Vries equations and their extensions. [109, 199–226]

[1179] J.S. Russel. Report on waves. pp. 311–390 in *Rept. 14th Meeting of the British Association for the Advancement od Science.* London: J. Murray, 1844.

[1180] R.Z. Sagdeev. *J. Theor. Phys.* ***31*** (1961) 1955.

[1181] S. Saito. String theories and Hirota's bilinear diference equation. *Phys. Rev. Let.* ***59*** (1987) 1798–1801.

[1182] S. Saito, N. Saitoh. Gauge and dual symmetries and linearization of Hirota's bilinear equations. *J. Math. Phys.* ***28*** (1987) 1052–1055.

[1183] N. Saitoh, S. Saito. General solutions to the Bäcklund transformation of Hirota's bilinear difference equation. *J. Phys. Soc. Japan* ***56*** (1987) 1664–1674.

[1184] H. Sakai. Casorati determinant solutions for the q-difference sixth Painlevé equation. *Nonlinearity* ***11:4*** (1998) 823–833.

[1185] H. Sakai. Rational surfaces associated with affine root systems and geometry of the Painlevé equations. *Commun. Math. Phys.* ***220:1*** (2001) 165–229.

[1186] A. Sakka, U. Mugan. Second-order second-degree Painlevé equations related to Painlevé IV, V, VI equations. *J. Phys. A* ***31:10*** (1998) 2471–2490.

[1187] S.Yu. Sakovich. On integrability of a (2+1)-dimensional perturbed KdV equation. *J. Nonl. Math. Phys.* ***5:3*** (1998) 230–233.

[1188] S.Yu. Sakovich. Coupled KdV equations of Hirota-Satsuma type. *J. Nonl. Math. Phys.* ***6:3*** (1999) 255–262.

[1189] A. Sakovich, S. Sakovich. The short pulse equation is integrable. *J. Phys. Soc. Jpn.* ***74*** (2005) 239–241.

[1190] M.A. Salle. Darboux transformations for nonabelian and nonlocal equations of the Toda lattice type. *Theor. Math. Phys.* ***53:2*** (1982) 227–237.

[1191] J.A. Sanders, J.P. Wang. On the integrability of homogeneous scalar evolution equations. *J. Diff. Eq.* ***147:2*** (1998) 410–434.

[1192] J.A. Sanders, J.P. Wang. On the integrability of non-polynomial scalar evolution equations. *J. Diff. Eq.* ***166:1*** (2000) 132–150.

[1193] J.A. Sanders, J.P. Wang. On recursion operators. *Physica D* ***149:1–2*** (2001) 1–10.

[1194] J.A. Sanders, J.P. Wang. On the integrability of systems of second order evolution equations with two components. *J. Diff. Eq.* ***203:1*** (2004) 1–27.

[1195] P.M. Santini. Dimensional deformations of integrable systems: I. An approach to integrability in multidimensions. *Inverse Problems* ***5*** (1989) 67–86.

[1196] P.M. Santini. The algebraic structures underlying integrability. *Inverse Problems* ***6*** (1990) 99–114.

[1197] P.M. Santini. Solvable nonlinear algebraic equations. *Inverse Problems* ***6:4*** (1990) 665–679.

[1198] P.M. Santini. Integrable nonlinear evolution equations with constraints: I. *Inverse Problems* ***8:2*** (1992) 285–301.

[1199] P.M. Santini, M.J. Ablowitz, A.S. Fokas. The direct linearization of a class of nonlinear evolution equations. *J. Math. Phys.* ***25:9*** (1984) 2614–2619.

[1200] P.M. Santini, A. Doliwa, M. Nieszporski. Integrable dynamics of Toda-type on the square and triangular lattices. *Phys. Rev. E* ***77*** (2008) 056601.

[1201] P.M. Santini, M. Nieszporski, A. Doliwa. An integrable generalization of the Toda law to the square lattice. *Phys. Rev. E* ***70*** (2004) 056615.

[1202] R. Sasaki. Universal Lax pair for generalised Calogero-Moser models. *J. Nonl. Math. Phys.* ***8*** Suppl. (2001) 254–260.

[1203] M. Sato, T. Miwa, M. Jimbo. Studies on holonomic quantum fields. *Proc. Jap. Acad. Ser. A* ***53*** (1977) I. 6–10, II. 147–152, III. 153–158, IV. 183–185, V. 219–224; ***54*** (1978) VI. 1–5, VII. 36–41, VIII. 221, IX. 263, X. 309; ***55*** (1979) XI. 6, XII. 73.

[1204] M. Sato, T. Miwa, M. Jimbo. Holonomic quantum fields. *Pub. RIMS* ***14*** (1978) I. 223; ***15*** (1979) II. 201, III. 577, IV. 871; ***16*** (1980) V. 531.

[1205] J. Satsuma. Higher conservation laws for the Nonlinear Schrödinger equation through Bäcklund transformation. *Progr. Theor. Phys.* ***53*** (1975) 585–586.

[1206] J. Satsuma. N-soliton solution of the two-dimensional Korteweg-de Vries equation. *J. Phys. Soc. Japan* ***40*** (1976) 286–290.

[1207] J. Satsuma. Explicit solutions of nonlinear equations with density dependent diffusion. *J. Phys. Soc. Japan* ***56*** (1987) 1947–1950.

[1208] J. Satsuma. Exact solutions of Burgers equation with reaction terms. [161, pp. 255–262].

[1209] J. Satsuma, M.J. Ablowitz. Two-dimensional lumps in nonlinear dispersive systems. *J. Math. Phys.* ***20*** (1979) 1496.

[1210] J. Satsuma, D.J. Kaup. A Bäcklund transformation for a higher order Korteweg-de Vries equation. *J. Phys. Soc. Japan* ***43*** (1977) 692–697.

[1211] J. Satsuma, T.R. Taha, M.J. Ablowitz. On a Bäcklund transformation and scattering problem for the modified Intermediate Long Wave equation. *J. Math. Phys.* ***25*** (1984) 900–904.

[1212] K. Sawada, T. Kotera. A method for finding n-soliton solutions of the KdV equation and KdV-like equations. *Progr. Theor. Phys.* ***51*** (1974) 1355–1367.

