

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
Институт теоретической физики им. Л.Д. Ландау

на правах рукописи

В.Э. Адлер

Классификация дискретных интегрируемых уравнений

Специальность 01.01.03 – математическая физика

Д и с с е р т а ц и я
на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Черноголовка – 2010

Оглавление

Введение	7
1 Преобразования Дарбу-Бэклунда	19
1.1 Преобразование Дарбу для уравнения Шрёдингера	19
1.2 Группа перестановок, 3D-совместность, отображения Янга-Бакстера	26
1.3 Представление нулевой кривизны	30
1.4 Преобразования Дарбу для уравнения Дирака	35
1.5 Преобразование Дарбу для дискретного уравнения Шрёдингера	38
1.5.1 Цепочка Вольтерра	39
1.5.2 Модифицированная цепочка Вольтерра	41
1.6 Векторный пример	44
Комментарии к главе 1	47
2 3D-совместные квад-уравнения	49
2.1 Обсуждение постановки и основной результат	49
2.2 Доказательство классификационной теоремы	55
2.2.1 Анализ условий совместности	55
2.2.2 Восстановление квад-уравнений	57
2.3 Трёхногая форма квад-уравнений	62
2.4 Преобразования Бэклунда для уравнений типа КдФ	66
2.5 Уравнения с невырожденными биквадратиками	69
2.5.1 Анализ сингулярных решений	69
2.5.2 Инварианты дробно-линейных преобразований	72
2.5.3 Классификация невырожденных систем	77
2.6 Примеры асимметричных систем	81
Комментарии к главе 2	83
3 Уравнения на квад-графах	87
3.1 Основные понятия	87
3.2 Задача Коши	91
3.3 Квадратная решётка с локальным дефектом	100
3.4 Солитоны на квад-графах	104

Комментарии к главе 3	108
4 Квадрилирациональные отображения	111
4.1 Основные определения	111
4.1.1 3D-совместность и отображения Янга-Бакстера	111
4.1.2 Квадрилирациональные отображения	114
4.2 3D-совместные отображения на кониках	116
4.3 Редукция квад-уравнений	119
4.4 Структура квадрилирациональных отображений	121
4.5 Многополевые обобщения	126
Комментарии к главе 4	128
5 Уравнения типа Тоды	131
5.1 Дискретные уравнения типа Тоды на графе	131
5.2 Связь с уравнениями на квад-графах	135
5.3 Уравнения типа Тоды на треугольной решётке	139
5.4 Преобразования дуальности на треугольной решётке	141
5.4.1 Преобразования дуальности	141
5.4.2 Доказательство классификационной теоремы	143
5.4.3 Вложение в кубическую решётку	147
5.5 Цепочки Рудженарса-Тоды	148
5.5.1 Преобразование дуальности	148
5.5.2 Доказательство классификационной теоремы	151
5.5.3 Цепочки Тоды	153
5.6 Вариационные симметрии	155
Комментарии к главе 5	156
6 Двухкомпонентные гиперболические системы	159
6.1 Пары совместных цепочек	159
6.2 Классификация	162
6.2.1 Анализ условия совместности	162
6.2.2 Цепочки с $a(u, v) \neq a_1(u)a_2(v)$	165
6.2.3 Цепочки с $a(u, v) = a_1(u)a_2(v)$	170
6.2.4 Исключительные цепочки	172
6.3 Ассоциированные уравнения	174
6.3.1 Гиперболические системы	174
6.3.2 Цепочки Рудженарса-Тоды	174
6.3.3 Дискретные цепочки Тоды	175
Комментарии к главе 6	177
7 Дискретизация уравнения Ландау-Лифшица	179
7.1 Цепочка Склянина	179
7.2 Уравнения в частных производных	181
7.3 Представления нулевой кривизны	183

7.4	Стационарная цепочка	185
7.5	Дискретное уравнение Ландау-Лифшица	186
	Комментарии к главе 7	188
8	Интегрируемые изотропные цепочки Вольтерра на сфере	191
8.1	Постановка классификационной задачи	191
8.2	Список интегрируемых цепочек	193
8.3	Необходимые условия интегрируемости	195
8.4	Анализ условий интегрируемости	198
8.4.1	Первый шаг	198
8.4.2	Случай 1: $f_{v_1, -1} \neq 0$	199
8.4.3	Случай 2: $f_{v_1, -1} = 0$	202
8.5	Ассоциированные уравнения в частных производных	203
8.6	Предсимплектическая структура	204
	Комментарии к главе 8	206
9	Дискретное уравнение Кадомцева-Петвиашвили (ΔКР)	209
9.1	Вывод Δ КР из линейных задач	209
9.2	Уравнения, связанные с Δ КР	213
9.3	Решётка Менелая	214
9.4	Тангенциальное отображение	216
9.4.1	Определение и 3D-совместность	216
9.4.2	Факторизация дифференциальных операторов	219
9.4.3	Локсодромическая редукция	223
9.4.4	Редукция к преобразованию Дарбу	225
9.4.5	Дискретное тангенциальное отображение	227
9.4.6	Отображения высших порядков	229
	Комментарии к главе 9	229
10	Классификация интегрируемых уравнений типа ΔКР	231
10.1	4D-совместность	231
10.1.1	Классификационный результат	231
10.1.2	Предел из Δ ВКР	234
10.1.3	Совместные тройки бездисперсионных уравнений	236
10.2	Анализ условий совместности	238
10.2.1	Следствия из условий совместности	238
10.2.2	От троек к пятёркам	239
10.2.3	Сведение к функциям от трёх переменных	241
10.3	Трёхногая форма уравнений	244
10.3.1	Определения и обозначения	244
10.3.2	Классификация трёхногих уравнений	245
10.3.3	Сведение к функциям от двух переменных	248
10.3.4	Случай I	251
10.3.5	Случай II	254

10.3.6	Случай III	257
10.4	Классификация совместных пятёрок	261
10.4.1	Отделение несовместных уравнений	261
10.4.2	Завершение классификации	264
	Комментарии к главе 10	270
	Литература	273
	Предметный указатель	287

Введение

Уравнения с дискретными независимыми переменными по праву занимают важное место в современной теории нелинейных интегрируемых систем. Дифференциально-разностные уравнения, или цепочки, возникают во многих задачах математической физики. Ряд моделей, определивших дальнейшее направление исследований, был введён и проинтегрирован, в рамках метода обратной задачи рассеяния, в основополагающих работах Тоды [176], Flaschke [68], Манакова [114], Каца, ван Мёрбеке [91] и Абловица, Ладика [2]. Следует упомянуть также ещё более ранние работы Шрёдингера [153] и Инфельда, Халла [90], связанные с приложениями в квантовой механике; эта тема получила дальнейшее развитие в работе Шабата, Веселова [185]. Полностью дискретные уравнения изучались в работах Хироты [85, 86, 87, 88], Мивы [128], Матвеева [116], Куиспела, Найхофа, Капела, ван дер Линдена [143], Найхофа [130] и многих других.

Несмотря на разнообразие дискретных уравнений, оправдана общая точка зрения, согласно которой все интегрируемые цепочки интерпретируются как преобразования Дарбу-Бэклунда для непрерывных уравнений (см., в частности, работы Леви [108] и Шабата, Ямилова [156], где этот принцип чётко сформулирован и подкреплён целым рядом типичных примеров). На следующем шаге, коммутативность преобразований Бэклунда приводит к уравнениям с двумя дискретными независимыми переменными. Наоборот, любое дискретное уравнение, обладающее инфинитезимальными высшими симметриями, допускает интерпретацию, как принцип нелинейной суперпозиции для некоторого преобразования Бэклунда.

Таким образом, дискретные и непрерывные уравнения рассматриваются как равноправные части общей иерархии интегрируемых уравнений. Эта картина привлекательна не только с философской точки зрения, но и подсказывает пути решения классификационных задач, которым посвящена данная диссертация.

Напомним, что для уравнений в частных производных имеется уже довольно много классификационных результатов; наиболее важные из них получены в рамках симметричного подхода, в котором определяющим является свойство совместности, или коммутативности потоков, образующих интегрируемую иерархию. Этот подход, в основном, разработан школой Шабата, см. например обзоры Соколова, Шабата [158], Михайлова, Шабата, Ямилова [126],

Михайлова, Шабата, Соколова [125] и Хабибуллина, Соколова, Ямилова [80]. Для дифференциально-разностных уравнений классификационных результатов существенно меньше (практически все они получены Ямиловым и представлены в обзоре [193]), а для дискретных уравнений их практически нет, поэтому разработка подходящих методов является здесь актуальной задачей.

В целом, содержание диссертации можно охарактеризовать как развитие темы о связи дискретного и непрерывного. Некоторый уклон в дискретную сторону объясняется двумя обстоятельствами. Во-первых, во многих случаях дискретная часть иерархии представляется более фундаментальной и прозрачной. Особенно это проявляется в приложениях к геометрии, которые переживают за последние 10–15 лет настоящий ренессанс, именно благодаря переходу к дискретной части картины, см. напр. книги Роджерса, Шифа [147] и Бобенко, Суриса [45]. Во-вторых, сам выбор задач обусловлен уже отмеченным отставанием в классификации дискретных уравнений. Вообще, если проследить историю открытий в той или иной иерархии интегрируемых уравнений, то можно убедиться, что они, как правило, начинаются с непрерывной части. Например, сначала было открыто уравнение \sin -Гордона (Боур, 1862 [50]), затем преобразование Бэклунда для него (Бэклунд, 1883 [36]), затем свойство перестановочности для последнего (Бьянки, 1892 [40]) и, наконец, лишь совсем недавно было осознано, что сами соотношения перестановочности обладают замечательной групповой структурой. Это можно объяснить тем, что хотя условия совместности для дискретных уравнений более элементарны, зато для непрерывных они проще и для понимания, и для вычислений.

Соотношения перестановочности, или принцип нелинейной суперпозиции преобразований Бэклунда, можно рассматривать как самостоятельное дискретное уравнение. Роль групповой структуры заключается в том, что при изучении таких уравнений она позволяет оставаться на чисто дискретном уровне. Переходя ближе к содержанию диссертации, отметим, что в работах Адлера [3, 5, 6] и Адлера, Ямилова [30] эта структура описывается тождествами

$$R_k^2 = (R_k R_{k+1})^3 = (R_k R_j)^2 = \text{id}, \quad j \neq k \pm 1, \quad (0.1)$$

определяющими нелинейное представление группы перестановок. Преобразования R_k имеют вид

$$R_k : \quad \begin{aligned} \alpha'_{k-1} &= \alpha_k, & \alpha'_k &= \alpha_{k-1}, & \alpha'_n &= \alpha_n, & n &\neq k-1, k, \\ u'_k &= F(u_{k+1}, u_k, u_{k-1}, \alpha_k, \alpha_{k-1}), & u'_n &= u_n, & n &\neq k \end{aligned}$$

и действуют на последовательности переменных u_n и параметров преобразования Бэклунда α_n (рис. 0.1 слева). Тождества (0.1) означают, что преобразования, оставляющие на месте параметры, действуют тривиально и на переменных u_n ; это доказывается из единственности разложения преобразований Дарбу-Бэклунда на элементарные.

Альтернативно, эта же групповая структура описывается при помощи свойства 3D-совместности, или совместности вокруг куба, введенного в работах

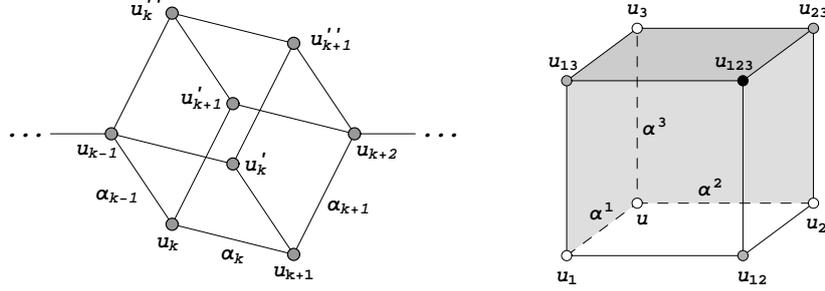


Рис. 0.1. Тожество $(R_k R_{k+1})^3 = \text{id}$.
3D-совместность, или совместность вокруг куба.

Найхофа, Уокера [133] и Бобенко, Суриса [43]. Оно относится к квад-уравнениям, то есть уравнениям вида

$$u_{12} = f(u, u_1, u_2), \quad (0.2)$$

где индекс обозначает сдвиг по дискретной переменной на квадратной решётке. Это свойство означает, что имеются ещё два уравнения такого типа, заданные на ортогональных плоскостях кубической решётки,

$$u_{13} = g(u, u_1, u_3), \quad u_{23} = h(u, u_2, u_3),$$

и такие, что значения u_{123} , вычисленные отсюда тремя возможными способами, тождественно совпадают. Это равносильно тому, что равенства

$$\begin{aligned} u_{123} &= h(u_1, f(u, u_1, u_2), g(u, u_1, u_3)) \\ &= g(u_2, f(u, u_1, u_2), h(u, u_2, u_3)) \\ &= f(u_3, g(u, u_1, u_3), h(u, u_2, u_3)), \end{aligned} \quad (0.3)$$

должны выполняться тождественно по начальным данным u, u_1, u_2, u_3 . Комбинаторная структура этих тождеств поясняется рис. 0.1 справа, где штриховка граней показывает один из трёх возможных способов осуществления отображений. При этом каждая грань куба интерпретируется как диаграмма Бьянки.

Оба определения 3D-совместности работают и в случае, когда поля ассоциированы с рёбрами решётки, что отвечает так называемым отображениям Янга-Бакстера, ещё одному важному классу интегрируемых систем, см. в частности работы Дринфельда [63], Бухштабера [53] и Веселова [183].

Свойство 3D-совместности является весьма специальным и можно гарантировать интегрируемость уравнений, для которых оно выполняется. Однако, использовать его для классификации не так-то просто, поскольку условия (0.3) являются функциональными уравнениями относительно f, g, h . Для сравнения, легко видеть, что если бы индекс в (0.2) обозначал частную производную, то вместо (0.3) возникла бы система дифференциальных уравнений,

выражающая равенство смешанных производных. Это и имелось в виду, когда говорилось, что условия совместности для непрерывных уравнений проще. Для условий совместности в форме (0.1) ситуация ещё хуже, поскольку здесь приходится рассматривать двукратную композицию функций.

В наиболее общей постановке задача описания 3D-совместных уравнений до сих пор остаётся открытой. Приведённая в диссертации классификация получена при ряде дополнительных предположений, сводящих (0.3) к алгебраическим уравнениям.

Помимо квад-уравнений и отображений с переменными на рёбрах решётки, в диссертации рассматриваются также дискретные уравнения типа Тоды. Все эти уравнения можно задавать не только на квадратной решётке, но и на достаточно произвольных плоских графах — черта, которой трудно подобрать аналог в непрерывном случае. Такие системы стали изучаться лишь недавно. Обсуждаются некоторые их общие свойства.

Приводятся также результаты, относящиеся к дифференциально-разностным уравнениям типа цепочек Тоды, Рудженарса-Тоды, Абловица-Ладика и Вольтерра.

В двух последних главах свойство совместности на четырёхмерной решётке используется для классификации трёхмерных дискретных уравнений типа ΔКР.

Методы исследования. В диссертации применяется симметричный подход к исследованию интегрируемых нелинейных уравнений. Обычно, для эффективной классификации дифференциальных уравнений в частных производных и цепочек, используют, в рамках этого метода, технику основанную на понятиях формальной симметрии и канонических законов сохранения. Глава 8, посвящённая векторным цепочкам Вольтерра, представляет собой довольно типичный пример применения этой техники. В остальных классификационных задачах оказывается достаточным ограничиться вульгарной версией симметричного подхода, приняв в качестве определяющего свойства наличие всего одной симметрии специального вида. Такое концептуальное упрощение объясняется тем, что наличие у уравнения нетривиальной дискретной симметрии (преобразования Бэклунда) является очень сильным свойством, обеспечивающим интегрируемость. Фактически, преобразование Бэклунда можно интерпретировать, как нелинейную версию представления нулевой кривизны. В результате, оказывается возможным получать всю информацию, нужную для решения классификационной задачи, непосредственно из условий совместности (например, в случае квад-уравнений, из условий (0.3)).

Научная новизна. В работе представлены следующие результаты.

1) Получена классификация 3D-совместных квад-уравнений. Основным примером является уравнение (Q_4), определяющее принцип нелинейной суперпозиции для уравнения Кричевера-Новикова.

- 2) Исследован вопрос о постановке корректной задачи Коши для уравнений на квад-графе.
- 3) Дана геометрическая конструкция скалярных квадирациональных отображений с полями на рёбрах, удовлетворяющих свойству 3D-совместности.
- 4) Построены примеры интегрируемых дискретных уравнений типа Тоды на плоских графах. Они связаны с квад-уравнениями на двудольном квад-графе посредством ограничения на вершины одного типа. В случае треугольной решётки и в полунепрерывном случае (отвечающем цепочкам типа Рудженарса-Тоды) получена классификация уравнений инвариантных относительно сдвига.
- 5) Получена классификация одного класса совместных цепочек, связанных с цепочками типа Тоды, Рудженарса-Тоды и Абловица-Ладики. Эти цепочки определяют авто-преобразования Бэклунда для систем типа Полмайера-Лунда-Редже и типа НУШ (нелинейного Шрёдингера).
- 6) Изучены дискретные аналоги уравнения Ландау-Лифшица: установлена связь между цепочками Склянина и Шабата-Ямилова, исследованы дискретные уравнения типа Тоды, связанные с уравнением (Q_4) .
- 7) Получена классификация интегрируемых изотропных уравнений типа цепочки Вольтерра на сфере.
- 8) Предложено обобщение понятия 3D-совместности для некоторых трёхмерных уравнений и его геометрическая иллюстрация при помощи тангенциального отображения, заданного на плоских кривых. На основе этого понятия получена классификация трёхмерных дискретных уравнений типа Δ КР (Кадомцева-Петвиашвили).

Диссертация состоит из десяти глав. Опишем кратко их содержание.

Глава 1, Преобразования Дарбу-Бэклунда, носит обзорный характер. Приведённые в ней основные сведения о преобразованиях Бэклунда служат мотивировкой и иллюстрацией для значительной части дальнейших глав. В качестве примеров используются некоторые результаты из работ автора [3, 6, 7], но в основном изложение стандартное. Преобразованием Дарбу называется авто-преобразование линейного дифференциального или разностного уравнения с переменными коэффициентами, строящееся по его частному решению. При этом коэффициенты исходного и преобразованного уравнения связаны некоторыми нелинейными соотношениями. В случае, когда преобразование Дарбу применяется к паре вспомогательных линейных задач для нелинейного интегрируемого уравнения, эти соотношения интерпретируются как преобразования Бэклунда. Преобразования Дарбу-Бэклунда служат важнейшим источником интегрируемых уравнений с дискретными независимыми переменными. Итерации преобразований Бэклунда порождают нелинейные дифференциально-разностные уравнения, или цепочки. Свойство перестановочности преобразований Дарбу приводит к чисто разностным уравнениям удовлетворяющим описанному выше свойству 3D-совместности: так называемым квад-уравнениям и отображениям Янга-Бакстера.

Глава 2, 3D-совместные квад-уравнения (Адлер, Бобенко, Сурис [15, 17]), посвящена задаче классификации интегрируемых квад-уравнений

$$Q(u, u_i, u_j, u_{ij}; \alpha_i, \alpha_j) = 0 \quad (0.4)$$

на основе свойства 3D-совместности. Основным результатом этой главы является список квад-уравнений 2.1, полученный при ряде дополнительных предположений (см. теоремы 2.3 и 2.25).

Основным в списке является уравнение (Q_4), найденное в статье Адлера [7] и определяющее принцип нелинейной суперпозиции для уравнения Кричевера-Новикова [101]. Остальные уравнения могут быть выведены из него посредством вырождения эллиптической кривой и предельных переходов (Адлер, Сурис [27], Аткинсон [35]). Все они также задают принцип нелинейной суперпозиции для уравнений типа КдФ или \sin -Гордон.

Техника, применяемая при решении классификационной задачи, использует некоторые свойства отображений

$$Q(u, v, w, z) \mapsto h(u, v) = Q_w Q_z - Q Q_{wz}, \quad h(u, v) \mapsto r(u) = h_v^2 - 2hh_{vv},$$

переводящих аффинно-линейные многочлены в биквадратичные, а биквадратичные в многочлены четвёртой степени от одной переменной. Анализ условия 3D-совместности позволяет установить следующее ключевое свойство: биквадратичные многочлены $h(u, v)$, приходящие на ребро (u, v) куба с двух смежных граней, совпадают с точностью до множителя. Отсюда следует, что совпадают также три многочлена $r(u)$, приходящие в вершину куба с содержащих её граней, а с учётом свойства симметрии получается, что вообще всем вершинам отвечает один и тот же многочлен. Дробно-линейное преобразование позволяет привести его к одной из 6-ти канонических форм, в зависимости от кратности корней, после чего задача сводится к восстановлению соответствующих многочленов h и Q . При этом важную роль играют их инварианты относительно группы дробно-линейных преобразований. Параметры α_i, α_j , а также модуль k эллиптической кривой в случае (Q_4) как раз оказываются такими инвариантами.

Следует отметить, что биквадратичные многочлены весьма часто возникают в теории интегрируемых уравнений (например, далее в диссертации они встречаются в гл. 6 при рассмотрении цепочек типа Тоды и в гл. 7 при дискретизации уравнения Ландау-Лифшица). Их роль в теории квад-уравнений становится особенно прозрачной при анализе сингулярных решений, проведённом в разделе 2.5. Результаты этого раздела позволяют несколько ослабить сделанные выше предположения о виде квад-уравнений, что, однако, не приводит к расширению списка. Несколько примеров с нарушенным свойством симметрии приведено в разделе 2.6; все они являются, в определённом смысле, вырожденными.

В разделе 2.3 рассматривается *трёхногая форма* квад-уравнений. Так называется уравнение вида

$$F(u, u_{ij}; \alpha_i, \alpha_j) = G(u, u_i; \alpha_i) - G(u, u_j; \alpha_j)$$

эквивалентное уравнению (0.4). Например, для уравнения (Q_1^0) трёхногая форма имеет вид

$$\frac{\alpha_i - \alpha_j}{u - u_{ij}} = \frac{\alpha_i}{u - u_i} - \frac{\alpha_j}{u - u_j}. \quad (0.5)$$

Аналогичное представление имеется для каждого уравнения из списка (но, вообще говоря, функции F и G не являются рациональными). Трёхногая форма является неочевидным, но весьма замечательным свойством квад-уравнений: само свойство 3D-совместности следует из факта её существования [27]. Кроме того, она осуществляет связь теории квад-уравнений с теорией дискретных цепочек Тоды в главе 5.

Глава 3, Уравнения на квад-графах (Адлер, Веселов [29]). Свойство 3D-совместности позволяет определить для квад-уравнения преобразование Бэклунда и представление нулевой кривизны. По существу, эти понятия оказываются эквивалентными 3D-совместности. Более того, так как эти понятия локальны, то есть связаны лишь с элементарными ячейками решётки, то они допускают непосредственное обобщение на случай, когда уравнение задано не на квадратной решётке, а на произвольном *квад-графе*, то есть плоском графе с четырёхугольными гранями. Таким образом, возникает огромное количество двумерных дискретных систем, обладающих этими двумя атрибутами интегрируемости. Возникает естественный вопрос, в какой мере их действительно можно считать интегрируемыми. В данной главе изучаются некоторые глобальные свойства решений таких систем. В первую очередь, рассматривается проблема выбора начальных данных, которая является, в отличие от случая квадратной решётки, довольно нетривиальной.

В частности, показано, что корректность задачи Коши может зависеть не только от комбинаторики квад-графа, но и от того, является ли уравнение 3D-совместным, то есть интегрируемым в локальном смысле. Предполагается выполненным свойство симметрии, благодаря чему такая система однозначно определяется набором параметров, ассоциированных с рёбрами графа, причём противоположным рёбрам любой грани отвечает один и тот же параметр. Набор параметров, удовлетворяющий этому свойству, называется *разметкой* квад-графа. Последовательность граней, примыкающих друг к другу по противоположным рёбрам (несущим один и тот же параметр), называется *полосой*; роль полос для уравнения на квад-графе сопоставима с ролью характеристик непрерывных гиперболических уравнений. Основным результатом является теорема 3.10, дающая необходимые и достаточные условия корректности задачи Коши.

Рассматривается также вопрос о распространении решений на квад-графе, отличающемся от регулярной квадратной решётки лишь в некоторой конечной области (локальном дефекте). В частности, доказывается, что если дефект не меняет взаимный порядок проходящих через него полос, то он вообще не оказывает влияния на решение задачи Коши.

В главе 4, **Квадрирациональные отображения** (Адлер, Бобенко, Сурис [16]), рассматриваются 3D-совместные уравнения с переменными на рёбрах решётки, то есть отображения

$$F : (u^i, u^j) \mapsto (u_j^i, u_i^j), \quad u_j^i = f_j^i(u^i, u^j), \quad i, j = 1, 2, 3, \quad i \neq j,$$

удовлетворяющие тождеству

$$f_j^i(u_k^i, u_k^j) = f_k^i(u_j^i, u_k^k), \quad i \neq j \neq k \neq i.$$

Основное внимание уделено простейшему скалярному случаю $u \in \mathbb{CP}^1$. Такие отображения возникают при редукции из квад-уравнений, допускающих непрерывную группу точечных симметрий. Для них имеется также красивая геометрическая интерпретация, в которой свойство 3D-совместности эквивалентно одной теореме инцидентности для линейного пучка коник (теорема 4.5). Все эти примеры *квадрирациональны*, то есть отображение F бирационально и его график служит одновременно графиком некоторого бирационального отображения $\hat{F} : (\bar{u}, v) \rightarrow (u, \bar{v})$. Это свойство заменяет в данном случае свойство аффинно-линейности для квад-уравнений. Все квадрирациональные отображения на $\mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1$ можно явно описать.

Глава 5, Уравнения типа цепочки Тоды (Адлер, Шабат [20, 21] и Адлер [8, 9, 11]). В разделах 5.1, 5.2 строится общая теория дискретных уравнений типа Тоды на плоских графах. Такие уравнения возникают из квад-уравнений на двудольных квад-графах при ограничении на вершины одного типа, что возможно благодаря трёхногой формой квад-уравнений (эта связь обнаружена в работе Бобенко и Суриса [43]). Например, суммируя уравнения вида (0.5) вокруг некоторой вершины квад-графа, мы получим уравнение

$$\sum \frac{\alpha_i - \alpha_j}{u - u_{ij}} = 0,$$

где суммирование ведётся по всем вершинам (ij) , связанным с данной вершиной по диагонали элементарной ячейки. Это ограничение даёт также конструкцию преобразований Бэклунда и представлений нулевой кривизны для дискретных цепочек Тоды.

В разделе 5.4 рассматривается специальный случай дискретных уравнений типа Тоды на треугольной решётке, инвариантных относительно сдвига $u \rightarrow u + a$:

$$(T_1 - 1)f(u - u_{-1}) + (T_2 - 1)g(u - u_{-2}) + (T_1 T_2 - 1)h(u - u_{-1, -2}) = 0. \quad (0.6)$$

Этот класс уравнений заслуживает отдельного рассмотрения по двум причинам. Во-первых, в этом случае возникают несколько уравнений, которые нельзя определить на произвольном плоском графе (это объясняется тем, что связанные с ними квад-уравнения несимметричны; подробно это обсуждается в недавней работе Болля и Суриса [49]). Во-вторых, для уравнений (0.6)

преобразование Бэклунда имеет особенно простой вид (в этой главе оно называется преобразованием дуальности и определяется при помощи законов сохранения), и не представляет труда получить список цепочек, для которых оно определено (теорема 5.7).

В качестве побочного продукта при этом возникает и список интегрируемых дискретных цепочек Тоды на квадратной решётке. В непрерывном пределе столь же просто возникают списки цепочек типа Рудженарса-Тоды и Тоды (раздел 5.5). Следует подчеркнуть, что эти списки не являются исчерпывающими, так как они содержат только уравнения, инвариантные относительно сдвига. Полный список цепочек общего вида можно получить, требуя наличия высшей вариационной симметрии, что приводит к цепочкам, определяющим дискретизацию уравнения Ландау-Лифшица. В определённом смысле, эти дополнительные уравнения являются основными примерами цепочек типа Рудженарса-Тоды и Тоды. Они рассматриваются отдельно в гл. 7.

В главе 6, **Двухкомпонентные гиперболические системы** (Адлер, Шабат [23]) решается задача классификации совместных пар цепочек

$$u_x = F(u_1, u, v), \quad v_x = G(u, v, v_{-1}), \quad (0.7)$$

$$u_y = P(u_{-1}, u, v), \quad v_y = Q(u, v, v_1). \quad (0.8)$$

Основным результатом является список 6.1. Отметим, что классификация интегрируемых цепочек (0.7) была получена ранее Ямиловым [192]. В его работе в качестве основного определения было принято существование, вместо (0.8), симметрий достаточно высокого порядка и, кроме того, цепочка предполагалась гамильтоновой. В данной главе свойство гамильтоновости доказывается.

Рассматриваемые цепочки тесно связаны ещё с несколькими важными классами нелинейных цепочек: типа Тоды, Рудженарса-Тоды и Абловица-Ладика, а также с двухкомпонентными системами в частных производных, для которых они определяют авто-преобразования Бэклунда: гиперболическими типа Полмайера-Лунда-Редже и эволюционными типа НУШ. Исследованию этих взаимосвязей посвящено значительное число работ. Подход, основанный на исследовании пар (0.7), (0.8) позволяет воспроизвести некоторые результаты в более общем и прозрачном виде.

В главе 7, **Дискретизация уравнения Ландау-Лифшица** (Адлер [10]), устанавливается связь между двумя известными интегрируемыми дискретизациями уравнения Ландау-Лифшица

$$s_t = [s, s_{xx} + Js], \quad s \in \mathbb{R}^3, \quad \langle s, s \rangle = 1, \quad J = \text{diag}(J_1, J_2, J_3). \quad (0.9)$$

Первая из них, введённая Склининим [157], характеризуется тем, что фундаментальные скобки Пуассона для неё и для (0.9) обслуживаются одной и той же r -матрицей, а матрица L_n из представления нулевой кривизны аппроксимирует, в пределе $x = \varepsilon n$, $\varepsilon \rightarrow 0$, матрицу монодромии для (0.9). Эти свойства можно принять в качестве определения «правильного» дискретного аналога данной непрерывной модели, см. учебники Тахтаджяна, Фаддеева [174] и

Суриса [168]. Вторая дискретизация, введённая Шабатом и Ямиловым [156], см. также работу Кричевера [99], определяет преобразования Бэклунда для двухкомпонентной системы, связанной с (0.9) комплексифицированной стереографической проекцией. Это преобразование Бэклунда есть не что иное, как цепочка (X_1) , выведенная в предыдущей главе.

Обе модели тесно связаны, несмотря на различное происхождение. Показано, что цепочка Складина точечно эквивалентна сумме цепочки (X_1) и её симметрии (Y_1) . Иными словами, обе модели принадлежат одной и той же иерархии интегрируемых уравнений. В качестве дополнительного результата возникают интегрируемое гиперболическое уравнение на сфере и цепочки типа Тоды и релятивистской цепочки Тоды, также принадлежащие этой иерархии.

В разделе 7.5 рассматриваются дискретные цепочки Тоды на квадратной и треугольной решётках, связанные с цепочками (X_1) , (Y_1) и квад-уравнением (Q_4) . Эти результаты дополняют результаты главы 5.

В главе 8, **Интегрируемые изотропные цепочки Вольтерра на сфере** (Адлер [13]), рассматриваются цепочки общего вида

$$V_{n,x} = f_n V_{n+1} + g_n V_n + h_n V_{n-1},$$

где V_n векторы, а f_n, g_n, h_n скалярные функции от V_{n+1}, V_n, V_{n-1} . Такие цепочки служат векторными аналогами цепочки Вольтерра, являющейся одной из наиболее фундаментальных дифференциально-разностных моделей (Манаков [114], Кац, ван Мёрбеке [91], см. также книгу Суриса [168]). Интегрируемость понимается, как существование высших симметрий аналогичного вида, и ставится задача выделения интегрируемых случаев при следующих предположениях:

- 1) цепочка и её симметрии изотропны и сдвигово-инвариантны, то есть их коэффициенты зависят лишь от скалярных произведений $v_{m,n} := \langle V_m, V_n \rangle = \langle V_n, V_m \rangle$, причём эта зависимость одна и та же в каждом узле цепочки;
- 2) симметрия существует независимо от размерности векторного пространства и природы скалярного произведения;
- 3) все V_n имеют единичную длину, то есть $v_{n,n} = 1$.

Эта задача решается в рамках стандартного симметричного подхода, основанного на анализе необходимых условий интегрируемости в виде канонических законов сохранения. Скалярные цепочки типа Вольтерра $v_{n,x} = f(v_{n+1}, v_n, v_{n-1})$ были проклассифицированы Ямиловым [189, 193]. Векторный случай имеет, разумеется, свои особенности, но в целом применяемый метод весьма близок. Это обусловлено тем, что необходимые условия интегрируемости формально совпадают со скалярными (различие заключается в наборах динамических переменных: $v_{m,n}$ вместо v_n). В непрерывном случае общий подход и ряд важных результатов, основанных на этом простом наблюдении, принадлежат Соколову, Мешкову, Вольфу и др. (см. напр. [120]).

Полученный список 8.1 состоит в основном из новых цепочек. В соответствии с общей идеологией, их можно интерпретировать как преобразования

Бэклунда для уравнений в частных производных: двумерных векторных систем типа НШ и трёхмерных типа Дэви-Стюартсона.

Глава 9, Дискретное уравнение Кадомцева-Петвиашвили (ΔКР), носит вспомогательный характер и служит мотивировкой для классификационной задачи, рассматриваемой в главе 10. В основном, в ней приводятся некоторые достаточно хорошо известные факты о дискретном уравнении КР: вывод из линейных задач, связь с непрерывными уравнениями и цепочками, некоторые геометрические интерпретации (см., в частности, работы Хироты [88], Богданова, Конопельченко [46, 47, 48], Конопельченко, Шифа [96], Адлера, Старцева [26]).

В разделе 9.4 приведена новая геометрическая конструкция для полудискретного уравнения КР из статьи автора [14] (*тангенциальное отображение* F , заданное на множестве гладких плоских кривых). Эта конструкция просто связана с факторизацией дифференциальных операторов. В свою очередь, это позволяет установить связь с полудискретной цепочкой Тоды, и после редукции, с уравнением (H_3^0) . Одна из модификаций дискретного уравнения КР возникает при рассмотрении дискретной версии тангенциального отображения.

Основным свойством отображения F является 3D-совместность: если стартовать с кривых C, C_1, C_2, C_3 и построить кривые $C_{ij} = F(C, C_i, C_j)$, то кривая C_{123} , построенная по тройке C_i, C_{ij}, C_{ik} будет одна и та же для любой перестановки i, j, k . Это наблюдение облегчает понимание 4D-совместности для уравнений типа ΔКР, как 3D-совместности для некоторых протяжённых объектов (непрерывных или дискретных кривых).

Глава 10, Классификация интегрируемых уравнений типа ΔКР (Адлер, Бобенко, Сурис [18]). В классификации трёхмерных интегрируемых уравнений до сих пор имеется множество нерешённых задач. Обзор некоторых результатов в непрерывном случае имеется в работе Адлера, Шабата и Ямилова [25], в дискретном же случае результаты практически отсутствуют, поэтому представляет определённый интерес применить для целей классификации трёхмерных дискретных уравнений свойство 4D-совместности.

С логической точки зрения, 4D-совместность проще всего определить, как совместность уравнений, заданных на трёхмерных гранях гиперкуба, см. напр. работы Ганжи, Царёва [75] и Доливы, Сантини [61], где это свойство было сформулировано геометрически. В работе Адлера, Бобенко, Суриса [15] отмечалось, что оно выполняется для уравнения ΔВКР или уравнения Хироты-Мивы (Мива [128]) и уравнения двойного отношения. Классификация уравнений этого типа представляет собой слишком технически сложную задачу (или требует привлечения других идей). В данной главе рассматривается более простой случай уравнений типа ΔКР

$$f(u_i, u_j, u_k, u_{ij}, u_{ik}, u_{jk}) = 0 \quad (0.10)$$

(по сравнению с ΔВКР нет зависимости от переменных u и u_{ijk}). При этом 4D-

совместность понимается в смысле предыдущей главы, то есть одна (любая) из дискретных переменных считается выделенной (в случае тангенциального отображения это параметр на кривой), а для остальных должно выполняться свойство 3D-совместности. В непрерывном случае похожие примеры рассматривались в статьях Фералпонта, Хуснутдиновой, Царёва [69] и Адлера, Шабата [24]. Подробный анализ показывает, что для уравнений (0.10) именно такое определение 4D-совместности является естественным. Основным результатом является список 10.1. В теореме 10.24 приводится более точная формулировка, в которой перечислены все возможные совместные наборы уравнений.