[1213] T. Schäfer, C.E. Wayne. Propagation of ultra-short optical pulses in cubic nonlinear media. *Physica D* ***196*** (2004) 90–105.

[1214] W.K. Schief. The Tzitzeica equation: a Bäcklund transformation interpreted as truncated Painlevé expansion. *J. Phys. A* ***29:16*** (1996) 5153–5155.

[1215] W.K. Schief. The Painlevé III, V and VI transcendents as solutions of the Einstein-Weyl equations. *Phys. Lett. A* ***267:4*** (2000) 265–275.

[1216] W.K. Schief. Isothermic surfaces in spaces of arbitrary dimension: integrability, discretization and Bäcklund transformations. A discrete Calapso equation. *Stud. Appl. Math.* ***106:1*** (2001) 85–137.

[1217] W.K. Schief. Lattice geometry of the discrete Darboux, KP, BKP and CKP equations. Menelaus' and Carnot's theorems. *J. Nonl. Math. Phys.* ***10:2*** *suppl.* (2003) 194–208.

[1218] W.K. Schief. On the unification of classical and novel integrable surfaces. II. Difference geometry. *R. Soc. Lond. Proc. Ser. A* ***459*** (2003) 373–391.

[1219] W.K. Schief, C. Rogers. Loewner transformations: adjoint and binary Darboux connections. *Stud. Appl. Math.* ***100:4*** (1998) 391–422.

[1220] W.K. Schief, C. Rogers, A.P. Bassom. Ermakov systems of arbitrary order and dimension: structure and linearization. *J. Phys. A* ***29:4*** (1996) 903–911.

[1221] J. Schiff. The Camassa-Holm equation: a loop group approach. *Physica D* ***121:1–2*** (1998) 24–43.

[1222] F. Schottky. Über das analytische Problem der Rotation eines starren Körpers in Raume von vier Dimensionen. *Sitzungsberichte der Königlich preussischen Academie der Wissenschaften zu Berlin* **XIII** (1891) 227–232.

[1223] O. Schramm. Circle patterns with the combinatorics of the square grid. *Duke Math. J.* ***86*** (1997) 347–389.

[1224] E. Schrödinger. A method of determining quantum-mechanical eigenvalues and eigenfunctions. *Proc. Roy. Irish Acad.* ***A 46*** (1940) 9–16.

[1225] E. Schrödinger. Further studies on solving eigenvalue problems by factorization. *Proc. Roy. Irish Acad.* ***A 46*** (1941) 183–206.

[1226] E. Schrödinger. The factorization of hypergeometric equation. *Proc. Roy. Irish Acad.* ***A 47*** (1941) 53–54.

[1227] R.E. Schwartz. Discrete monodromy, pentagrams, and the method of condensation. *J. of Fixed Point Theory and Appl.* ***3:2*** (2008) 379–409.

[1228] A.C. Scott. The application of Bäcklund transforms to physical problems. [109, 80–105].

[1229] M.A. Semenov-Tyan-Shansky. What a classical r-matrix is. *Funct. Anal. Appl.* ***17:4*** (1983) 17–33.

[1230] T. Sen, M. Tabor. Lie symmetries of the Lorenz model. *Physica D* ***44:3*** (1990) 313–339.

[1231] S.M. Sergeev. Quantum 2+1 evolution model. *J. Phys. A* ***32:30*** (1999) 5693–5714.

[1232] S.M. Sergeev. On exact solution of a classical 3D integrable model. *J. Nonl. Math. Phys.* ***7:1*** (2000) 57–72.

[1233] A.B. Shabat. Transparent potentials. *Dyn. sploshnoi sredy* ***5*** (1970) 130–145.

[1234] A.B. Shabat. On a class of equations of Wiener-Hopf type. *Sov. Math. Dokl.* ***13:4*** (1972) 987–992.

[1235] A.B. Shabat. The infinite-dimensional dressing dynamical system. *Inverse Problems* ***8*** (1992) 303–308.

[1236] A.B. Shabat. Discrete symmetries and solitons. *Theor. Math. Phys.* ***99:3*** (1994) 783–789

[1237] A.B. Shabat. Hihger symmetries of two-dimensional lattices. *Phys. Lett. A* ***200*** (1995) 121–133.

[1238] A.B. Shabat. On the theory of Laplace-Darboux transformations. *Theor. Math. Phys.* ***103:1*** (1995) 482–485.

[1239] A.B. Shabat. Toda chain and nonlinear Schrödinger equation. Nonlocalities. *Physica D* ***87:1–4*** (1995) 1–8.

[1240] A.B. Shabat. The Korteweg-de Vries hierarchy. In: *The first Landau Institute summer school, 1993* (V.P. Mineev ed), Gordon and Breach Publ., Basel, 1995.

[1241] A.B. Shabat. Third version of the dressing method. *Theor. Math. Phys.* ***121:1*** (1999) 1397–1408.

[1242] A.B. Shabat. Dressing chains and lattices. [163, pp. 331–342].

[1243] A.B. Shabat. Universal Solitonic Hierarchy, *J. Nonl. Math. Phys.* ***12:1*** suppl. (2005) 1–11.

[1244] A.B. Shabat, L. Martínez Alonso. On the prolongation of a hierarchy of hydrodynamic chains. [126, 263–280].

[1245] A.B. Shabat, R.I. Yamilov. Lattice representations of integrable systems. *Phys. Lett. A* ***130:4,5*** (1988) 271–275.

[1246] A.B. Shabat, R.I. Yamilov. Symmetries of nonlinear chains. *Len. Math. J.* ***2:2*** (1991) 377–399.

[1247] A.B. Shabat, R.I. Yamilov. To a transformation theory of two-dimensional integrable systems. *Phys. Lett. A* ***227:1–2*** (1997) 15–23.

[1248] W.F. Shadwick. Cartan's method of equivalence and the calculus of variations. [111, pp. 301–314].

[1249] A.G. Shagalov. Modulational instability of nonlinear waves in the range of zero dispersion. *Phys. Lett. A* ***239:1–2*** (1998) 41–45.

[1250] J. Sidorenko, W. Strampp. Symmetry constraints of the KP hierarchy. *Inverse Problems* ***7*** (1991) L37–43.

[1251] I.M. Sigal. Non-linear semi-groups. *Ann. Math.* ***78*** (1963) 339–364.