Все уравнения из списка 10.1 хорошо известны (фактически, они эквивалентны одному уравнению). Малое число уравнений и отсутствие в них параметров отражает тот общий факт, что трёхмерные уравнения являются фундаментальными, а условия интегрируемости для них переопределены гораздо сильнее, чем для двумерных. Подчеркнём, что этот ответ получен в весьма общей постановке: в отличие от главы 2 не накладывает каких-либо дополнительных предположений о виде уравнений, и анализ условий совместности представляет собой элементарные выкладки, хотя и довольно длинные.

Результаты диссертации докладывались на семинарах Института Теоретической Физики им. Л.Д. Ландау, Математического Института им. В.А. Стеклова, Института математики Уфимского НЦ РАН, Research Institute for Mathematical Sciences (Киото), Technische Universität Berlin, Loughborough University, Imperial College (Лондон), Leeds University, а также на конференциях: International Workshop on Solitons, Collapses, Turbulence: Developments and Perspectives (1999, ИТФ, Черногловка); IV International Conference on Symmetries and Integrability of Difference Equations (2000, Tokyo University); Discrete Systems and Integrability (2001, Isaac Newton Institute for Mathematical Sciences, Cambridge); Classification Problems in the Theory of Integrable Systems (2002, SISSA, Trieste); Discrete differential geometry (2007, TU Berlin); Всероссийская школа молодых ученых по функциональному анализу, математической физике и информатике (2007, Карачаево-Черкесский ГУ, Теберда); Geometry and integrability (2008, Obergurgl, Austria); Geometric Aspects of Discrete and Ultra-Discrete Integrable Systems (2009, Glasgow University) в рамках программы Discrete Integrable Systems (2009, INI, Cambridge); Conformal Field Theory, Integrable Models and Liouville Gravity (2009, ИТФ, Черногловка).

Диссертация выполнена на основе работ [3]–[30].

Глава 1

Преобразования Дарбу-Бэклунда

Важнейшим источником дифференциально-разностных и дискретных интегрируемых уравнений служат преобразования Дарбу и Бэклунда. Преобразованием Дарбу называется авто-преобразование линейного дифференциального или разностного уравнения с переменными коэффициентами, строящееся по его частному решению. При этом коэффициенты исходного и преобразованного уравнения связаны некоторыми нелинейными соотношениями. В том случае, когда преобразование Дарбу применяется к паре вспомогательных линейных задач для нелинейного интегрируемого уравнения, эти соотношения интерпретируются как преобразования Бэклунда. Итерации этих преобразований порождают нелинейные дифференциально-разностные уравнения, известные как одевающие цепочки. Свойство перестановочности преобразований Дарбу приводит к чисто разностным уравнениям: так называемым квадратным уравнениям и отображениям Янга-Бакстера.

Данная глава носит вводный характер. Приведённые в ней сведения о преобразованиях Дарбу и Бэклунда служат мотивировкой и иллюстрацией для дальнейшего изложения.

1.1 Преобразование Дарбу для уравнения Шрёдингера

Мы введём основные понятия, рассматриваемые в последующих главах, на классическом примере стационарного уравнения Шрёдингера

$$\psi_{xx} = (u(x) - \lambda)\psi. \quad (1.1)$$

Преобразование Дарбу для этого уравнения определяется по частному решению $\psi = \psi^\alpha$ при $\lambda = \alpha$:

$$\psi_1 = \psi_x - f\psi, \quad f = \frac{\psi_x^\alpha}{\psi^\alpha}. \quad (1.2)$$

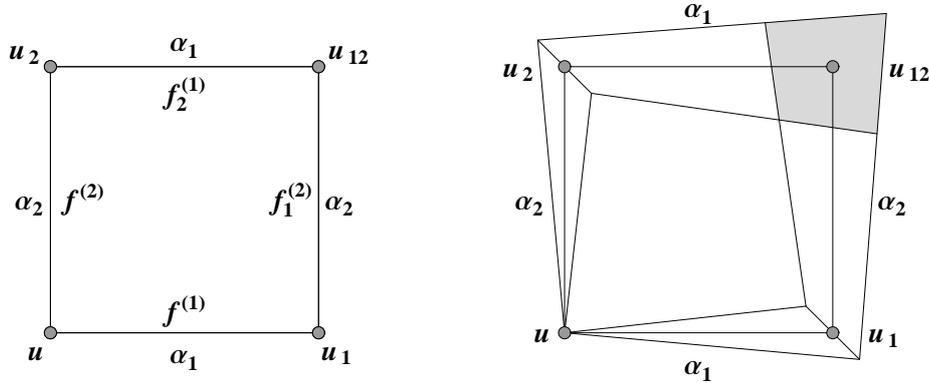


Рис. 1.1. Диаграмма Бьянки. Каждой паре точек из однопараметрических семейств u_1 , u_2 отвечает ровно одна точка из двухпараметрического семейства u_{12} .

При этом исходный и преобразованный потенциалы связаны, через посредство вспомогательной переменной f , соотношениями

$$u = f^2 + f_x + \alpha, \quad u_1 = f^2 - f_x + \alpha. \quad (1.3)$$

Дифференциальные подстановки $M^+ : f \mapsto u$ и $M^- : f \mapsto u_1$ называются преобразованиями Миуры. Преобразования Дарбу или Бэклунда, представимые как композиция двух преобразований типа Миуры, являются весьма типичными, хотя и не единственно возможными. При подходящем выборе частного решения ψ^α оператор Шрёдингера с новым потенциалом имеет тот же спектр, что и исходный, за исключением точки $\lambda = \alpha$, где может добавиться, или наоборот, исчезнуть собственное значение. Иначе говоря, преобразование Дарбу является дискретным изоспектральным преобразованием.

Важным свойством преобразований Дарбу является их перестановочность, или принцип нелинейной суперпозиции. Оно иллюстрируется диаграммой Бьянки на рис. 1.1 слева. Диаграмма справа поясняет, как это свойство соотносится с однопараметрическим произволом, отвечающим свободе в выборе функции ϕ из двумерного пространства решений. В формулировке следующей теоремы $E[u]$ обозначает уравнение Шрёдингера с потенциалом u , но на самом деле свойство перестановочности является универсальным.

Теорема 1.1 (Перестановочность преобразований Дарбу). Пусть $\alpha_1 \neq \alpha_2$ и общее решение ψ уравнения $E[u]$ связано с общим решением ψ_i уравнения $E[u_i]$ преобразованием Дарбу с параметром α_i , $i = 1, 2$. Тогда существует единственное уравнение $E[u_{12}]$, общее решение ψ_{12} которого связано с ψ_1 , ψ_2 преобразованиями Дарбу с параметрами α_2 , α_1 соответственно.

Доказательство. Пусть исходные преобразования Дарбу строятся по част-

ным решениям $\psi^{(i)}$:

$$\psi_{xx}^{(i)} = (u - \alpha_i)\psi^{(i)}, \quad \psi_i = \psi_x - f^{(i)}\psi, \quad f^{(i)} = \frac{\psi_x^{(i)}}{\psi^{(i)}}, \quad i = 1, 2.$$

Тогда функция

$$\psi_1^{(2)} = \psi_x^{(2)} - f^{(1)}\psi^{(2)} = (f^{(2)} - f^{(1)})\psi^{(2)}$$

удовлетворяет уравнению Шрёдингера с потенциалом u_1 . Используем её для построения дальнейшего преобразования Дарбу. Определим функцию

$$f_1^{(2)} = \frac{\psi_{1,x}^{(2)}}{\psi_1^{(2)}} = \frac{\psi_x^{(2)}}{\psi^{(2)}} + \frac{f_x^{(2)} - f_x^{(1)}}{f^{(2)} - f^{(1)}} = -f^{(1)} - \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{f^{(2)} - f^{(1)}}$$

(в последнем равенстве учтены соотношения $u = (f^{(i)})^2 + f_x^{(i)} + \alpha_i$). Отсюда получаем

$$\begin{aligned} \psi_{12} &= (D_x - f_1^{(2)})(D_x - f^{(1)})\psi = \psi_{1,x} - f_1^{(2)}\psi_1 \\ &= \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{f^{(2)} - f^{(1)}}\psi_x + \left(\frac{\alpha_1 f^{(2)} - \alpha_2 f^{(1)}}{f^{(2)} - f^{(1)}} - \lambda \right)\psi. \end{aligned}$$

Так как это выражение не меняется при перестановке индексов, то имеется ещё одно двукратное преобразование Дарбу, приводящее к этому же результату. Тем самым, существование требуемого потенциала u_{12} доказано. Его построение не требует дополнительных квадратур и осуществляется при помощи любой из формул

$$f_2^{(1)} = -f^{(2)} - \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{f^{(2)} - f^{(1)}}, \quad f_1^{(2)} = -f^{(1)} - \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{f^{(2)} - f^{(1)}} \quad (1.4)$$

чисто алгебраическим путём. Единственность следует из того, что уравнения

$$\begin{aligned} (D_x - f_1^{(2)})(D_x - f^{(1)}) &= (D_x - f_2^{(1)})(D_x - f^{(2)}) \Rightarrow \\ f_1^{(2)} + f^{(1)} &= f_2^{(1)} + f^{(2)}, \quad f_1^{(2)}f^{(1)} - f_x^{(1)} = f_2^{(1)}f^{(2)} - f_x^{(2)} \end{aligned} \quad (1.5)$$

однозначно разрешимы относительно $f_1^{(2)}, f_2^{(1)}$. \square

Отметим, что если рассматривать только нелинейное действие преобразований Дарбу, согласно формулам (1.3), то единственность потенциала u_{12} теряется, правда, лишь в специальных примерах. Простейший такой пример доставляют потенциалы

$$u = 0, \quad u_1 = 0, \quad u_2 = -\frac{2b^2}{\cosh^2 bx}, \quad u_{12} = \frac{2b^2(b^2 - a^2)}{(a \cosh bx \pm b \sinh bx)^2}.$$

связанные преобразованиями Дарбу с параметрами $\alpha_1 = -a^2$, $\alpha_2 = -b^2$ и функциями f вида

$$f^{(1)} = a, \quad f^{(2)} = b \tanh bx,$$

$$f_2^{(1)} = \frac{b^2 - a^2}{\pm a + b \tanh bx} - b \tanh bx, \quad f_1^{(2)} = \frac{b^2 - a^2}{\pm a + b \tanh bx} \pm a.$$

Существование таких примеров связано с тем, что из соотношений (1.3) следует равенство $f_1^{(2)} + f^{(1)} = f_2^{(1)} + f^{(2)} + \text{const}$ с некоторой постоянной интегрирования, менее ограничительное, чем первое соотношение (1.5). Чтобы избавиться от неоднозначности и, к тому же, получить более простую формулу суперпозиции, удобно перейти от преобразования (1.3) к преобразованию

$$v_{1,x} + v_x = (v_1 - v)^2 + \alpha, \quad (1.6)$$

введя новую переменную v согласно равенствам

$$f = v - v_1, \quad u = 2v_x.$$

Подстановки такого типа называются введением потенциала, или потенцированием. Правда, в данном случае этот термин не очень удачен, так как сама переменная u тоже называется потенциалом уравнения Шрёдингера (в некоторых работах v называют предпотенциалом).

Теорема 1.2 (Принцип нелинейной суперпозиции). Пусть переменные v и v_1, v_2 связаны преобразованиями Дарбу с различными параметрами α_1, α_2 , соответственно:

$$v_{1,x} + v_x = (v_1 - v)^2 + \alpha_1, \quad v_{2,x} + v_x = (v_2 - v)^2 + \alpha_2.$$

Тогда существует единственная переменная v_{12} , связанная с v_1, v_2 преобразованиями Дарбу с параметрами α_2 и α_1 :

$$v_{12,x} + v_{1,x} = (v_{12} - v_1)^2 + \alpha_2, \quad v_{12,x} + v_{2,x} = (v_{12} - v_2)^2 + \alpha_1.$$

Эта переменная однозначно выражается через v, v_1, v_2 из уравнения

$$(v - v_{12})(v_1 - v_2) = \alpha_1 - \alpha_2, \quad (1.7)$$

эквивалентного отображениям (1.4) при замене $f^{(i)} = v - v_i$.

Доказательство. Складывая уравнения с нужными знаками, нетрудно уничтожить все производные, что и даёт соотношение (1.7). Таким образом, если искомая переменная v_{12} существует, то она единственна и находится из этого уравнения (деление возможно, так как если $v_1 = v_2$, то и $\alpha_1 = \alpha_2$). Непосредственная проверка показывает, что при таком выборе v_{12} два последних уравнения действительно выполняются в силу двух первых. \square

Как видим, в приведённом доказательстве вообще не появляются ψ -функции. Всё же, точка зрения на преобразования Дарбу как на преобразования линейных уравнений более корректна и позволяет полностью описать их структуру. Общее преобразование Дарбу для уравнения Шрёдингера определяется как преобразование вида $\tilde{\psi} = a\psi + b\psi_x$ с полиномиальными по λ коэффициентами, переводящее решения уравнения (1.1) с потенциалом u в решения такого же уравнения с потенциалом \tilde{u} . Преобразования, отличающиеся умножением на постоянный многочлен от λ , естественно считать эквивалентными, поэтому далее будем предполагать, что коэффициенты a, b не имеют общих множителей вида $\lambda - \alpha$. Эта оговорка позволяет исключить из рассмотрения двукратные преобразования Дарбу $\psi_2 = \psi_{1,x} + f\psi_1$, $\psi_1 = \psi_x - f\psi$, эквивалентные умножению на такой множитель. Имеет место следующее важное свойство.

Теорема 1.3 (Факторизация преобразования Дарбу). Любое преобразование Дарбу разлагается в последовательность элементарных преобразований (1.2), единственным образом с точностью до произвольной перестановки параметров (перестановка совпадающих параметров не влияет на разложение).

Доказательство. Прямым вычислением доказываем, что коэффициенты преобразования Дарбу $\tilde{\psi} = a\psi + b\psi_x$ удовлетворяют уравнениям

$$2a_x + b_{xx} + (u - \tilde{u})b = 0, \quad a_{xx} + 2(u - \lambda)b_x + u_x b + (u - \tilde{u})a = 0.$$

Эти уравнения допускают первый интеграл

$$ab_x - a_x b + a^2 - (u - \lambda)b^2 = \delta(\lambda) \quad (1.8)$$

с многочленом в правой части. Теорема следует по индукции из трёх утверждений:

1) если $\delta = \text{const}$, то рассматриваемое преобразование есть умножение на константу, $\tilde{\psi} = a\psi$;

2) для того, чтобы существовало разложение рассматриваемого преобразования в композицию преобразования Дарбу $\tilde{\psi} = a_1\psi_1 + b_1\psi_{1,x}$ и преобразования (1.2) $\psi_1 = \psi_x - f\psi$, необходимо, чтобы многочлен δ делился на $\lambda - \alpha$;

3) если δ делится на $\lambda - \alpha$, то такое разложение существует, единственно, и преобразованию $\tilde{\psi} = a_1\psi_1 + b_1\psi_{1,x}$ отвечает первый интеграл равный $\delta/(\lambda - \alpha)$.

Утверждение 1) легко следует из сравнения степеней всех членов в равенстве (1.8).

Доказательство утверждения 2). Пусть такое разложение существует, тогда $f_x + f^2 + \alpha = u$ и выполняются соотношения

$$a = -a_1 f + b_1(f^2 + \alpha - \lambda), \quad b = a_1 - b_1 f. \quad (1.9)$$

Если при $\lambda = \alpha$ имеем $b = 0$, то и $a = 0$, что противоречит условию, что коэффициенты не должны иметь общий постоянный множитель $\lambda - \alpha$. Следовательно $b(\alpha) \neq 0$, а для f получаем представление $f = -(a/b)|_{\lambda=\alpha}$. Переписав

(1.8) в виде

$$-\left(\frac{a}{b}\right)_x + \left(\frac{a}{b}\right)^2 - u + \lambda = \frac{\delta}{b^2} \quad (1.10)$$

и полагая $\lambda = \alpha$, получаем $\delta(\alpha) = 0$.

Доказательство утверждения 3). Пусть $\delta(\alpha) = 0$. Согласно доказанному выше, f находится однозначно по формуле $f = -(a/b)|_{\lambda=\alpha}$, причём, в силу (1.10), выполняется уравнение Риккати $f_x + f^2 + \alpha = u$, а значит преобразование $\psi_1 = \psi_x - f\psi$ действительно определяет элементарное преобразование Дарбу. Но тогда и коэффициенты a_1, b_1 находятся однозначно из (1.9):

$$a_1 = \frac{af + b(f^2 + \alpha - \lambda)}{\alpha - \lambda}, \quad b_1 = \frac{a + bf}{\alpha - \lambda}.$$

Их полиномиальность следует из определения f , а то, что они не содержат общих факторов вида $\lambda - \text{const}$, видно непосредственно из (1.9). Таким образом, преобразование $\tilde{\psi} = a_1\psi_1 + b_1\psi_{1,x}$ также является преобразованием Дарбу. Осталось вычислить отвечающий ему первый интеграл. Удобнее всего сделать это, подставляя в (1.10) формулу

$$\frac{a}{b} = -f + \frac{\lambda - \alpha}{f - a_1/b_1}.$$

Это даёт равенство

$$f_x - \left(\frac{\lambda - \alpha}{f - a_1/b_1}\right)_x + \left(f - \frac{\lambda - \alpha}{f - a_1/b_1}\right)^2 - u + \lambda = \frac{d}{b_1^2(f - a_1/b_1)^2}$$

и после элементарных преобразований с учётом соотношений (1.3) получаем

$$-\left(\frac{a_1}{b_1}\right)_x + \left(\frac{a_1}{b_1}\right)^2 - u_1 + \lambda = \frac{\delta}{b_1^2(\lambda - a)},$$

что и требуется. \square

Итак, общее преобразование Дарбу эквивалентно цепочке элементарных преобразований (1.2) и приводит к последовательности потенциалов

$$u_n = f_n^2 + f_{n,x} + \alpha_n, \quad u_{n+1} = f_n^2 - f_{n,x} + \alpha_n. \quad (1.11)$$

Исключение отсюда переменной u приводит к так называемой одевающей цепочке

$$f_{n+1,x} + f_{n,x} = f_n^2 - f_{n+1}^2 + \alpha_n - \alpha_{n+1}, \quad (1.12)$$

а исключение f к цепочке

$$u_{n+1,x} + u_{n,x} = (u_{n+1} - u_n)\sqrt{2(u_{n+1} + u_n) - 4\alpha_n}, \quad (1.13)$$

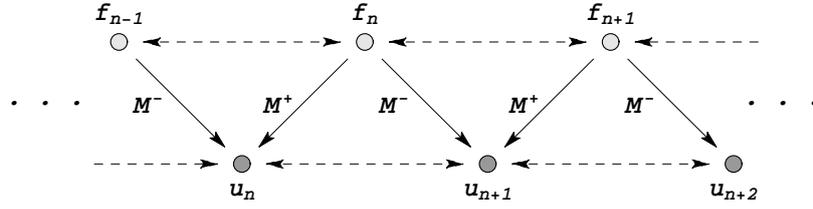


Рис. 1.2. Построение одевающей цепочки по двум преобразованиям типа Миуры

что изображено схематически на рис. 1.2. Пунктир означает, что преобразования не являются явными (требуется решить уравнение Риккати) и взаимно-однозначными (имеется произвол в выборе постоянной интегрирования). Ещё одна очень удобная форма одевающей цепочки

$$v_{n+1,x} + v_{n,x} = (v_{n+1} - v_n)^2 + \alpha_n \quad (1.14)$$

возникает при итерации преобразований Дарбу в форме (1.6). Цепочки для переменных f и u получаются отсюда при заменах

$$f_n = v_n - v_{n+1}, \quad u_n = 2v_{n,x}. \quad (1.15)$$

Имеется ещё несколько форм записи, например, подстановка $f_n + f_{n-1} = g_n$ приводит к цепочке

$$(g_{n+1}g_n)_x = g_{n+1}g_n(g_{n+1} - g_n) + (\alpha_{n+1} - \alpha_n)g_n + (\alpha_n - \alpha_{n-1})g_{n+1}. \quad (1.16)$$

Из перестановочности элементарных преобразований Дарбу следует, что общие преобразования Дарбу также перестановочны. Вычисление композиции двух общих преобразований Дарбу сводится к многократному применению принципа нелинейной суперпозиции, в форме (1.4) или (1.7). При этом уравнение (1.7) интерпретируется, как разностное уравнение на квадратной решётке (известное, как дискретное уравнение КДФ):

$$(v_{m,n} - v_{m+1,n+1})(v_{m+1,n} - v_{m,n+1}) = \alpha_m^{(1)} - \alpha_n^{(2)}. \quad (1.17)$$

Значения $v_{0,0}, v_{1,0}, \dots, v_{M,0}, v_{0,1}, \dots, v_{0,N}$, удовлетворяющие двум одевающим цепочкам, служат для этого уравнения начальными данными задачи Гурса и позволяют вычислить переменную $v_{M,N}$, то есть результат $M + N$ -кратного преобразования Дарбу. Дальнейшие следствия из свойства перестановочности приводятся в следующем разделе.

Уравнение (1.17) является простейшим представителем очень важного класса так называемых квад-уравнений, то есть дискретных уравнений на решётке \mathbb{Z}^2 (или, в более общей постановке, на квад-графе), связывающих полевые переменные, отвечающие вершинам каждого элементарного квадрата:

$$Q(v, v_1, v_2, v_{12}) = 0.$$

Уравнение может быть неавтономным, то есть допускается зависимость Q от узла (m, n) решётки, явно или через посредство параметров, как в случае (1.17). Следующая глава будет посвящена классификации аффинно-линейных квад-уравнений, то есть таких, что функция Q является неприводимым многочленом первой степени относительно каждой переменной:

$$a_{16}vv_1v_2v_{12} + a_{15}vv_1v_2 + \dots + a_0 = 0.$$

В этом случае решение задачи Гурса единственно для начальных данных общего положения. Пример не аффинно-линейного квад-уравнения можно получить, записывая принцип нелинейной суперпозиции в переменных u , то есть для преобразования Дарбу (1.13):

$$\sqrt{u_{12} + u_2 - 2\alpha_1} - \sqrt{u_1 + u - 2\alpha_1} = \sqrt{u_{12} + u_1 - 2\alpha_2} - \sqrt{u_2 + u - 2\alpha_2},$$

или, в полиномиальной форме,

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}(u_{12} - u)^2(u_1 - u_2)^2 + (\alpha_1 - \alpha_2)^2((u_{12} - u)^2 + (u_1 - u_2)^2) \\ - (\alpha_1 - \alpha_2)(u_{12} - u)(u_1 - u_2)(u + u_1 + u_2 + u_{12}) \\ + 2(\alpha_1^2 - \alpha_2^2)(u_{12} - u)(u_1 - u_2) = 0. \end{aligned} \quad (1.18)$$

1.2 Группа перестановок, 3D-совместность, отображения Янга-Бакстера

Сравнение теорем 1.1 и 1.3 показывает, что неоднозначность разложения двойного преобразования Дарбу на элементарные, отвечающая перестановке параметров, в точности эквивалентна свойству перестановочности преобразований Дарбу. Поскольку любую перестановку можно получить последовательностью транспозиций $R_k : \alpha_{k-1} \leftrightarrow \alpha_k$, то любое разложение многократного преобразования Дарбу пересчитывается в любое другое чисто алгебраическим путём при помощи формул нелинейной суперпозиции. Более того, пересчёт можно сделать несколькими способами (приводящими к одному и тому же результату), так как одну и ту же перестановку можно представить транспозициями R_k по разному. Эта неоднозначность приводит к очень важному следствию: она означает, что формулы нелинейной суперпозиции, рассматриваемые как алгебраические отображения, сами обладают определёнными групповыми свойствами. Эти свойства можно сформулировать при помощи следующих понятий:

- нелинейное представление группы перестановок;
- отображение Янга-Бакстера;
- свойство 3D-совместности.

Область применимости этих понятий различна, но в рассматриваемом примере они эквивалентны. Давать общие определения сейчас было бы преждевременно, вместо этого сформулируем несколько конкретных утверждений.

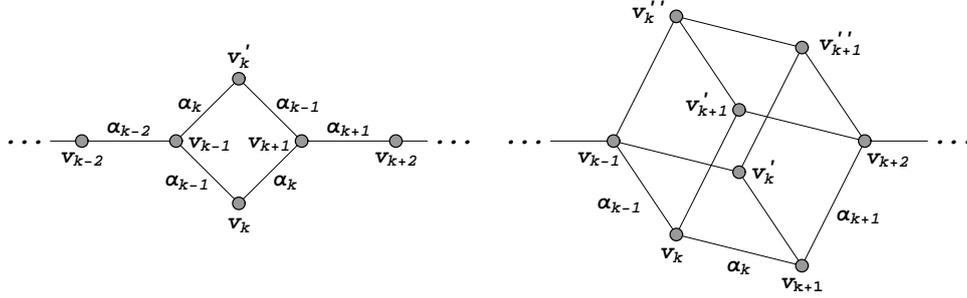


Рис. 1.3. Интерпретация диаграммы Бьянки как авто-преобразования цепочки. Тожество $(R_k R_{k+1})^3 = \text{id}$.

Теорема 1.4 (Нелинейное представление группы перестановок). Преобразования R_k , действующие на бесконечной последовательности параметров α_n и переменных v_n по формулам

$$\begin{aligned} v'_k &= v_k - \frac{\alpha_k - \alpha_{k-1}}{v_{k+1} - v_{k-1}}, & v'_n &= v_n, & n &\neq k, \\ \alpha'_{k-1} &= \alpha_k, & \alpha'_k &= \alpha_{k-1}, & \alpha'_n &= \alpha_n, & n &\neq k-1, k, \end{aligned} \quad (1.19)$$

переводят решения цепочки (1.14) в решения и удовлетворяют тождествам

$$R_k^2 = (R_k R_{k+1})^3 = (R_k R_j)^2 = \text{id}, \quad j \neq k \pm 1. \quad (1.20)$$

Доказательство. Преобразование (1.19) эквивалентно уравнению (1.7), при отождествлении

$$v = v_{k-1}, \quad v_1 = v_k, \quad v_2 = v'_k, \quad v_{12} = v_{k+1}, \quad \alpha_1 = \alpha_{k-1}, \quad \alpha_2 = \alpha_k,$$

откуда и следует, что оно действует на решениях одевающей цепочки. Конечная последовательность преобразований, приводящая к тождественной перестановке параметров, тождественно действует и на переменные v . Действительно, в силу теоремы 1.3, переменные $f_n = v_n - v_{n+1}$ определены при данной перестановке однозначно, и так как переменные v_n при преобразованиях R_k меняются только начиная с какого-то номера, то они также определены однозначно. \square

Нетрудно видеть, что преобразования R_k переписываются и в переменных f :

$$\begin{aligned} f'_{k-1} &= f_{k-1} - \frac{\alpha_k - \alpha_{k-1}}{f_k + f_{k-1}}, & f'_k &= f_k + \frac{\alpha_k - \alpha_{k-1}}{f_k + f_{k-1}}, \\ f'_n &= f_n, & n &\neq k-1, k, \end{aligned} \quad (1.21)$$

а дальнейшая замена $g_n = f_n + f_{n-1}$ приводит к преобразованию

$$g'_{k\pm 1} = g_{k\pm 1} \pm \frac{\alpha_k - \alpha_{k-1}}{g_k}, \quad g'_n = g_n, \quad n \neq k \pm 1. \quad (1.22)$$

Преобразования R_k , определяемые этими формулами (вместе с перестановкой параметров α_{k-1}, α_k), действуют на решениях цепочек (1.12), (1.16) и также задают нелинейное представление группы перестановок.

Диаграммы на рис. 1.3 иллюстрируют групповое свойство в терминах переменных v . На этих диаграммах переменная f_n ассоциируется с ребром $(n, n+1)$, как и параметр α_n . Альтернативный способ нумерации заключается в том, чтобы приписать эту переменную не к ребру, а к самому параметру, невзирая на его странствия по цепочке. Это приводит к отображениям, для которых α_n являются просто встроенными параметрами, не испытывающими никаких изменений.

Теорема 1.5 (Отображения Янга-Бакстера). Отображения

$$R_{ij} : \quad f'_j = f_i - \frac{\alpha_j - \alpha_i}{f_j + f_i}, \quad f'_i = f_j + \frac{\alpha_j - \alpha_i}{f_j + f_i}, \quad f'_n = f_n, \quad n \neq i, j, \quad (1.23)$$

удовлетворяют тождествам (i, j, k, l различны)

$$R_{jk}R_{ik}R_{ij} = R_{ij}R_{ik}R_{jk}, \quad R_{ij}R_{ji} = \text{id}, \quad R_{ij}R_{kl} = R_{kl}R_{ij}. \quad (1.24)$$

Наконец, третья формулировка группового свойства формул суперпозиции отличается выбором начальных данных, то есть переменных, через которые вычисляются все остальные. До сих пор мы рассматривали переменные, связанные преобразованиями Дарбу последовательно; другая возможность заключается в том, чтобы рассмотреть множество переменных, связанных преобразованиями Дарбу с какой-то фиксированной переменной. Эта интерпретация иллюстрируется рис. 1.4.

Теорема 1.6 (3D-совместность). Если значения v_{ij} найдены из уравнений

$$(v - v_{ij})(v_i - v_j) = \alpha_i - \alpha_j, \quad 1 \leq i, j \leq 3, \quad (1.25)$$

то значения переменной v_{123} , найденные из уравнений

$$(v_k - v_{123})(v_{ik} - v_{jk}) = \alpha_i - \alpha_j$$

совпадают, как функции от начальных данных v, v_1, v_2, v_3 , при любой перестановке индексов $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$.

Данная теорема является переформулировкой Теоремы 1.4. Поучительно провести и прямое доказательство. Вычисляя, например, сначала v_{13}, v_{23} , а затем v_{123} (что отвечает рис. 1.4), получаем

$$v_{123} = -\frac{(\alpha_2 - \alpha_1)v_1v_2 + (\alpha_3 - \alpha_2)v_2v_3 + (\alpha_1 - \alpha_2)v_3v_1}{(\alpha_2 - \alpha_1)v_3 + (\alpha_3 - \alpha_2)v_1 + (\alpha_1 - \alpha_3)v_2}. \quad (1.26)$$

Поскольку эта формула симметрична относительно перестановки индексов, два другие способа вычисления дают тот же самый результат. Из формулы

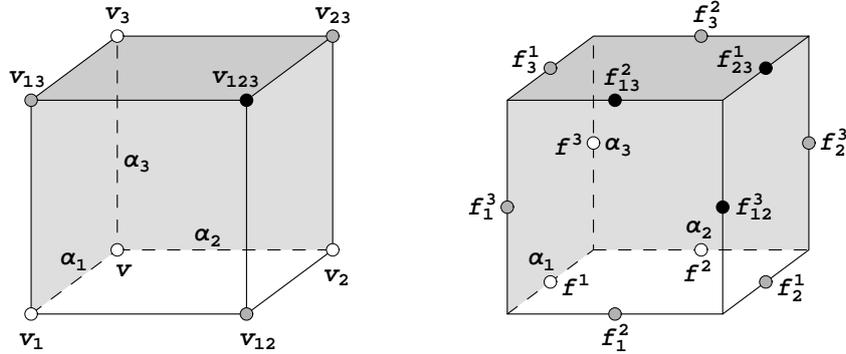


Рис. 1.4. 3D-совместность, или совместность вокруг куба. Вершинный и рёберный варианты. Белым отмечены начальные данные, серым промежуточные величины, чёрным переменные, для которых выполняется условие совместности. Штриховка граней показывает один из трёх возможных способов осуществления отображений.

видно также, что значение v_{123} не зависит от v . В следующей главе мы увидим, что это любопытное свойство не является случайным обстоятельством.

Как и раньше, свойство 3D-совместности можно сформулировать также в терминах переменных $f^i = v - v_i$, ассоциируемых с рёбрами куба. Оно означает, что преобразования (1.4), распространённые на все грани, то есть

$$f_j^i = -f^j - \frac{\alpha_j - \alpha_i}{f_j - f^i}, \quad (1.27)$$

приводят к совпадению значений

$$f_{ijk}^i = -f_k^j - \frac{\alpha_j - \alpha_i}{f_k^j - f_k^i} = -f_j^k - \frac{\alpha_k - \alpha_i}{f_j^k - f_j^i}$$

тождественно по начальным данным f^1, f^2, f^3 .

Следует подчеркнуть, что формулы (1.19) и (1.25) имеют разный смысл: в первом случае двойное преобразование Дарбу известно и восстанавливается одно из одинарных, во втором случае по двум одинарным преобразованиям Дарбу строится двойное. Это отвечает тому, что уравнение (1.7) разрешается относительно либо $v_2 = v'_k$ либо v_{12} . Тем не менее, легко видеть, что обе формулы совпадают, с точностью до обозначений. Это объясняется тем, что в формуле (1.7) все переменные равноправны (имеется симметрия квадрата). Это, в свою очередь, следует из симметрии преобразования Дарбу (1.14), в силу которой за начальную переменную можно принять любую из четырёх. В дальнейшем мы увидим, что встречаются ситуации, когда преобразования типа (1.19) и (1.25) отличаются по существу, вплоть до того, что определено только одно из них (см. разделы 1.4 и 9.4). Впрочем, различия можно заметить и в разобранном примере, при заменах $v \rightarrow f \rightarrow g$. Первая замена лишь слегка портит симметрию, что проявляется в разных знаках в формулах (1.4) и (1.21).

Вторая замена приводит к тому, что групповое свойство отображений (1.22) уже не допускает непосредственной формулировки как 3D-совместность, поскольку переменные g не ассоциируются ни с вершинами, ни с рёбрами куба.

Замечание 1.7 (Пояснение к обозначениям). В дальнейшем мы будем, в основном, придерживаться введённой в этих разделах системы индексации. При рассмотрении переменных на решётке \mathbb{Z}^d переменные, ассоциированные с рёбрами, отвечающими i -му координатному направлению, будут помечаться верхним индексом (i) или просто i , если это не вызывает недоразумений. Параметры α_i тоже следовало бы обозначать верхним индексом, но так как это усложняет обозначения, то для них будет делаться исключение.

Нижние индексы $1, 2, 3$ и i, j, k будут обозначать, обычно, не абсолютные координаты, а сдвиги относительно текущего узла решётки: если $u = u_{n_1, \dots, n_d}$, то

$$u_{\pm i} = u_{\dots, n_i \pm 1, \dots}, \quad u_{ii} = u_{\dots, n_i + 2, \dots}, \quad u_{ij} = u_{\dots, n_i + 1, \dots, n_j + 1, \dots},$$

и так далее. Индексы m, n обычно будут абсолютными. В ряде случаев более удобными оказываются другие системы обозначений, это будет оговариваться. К сожалению, индексы приходится использовать и для многих других целей, но автор старался, по возможности, избегать путаницы.

1.3 Представление нулевой кривизны

В более сложных, по сравнению с уравнением Шрёдингера, случаях удобно использовать матричную формулировку вспомогательных линейных задач, рассматривая уравнения вида

$$\Psi_x = U\Psi, \quad \Psi_t = V\Psi, \quad \Psi_i = W^i\Psi \quad (1.28)$$

с некоторыми матрицами U, V, W , зависящими от полевых переменных и спектрального параметра. При подходящем выборе этих матриц условия совместности

$$\begin{aligned} U_t - V_x &= [V, U], & W_x^i &= U_i W - W U, \\ W_t^i &= V_i W - W V, & W_j^i W^j &= W_i^j W^i, \end{aligned} \quad (1.29)$$

называемые представлениями нулевой кривизны, эквивалентны, соответственно, некоторому нелинейному уравнению в частных производных, x - и t -частям преобразования Бэклунда для него, и принципу нелинейной суперпозиции.

Уравнения (1.1), (1.2) записываются в матричном виде при обозначениях

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi \\ \psi_x \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ u - \lambda & 0 \end{pmatrix}, \quad W = \begin{pmatrix} -f & 1 \\ f^2 + \alpha - \lambda & -f \end{pmatrix}, \quad (1.30)$$

причём уравнение $W_x = U_1 W - W U$ в точности эквивалентно соотношениям (1.3). То, что переменная f выражается через частное решение уравнения Шрёдингера, легко восстанавливается при рассмотрении ядра матрицы $W|_{\lambda=\alpha}$.

Переход на матричный язык делает доказательство теоремы 1.3 чуть более прозрачным. Эта теорема переформулируется следующим образом.

Утверждение 1.8. Любая матрица M , определяющая общее преобразование Дарбу $\tilde{\Psi} = M\Psi$, (с полиномиальными по λ элементами, не имеющими постоянного общего делителя) разлагается в произведение матриц вида (1.30):

$$M = W_N \dots W_1, \quad W_n = W(f_n, \alpha_n),$$

причём разложение однозначно определяется нумерацией нулей многочлена $\delta(\lambda) = \det M = (\lambda - \alpha_1) \dots (\lambda - \alpha_N)$.