[1252] G.I. Sivashinsky. Weak turbulence in periodic flows. *Physica D* ***17:2*** (1985) 243–255.

[1253] E.K. Sklyanin. On some algebraic structures related to Yang-Baxter equation. *Funct. Anal. Appl.* ***16:4*** (1982) 27–34.

[1254] E.K. Sklyanin. Boundary conditions for integrable quantum systems. *J. Phys. A* ***21:10*** (1988) 2375–2389.

[1255] E.K. Sklyanin. New approach to the quantum nonlinear Schrodinger equation *J. Phys. A* ***22:17*** (1989) 3551–3560.

[1256] S. Skorik, V. Spiridonov. Self-similar potentials and the q-oscillator algebra at roots of unity. *Lett. Math. Phys.* ***28*** (1993) 59–74.

[1257] A.O. Smirnov. Solutions of the KdV equation elliptic in t. *Theor. Math. Phys.* ***100:2*** (1994) 937–947.

[1258] V.V. Sokolov. On the Hamiltonian structure of Krichever-Novikov equation. *Dokl. Akad. Nauk SSSR* ***277:1*** (1984) 48–50.

[1259] V.V. Sokolov. On the symmetries of evolution equations. *Russ. Math. Surveys* ***43:5*** (1988) 165–204.

[1260] V.V. Sokolov, A.B. Shabat. (1980)

[1261] V.V. Sokolov, A.B. Shabat. Classification of integrable evolution equations. *Sov. Sci. Rev. C / Math. Phys. Rev.* ***4*** (1984) 221–280.

[1262] V.V. Sokolov, S.I. Svinolupov. Vector-matrix generalizations of classical integrable equations. *Theor. Math. Phys.* ***100*** (1994) 959–962.

[1263] V.V. Sokolov, S.I. Svinolupov. Deformations of nonassociative algebras and integrable differential equations. *Acta Appl. Math.* ***41*** (1995) 323–339.

[1264] V.V. Sokolov, S.I. Svinolupov. On nonclassical invertible transformations of hyperbolic equations. *Eur. J. of Appl. Math.* ***6*** (1995) 145.

[1265] V.V. Sokolov, S.I. Svinolupov, T. Wolf. On linearizable evolution equations of second order. *Phys. Lett. A* ***163:5–6*** (1992) 415–418.

[1266] V.V. Sokolov, T. Wolf. A symmetry test for quasilinear coupled systems. *Inverse Problems* ***15:2*** (1999) L5–L11.

[1267] V.V. Sokolov, T. Wolf. Classification of integrable polynomial vector evolution equations. *J. Phys. A* ***34:49*** (2001) 11139–11148.

[1268] V.V. Sokolov, A.V. Zhiber. On the Darboux integrable hyperbolic equations. *Phys. Lett. A* ***208:4–6*** (1995) 303–308.

[1269] B.A. Springborn. The toy top, an integrable system of rigid body dynamics. *J. Nonl. Math. Phys.* ***7:3*** (2000) 386–410.

[1270] S.Ya. Startsev. Cascade method of Laplace integration for linear hyperbolic system of equations *Math. Notes* ***83:1*** (2008) 97–106.

[1271] V.A. Stekloff. Sur le mouvement dún corps solide ayant une cavite de forme ellipsoidale remple par un liquide incompressible en sur les variations des latitudes. *Ann. de la fac. des Sci. de Toulouse, Ser. 3, v. 1* (1909).

[1272] H. Steudel, D.J. Kaup. Inverse scattering transform on a finite interval. *J. Phys. A* ***32:34*** (1999) 6219–6231.

[1273] I.A.B. Strachan. Jordan manifolds and dispersionless KdV equations. *J. Nonl. Math. Phys.* ***7*** (2000) 495–510.

[1274] I.A.B. Strachan. Deformations of dispersionless KdV hierarchies. *Lett. Math. Phys.* ***58*** (2001) 129–140.

[1275] W. Strampp, W. Oevel. A nonlinear derivative Schrödinger equation: its bi-Hamiltonian structures, their inverses, nonlocal symmetries and master symmetries. *Progr. Theor. Phys.* ***74:4*** (1985) 922–925.

[1276] G. Strang. Wavelets and dilation equations: a brief introduction. *SIAM Review* ***31:4*** (1989) 614–627.

[1277] Yu.B. Suris. Discrete-time generalized Toda lattices: complete integrability and relations with relativistic Toda lattices. *Phys. Lett. A* ***145:2–3*** (1990) 113–119.

[1278] Yu.B. Suris. Algebraic structure of discrete-time and relativistic Toda lattices. *Phys. Lett. A* ***156:9*** (1991) 467–474.

[1279] Yu.B. Suris. On the algebraic structure of the Bruschi-Ragnisco lattice. *Phys. Lett. A* ***179:6*** (1993) 403–406.

[1280] Yu.B. Suris. On the bi-Hamiltonian structure of Toda and relativistic Toda lattices. *Phys. Lett. A* ***180:6*** (1993) 419–429.

[1281] Yu.B. Suris. Discrete-time analogues of some nonlinear oscillators in the inverse-square potential. *J. Phys. A* ***27:24*** (1994) 8161–8169.

[1282] Yu.B. Suris. On the complex separatrices of some standard-like maps. *Nonlinearity* ***7:4*** (1994) 1225–1236.

[1283] Yu.B. Suris. On the r-matrix interpretation of Bogoyavlensky lattices. *Phys. Lett. A* ***188:3*** (1994) 256–262.

[1284] Yu.B. Suris. A discrete-time Garnier system. *Phys. Lett. A* ***189:4*** (1994) 281–289.

[1285] Yu.B. Suris. A family of integrable symplectic standard-like maps related to symmetric spaces. *Phys. Lett. A* ***192:1*** (1994) 9–16.

[1286] Yu.B. Suris. Dynamical r-matrices for some nonlinear oscillators. *J. Phys. A* ***28:3*** (1995) L85–90.

[1287] Yu.B. Suris. Bi-Hamiltonian structure of the *qd* algorithm and new discretizations of the Toda lattice. *Phys. Lett. A* ***206:3–4*** (1995) 153–161.