Отметим, что многочлен $\delta(\lambda)$ совпадает с первым интегралом (1.8). То, что $\det M$ не зависит от x , легко доказывается в общем виде при помощи формулы Лиувилля:

$$D_x(\log \det M) = \operatorname{tr} M_x M^{-1} = \operatorname{tr}(\tilde{U} - MUM^{-1}) = \operatorname{tr}(\tilde{U} - U) = 0.$$

Построение разложения сводится к последовательному вычислению ядер матриц W_n . В частности, это приводит к следующему утверждению.

Утверждение 1.9. Авто-преобразование одевающей цепочки в форме (1.21) определяется, как единственное решение следующего матричного уравнения относительно f'_k, f'_{k-1} :

$$W(f'_k, \alpha_{k-1})W(f'_{k-1}, \alpha_k) = W(f_k, \alpha_k)W(f_{k-1}, \alpha_{k-1}). \quad (1.31)$$

Аналогично, отображение (1.27), задающее принцип нелинейной суперпозиции в переменных f , определяется, как единственное решение следующего уравнения относительно f_j^i, f_i^j :

$$W(f_j^i, \alpha_i)W(f^j, \alpha_j) = W(f_j^j, \alpha_j)W(f^i, \alpha_i). \quad (1.32)$$

Таким образом, оба преобразования эквивалентны переразложению произведения двух матриц с переставленными параметрами в последнем из представлений нулевой кривизны (1.29). Не считая обозначений, разница между уравнениями (1.31), (1.32) в том, что в первом случае неизвестные находятся в одной части равенства, а во втором разнесены. Как уже отмечалось, в данном примере эта разница несущественна. На матричном языке, эквивалентность обоих определений вытекает из свойства $W^{-1}(f, \alpha) = (\alpha - \lambda)^{-1}W(-f, \alpha)$.

В разделе 1.1 мы стартовали с линейного уравнения (1.1) и строили ассоциированные с ним нелинейные уравнения. Часто требуется обратное: дано некоторое нелинейное уравнение (про которое известно, что оно интегрируемо), и нужно подобрать линейные задачи (1.28), условие совместности которых ему эквивалентно. Если одна из этих задач известна, то восстановление двух других не представляет особого труда. Покажем, как свойство 3D-совместности

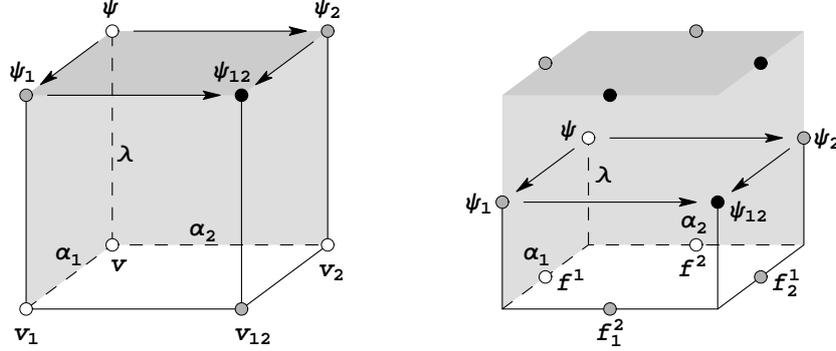


Рис. 1.5. Дискретное представление нулевой кривизны из 3D-совместности.

помогает построить матрицу W , такую что последнее уравнение (1.29) эквивалентно отображению (1.27). Зафиксируем в многомерной решётке некоторое направление k , объявим параметр $\lambda = \alpha_k$ спектральным и рассмотрим куб с направлениями i, j, k (ср. рис. 1.4 и 1.5, где $i = 1, j = 2, k = 3$).

Для отображения (1.27) будем считать $p = f^k$ вспомогательными переменными. Для них формула (1.27) принимает вид

$$p_i = -f^i - \frac{\alpha_i - \lambda}{f^i - p} = \frac{-f^i p + (f^i)^2 + \alpha_i - \lambda}{p - f^i} = L(f^i, \alpha_i)[p] = L^i[p],$$

то есть p_i получается из p в результате определённого дробно-линейного преобразования, коэффициенты которого зависят от f^i , α_i и λ . Из свойства 3D-совместности следует, что дробно-линейные преобразования L удовлетворяют, в силу (1.27), соотношениям

$$p_{ij} = L_j^i[L^j[p]] = L_i^j[L^i[p]], \quad (1.33)$$

тождественно по p и λ . Если, как на рис. 1.5, мы хотим получить представление для отображения на нижней грани, то вспомогательными считаются переменные, отвечающие вертикальным рёбрам, а преобразования L отвечают боковым граням. Так как при отождествлении

$$\frac{ap + b}{cp + d} \sim \delta \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

композиции преобразований отвечает произведение матриц, то формула (1.33) является просто проективной версией искомого представления, и после замены $p \rightarrow 1/p$ мы приходим к матрице W из (1.30). В дальнейшем мы всегда будем пользоваться этим отождествлением, определяющим изоморфизм между дробно-линейными преобразованиями $\text{Aut}(\mathbb{C})$ и проективной линейной группой $PSL_2(\mathbb{C}) = SL_2(\mathbb{C})/\mathbb{C}$. Множитель δ в общем случае уточняется из

сравнения определителей. В данном примере они сокращаются, поэтому можно просто положить $\delta = 1$ (можно взять также $\delta = \exp(f)$, поскольку эта величина удовлетворяет уравнению $\delta_j^i \delta^j = \delta_i^j \delta^i$). Матрицы U и V находятся далее прямым вычислением, которое сводится по существу к линейаризации уравнения Риккати $p_x = u - \lambda - p^2$ при помощи подстановки $p = \psi_x/\psi$.

Точно так же, для уравнения (1.25) с полями v в вершинах (напомним, что $f^i = v - v_i$, $u = 2v_x$) в качестве вспомогательных принимаются переменные $p = v_k$. Для этих переменных имеем дробно-линейные преобразования с коэффициентами, зависящими от v , v_i , α_i и λ :

$$p_i = v - \frac{\lambda - \alpha_i}{p - v_i} = L(v, v_i; \alpha_i, \lambda)[p] = L^i[p].$$

Свойство 3D-совместности, как и раньше, обеспечивает соотношение (1.33). В результате, мы приходим к матрицам

$$W(v_1, v; \alpha, \lambda) = \begin{pmatrix} -v_1 & 1 \\ -vv_1 - \lambda + \alpha & v \end{pmatrix}. \quad (1.34)$$

Для них выполняется утверждение, аналогичное (1.9).

Утверждение 1.10. Отображение (1.19), задающее нелинейное представление группы перестановок, определяется, как единственное решение уравнения относительно v'_k :

$$\begin{aligned} W(v_{k+1}, v'_k; \alpha_{k-1}, \lambda)W(v'_k, v_{k-1}; \alpha_k, \lambda) \\ = W(v_{k+1}, v_k; \alpha_k, \lambda)W(v_k, v_{k-1}; \alpha_{k-1}, \lambda). \end{aligned} \quad (1.35)$$

Отображение (1.25), удовлетворяющее свойству 3D-совместности, определяется, как единственное решение уравнения относительно v_{ij} :

$$W(v_{ij}, v_j; \alpha_i, \lambda)W(v_j, v; \alpha_j, \lambda) = W(v_{ij}, v_i; \alpha_j, \lambda)W(v_i, v; \alpha_i, \lambda). \quad (1.36)$$

До сих пор мы не рассматривали уравнения в частных производных, связанные с линейной задачей $\Psi_t = V\Psi$ из (1.28). В дальнейших главах они играют второстепенную роль, поэтому здесь мы приведём, для полноты картины, лишь несколько базовых формул, определяющих иерархию КдФ. Она возникает при рассмотрении непрерывных изоспектральных деформаций для уравнения Шрёдингера, вида

$$\psi_{t_n} = -\frac{1}{2}G_{n,x}\psi + G_n\psi_x, \quad (1.37)$$

что отвечает матрице

$$V_n = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}G_{n,x} & G_n \\ -\frac{1}{2}G_{n,xx} + (u - \lambda)G_n & \frac{1}{2}G_{n,x} \end{pmatrix}. \quad (1.38)$$

Условие совместности (1.1) и (1.37), как легко проверить, эквивалентно соотношению

$$u_{t_n} = \frac{1}{2}G_{n,xxx} - 2(u - \lambda)G_{n,x} - u_x G_n.$$

Полагая $G_n = (-4\lambda)^n - 2(-4\lambda)^{n-1}g_1 - \dots - 2g_n$, находим отсюда рекуррентные формулы

$$g_1 = u, \quad g_{k+1,x} = g_{k,xxx} - 4ug_{k,x} - 2u_x g_k, \quad k = 1, \dots, n, \quad u_{t_n} = g_{n+1,x}.$$

В частности,

$$g_2 = u_{xx} - 3u^2, \quad g_3 = u_{xxx} - 10uu_{xx} - 5u_x^2 + 10u^3,$$

и соответствующие потоки определяют уравнение Кортевега-де Фриза (КдФ)

$$u_t = u_{xxx} - 6uu_x \tag{1.39}$$

и его симметрию 5-го порядка. Формулу для g_{k+1} можно переписать в виде $g_{k+1} = R(g_k)$, где оператор $R = D_x^2 - 4u + 2D_x^{-1}u_x$ называется оператором рекурсии. Можно показать, что все вычисленные с его помощью коэффициенты g_n локальны, то есть выражаются через переменную u и её производные по x .

Преобразование Дарбу применительно к решениям уравнения КдФ называется преобразованием Бэклунда. Точнее, преобразование (1.3) определяет так называемую x -часть преобразования Бэклунда. Чтобы потенциал u_1 тоже удовлетворял уравнению (1.39), функция f должна удовлетворять дополнительному соотношению, образующему t -часть преобразования Бэклунда:

$$f_t = u_{xx} - 2uf - (4\alpha + 2u)f_x. \tag{1.40}$$

Оно эквивалентно условию совместности (1.2) и (1.37), и согласовано с формулой $f = \psi_x^\alpha / \psi^\alpha$, определяющей f по частному решению уравнения Шрёдингера (1.1). Исключение u при помощи формулы $u = f^2 + f_x + \alpha$ приводит к модифицированному уравнению КдФ (мКдФ)

$$f_t = f_{xxx} - 6(f^2 + \alpha)f_x. \tag{1.41}$$

Это уравнение не меняется при замене $f \rightarrow -f$, что и объясняет наличие двух преобразований Миуры (1.3). Цепочка (1.12) определяет x -часть преобразования Бэклунда для (1.41), причём переменная f_1 удовлетворяет уравнению с α_1 вместо α .

Непрерывная динамика для переменной v определяется одевающей цепочкой (1.14) и потенциальным уравнением КдФ (pot-КдФ)

$$v_t = v_{xxx} - 6v_x^2. \tag{1.42}$$

Соответствующие матрицы U и V равны

$$U = \begin{pmatrix} v & -1 \\ q + \lambda & -v \end{pmatrix}, \quad V = -4\lambda U + \begin{pmatrix} -2q_x & 4v_x \\ q_{xx} - 2vq_x & 2q_x \end{pmatrix}, \quad q := v^2 - v_x.$$

Нетрудно показать, что представления нулевой кривизны (1.29) с этими матрицами и матрицей (1.34) калибровочно эквивалентны представлениям с матрицами (1.30), (1.38), то есть существует линейное преобразование, связывающее решения соответствующих линейных задач.

Многочленам G старшей степени отвечают высшие симметрии уравнения КдФ, то есть эволюционные уравнения $u_{t_k} = F(u, u_x, u_{xx}, \dots, D_x^{2k+1}(u))$, совместные с (1.39). Эти уравнения совместны также друг с другом и образуют так называемую иерархию интегрируемых уравнений (само уравнение (1.39) отвечает $k = 1$, уравнения чётного порядка в иерархии КдФ отсутствуют). Преобразование Бэклунда совместно со всеми высшими симметриями и является равноправным членом иерархии КдФ.

Дискретная часть иерархии является, во многих отношениях, наиболее важной. Одевающая цепочка, уравнение КдФ и его высшие симметрии возникают из дискретного уравнения КдФ (1.17) в результате непрерывного предела. Этот предел можно осуществлять на многомерной решётке, ассоциируя её координатные направления с различными потоками. Из свойства 3D-совместности уравнения (1.17) вытекает коммутативность непрерывной части иерархии.

1.4 Преобразования Дарбу для уравнения Дирака

Структура преобразований Дарбу для уравнения Шрёдингера максимально проста. Более общий и сложный пример доставляет уравнение Дирака

$$\Psi_x = U\Psi, \quad \Psi = \begin{pmatrix} \psi \\ \phi \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} \lambda & u \\ -v & -\lambda \end{pmatrix}. \quad (1.43)$$

Элементарное преобразование Дарбу для него определяется формулами

$$\Psi_1 = W\Psi, \quad W = \begin{pmatrix} 1 & -u_1 \\ v & 2\lambda - \alpha - u_1v \end{pmatrix}, \quad (1.44)$$

причём условие совместности $W_x = U_1W - WU$ эквивалентно уравнениям

$$u_{1,x} = u + \alpha u_1 + u_1^2 v, \quad -v_x = v_1 + \alpha v + u_1 v^2. \quad (1.45)$$

Решение уравнения Риккати для u_1 строится по частному решению исходной системы при $\lambda = \alpha/2$, по формуле $u_1 = \psi^\alpha/\phi^\alpha$, после чего v_1 находится явно из второго уравнения. Это преобразование порождает цепочку

$$-u_{n+1,x} = u_n + \alpha u_{n+1} + u_{n+1}^2 v_n, \quad v_{n,x} = v_{n+1} + \alpha v_n + u_{n+1} v_n^2. \quad (1.46)$$

Свойство перестановочности преобразований Дарбу описывается следующей теоремой.

Теорема 1.11. Преобразования R_k , действующие на параметрах α_n и переменных u_n, v_n по формулам

$$R_k : \begin{cases} \tilde{u}_k = u_k + \frac{(\alpha_k - \alpha_{k-1})u_{k+1}}{1 - u_{k+1}v_{k-1}}, & \tilde{u}_n = u_n, \quad n \neq k, \\ \tilde{v}_k = v_k + \frac{(\alpha_{k-1} - \alpha_k)v_{k-1}}{1 - u_{k+1}v_{k-1}}, & \tilde{v}_n = v_n, \quad n \neq k, \\ \tilde{\alpha}_k = \alpha_{k-1}, \quad \tilde{\alpha}_{k-1} = \alpha_k, & \tilde{\alpha}_n = \alpha_n, \quad n \neq k-1, k, \end{cases} \quad (1.47)$$

переводят решения цепочки (1.46) в решения и удовлетворяют тождествам (1.20).

Доказательство нетрудно получить, исходя из того, что преобразование R_k определяется, как единственное решение уравнения

$$W(u_{k+1}, \tilde{v}_k, \alpha_{k-1})W(\tilde{u}_k, v_{k-1}, \alpha_k) = W(u_{k+1}, v_k, \alpha_k)W(u_k, v_{k-1}, \alpha_{k-1}).$$

Вместо преобразований R_k , свойство перестановочности можно записать также, как двухкомпонентное квад-уравнение

$$u_j - u_i = \frac{(\alpha_j - \alpha_i)u_{ij}}{1 - u_{ij}v}, \quad v_j - v_i = \frac{(\alpha_i - \alpha_j)v}{1 - u_{ij}v},$$

где индексы i, j отвечают двум разным преобразованиям вида (1.45). Существенное отличие этого уравнения от дискретного уравнения КдФ (1.25) заключается в том, что оно неразрешимо относительно переменных (u, v) или (u_{ij}, v_{ij}) . Поэтому формулировка свойства 3D-совместности возможна здесь лишь при выборе начальных данных в некоторой последовательности вершин на кубе, например (u, v) , (u_1, v_1) , (u_{12}, v_{12}) , (u_{123}, v_{123}) , что равносильно тождествам (1.20).

Нетрудно сообразить, что более симметричным является двукратное преобразование Дарбу $(u, v) \rightarrow (\tilde{u}, \tilde{v})$, отвечающее матрице

$$W = W(\tilde{u}, v_{-1}, \alpha)W^{-1}(u, v_{-1}, \alpha_{-1}) = W^{-1}(u_1, \tilde{v}, \alpha_{-1})W(u_1, v, \alpha),$$

в которой переменная v_{-1} (или u_1) исключена при помощи соотношений (1.47). Несложное вычисление приводит к матрице

$$W = \begin{pmatrix} 2\lambda - \beta - f & u - \tilde{u} \\ v - \tilde{v} & 2\lambda - \beta + f \end{pmatrix},$$

где

$$\beta = \frac{1}{2}(\alpha + \alpha_{-1}), \quad f^2 = \frac{1}{4}(\alpha - \alpha_{-1})^2 - (u - \tilde{u})(v - \tilde{v}).$$

Отвечающее ей преобразование Дарбу имеет вид

$$(u - \tilde{u})_x = \beta(u - \tilde{u}) + (u + \tilde{u})f, \quad (v - \tilde{v})_x = \beta(\tilde{v} - v) + (v + \tilde{v})f. \quad (1.48)$$

Суперпозиция таких двойных преобразований приводит уже к симметричному двухкомпонентному квад-уравнению, которое мы не будем выписывать.