[1288] Yu.B. Suris. Integrable discretizations of the Bogoyavlensky lattices. *J. Math. Phys.* ***37*** (1996) 3982–3996.

[1289] Yu.B. Suris. A discrete-time relativistic Toda lattice. *J. Phys. A* ***29:2*** (1996) 451–465.

[1290] Yu.B. Suris. A discrete time peakons lattice. *Phys. Lett. A* ***217:6*** (1996) 321–329.

[1291] Yu.B. Suris. A note on an integrable discretization of the nonlinear Schrödinger equations. *Inverse Problems* ***13:4*** (1997) 1121–1136.

[1292] Yu.B. Suris. Nonlocal quadratic Poisson algebras, monodromy map, and Bogoyavlensky lattices. *J. Math. Phys.* ***38*** (1997) 4179–4201.

[1293] Yu.B. Suris. New integrable systems related to the relativistic Toda lattice. *J. Phys. A* ***30:5*** (1997) 1745–1761.

[1294] Yu.B. Suris. On some integrable systems related to the Toda lattice. *J. Phys. A* ***30:6*** (1997) 2235–2249.

[1295] Yu.B. Suris. Why is the Ruijsenaars-Schneider hierarchy governed by the same R-operator as the Calogero-Moser one? *Phys. Lett. A* ***225:4–6*** (1997) 253–262.

[1296] Yu.B. Suris. On an integrable discretization of the modified Korteweg-de Vries equation. *Phys. Lett. A* ***234:2*** (1997) 91–102.

[1297] Yu.B. Suris. Integrable discretizations for lattice systems: local equations of motion and their Hamiltonian properties. *Rev. Math. Phys* ***11*** (1997) 727–822.

[1298] Yu.B. Suris. r-matrices for relativistic deformations of integrable systems. *J. Nonl. Math. Phys.* ***6:4*** (1999) 411–447.

[1299] Yu.B. Suris. Integrable discretizations for lattice system: local equations of motion and their Hamiltonian properties. *Rev. Math. Phys.* ***11*** (1999) 727–822.

[1300] Yu.B. Suris. r-Matrix hierarchies, integrable lattice systems, and their integrable discretizations. *In: SIDE (Canterbury, 1996), 79–94, LMS Lect. Note Ser.* ***255***, Cambridge UP, 1999.

[1301] Yu.B. Suris. r-matrices and integrable discretizations. *In: Discrete Integrable Geometry and Physics (Vienna, 1996), 157–207, Oxford Lect. Ser. Math. Appl.* ***16***, Oxford UP, New York, 1999.

[1302] Yu.B. Suris. The motion of a rigid body in a quadratic potential: an integrable discretization. *Int. Math. Res. Notices* (2000) 643–663.

[1303] Yu.B. Suris. A reply to a comment: a note on an integrable discretization of the nonlinear Schrödinger equation. *Inverse Problems* ***16:4*** (2000) 1071–1077.

[1304] Yu.B. Suris. Integrable discretizations of some cases of the rigid body dynamics. *J. Nonl. Math. Phys.* ***8:4*** (2001) 534–559.

[1305] Yu.B. Suris. Integrability of V. Adler's discretization of the Neumann system. *Phys. Lett. A* ***279:5–6*** (2001) 327–332.

[1306] Yu.B. Suris. O. Ragnisco. What is the relativistic Volterra lattice? *Commun. Math. Phys.* ***200:2*** (1999) 445–485.

[1307] B. Sutherland. Exact results for a quantum many-body problem in one dimension. I,II. *Phys. Rev. A* ***4*** (1972) 2019–2021; ***5*** 1372–1376.

[1308] A.K. Svinin. Differential constraints for the Kaup-Broer system as a reduction of the 1D Toda lattice. *Inverse Problems* ***17*** (2001) 1061–1066.

[1309] A.K. Svinin. A class of integrable lattices and KP hierarchy. *J. Phys. A* ***34*** (2001) 10559–10568.

[1310] A.K. Svinin. Integrable chains and hierarchies of differential evolution equations. *Theor. Math. Phys.* ***130:1*** (2002) 11–24.

[1311] S.I. Svinolupov. Second-order evolution equations with symmetries. *Russ. Math. Surveys* ***40:5*** (1985) 241–242.

[1312] S.I. Svinolupov. Analogues of the Burgers equations of arbitrary order. *Theor. Math. Phys.* ***65:2*** (1985) 1177–1180.

[1313] S.I. Svinolupov. On the analogues of the Burgers equation. *Phys. Lett. A* ***135:1*** (1989) 32–36.

[1314] S.I. Svinolupov. Jordan algebras and generalized KdV equations. *Theor. Math. Phys.* ***87:3*** (1991) 611–620.

[1315] S.I. Svinolupov. Generalized Schrödinger equations and Jordan pairs. *Commun. Math. Phys.* ***143:3*** (1992) 559–575.

[1316] S.I. Svinolupov. Jordan algebras and integrable systems. *Funct. Anal. Appl.* ***27:4*** (1993) 257–265.

[1317] S.I. Svinolupov, V.V. Sokolov. On evolution equations with nontrivial conservation laws. *Funct. Anal. Appl.* ***16:4*** (1982) 86–87.

[1318] S.I. Svinolupov, V.V. Sokolov. On the conservation laws for equations with nontrivial Lie-Bäcklund algebra. pp. 53-67 in *"Integrable system", ed. A.B. Shabat*, Ufa, 1982. [in Russian]

[1319] S.I. Svinolupov, V.V. Sokolov. Weak non-localities in evolution equations. *Mat. Zametki* ***48:6*** (1990) 91.

[1320] S.I. Svinolupov, V.V. Sokolov. On representations of contragredient Lie algebras in contact vector fields. *Funct. Anal. Appl.* ***25:2*** (1991) 76.

[1321] S.I. Svinolupov, V.V. Sokolov. Factorization of evolution equations. *Russ. Math. Surveys* ***47:3*** (1992) 127–162.

[1322] S.I. Svinolupov, V.V. Sokolov. A generalization of Lie theorem and Jordan tops. *Mat. Zametki* ***53:3*** (1993) 115–121.

[1323] S.I. Svinolupov, V.V. Sokolov. Deformations of Jordan triple systems and integrable equations. *Theor. Math. Phys.* ***108:3*** (1996) 1160–1163

[1324] S.I. Svinolupov, V.V. Sokolov, R.I. Yamilov. Bäcklund transformations for integrable evolution equations. *Sov. Math. Dokl.* ***28*** (1983) 165–168.

[1325] S.I. Svinolupov, R.I. Yamilov. The multi-field Schrödinger lattices. *Phys. Lett. A* ***160:6*** (1991) 548–552.

[1326] S.I. Svinolupov, R.I. Yamilov. Explicit Bäcklund transformations for multifield Schrödinger equations. Jordan generalizations of the Toda chain. *Theor. Math. Phys.* ***98:2*** (1994) 139–146.

[1327] A. Sym. Soliton surfaces and their applications (soliton geometry from spectral problems). pp. 154–231 in 'Geometric aspects of the Einstein equations and integrable systems', *Lect. Notes in Phys.* ***239***, 1984.

[1328] M. Tabor. The Sine-Gordon Equation. pp. 305–309 in *Chaos and integrability in nonlinear dynamics: an Introduction.* New York: Wiley, 1989.

[1329] T.R. Taha, M.J. Ablowitz. Analytical and numerical aspects of certain nonlinear evolution equations. *J. Comp. Phys.* ***55*** (1984) 192–202; 203–230; 231–253.

[1330] I.A. Taimanov. Secants of Abelian varietes, theta functions and soliton equations. *Russ. Math. Surveys* ***52:1*** (1997) 147–218.

[1331] D. Takahashi, J. Matsukidaira. On discrete soliton equations related to cellular automata. *Phys. Lett. A* ***209:3–4*** (1995) 184–188.

[1332] D. Takahashi, J. Matsukidaira. Box and ball system with a carrier and ultradiscrete modified KdV equation. *J. Phys. A* ***30*** (1997) L733–739.

[1333] V.I. Talanov. *JETP Lett.* ***11*** (1970) 303.

[1334] D. Takahashi, J. Satsuma. A soliton cellular automaton. *J. Phys. Soc. Japan* ***59*** (1990) 3514–3519.

[1335] L.A. Takhtajan. Integration of the continuous Heisenberg spin chain through the inverse scattering method. *Phys. Lett. A* ***64:2*** (1977) 235–237.

[1336] K.M. Tamizhmani, A. Ramani, B. Grammaticos. Singularity confinement analysis of integrodifferential equations of Benjamin-Ono type. *J. Phys. A* ***30:3*** (1997) 1017–1022.

[1337] K.M. Tamizhmani, A. Ramani, B. Grammaticos, K. Kajiwara. Coalescence cascades and special-function solutions for the continuous and discrete Painlevé equations. *J. Phys. A* ***31:27*** (1998) 5799–5810.

[1338] K.M. Tamizhmani, A. Ramani, B. Grammaticos, Y. Ohta. Integrability criteria for differential-difference systems: a comparison of singularity confinement and low-growth requirements. *J. Phys. A* ***32*** (1999) 6679–6685.

[1339] T. Tamizhmani, K.M. Tamizhmani, B. Grammaticos, A. Ramani. Special function solutions for asymmetric discrete Painlevé equations. *J. Phys. A* ***32*** (1999) 4553–4562.

[1340] V.O. Tarasov. The integrable initial-value problem on a semiline: nonlinear Schrödinger and sine-Gordon equations. *Inverse Problems* ***7*** (1991) 435–449.

[1341] K. Toda, Song-Ju Yu. The investigation into new equations in (2+1) dimensions *J. Nonl. Math. Phys.* ***8*** suppl. (2001) 272–277.

[1342] M. Toda. Vibration of a chain with nonlinear interaction. *J. Phys. Soc. Japan* ***20*** (1967) 431–436.

[1343] M. Toda. One dimensional dual transformation. *J. Phys. Soc. Japan* ***20*** (1967) 2095.

[1344] T. Tokihiro, A. Nagai, J. Satsuma. Proof of solitonical nature of box and ball systems by means of inverse ultra-discretization. *Inverse Problems* ***15*** (1999) 1639–1662.

[1345] T. Tokihiro, D. Takahashi, J. Matsukidaira. Box and ball system as a realization of ultradiscrete nonautonomous KP equation. *J. Phys. A* ***33*** (2000) 607–619.

[1346] T. Tokihiro, D. Takahashi, J. Matsukidaira, J. Satsuma. From soliton equations to integrable automata through a limiting procedure. *Phys. Rev. Let.* ***76:18*** (1996) 3247–3250.

[1347] M. Torii, D. Takahashi, J. Satsuma. Combinatorial representation of invariants of a soliton cellular automaton. *Physica D* ***92:3–4*** (1996) 209–220.

[1348] E. Trubowitz The inverse problem for periodic potentials. *Comm. Pure Appl. Math.* ***30*** (1977) 321–337.

[1349] S.P. Tsarev. Factoring linear partial differential operators and the Darboux method for integrating nonlinear partial differential equations. *Theor. Math. Phys.* ***122:1*** (2000) 121–133.

[1350] A.V. Tsiganov. Dynamical boundary conditions for integrable lattices. *J. Phys. A* ***31:39*** (1998) 8049–8061.

[1351] A.V. Tsiganov. The Drach superintegrable systems. *J. Phys. A* ***33:41*** (2000) 7407–7422.

[1352] A.V. Tsiganov. The Maupertuis principle and canonical transformations of the extended phase space. *J. Nonl. Math. Phys.* ***8*** (2001) 157–182.

[1353] A.V. Tsiganov. Change of the time for the Toda lattice. *J. Nonl. Math. Phys.* ***8*** Suppl. (2001) 278–282.

[1354] T. Tsuchida. Integrable discretizations of derivative nonlinear Schrödinger equations. *J. Phys. A* ***35:36*** (2002) 7827–7847.

[1355] T. Tsuchida, H. Ujino, M. Wadati. Integrable semi-discretization of the coupled nonlinear Schrödinger equations. *J. Phys. A* ***32:11*** (1999) 2239–2262.

[1356] T. Tsuchida, M. Wadati. *Phys. Lett. A* ***257*** (1999) 53.

[1357] T. Tsuchida, M. Wadati. Complete integrability of derivative nonlinear Schrödinger-type equations. *Inverse Problems* ***15*** (1999) 1363–1373.