Напомним, что уравнения, допускающие представление нулевой кривизны (1.29) с матрицей U (1.43) образуют иерархию нелинейного уравнения Шрёдингера (НУШ). Высшие потоки этой иерархии можно записать при помощи матричного оператора рекурсии в виде

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}_{t_n} = \begin{pmatrix} D_x + 2uD_x^{-1}v & 2uD_x^{-1}u \\ -2vD_x^{-1}v & -D_x - 2vD_x^{-1}u \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} u \\ -v \end{pmatrix}.$$

В частности, при $n = 2, 3$ получаем само НУШ и его симметрию третьего порядка:

$$u_{t_2} = u_{xx} + 2u^2v, \quad -v_{t_2} = v_{xx} + 2v^2u, \quad (1.49)$$

$$u_{t_3} = u_{xxx} + 6vuu_x, \quad v_{t_3} = v_{xxx} + 6uvv_x. \quad (1.50)$$

Преобразование Дарбу (1.48) и уравнение (1.50) выдерживают редукцию $v = 1$, $\tilde{v} = -1$, $\beta = 0$ (то есть, $\alpha_{-1} = -\alpha$), приводящую, после замены $\tilde{u} \rightarrow -\tilde{u}$, к уже известному нам преобразованию Бэклунда (1.13) для уравнения КдФ. Более интересна редукция $v = \pm u$, $\beta = 0$, приводящая к преобразованию Бэклунда для уравнения мКдФ:

$$(u - \tilde{u})_x = (u + \tilde{u})\sqrt{\alpha^2 \mp (u - \tilde{u})^2}, \quad u_{t_3} = u_{xxx} \pm 6u^2u_x.$$

Это преобразование *не совпадает* с одевающей цепочкой (1.12), обслуживающей уравнение (1.41). Таким образом, для мКдФ имеется “своя собственная” одевающая цепочка, связанная, вместо уравнения Шрёдингера, с уравнением Дирака. В отличие от цепочки (1.12), она годится для уравнения с произвольным знаком перед нелинейным членом. Это существенно, так как этот знак влияет на структуру спектра и вид точных решений (например, уравнение с минусом допускает только солитоны, уравнение с плюсом допускает также бризеры). Введение потенциала $u = w_x$ приводит к преобразованию Бэклунда для уравнения rot-мКдФ, а также уравнения sinh/sin-Гордона, принадлежащего той же иерархии:

$$\begin{aligned} w_x - \tilde{w}_x &= \alpha \sinh(w + \tilde{w}), & w_t &= w_{xxx} - 2w_x^3, & w_{xy} &= \sinh 2w; \\ w_x - \tilde{w}_x &= \alpha \sin(w + \tilde{w}), & w_t &= w_{xxx} + 2w_x^3, & w_{xy} &= \sin 2w. \end{aligned}$$

Вернёмся к вопросу о структуре общего преобразования Дарбу. Преобразования (1.44) образуют наиболее важную часть ответа, но, в отличие от уравнения Шрёдингера, уравнение Дирака допускает ещё одно элементарное преобразование, а именно

$$\Psi_2 = M\Psi, \quad M = \begin{pmatrix} 0 & -1/v \\ v & 2\lambda + v_x/v \end{pmatrix}. \quad (1.51)$$

Для его построения не требуется знать частное решение линейной задачи. Условие совместности $M_x = U_2 M - MU$ приводит к явному отображению

$$u_2 = 1/v, \quad v_2 = v_{xx} - v_x^2/v + uv^2,$$

итерации которого можно записать, полагая $u = e^{-q_{k-1}}$, $v = e^{q_k}$, в виде так называемой цепочки Тоды

$$q_{k,xx} = e^{q_{k+1}-q_k} - e^{q_k-q_{k-1}}. \quad (1.52)$$

Можно доказать, что общее преобразование Дарбу для уравнение Дирака раскладывается в последовательность элементарных преобразований вида (1.44), (1.51) и их обратных (строго говоря, надо добавить ещё преобразование $\Psi \rightarrow \sigma_3 \Psi$, приводящее к смене знака $(u, v) \rightarrow (-u, -v)$).

Свойство перестановочности преобразований (1.44), (1.51) выражается условием совместности $M_1 W = W_2 M$. Оно приводит к 5-точечному дискретному уравнению типа Тоды на переменную $q_{n,k}$, заданную на решётке \mathbb{Z}^2 , а именно, к уравнению

$$e^{q_{1,-2}-q} - e^{q-q-1,2} + e^{q_1-q} - e^{q-q-1} + \alpha - \alpha_{-1} = 0. \quad (1.53)$$

Нетрудно непосредственно проверить, что это уравнение совместно с дифференцированием

$$-q_x = e^{q_{1,-2}-q} + e^{q_1-q} + \alpha = e^{q-q-1,2} + e^{q-q-1} + \alpha_{-1},$$

то есть производная по x от левой части (1.53) обращается в ноль в силу самого уравнения (1.53). При этом при каждом фиксированном n переменные $q_{n,k}$ удовлетворяют цепочке Тоды (1.52), а при каждом фиксированном k переменные $u_n = e^{-q_{n,k-1}}$, $v_n = e^{q_{n,k}}$ удовлетворяют цепочке (1.46).

1.5 Преобразование Дарбу для дискретного уравнения Шрёдингера

Мы видели, что уравнение рот-КдФ (1.42), одевающая цепочка (1.14) и квад-уравнение (1.17) определяют, на разных уровнях дискретизации, изоспектральные деформации для уравнения Шрёдингера (1.1). Имеется параллельная теория, связанная с дискретными спектральными задачами. Здесь вместо уравнений типа КдФ возникают цепочки типа Вольтерра, а дискретными одевающими цепочками служат асимметричные квад-уравнения. Принцип суперпозиции выражается симметричными квад-уравнениям, как и в непрерывном случае.

1.5.1 Цепочка Вольтерра

Цепочка Вольтерра

$$u_{n,t} = u_n(u_{n+1} - u_{n-1}) \quad (1.54)$$

определяет изоспектральную деформацию для уравнения

$$\psi_{n+1} = \lambda\psi_n + u_n\psi_{n-1}, \quad (1.55)$$

а именно, эта цепочка возникает, как условие совместности (1.55) и

$$\psi_{n,t} = u_n(\psi_n - \lambda\psi_{n-1}). \quad (1.56)$$

Преобразование Дарбу определяется по частному решению $\psi = \phi$ этих двух уравнений при $\lambda = 2\alpha$, согласно формулам

$$\tilde{\psi}_n = -\frac{\lambda}{2\alpha}\psi_n + (f_n + \alpha)\psi_{n-1}, \quad f_n + \alpha = \frac{\phi_n}{\phi_{n-1}}, \quad (1.57)$$

причём исходный и преобразованный потенциалы связаны дискретными преобразованиями типа Миуры

$$u_n = (f_n + \alpha)(f_{n+1} - \alpha), \quad \tilde{u}_n = (f_{n+1} + \alpha)(f_n - \alpha). \quad (1.58)$$

Переменные f_n удовлетворяют модифицированной цепочке Вольтерра

$$f_{n,t} = (f_n^2 - \alpha^2)(f_{n+1} - f_{n-1}). \quad (1.59)$$

Линейные уравнения можно записать также в матричном виде

$$\begin{aligned} \Psi_{n+1} &= L_n \Psi_n, \quad \Psi_{n,t} = A_n \Psi_n, \quad \tilde{\Psi}_n = M_n \Psi_n \\ \Rightarrow \quad L_{n,t} &= A_{n+1} L_n - L_n A_n, \quad \tilde{L}_n M_n = M_{n+1} L_n, \end{aligned} \quad (1.60)$$

где

$$\begin{aligned} \Psi_n &= \begin{pmatrix} \psi_n \\ \psi_{n-1} \end{pmatrix}, \quad L_n = \begin{pmatrix} \lambda & u_n \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_n = \begin{pmatrix} u_n & -\lambda u_n \\ -\lambda & \lambda^2 + u_{n-1} \end{pmatrix}, \\ M_n &= \begin{pmatrix} -\frac{\lambda}{2\alpha} & f_n + \alpha \\ \frac{1}{f_n - \alpha} & -\frac{\lambda}{f_n - \alpha} - \frac{\lambda}{2\alpha} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Модифицированная цепочка (1.59) эквивалентна уравнению $M_{n,t} = \tilde{A}_n M_n - M_n A_n$, где в матрицах A сделана замена (1.58).

Итерирование преобразования Дарбу (1.58) приводит к дискретной одевающей цепочке. Будем считать n первой дискретной переменной, а номер итерации второй, тогда (1.58) записывается в виде

$$u = (f + \alpha)(f_1 - \alpha), \quad u_2 = (f_1 + \alpha)(f - \alpha), \quad (1.61)$$

где, как обычно, нижний индекс обозначает сдвиг по соответствующей переменной. Параметр α ассоциирован с рёбрами вдоль второго координатного направления, и зависит лишь от второй переменной (то есть, $\alpha_1 = \alpha$). Как и в непрерывном случае, одевающую цепочку можно записать в нескольких эквивалентных формах. Проще всего исключить переменные u , что приводит к уравнению

$$(f_2 + \alpha_2)(f_{12} - \alpha_2) = (f_1 + \alpha)(f - \alpha), \quad (1.62)$$

которое можно считать дискретным аналогом одевающей цепочки (1.12). Альтернативно, можно воспользоваться законом сохранения

$$u_2 - u = 2\alpha(f - f_1)$$

и ввести новую переменную v согласно формулам

$$u = 2\alpha(v - v_1), \quad f = v_2 - v.$$

При этой замене уравнения (1.61) превращаются в одно уравнение

$$(v_2 - v)(v_{12} - v_1) + \alpha(v_{12} + v_1 - v_2 - v) - \alpha^2 = 0, \quad (1.63)$$

а сама цепочка Вольтерра принимает вид

$$v_t = (v_1 - v)(v - v_{-1}).$$

Это уравнение служит аналогом уравнения rot-КдФ (1.42).

Оба уравнения (1.62) и (1.63) — аффинно-линейные квад-уравнения, но несимметричные, в отличие от уравнений из предыдущих разделов. Это объясняется тем, что роли дискретных переменных здесь различны: переменная n в цепочке Вольтерра по смыслу отвечает переменной x в КдФ.

Симметрия восстанавливается на следующем шаге, при рассмотрении принципа суперпозиции преобразования Дарбу. Несложно проверить, что уравнение (1.63) и его копия

$$(v_3 - v)(v_{13} - v_1) + \beta(v_{13} + v_1 - v_3 - v) - \beta^2 = 0,$$

где β параметр, ассоциированный с третьим координатным направлением, образуют 3D-совместную систему с симметричным квад-уравнением

$$\alpha(v - v_2)(v_3 - v_{23}) - \beta(v - v_3)(v_2 - v_{23}) + \alpha\beta(\alpha - \beta) = 0.$$

Отметим, что это же уравнение возникает как принцип суперпозиции для одной из непрерывных одевающих цепочек (см. уравнение (Q_1°) в списке 2.1 и раздел 2.4).

Подчёркнём следующее существенное отличие между уравнениями (1.62) и (1.63). Именно, уравнение (1.62) в рассматриваемом контексте не имеет смысла интерпретировать как 3D-совместное. Действительно, переменные $f =$

v_2-v ассоциированы (вместе с матрицами M) с рёбрами решётки порождённой преобразованиями Дарбу, то есть это переменные Янг-Бакстеровского типа. Рассматривая переменные и параметры, ассоциированные с рёбрами многомерной решётки, введём для них обозначения $f^i = v_i - v$ и α_i , $i = 2, 3, \dots$ (напомним, что первое координатное направление зарезервировано за сдвигом в самой цепочке Вольтерра). Тогда уравнение

$$M[f_i^j, \alpha_j]M[f^i, \alpha_i] = M[f_j^i, \alpha_i]M[f^j, \alpha_j]$$

приводит к отображению

$$f_j^i = R(f^i, f^j, \alpha_i, \alpha_j), \quad f_i^j = R(f^j, f^i, \alpha_j, \alpha_i),$$

где

$$R(f, g, \alpha, \beta) = \frac{\beta(\beta^2 - \alpha^2) + g(\alpha f - \beta g)}{\alpha g - \beta f}.$$

Заметим, что переменные u и матрицы L также ассоциированы с рёбрами, вдоль выделенной оси n . Поэтому, преобразование (1.58) тоже можно интерпретировать как отображение Янга-Бакстера, переписав его в виде $(u_n, f_n) \rightarrow (\tilde{u}_n, f_{n+1})$.

1.5.2 Модифицированная цепочка Вольтерра

Как и уравнение мКдФ, модифицированная цепочка Вольтерра

$$u_{n,t} = (u_n^2 + c)(u_{n+1} - u_{n-1}) \quad (1.64)$$

обладает “своим собственным” преобразованием Бэклунда. По отношению к нему параметр c является постоянным (любого знака) и уже не имеет отношения к собственным значениям линейной задачи, как в (1.59).

В случае $c = 0$ все формулы немного проще. Цепочка (1.64) является условием совместности линейных уравнений

$$\psi_{n+1} + \psi_{n-1} = \frac{\lambda}{u_n} \psi_n, \quad \psi_t = \frac{\lambda^2}{2} \psi_n - \lambda u_n \psi_{n-1}; \quad (1.65)$$

преобразование Дарбу-Бэклунда строится по частному решению $\psi = \phi$ при $\lambda = \alpha$, по формулам

$$\tilde{\psi}_n = \psi_{n-1} - \frac{\lambda}{\alpha} f_n \psi_n, \quad f_n = \frac{\phi_{n-1}}{\phi_n}; \quad (1.66)$$

исходный и преобразованный потенциалы связаны формулами

$$f_n + \frac{1}{f_{n+1}} = \frac{\alpha}{u_n}, \quad f_{n+1} + \frac{1}{f_n} = \frac{\alpha}{\tilde{u}_n}. \quad (1.67)$$

В общем случае $c \neq 0$ удобнее пользоваться матричным представлением нулевой кривизны (1.60), с матрицами

$$L_n = \begin{pmatrix} \frac{c}{\lambda} & u_n \\ -u_n & \lambda \end{pmatrix}, \quad A_n = \begin{pmatrix} \frac{c^2}{\lambda^2} + u_{n-1}u_n & \frac{c}{\lambda}u_n + \lambda u_{n-1} \\ -\frac{c}{\lambda}u_{n-1} - \lambda u_n & \lambda^2 + u_{n-1}u_n \end{pmatrix},$$

$$M_n = \frac{1}{c + \alpha^2 f_n^2} \times \begin{pmatrix} \alpha(c^2 - \alpha^2 \lambda^2) - c\alpha(\lambda^2 - \alpha^2)f_n^2 & -(c^2 - \alpha^4)\lambda f_n \\ (c^2 - \alpha^4)\lambda f_n & c\alpha(\lambda^2 - \alpha^2) - \alpha(c^2 - \alpha^2 \lambda^2)f_n^2 \end{pmatrix}.$$

Условие совместности $L_2 M = M_1 L$ эквивалентно паре дискретных уравнений Риккати на переменную f :

$$u = \frac{\alpha f_1 - cf/\alpha}{1 + f f_1}, \quad u_2 = \frac{\alpha f - cf_1/\alpha}{1 + f f_1}. \quad (1.68)$$

Условие $M_t = A_2 M - M A$ (t -часть преобразования Бэклунда) эквивалентно непрерывному уравнению Риккати

$$f_t = \left(\frac{c}{\alpha}u_{-1} + \alpha u\right)f^2 + \left(\frac{c^2}{\alpha^2} - \alpha^2\right)f + \alpha u_{-1} + \frac{c}{\alpha}u. \quad (1.69)$$

В силу этих уравнений переменная f удовлетворяет цепочке

$$f_{n,t} = \frac{(\alpha^2 + cf_n^2)(c + \alpha^2 f_n^2)(f_{n+1} - f_{n-1})}{\alpha^2(1 + f_{n+1}f_n)(1 + f_n f_{n-1})}, \quad (1.70)$$

известной как дважды модифицированная цепочка Вольтерра.

Очевидно, исключение u из уравнений (1.68) и в этом примере приводит к несимметричному квад-уравнению на переменную f . Принцип суперпозиции в терминах этой переменной приводит к отображению Янга-Бакстера. Чтобы прийти к эквивалентному симметричному квад-уравнению, нужно ввести потенциал при помощи некоторого закона сохранения. Вид этой замены зависит от знака c .

1) В простейшем случае $c = 0$ из уравнений (1.67) следует равенство

$$\frac{\alpha}{u_2} - \frac{\alpha}{u_{-1}} = f_1 - f_{-1},$$

позволяющее ввести переменную v согласно формулам

$$f = \alpha(v_2 - v_{-1}), \quad 1/u = v_1 - v_{-1}.$$

Эта замена превращает уравнения (1.67) в квад-уравнение

$$(v_{12} - v)(v_1 - v_2) = \alpha^{-2}$$

с минимальной асимметрией — в правой части один параметр вместо разности. Рассмотрим теперь другое преобразование Дарбу, отвечающее собственному значению $\lambda = \beta$:

$$(v_{13} - v)(v_1 - v_3) = \beta^{-2}.$$

Несложное вычисление показывает, что результат двукратного преобразования Дарбу не зависит от порядка: $v_{23} = v_{32}$, причём выполняется формула суперпозиции

$$(v_{23} - v)(v_3 - v_2) = \alpha^{-2} - \beta^{-2},$$

с точностью до обозначений совпадающая с дискретным уравнением КдФ (1.17).

2) В случае $c = -d^2$ потенциал вводится согласно формулам

$$f = \frac{\alpha(v_2 + v_{-1})}{d(v_2 - v_{-1})}, \quad v = d \frac{v_1 + v_{-1}}{v_1 - v_{-1}}.$$

При этом уравнения (1.68) превращаются в несимметричное квад-уравнение

$$c(v_{12} - v)(v_1 - v_2) = -\alpha^2(v_{12} + v)(v_1 + v_2),$$

а формула суперпозиции имеет вид

$$r(\alpha)(vv_3 + v_2v_{23}) = r(\beta)(vv_2 + v_3v_{23}), \quad r(\lambda) = \frac{\lambda^2 - c}{\lambda^2 + c}, \quad (1.71)$$

что эквивалентно уравнению (H_3^0), определяющему принцип суперпозиции для уравнения rot-мКдФ, а также для уравнения sinh-Гордона.

2) Наконец, в случае $c = -d^2$ делается замена

$$f = \frac{\alpha(1 + v_{-1}v_2)}{d(v_{-1} - v_2)}, \quad u = d \frac{1 + v_1v_{-1}}{v_1 - v_{-1}},$$

приводящая к уравнению

$$c(v_{12} - v)(v_1 - v_2) = \alpha(1 + v_{12}v)(1 + v_1v_2)$$

и принципу суперпозиции

$$(r(\alpha) + r(\beta))(v_3 - v_2)(v - v_{23}) = (r(\alpha) - r(\beta))(1 + v_3v_2)(1 + vv_{23}) \quad (1.72)$$

эквивалентному принципу суперпозиции для уравнения sin-Гордона. Уравнение (1.71) переходит в (1.72) при комплексной замене $z \rightarrow (i - z)/(i + z)$, то есть эти уравнения служат просто двумя разными вещественными формами одного и того же уравнения.

1.6 Векторный пример

В заключение, рассмотрим одну векторную одевающую цепочку, имеющую простую геометрическую интерпретацию. Этот пример показывает, в частности, что роль параметров в преобразовании Бэклунда могут играть первые интегралы цепочки.