[1358] T. Tsuchida, T. Wolf. Classification of polynomial integrable systems of mixed scalar and vector evolution equations. I. *J. Phys. A* ***38:35*** (2005) 7691–7733.

[1359] S. Tsujimoto, R. Hirota. Ultradiscrete KdV equation. *J. Phys. Soc. Japan* ***67*** (1998) 1809–1810.

[1360] G. Tzitzeica. Sur une nouvelle classe de surfaces. *C.R. Acad. Sci. Paris* ***150*** (1910) 955–956.

[1361] V.E. Vekslerchik. An $O(3,1)$ nonlinear sigma-model and the Ablowitz-Ladik hierarchy. *J. Phys. A* ***27:18*** (1994) 6299–6313.

[1362] V.E. Vekslerchik. The 2D Toda lattice and the Ablowitz-Ladik hierarchy. *Inverse Problems* ***11:2*** (1995) 463–479.

[1363] V.E. Vekslerchik. Inverse scattering transform for the $O(3,1)$ nonlinear σ-model. *Inverse Problems* ***12:4*** (1996) 517–534.

[1364] V.E. Vekslerchik. The Davey-Stewartson equation and the Ablowitz-Ladik hierarchy. *Inverse Problems* ***12:6*** (1996) 1057–1074.

[1365] V.E. Vekslerchik. Functional representation of the Ablowitz-Ladik hierarchy. *J. Phys. A* ***31:3*** (1998) 1087–1099.

[1366] V.E. Vekslerchik. Finite-genus solutions for the Ablowitz-Ladik hierarchy. *J. Phys. A* ***32:26*** (1999) 4983–4994.

[1367] A.P. Veselov. Landau-Lifshitz equation and integrable systems of classical mechanics. *Dokl. Akad. Nauk SSSR* ***270:5*** (1983) 1094–1096.

[1368] A.P. Veselov. Integration of the stationary problem for classical spin lattice. *Theor. Math. Phys.* ***71:1*** (1987) 446–450

[1369] A.P. Veselov. Integrable systems with discrete time, and difference operators. *Funct. Anal. Appl.* ***22:2*** (1988) 83–93.

[1370] A.P. Veselov. Integrable mappings. *Russ. Math. Surveys* ***46:5*** (1991) 1–51.

[1371] A.P. Veselov. What is an integrable mapping? [162, 251–272]

[1372] A.P. Veselov. Growth and integrability in the dynamics of mappings. *Commun. Math. Phys.* ***145:1*** (1992) 181–193.

[1373] A.P. Veselov. Yang-Baxter maps and integrable dynamics. *Phys. Lett. A* ***314:3*** (2003) 214–221.

[1374] A.P. Veselov, S.P. Novikov. Finite-zone two-dimensional potential Schrödinger operators. Explicit formulas and evolution equations. *Sov. Math. Dokl.* ***30*** (1984).

[1375] A.P. Veselov, A.V. Penskoi. On algebro-geometric Poisson brackets for the Volterra lattice. *Reg. and Chaotic Dynamics* ***3:2*** (1998) 3–9.

[1376] A.P. Veselov, A.B. Shabat. Dressing chain and the spectral theory of Schrödinger operators. *Funct. Anal. Appl.* ***27:2*** (1993) 81–96.

[1377] C.M. Viallet, B. Grammaticos, A. Ramani. On the integrability of correspondences associated to integral curves. *Phys. Lett. A* ***322:3–4*** (2004) 186–193.

[1378] J. Villarroel, M.J. Ablowitz. On the Hamiltonian formalism for the Davey-Stewartson system. *Inverse Problems* ***7:3*** (1991) 451–460.

[1379] J. Villarroel, M.J. Ablowitz. Solutions to the 2+1 Toda equation. *J. Phys. A* ***27:3*** (1994) 931–941.

[1380] J. Villarroel, S. Chakravarty, M.J. Ablowitz. On a 2+1 Volterra system. *Nonlinearity* ***9:5*** (1996) 1113–1128.

[1381] A.Yu. Volkov. Hamiltonian interpretation of the Volterra model. *J. Sov. Math.* ***46*** (1986) 1576–1581.

[1382] A.Yu. Volkov. Quantum Volterra model. *Phys. Lett. A* ***167*** (1992) 345–355.

[1383] A.Yu. Volkov. Quantum lattice KdV equation. *Lett. Math. Phys.* ***39*** (1995) 313–329.

[1384] M. Wadati, T. Kamijo. On the extension of Inverse Scattering Method. *Progr. Theor. Phys.* ***52*** (1974) 397–414.

[1385] M. Wadati, K. Sawada. New representations of the soliton solution for the Korteweg-de Vries equation. *J. Phys. Soc. Japan* ***48*** (1980) 312–318.

[1386] M. Wadati, K. Sawada. Application of the trace method to the modified Korteweg-de Vries equation. *J. Phys. Soc. Japan* ***48*** (1980) 319–325.

[1387] M. Wadati, K. Konno, Y. Ichikawa. *J. Phys. Soc. Japan* ***47*** (1979) 1698.

[1388] H.D. Wahlquist. Bäcklund transformations of potentials of the Korteweg-de Vries equation and the interaction of solitons with cnoidal waves. [109, 162–183].

[1389] H.D. Wahlquist, F.B. Estabrook. Bäcklund transformations for solutions of the Korteweg-de Vries equation. *Phys. Rev. Let.* ***31:23*** (1973) 1386–1390.

[1390] R.S. Ward. Completely solvable gauge-field equations in dimension greater than four. *Nucl. Phys. B* ***236:2*** (1984) 381–396.

[1391] R.S. Ward. Discrete Toda field equations. *Phys. Lett. A* ***199:1–2*** (1995) 45–48.

[1392] M.I. Weinstein. Nonlinear Schrödinger equations and sharp interpolation estimates. *Commun. Math. Phys.* ***87:4*** (1982) 567–576.

[1393] M.I. Weinstein. *Comm. Partial Diff. Eqs* ***11*** (1986) 545–565.

[1394] J. Weiss. The sine-Gordon equation: complete and partial integrability. *J. Math. Phys.* ***25:7*** (1984) 2226–2235.

[1395] J. Weiss. Bäcklund transformation and linearizations of the Hénon-Heiles system. *Phys. Lett. A* ***102:8*** (1984) 329–331.

[1396] J. Weiss. Modified equations, rational solutions and the Painlevé property for the Kadomtsev-Petviashvili and Hirota-Satsuma equations. *J. Math. Phys.* ***26:9*** (1985) 2174–2180.

[1397] J. Weiss. Periodic fixed points of Bäcklund transformations and the Korteweg-de Vries equation. *J. Math. Phys.* ***27:11*** (1986) 2647–2656.

[1398] J. Weiss. Periodic fixed points of Bäcklund transformations. *J. Math. Phys.* ***28:9*** (1987) 2025–2039.

[1399] J. Weiss. Bäcklund transformations, focal surfaces and the two-dimensional Toda lattice. *Phys. Lett. A* ***137*** (1989) 365.

[1400] J. Weiss. Partially integrable evolution equations in physics. pp. 375–411 in: *NATO ASI Series C* ***310*** (R. Conte, N. Boccara eds), Dordecht: Kluwer, 1990.

[1401] J. Weiss. Lie theory, differential equations and representation theory. pp. 405–428 in: *Publ. CRM* (V. Hussin ed), Montréal, 1990.

[1402] J. Weiss. Solitons in physics, mathematics and nonlinear optics (P.J. Olver, D.H. Sattinger eds) *IMA Series* ***25*** Berlin: Springer-Verlag, 1990. 175–202.

[1403] J. Weiss, M. Tabor, G. Carnevale. The Painleve property for partial differential equations. *J. Math. Phys.* ***24*** (1983) 522–526.

[1404] G.B. Whitham. *Proc. R. Soc. A* ***299*** (1967) 6–25.

[1405] H. Widom. Some classes of solutions to the Toda lattice hierarchy. *Commun. Math. Phys.* ***184:3*** (1997) 653–667.

[1406] R. Willox, B. Grammaticos, A. Ramani. A study of the antisymmetric QRT mappings. *J. Phys. A* ***38:23*** (2005) 5227–5236.

[1407] R. Willox, Y. Ohta, C. R. Gilson, T. Tokihiro, J. Satsuma. Quadrilateral lattices and eigenfunction potentials for N-component KP hierarchies. *Phys. Lett. A* ***252*** (1999) 163–172.

[1408] R. Willox, T. Tokihiro, J. Satsuma. Nonautonomous discrete integrable systems. *Chaos, Solitons and Fractals* ***11*** (2000) 121–135.

[1409] R. Willox, T. Tokihiro, I. Loris, J. Satsuma. The fermionic approach to Darboux transformations. *Inverse Problems* ***14*** (1998) 745–762.

[1410] G. Wilson. Commuting flows and conservation laws for Lax equations. *Math. Proc. Cambridge Phil. Soc.* ***86*** (1979) 131–143.

[1411] G. Wilson. Hamiltonian and algebro-geometric integrals of stationary equations of KdV type. *Math. Proc. Cambridge Phil. Soc.* ***87*** (1980) 295–305.

[1412] G. Wilson. On two constructions of conservation laws for Lax equations. *Quart. J. Math. Oxford (2)* ***32*** (1981) 491–512.

[1413] G. Wilson. On the quasi-Hamiltonian formalism of the KdV equation. *Phys. Lett. A* ***132:8–9*** (1988) 445–450.

[1414] G. Wilson. On antiplectic pairs in the Hamiltonian formalism of evolution equations. *Quart. J. Math. Oxford Ser. (2)* ***42*** (1991) 227–256.

[1415] A.E. Winn. A pivotal model for the (1+1)-dimensional Heisenberg and sigma models. *J. Nonl. Math. Phys.* ***8*** suppl. (2001) 294–299.

[1416] P. Winternitz, A.M. Grundland, J.A. Tuszynski. Exact solutions of the multidimensional classical ϕ^6 field equations obtained by symmetry reduction. *J. Math. Phys.* ***28:9*** (1987) 2194–2212.

[1417] S. Wojciechowski. Integrability of one particle in a perturbed central quartic potential. *Phys. Scr.* ***31*** (1985) 433–438.

[1418] W. Wunderlich. Zur Differenzengeometrie der Flächen konstanter negativer Krümmung. *Österreich. Akad. Wiss. Math.-Nat. Kl.* ***160*** (1951) 39–77.

[1419] B. Xu, Y. Li. (1+1)-dimensional Hamiltonian systems as symmetry constraints of the Kadomtsev-Petviashvili equation. *J. Phys. A* ***25:10*** (1992) 2957–2968.

[1420] R.I. Yamilov. On classification of discrete evolution equations. *Usp. Mat. Nauk* ***38:6*** (1983) 155–156.

[1421] R.I. Yamilov. Invertible changes of variables generated by Bäcklund transformations. *Theor. Math. Phys.* ***85:3*** (1990) 1269–1275.

[1422] R.I. Yamilov. Classification of Toda type scalar lattices, [129, pp. 423–431].

[1423] R.I. Yamilov. On the construction of Miura type transformations by others of this kind. *Phys. Lett. A* ***173:1*** (1993) 53–57.

[1424] R.I. Yamilov. Construction scheme for discrete Miura transformations. *J. Phys. A* ***27:20*** (1994) 6839–6851.

[1425] R.I. Yamilov. Relativistic Toda chains and Schlesinger transformations. *Theor. Math. Phys.* ***139:2*** (2004) 623–635.

[1426] R.I. Yamilov. Symmetries as integrability criteria for differential difference equations. *J. Phys. A* ***39:45*** (2006) R541–623.

[1427] R.I. Yamilov, D. Levi. Integrability conditions for n and t dependent dynamical lattice equations. *J. Nonl. Math. Phys.* ***11*** (2004) 75–101.

[1428] X. Yang, R. Schmid. Bäcklund transformations induced by symmetries. *Phys. Lett. A* ***195*** (1994) 63–73.

[1429] H.M. Yehia. Generalized natural mechanical systems of two degrees of freedom with quadratic integrals. *J. Phys. A* ***25:1*** (1992) 197–221.

[1430] N. Yoshida, K. Nishinari, J. Satsuma, K. Abe. Dromion can be remote-controlled. *J. Phys. A* ***31:14*** (1998) 3325–3336.