Начнём с дискретной части. Рассмотрим последовательность точек $v_n \in \mathbb{R}^d$ и определим преобразование R_k , при котором точка v_k отражается относительно серединной нормальной гиперплоскости к отрезку $v_{k-1}v_{k+1}$. Все остальные точки остаются неподвижными. Обозначим $\ell_n = |v_{n+1} - v_n|^2$, тогда преобразование выражается формулой

$$R_k : \quad v'_k = v_k + \frac{\ell_k - \ell_{k-1}}{|v_{k+1} - v_{k-1}|^2}(v_{k+1} - v_{k-1}), \quad v'_n = v_n, \quad n \neq k. \quad (1.73)$$

Нетрудно видеть, что при этом величины ℓ_k и ℓ_{k-1} переставляются, подобно параметрам α в формуле (1.19). Для наглядности можно считать, что $n \in \mathbb{Z}_N$, $N \geq 3$ и $d = 2$, что отвечает случаю плоского N -угольника, возможно, с самопересечениями. Рассматриваемое преобразование означает, что от многоугольника отрезается один угол, переворачивается и приклеивается обратно к линии отреза. Равносторонние многоугольники не меняются при преобразованиях.

Отметим, что если все точки v_n лежат на m -мерной плоскости или сфере в \mathbb{R}^d , то преобразования R_k не выводят за её пределы. В частности, при периодическом замыкании $n \in \mathbb{Z}_N$ можно считать, без потери общности, что $d < N$. Ещё один пример инвариантного многообразия возникает, если чётные и нечётные вершины лежат поочерёдно на двух параллельных m -мерных плоскостях или концентрических сферах.

Из геометрического определения преобразования R_k ясно, что формулу (1.73) можно разрешить также относительно переменной v_{k+1} , причём выражение фактически не меняется. Это позволяет интерпретировать это преобразование также как симметричное квад-уравнение

$$v_{12} = v + \frac{|v_2 - v|^2 - |v_1 - v|^2}{|v_2 - v_1|^2}(v_2 - v_1). \quad (1.74)$$

Нетривиальные свойства отображений (1.73) основаны на представлении нулевой кривизны типа (1.35). Пусть u и v векторы-столбцы, $\ell = |u - v|^2$, I_d единичная матрица размера d и матрица $W(u, v)$ имеет вид

$$W = \begin{pmatrix} -|u|^2 & 2u^\top & 2 \\ -(\lambda + \ell)u - |u|^2v & 2vu^\top + (\lambda + \ell)I_d & 2v \\ \frac{1}{2}(\lambda + \ell)(\lambda + |u|^2 + |v|^2) + \frac{1}{2}|u|^2|v|^2 & -(\lambda + \ell)v^\top - |v|^2u^\top & -|v|^2 \end{pmatrix}.$$

Следующее утверждение проверяется непосредственно (ср. с утверждением 1.10).

Утверждение 1.12. Преобразование R_k эквивалентно соотношению

$$W(v_{k+1}, v'_k)W(v'_k, v_{k-1}) = W(v_{k+1}, v_k)W(v_k, v_{k-1}). \quad (1.75)$$

Отсюда следует, в частности, что при периодическом замыкании характеристический многочлен $d(\mu, \lambda) = \det(\hat{W} - \mu I_{d+2})$ матрицы $\hat{W} = W_N \dots W_2 W_1$ является инвариантом преобразований R_n . Действительно, преобразования R_N, \dots, R_2 вообще не меняют \hat{W} , а преобразование R_1 действует, как сопряжение:

$$W'_N W_{N-1} \dots W_2 W'_1 = (W'_N W_N^{-1}) \hat{W} (W'_N W_N^{-1})^{-1}.$$

Легко проверить, что $\det W = -(\lambda + \ell)^{d+2}$. Инвариант $d(\mu, \lambda)$ не исчерпывает все инварианты отображения. Дополнительными функционально независимыми инвариантами служат векторы

$$J = \sum_1^N |v_n|^2 (v_{n+1} - v_{n-1}), \quad S = \sum_1^N \langle a, v_n \rangle (v_{n+1} - v_{n-1}),$$

где $a \in \mathbb{R}^d$ произвольный постоянный вектор. Инвариант S получается из J при параллельном переносе $v \rightarrow v + a$, и инварианты, отвечающие разным a , эквивалентны по модулю группы вращений $SO(m)$.

Наиболее замечательным свойством преобразований (1.73) является следующее.

Утверждение 1.13. Преобразования (1.73) удовлетворяют тождествам (1.20), определяющим группу перестановок. Альтернативно, квад-уравнение (1.74) 3D-совместно.

Доказательство. Доказательство требует только тождество $(R_k R_{k+1})^3 = \text{id}$. Обозначим $Q = (R_k R_{k+1})^3$ и пусть $Q(W_n) = \tilde{W}_n$. Согласно утверждению 1.12, преобразование Q не меняет произведение $P = W_{k+1} W_k W_{k-1}$. Кроме того, Q тождественно действует на определителях матриц W_i . При $\lambda = \ell_{k+1}$ левые множители в P и $Q(P)$ становятся вырожденными. Образ матрицы W_{k+1} натянут на $d + 2$ -мерный вектор-столбец $(2, 2v_{k+1}, -|v_{k+1}|^2)$ и так как матрица $W_k W_{k-1}$ невырождена, то он совпадает с образом P . Аналогично, образы \tilde{W}_{k+1} и $\tilde{P} = P$ совпадают, следовательно $\tilde{v}_{k+1} = v_{k+1}$. Сокращая общий множитель W_{k+1} , получаем равенство $\tilde{W}_k \tilde{W}_{k-1} = W_k W_{k-1}$ и повторяя рассуждение, завершаем доказательство. \square

В случае замкнутого N -угольника преобразования R_n определяют нелинейное представление аффинной группы Вейля \hat{A}_{N-1} . В частности, если при менять к многоугольнику всевозможные преобразования, не затрагивающие одну выделенную вершину, то число полученных многоугольников будет конечным. Действительно, подгруппа, порождённая всеми преобразованиями R_n , кроме одного, изоморфна симметрической группе S_N .

Сходство с примером из раздела 1.2 подсказывает, что преобразования R_n должны допускать некоторые непрерывные симметрии (не считая движений в пространстве). Одна из таких симметрий описывается цепочкой

$$|v_{n+1} - v_n|^2 (v_{n+1} + v_n)_x = 2\langle v_{n,x}, v_{n+1} - v_n \rangle (v_{n+1} - v_n). \quad (1.76)$$

Умножая скалярно на $v_{n+1} - v_n$, получаем

$$\ell_{n,x} = 2\langle v_{n+1,x} - v_{n,x}, v_{n+1} - v_n \rangle = 0.$$

Далее, скалярное произведение с $v_{n+1,x} - v_{n,x}$ даёт

$$|v_{n+1,x}|^2 = |v_{n,x}|^2,$$

то есть все точки движутся, в силу цепочки, с одинаковой по абсолютной величине скоростью. Иначе говоря, данные соотношения определяют локальные первые интегралы и инвариант цепочки. Можно принять, без потери общности, нормировку

$$|v_{n,x}|^2 = 1, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (1.77)$$

поскольку цепочка (1.76) инвариантна относительно замены независимой переменной $\tilde{x} = \phi(x)$ с произвольной функцией ϕ .

Утверждение 1.14. Преобразования R_n действуют на системе (1.76), (1.77).

Непосредственно проверяется, что цепочка (1.76) обладает представлением нулевой кривизны $W_{n,x} = U_{n+1}W_n - W_nU_n$, с матрицей W_n из Утверждения 1.12 и $U_n = U(v_n)$, где

$$U = \frac{1}{\lambda} \begin{pmatrix} -2\langle v, v_x \rangle & 2v_x^\top & 0 \\ |v|^2 v_x - 2\langle v, v_x \rangle v & 2vv_x^\top - 2v_x v^\top & -2v_x \\ 0 & 2\langle v, v_x \rangle v^\top - |v|^2 v_x^\top & 2\langle v, v_x \rangle \end{pmatrix}. \quad (1.78)$$

Отсюда немедленно следует, что характеристический многочлен $d(\mu, \lambda)$ является первым интегралом периодически замкнутой цепочки (1.76).

В свою очередь, цепочку (1.76) можно рассматривать, как преобразование Бэклунда для следующего векторного уравнения типа КдФ:

$$v_t = v_{xxx} + \frac{3}{2}\langle v_{xx}, v_{xx} \rangle v_x, \quad \langle v_x, v_x \rangle = 1. \quad (1.79)$$

Матрица V для соответствующего представления нулевой кривизны (1.29) равна

$$V = \left(\frac{3}{2}\langle v_{xx}, v_{xx} \rangle - \frac{4}{\lambda} \right) U + \frac{2}{\lambda} V_0,$$

где

$$V_0 = \begin{pmatrix} -\langle v, v_{xxx} \rangle & v_{xxx}^\top & 0 \\ u & vv_{xxx}^\top - v_{xxx}v^\top + 2v_{xx}v_x^\top - 2v_xv_{xx}^\top & -v_{xxx} \\ 0 & -u^\top & \langle v, v_{xxx} \rangle \end{pmatrix}$$

и $u = \frac{1}{2}|v|^2 v_{xxx} - \langle v, v_{xxx} \rangle v + 2\langle v, v_{xx} \rangle v_x - 2\langle v, v_x \rangle v_{xx} + 2v_x$.

Комментарии к главе 1

▷ Исторически первым было открыто преобразование Бэклунда для уравнения sin-Гордон (Бэклунд [36]). Теорема о его перестановочности принадлежит Бьянки [40]. Связь этих старых результатов с интегрируемостью была осознана в работах Лэмба [103, 104, 105].

▷ Преобразование Дарбу применялось для изучения и построения точно-решаемых моделей квантовой механики начиная с работ Шрёдингера 40-х гг. Итог этим исследованиям подведён в работе Инфельда и Халла [90], где, в частности, явно выписана цепочка (1.12). Интерпретация преобразования Дарбу, как преобразования Бэклунда в форме (1.6) для уравнения rot-КдФ (1.42) и теорема о нелинейной суперпозиции 1.1 появились впервые у Уолквиста и Эстабрука [187].

▷ Термин “одевающая цепочка” введён Веселовым и Шабатом [185] применительно к цепочке (1.12). В диссертации этот термин относится ко всем цепочкам вида $u_{n+1,x} = f(u_{n,x}, u_n, u_{n+1})$ определяющим преобразования Бэклунда для уравнений типа КдФ.

▷ Преобразованиям Дарбу-Бэклунда и их роли в современной теории интегрируемых систем посвящена богатая литература, достаточно упомянуть книги Лэмба [106], Роджерса, Шадвика [148] и Матвеева, Салля [117]. Подробный обзор достижений классической дифференциальной геометрии, имеющих отношение к этой теме, можно найти в книгах Роджерса, Шифа [147] и Бобенко, Суриса [45].

▷ Нелинейные уравнения, связанные с оператором Дирака были введены в работах Захарова, Шабата [194] и Абловица, Каупа, Ньюэлла и Сигура [1].

▷ Интегрируемость цепочки Вольтерра на основе её связи с дискретным уравнением Шрёдингера был установлена Манаковым [114], Кацем и ван Мёрбеке [91].

▷ Понятие представления нулевой кривизны появилось впервые на языке дифференциальных операторов в работе Лакса [107], для случая уравнения КдФ (так называемые лаксовы пары). Матричная формулировка, имеющая более широкую область применения, введена Захаровым и Шабатом [195]. Систематическое изложение, в том числе для разностных уравнений, можно найти, например, в книгах Купершмидта [102] и Тахтаджяна, Фаддеева [174].

▷ Преобразования 1.21 и их групповые свойства (1.20) рассматривались в статьях Адлера [3, 5]. Свойство 3D-совместности сформулировано Найхофом, Уокером [133] и Бобенко, Сурисом [43]. Вывод дискретного представления нулевой кривизны исходя из этого свойства также предложен в этих работах, см. также статью Найхофа [131].

▷ Относительно замен типа $v \rightarrow f \rightarrow g$, их связи с дифференциальными подстановками типа Миуры и 3D-совместностью см. [комментарии](#) к главе 4.

▷ Преобразования Бэклунда для цепочки Тоды, эквивалентные дискретной цепочке Тоды (1.53) были получены Ченом и Лю [55] (см. также [177, § 3.9]). Преобразования (1.47), а также их многополевые обобщения, введены Адлером [5, 4]. Аналогичные преобразования для некоторых других уравнений типа НШ, включая уравнение Ландау-Лифшица, появились в работе Адлера и Ямилова [30], см. также недавнюю работу Папагеоргиу и Тонгаса [142].

▷ Раздел 1.6 основан на работах Адлера [3, 6]. Близкое уравнение рассматривалось в работе Шифа [151]. Уравнение (1.79) появилось в статье Соколова и Свинолупова [159]. Известно ещё несколько интегрируемых моделей, допускающих геометрическую интерпретацию, связанную с движением кривых в пространстве, см. в частности работы Гольдстейна, Петрика [76] и Доливы, Сантини [60]. Преобразования Бэклунда для векторных уравнений типа КдФ, более общих чем (1.79), указаны в статье Мешкова и Балахнева [119].

Глава 2

3D-совместные квад-уравнения

Описание интегрируемых квад-уравнений является в настоящее время открытой задачей. В этой главе приводятся некоторые важные результаты, основанные на свойстве 3D-совместности. На уровне наводящих примеров это свойство уже обсуждалось в предыдущей главе. Оно означает, что уравнения одного и того же типа можно приписать всем граням трёхмерного куба, так что полученная система будет совместной. Это позволяет также распространить квад-уравнения на многомерные решётки \mathbb{Z}^N . Классификация проводится для аффинно-линейных квад-уравнений со скалярными комплексными полями, при ряде дополнительных предположений. Рассматриваются некоторые общие свойства квад-уравнений.

2.1 Обсуждение постановки и основной результат

Квад-уравнением называется дискретное уравнение на решётке \mathbb{Z}^2 , связывающее полевые переменные в вершинах каждого элементарного квадрата:

$$Q(u, u_1, u_2, u_{12}) = 0. \quad (2.1)$$

Общая идея заключается в том, чтобы принять свойство 3D-совместности, или совместности вокруг куба, за определение интегрируемости квад-уравнений и использовать его для классификации. Как мы видели в разделе 1.2, это свойство действительно характерно для уравнений, возникающих из принципа нелинейной суперпозиции.

В этой главе рассматриваются только скалярные квад-уравнения с комплексными полями u , причём предполагается, что любая переменная выражается из уравнения, как функция от остальных трёх. В этом случае оба варианта 3D-совместности, обсуждавшиеся в разделе 1.2, оказываются равносильными. Примем следующее определение (см. рис. 2.1).

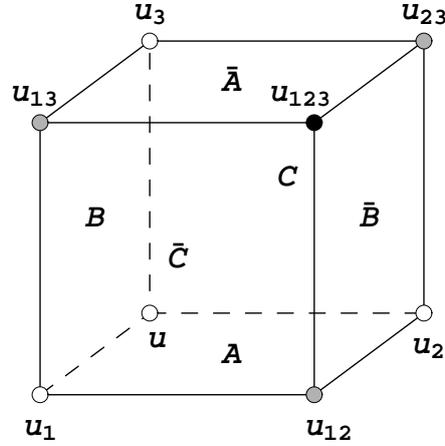


Рис. 2.1. 3D-совместная система квад-уравнений, ассоциированных с гранями куба.

Определение 2.1. Пусть дана система квад-уравнений

$$\begin{aligned} A(u, u_1, u_2, u_{12}) = 0, & \quad \bar{A}(u_3, u_{13}, u_{23}, u_{123}) = 0, \\ B(u, u_1, u_3, u_{13}) = 0, & \quad \bar{B}(u_2, u_{12}, u_{23}, u_{123}) = 0, \\ C(u, u_2, u_3, u_{23}) = 0, & \quad \bar{C}(u_1, u_{12}, u_{13}, u_{123}) = 0. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Считая u, u_1, u_2, u_3 заданными, найдём значения u_{12}, u_{13}, u_{23} из уравнений $A = 0, B = 0, C = 0$. После этого уравнения $\bar{A} = 0, \bar{B} = 0, \bar{C} = 0$ определяют три значения u_{123} . Система называется 3D-совместной, если эти три значения равны тождественно по начальным данным u, u_1, u_2, u_3 .

Иначе, можно сформулировать задачу о 3D-совместности в следующей общей постановке: найти функции $a, b, c, \bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$, такие что если

$$u_{12} = a(u, u_1, u_2), \quad u_{13} = b(u, u_1, u_3), \quad u_{23} = c(u, u_2, u_3), \quad (2.3)$$

то равенства

$$u_{123} := \bar{a}(u_3, u_{13}, u_{23}) = \bar{b}(u_2, u_{12}, u_{23}) = \bar{c}(u_1, u_{12}, u_{13}) \quad (2.4)$$

выполняются тождественно по u, u_1, u_2, u_3 .

В такой общности задача слишком трудна для анализа, поэтому для её решения будут накладываться некоторые дополнительные предположения (для сравнения, отметим, что для трёхмерных уравнений типа Δ КР аналогичная постановка задачи является более жёсткой и допускает исчерпывающий ответ, см. главу 10).

1) *Аффинно-линейность.* Основное ограничение, используемое в этой главе, состоит в том, что все уравнения (2.1) имеют вид

$$Q = a_1 u u_1 u_2 u_{12} + \dots + a_{16} = 0.$$

Предполагается также, что многочлен Q неприводим. При этом любая переменная однозначно выражается из квад-уравнения, как рациональная функция от остальных трёх. Эта структура уравнения сохраняется при дробно-линейных преобразованиях из $PSL_2(\mathbb{C})$, действующих на переменные в каждой вершине (одним и тем же или разными преобразованиями — это зависит от других предположений). Ясно, что условие аффинно-линейности является сверх-упрощением: функциональное условие совместности (2.4) заменяется при этом на некоторую систему полиномиальных уравнений на коэффициенты уравнений (2.2). Тем самым, задача сводится к классификации решений этой системы по модулю действия группы дробно-линейных замен. Однако, даже эта чисто алгебраическая задача является довольно сложной и в полной общности не решена.

2) *Трансляционная инвариантность.* Можно дополнительно потребовать, чтобы уравнения отвечающие противоположным граням куба совпадали:

$$\bar{A} = T_3(A), \quad \bar{B} = T_2(B), \quad \bar{C} = T_1(C).$$

Допустимая группа преобразований при этом сужается: дробно-линейные преобразования во всех вершинах должны совпадать (с точностью до специальных преобразований из группы симметрий рассматриваемых уравнений). Это требование довольно естественно, поскольку оно позволяет распространить систему (2.1) с одного куба на всю решётку \mathbb{Z}^3 с сохранением свойства совместности (хотя это и не исчерпывает всех совместных решёток).