[1431] E.A. Zabolotskaya, R.V. Khokhlov. Quasi-plane waves in the nonlinear acoustics of confined beams. *Sov. Phys. Acoust.* ***15*** (1969) 35–40.

[1432] A.V. Zabrodin. Hirota's difference equations. *Theor. Math. Phys.* ***113:2*** (1997) 1347–1392.

[1433] A.V. Zabrodin. Hirota equation and Bethe ansatz. *Theor. Math. Phys.* ***116:1*** (1998) 782–819.

[1434] N.J. Zabusky, M.D. Kruskal. Interaction of "solitons" in a collisionless plasma and the recurrence of initial states. *Phys. Rev. Let.* ***15:6*** (1965) 240–243.

[1435] A.A. Zaitsev. On the formation of stationary nonlinear waves by superposition of solitons. *Dokl. Akad. Nauk SSSR* ***272:3*** (1983) 583–587.

[1436] V.E. Zakharov. *JETP* ***65*** (1973) 219–225.

[1437] V.E. Zakharov. The inverse scattering method. [144, p. 243]

[1438] V.E. Zakharov. Benney's equations and quasi-classical approximation in the inverse problem method. *Funct. Anal. Appl.* ***14:2*** (1980) 89–98.

[1439] V.E. Zakharov. On the Benney's equations. *Physica D* ***3*** (1981) 193–200.

[1440] V.E. Zakharov, L.D. Faddeev. Korteweg-de Vries equation, a completely integrable system. *Funct. Anal. Appl.* ***5*** (1971) 280–287.

[1441] V.E. Zakharov, S.V. Manakov. *JETP Lett.* ***18*** (1973) 413.

[1442] V.E. Zakharov, S.V. Manakov. On the complete integrability of a nonlinear Schrödinger equation. *Theor. Math. Phys.* ***19:3*** (1974) 551–559.

[1443] V.E. Zakharov, S.V. Manakov. Generalization of the inverse scattering problem method. *Theor. Math. Phys.* ***27:3*** (1976) 485–487.

[1444] V.E. Zakharov, S.V. Manakov. Soliton theory. *Phys. Rev. (Sov. Scient. Rev.)* ***1*** (1979) 133–190.

[1445] V.E. Zakharov, S.V. Manakov. *Funct. Anal. Appl.* ***19*** (1985) 11.

[1446] V.E. Zakharov, A.V. Mikhailov. Relativistically invariant two-dimensional models of field theory which are integrable by means of the Inverse Scattering Problem Method. *JETP* ***74*** (1978) 1953–1973.

[1447] V.E. Zakharov, A.V. Mikhailov. On the integrability of classical spinor models in two-dimensional space-time. *Commun. Math. Phys.* ***74:1*** (1980) 21–40.

[1448] V.E. Zakharov, S.L. Musher, A.M. Rubenchik. *JETP Lett.* ***19:5*** (1974) 249–253.

[1449] V.E. Zakharov, A.B. Shabat. Exact theory of two dimensional self focusing and one dimensional automodulation of waves in nonlinear medias. *JETP* ***61:1*** (1971) 118–134.

[1450] V.E. Zakharov, A.B. Shabat. The scheme of integration of nonlinear equations of mathematical physics by inverse scattering method. I, II. *Funct. Anal. Appl.* ***8:3*** (1974) 43–53; ***13:3*** (1979) 13–22.

[1451] V.E. Zakharov, V.S. Synakh. On the character of selffocusing singularity. *Sov. Phys. JETP* ***42*** (1976) 464.

[1452] V.E. Zakharov, L.A. Takhtajan. Equivalence of the nonlinear Schrdinger equation and the equation of a Heisenberg ferromagnet. *Theor. Math. Phys.* ***38:1*** (1979) 17–23.

[1453] G.M. Zaslavsky. The simplest case of a strange attractor. *Phys. Lett. A* ***69:3*** (1978) 145–147.

[1454] Y. Zeng, Y. Li. An approach to the integrability of Hamiltonian systems obtained by reduction. *J. Phys. A* ***23:3*** (1990) L89–94.

[1455] Y. Zeng, Y. Li. The deduction of the Lax representation for constrained flows from the adjoint representation. *J. Phys. A* ***26:5*** (1993) L273–278.

[1456] A.M. Zhabotinskii. Periodic course of oxidation of malonic acid in solution (investigation of the kinetics of the reaction of Belousov). *Biophysics* ***9*** (1964) 329–335.

[1457] A.M. Zhabotinskii, A.N. Zaikin, M.D. Korzukhin, G.P. Kreitser. Mathematical model of a self-oscillating chemical reaction (oxidation of bromomalonic acid with bromate catalyzed by cerium ions). *Kinetics and Catalysis* ***12*** (1971) 516–521.

[1458] H. Zhang, G.Z. Tu, W. Oevel, B. Fuchssteiner. Symmetries, conserved quantities, and hierarchies for some lattice systems with soliton structure. *J. Math. Phys.* ***32*** (1991) 1908–1918.

[1459] A.V. Zhiber. The collapse of solutions of one nonlinear boundary value problem. *Proc. of the conference on PDE, Moscow State University* (1978) 78–79.

[1460] A.V. Zhiber, N.H. Ibragimov, A.B. Shabat. Liouville type equations. *DAN SSSR* ***249:1*** (1979) 26–29.

[1461] A.V. Zhiber, A.B. Shabat. Nonlinear Klein-Gordon equations with nontrivial group. *Dokl. Akad. Nauk SSSR* ***247:5*** (1979) 1103–1107.

[1462] A.V. Zhiber, A.B. Shabat. The systems $u_x = p(u,v)$, $v_y = q(u,v)$ possessing symmetries. *Dokl. Akad. Nauk SSSR* ***277:1*** (1984) 29–33.

[1463] A.V. Zhiber, V.V. Sokolov. Exactly integrable hyperbolic equations of Liouville type. *Russ. Math. Surveys* ***56:1*** (2001) 61–101.

[1464] J.P. Zubelli, D.S. Valerio Silva. Rational solutions of the master symmetries of the KdV equation. *Commun. Math. Phys.* ***211:1*** (2000) 85–109.

Авторский указатель