3) *Симметрия координатных направлений и зависимость от параметров.* Естественным представляется также требование, чтобы вообще все направления на кубе были, в каком-то смысле, одинаковыми (в частности, это облегчает задание уравнений на произвольном квад-графе, вместо \mathbb{Z}^2 , см. следующую главу). Примеры, связанные с преобразованиями Бэклунда, подсказывают следующее условие: уравнение в плоскости (i, j) должно иметь вид

$$Q(u, u_i, u_j, u_{ij}; \alpha_i, \alpha_j) = 0, \quad (2.5)$$

где параметр α_i отвечает i -му координатному направлению (он имеет смысл параметра в преобразовании Бэклунда), причём это уравнение должно быть инвариантным относительно группы D_4 симметрий квадрата:

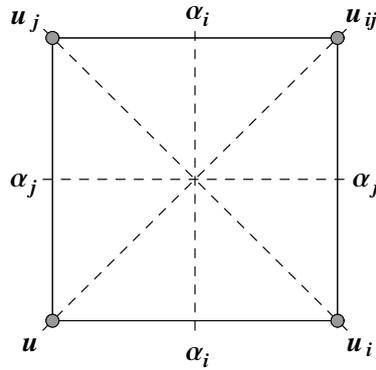
$$Q(u, u_i, u_j, u_{ij}; \alpha_i, \alpha_j) = \varepsilon Q(u, u_j, u_i, u_{ij}; \alpha_j, \alpha_i), \quad \varepsilon = \pm 1, \quad (2.6)$$

$$Q(u, u_i, u_j, u_{ij}; \alpha_i, \alpha_j) = \sigma Q(u_i, u, u_j, u_j; \alpha_i, \alpha_j), \quad \sigma = \pm 1. \quad (2.7)$$

Нетрудно проверить, что, в предположении аффинно-линейности, имеется два общих случая, в зависимости от знака σ :

$$\begin{aligned} \sigma = 1: \quad Q = & a_0 u u_i u_j u_{ij} + a_1 (u u_i u_j + u u_i u_{ij} + u u_j u_{ij} + u_i u_j u_{ij}) \\ & + a_2 (u u_{ij} + u_i u_j) + \bar{a}_2 (u u_i + u_j u_{ij}) + \tilde{a}_2 (u u_j + u_i u_{ij}) \\ & + a_3 (u + u_i + u_j + u_{ij}) + a_4, \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned} \sigma = -1: \quad Q = & a_1 (u u_i u_j + u_i u_j u_{ij} - u u_i u_{ij} - u u_j u_{ij}) \\ & + a_2 (u u_{ij} - u_i u_j) + a_3 (u - u_i - u_j + u_{ij}). \end{aligned} \quad (2.9)$$

Рис. 2.2. D_4 -симметрия

При этом коэффициенты являются симметричными или антисимметричными функциями от параметров, в зависимости от знака ε , точнее

$$a_s(\alpha_j, \alpha_i) = \varepsilon a_s(\alpha_i, \alpha_j), \quad \tilde{a}_2(\alpha_i, \alpha_j) = \varepsilon \tilde{a}_2(\alpha_j, \alpha_i), \quad (2.10)$$

а условие 3D-совместности превращается в систему функциональных уравнений на эти коэффициенты.

Замечание 2.2. Упрощая, результат всей этой главы можно сформулировать так: любое квад-уравнение вида (2.8) или (2.9) является интегрируемым. Действительно, из дальнейшего следует, что список 3D-совместных уравнений 2.1 перечисляет все орбиты PSL_2 -действия на множестве уравнений (2.8). Таким образом, для любого такого уравнения можно подобрать партнёров, образующих с ним совместную тройку. Нетривиальным результатом является то, что все три уравнения можно одновременно привести к общему виду, отличающемуся лишь значениями параметров α_i . Что касается уравнений типа (2.9), то для них 3D-совместность легко проверяется в общем виде. Однако, этот случай не представляет интереса, так как все такие уравнения сводятся к линейному.

4) *Свойство тетрадральности.* Это условие выглядит неожиданно: требуется, чтобы выражение $u_{123} = f(u, u_1, u_2, u_3)$, определяемое, в силу 3D-совместности, любым из трёх выражений (2.4), фактически не зависело от u . Название объясняется тем, что при этом вершины куба разбиваются на вершины двух тетраэдров, на которых определены некоторые дополнительные квад-уравнения:

$$\tilde{Q}(u_1, u_2, u_3, u_{123}) = 0, \quad \bar{Q}(u, u_{12}, u_{23}, u_{13}) = 0.$$

На трёхмерной решётке тем самым выделяются две подрешётки, состоящие из вершин с чётной или нечётной суммой координат. Это свойство уже отмечалось для формулы (1.26). В дальнейшем мы убедимся, что оно связано с весьма нетривиальными и интересными свойствами квад-уравнений.

$$\alpha_i(u - u_j)(u_i - u_{ij}) - \alpha_j(u - u_i)(u_j - u_{ij}) + \delta\alpha_i\alpha_j(\alpha_i - \alpha_j) = 0 \quad (Q_1^\delta)$$

$$\begin{aligned} &\alpha_i(u - u_j)(u_i - u_{ij}) - \alpha_j(u - u_i)(u_j - u_{ij}) \\ &\quad + \alpha_i\alpha_j(\alpha_i - \alpha_j)(u + u_i + u_j + u_{ij}) \\ &\quad - \alpha_i\alpha_j(\alpha_i - \alpha_j)(\alpha_i^2 - \alpha_i\alpha_j + \alpha_j^2) = 0 \end{aligned} \quad (Q_2)$$

$$\begin{aligned} &\left(\alpha_i - \frac{1}{\alpha_i}\right)(uu_i + u_ju_{ij}) - \left(\alpha_j - \frac{1}{\alpha_j}\right)(uu_j + u_iu_{ij}) \\ &\quad - \left(\frac{\alpha_i}{\alpha_j} - \frac{\alpha_j}{\alpha_i}\right)(uu_{ij} + u_iu_j) - \frac{\delta}{4}\left(\alpha_i - \frac{1}{\alpha_i}\right)\left(\alpha_j - \frac{1}{\alpha_j}\right)\left(\frac{\alpha_i}{\alpha_j} - \frac{\alpha_j}{\alpha_i}\right) = 0 \end{aligned} \quad (Q_3^\delta)$$

$$\begin{aligned} &\operatorname{sn}(\alpha_i)\operatorname{sn}(\alpha_j)\operatorname{sn}(\alpha_i - \alpha_j)(k^2uu_iu_ju_{ij} + 1) + \operatorname{sn}(\alpha_i)(uu_i + u_ju_{ij}) \\ &\quad - \operatorname{sn}(\alpha_j)(uu_j + u_iu_{ij}) - \operatorname{sn}(\alpha_i - \alpha_j)(uu_{ij} + u_iu_j) = 0 \end{aligned} \quad (Q_4)$$

$$(u - u_{ij})(u_i - u_j) + \alpha_j - \alpha_i = 0 \quad (H_1)$$

$$(u - u_{ij})(u_i - u_j) + (\alpha_j - \alpha_i)(u + u_i + u_j + u_{ij}) + \alpha_j^2 - \alpha_i^2 = 0 \quad (H_2)$$

$$\alpha_i(uu_i + u_ju_{ij}) - \alpha_j(uu_j + u_iu_{ij}) + \delta(\alpha_i^2 - \alpha_j^2) = 0 \quad (H_3^\delta)$$

$$\alpha_i(u + u_j)(u_i + u_{ij}) - \alpha_j(u + u_i)(u_j + u_{ij}) + \delta\alpha_i\alpha_j(\alpha_i - \alpha_j) = 0 \quad (A_1^\delta)$$

$$\begin{aligned} &(\alpha_j^2 - \alpha_i^2)(uu_iu_ju_{ij} + 1) + \alpha_j(\alpha_i^2 - 1)(uu_j + u_iu_{ij}) \\ &\quad - \alpha_i(\alpha_j^2 - 1)(uu_i + u_ju_{ij}) = 0 \end{aligned} \quad (A_2)$$

Список 2.1. Список 3D-совместных квад-уравнений ($\operatorname{sn} \alpha \equiv \operatorname{sn}(\alpha, k)$)

Основным результатом данной главы является следующий список квад-уравнений.

Теорема 2.3. 3D-совместные уравнения (2.5), удовлетворяющие свойствам аффинно-линейности, трансляционной инвариантности, D_4 -симметрии и тетраэдральности, исчерпываются, с точностью до дробно-линейных преобразований переменных, действующих идентично во всех вершинах, списком 2.1.

Отметим, что уравнение (A_1^δ) сводится к (Q_1^δ) заменой $(u, u_i, u_j, u_{ij}) \rightarrow (u, -u_i, -u_j, u_{ij})$ действующей по разному на переменные из чётной и нечётной подрешёток. Аналогично, (A_2) сводится к Q_3^0 заменой $(u, u_i, u_j, u_{ij}) \rightarrow$

$(u, 1/u_i, 1/u_j, u_{ij})$. Параметр δ в (Q_1^δ) , (Q_3^δ) , (H_3^δ) скалируется, то есть, можно считать, без потери общности, что он равен 0 или 1. Уравнения из списков Q и H можно получить, соответственно, из основных уравнений (Q_4) и (H_3^δ) вырождением параметров и предельными переходами.

Схема построения представления нулевой кривизны, проиллюстрированная в разделе 1.3 на примере дискретного уравнения КдФ (1.25) (то есть, (H_1)) переносится на остальные уравнения списка без изменений, за исключением того, что нормировочный множитель, вообще говоря, не равен 1. Кроме того, каждое уравнение обладает высшими непрерывными симметриями типа одевающей цепочки и уравнения КдФ, для которых оно определяет принцип нелинейной суперпозиции. Таким образом, интегрируемость (в любом разумном смысле) всех уравнений из списка не вызывает сомнений.

Принимая во внимание значительное число сделанных предположений, следует спросить, насколько полон данный ответ. На самом деле, каждое из предположений 1)–4) заведомо ограничительно, и к любому несложно предъявить контрпример. Так, уравнение (1.18) служит примером квад-уравнения, квадратичного по полям. Правда, оно всё же связано с аффинно-линейным некоторыми необратимыми подстановками. Существуют ли примеры, несводимые к аффинно-линейным, в настоящее время неизвестно. В разделе 1.5 приводились несимметричные квад-уравнения, возникающие в теории цепочек Вольтерра, но и они были связаны с симметричными. Несколько примеров с ослабленным свойством симметрии или с нарушением свойства трансляционной инвариантности будет приведено в разделе 2.6. Простейшим контрпримером к свойству тетраэдральности служат линейные уравнения

$$u \pm u_i \pm u_j + u_{ij} = 0, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (2.11)$$

образующие 3D-совместную систему, для которой $u_{ijk} = u_i + u_j + u_k \pm 2u$. Все уравнения типа (2.9) также не удовлетворяют свойству тетраэдральности (см. доказательство теоремы 2.3).

В разделе 2.5.3 приводится один дополнительный результат, показывающий, что, для аффинно-линейных систем, приведённая классификация всё же является достаточно полной. Оказывается, что свойства 2), 3), 4), хотя и отсеивают некоторое количество примеров, не существенны для систем общего положения. В Теореме 2.25 эти свойства заменены на некоторое условие невырожденности биквадратик, связанных с многочленами Q . Из точной формулировки этого условия видно, что оно лишь запрещает некоторые квад-уравнения необщего положения (меры ноль в пространстве коэффициентов). Тем не менее, оно оказывается настолько сильным, что полученный в результате список состоит лишь из уравнений (Q_1^δ) – (Q_4) . Таким образом, все примеры, известные или неизвестные, в которых нарушается какое-то из свойств 2), 3) или 4), относятся, в терминах данного условия, к вырожденным случаям (впрочем, как и оставшаяся часть списка 2.1).

2.2 Доказательство классификационной теоремы

2.2.1 Анализ условий совместности

Первый этап решения классификационной задачи заключается в анализе условий совместности при спуске с граней на рёбра и с рёбер на вершины куба. На каждом шаге теряется часть информации, но зато и упрощается оставшаяся, так что на уровне вершин классификация тривиальна. Этот спуск осуществляется при помощи операций

$$\delta_{u,v}(Q) = Q_u Q_v - Q Q_{uv}, \quad \delta_u(h) = h_u^2 - 2hh_{uu},$$

переводящих аффинно-линейный многочлен Q в биквадратичный, а биквадратичный многочлен h в многочлен 4-й степени от одной переменной. Полагая $Q = a(w, z)uv + b(w, z)u + c(w, z)v + d(w, z)$ и $h(u, v) = a(v)u^2 + b(v)u + c(v)$, эти формулы можно записать также в виде

$$\delta_{uv}(Q) = bc - ad, \quad \delta_u(h) = b^2 - 4ac,$$

то есть $\delta_u(h)$ равен дискриминанту многочлена h , рассматриваемого, как квадратичный по u . Нетрудно проверить, что введённые операции ковариантны относительно дробно-линейных преобразований, действующих на множестве \mathcal{P}_n^m многочленов от n переменных степени m по каждой согласно формуле

$$M[f](u_1, \dots, u_n) = (c_1 u_1 + d_1)^m \dots (c_n u_n + d_n)^m \times f\left(\frac{a_1 u_1 + b_1}{c_1 u_1 + d_1}, \dots, \frac{a_n u_n + b_n}{c_n u_n + d_n}\right), \quad (2.12)$$

где $a_i d_i - b_i c_i = \Delta_i \neq 0$. Точнее, если $Q \in \mathcal{P}_4^1$ и $h \in \mathcal{P}_2^2$, то выполняются свойства

$$\delta_{u_i, u_j}(M[Q]) = \Delta_i \Delta_j M[\delta_{u_i, u_j}(Q)], \quad \delta_{u_i}(M[h]) = \Delta_i^2 M[\delta_{u_i}(h)]. \quad (2.13)$$

Ещё одно замечательное свойство выражается тождеством

$$\delta_{u_3}(\delta_{u_1, u_2}(Q)) = \delta_{u_2}(\delta_{u_1, u_3}(Q)), \quad (2.14)$$

справедливым для любого аффинно-линейного многочлена $Q(u_1, u_2, u_3, u_4) \in \mathcal{P}_4^1$. Оно доказывается прямым вычислением.

Ключом к классификации является следующее утверждение.

Утверждение 2.4. Пусть уравнение (2.5) 3D-совместно и выполнены предположения 1)–4). Тогда

$$\delta_{w,z}(Q(u, v, w, z; \alpha, \beta)) = k(\alpha, \beta)h(u, v; \alpha), \quad (2.15)$$

где $k(\alpha, \beta)$ кососимметричная функция, а $h(u, v; \alpha)$ симметричный биквадратичный многочлен, причём зависимость коэффициентов h от параметра α такова, что многочлен $r(u) = \delta_v(h)$ вовсе от него не зависит.

Доказательство. Будем использовать, наряду с (2.5), также общие обозначения (2.2), (2.3), (2.4). Воспользуемся сначала условием тетраэдральности 4). Пусть $u_{123} = f(u_1, u_2, u_3)$, тогда дифференцирование (2.4) даёт

$$\begin{aligned} f_{u_1} &= \bar{a}_{u_{13}} b_{u_1}, & f_{u_2} &= \bar{a}_{u_{23}} c_{u_2}, & 0 &= \bar{a}_{u_{13}} b_u + \bar{a}_{u_{23}} c_u, \\ f_{u_1} &= \bar{b}_{u_{12}} a_{u_1}, & f_{u_3} &= \bar{b}_{u_{23}} c_{u_3}, & 0 &= \bar{b}_{u_{12}} a_u + \bar{b}_{u_{23}} c_u, \\ f_{u_2} &= \bar{c}_{u_{12}} a_{u_2}, & f_{u_3} &= \bar{c}_{u_{13}} b_{u_3}, & 0 &= \bar{c}_{u_{12}} a_u + \bar{c}_{u_{13}} b_u \end{aligned}$$

откуда легко выводится соотношение (тождество по u, u_1, u_2, u_3)

$$a_{u_2} b_{u_1} c_{u_3} + a_{u_1} b_{u_3} c_{u_2} = 0. \quad (2.16)$$

Далее, воспользуемся условием аффинно-линейности 1). Если одно из уравнений системы, скажем, первое, имеет вид $A = p(u, u_1, u_2)u_{12} + q(u, u_1, u_2) = 0$, то соответствующая функция a равна $a = -q/p$ и

$$\frac{a_{u_2}}{a_{u_1}} = \frac{q_{u_2} p - q p_{u_2}}{q_{u_1} p - q p_{u_1}} = \frac{\delta_{u_2, u_{12}}(A)}{\delta_{u_1, u_{12}}(A)}.$$

Таким образом, в аффинно-линейном случае тождество (2.16) переписывается в виде

$$\delta_{u_2, u_{12}}(A) \delta_{u_1, u_{13}}(B) \delta_{u_3, u_{23}}(C) + \delta_{u_1, u_{12}}(A) \delta_{u_3, u_{13}}(B) \delta_{u_2, u_{23}}(C) = 0. \quad (2.17)$$

Учтём теперь условия симметрии 3) и вернёмся к обозначениям (2.5). Обозначим $\delta_{w,z}(Q) = \tilde{h}(u, v; \alpha, \beta)$, тогда, с учётом симметрии (2.6), тождество (2.17) принимает вид

$$\begin{aligned} &\tilde{h}(u, u_1; \alpha_1, \alpha_2) \tilde{h}(u, u_2; \alpha_2, \alpha_3) \tilde{h}(u, u_3; \alpha_3, \alpha_1) \\ &+ \tilde{h}(u, u_1; \alpha_1, \alpha_3) \tilde{h}(u, u_2; \alpha_2, \alpha_1) \tilde{h}(u, u_3; \alpha_3, \alpha_2) = 0, \end{aligned} \quad (2.18)$$

откуда следует, что отношение $\tilde{h}(u, v; \alpha, \beta) / \tilde{h}(u, v; \alpha, \gamma)$ не зависит от v . Но, в силу (2.7), многочлен \tilde{h} симметричен: $\tilde{h}(u, v; \alpha, \beta) = \tilde{h}(v, u; \alpha, \beta)$, следовательно это отношение не зависит и от u . Таким образом, имеем

$$\frac{\tilde{h}(u, v; \alpha, \beta)}{\tilde{h}(u, v; \alpha, \gamma)} = \frac{\kappa(\alpha, \beta)}{\kappa(\alpha, \gamma)} \quad (2.19)$$

и подстановка в (2.18) показывает, что функция κ удовлетворяет уравнению

$$\kappa(\alpha, \beta) \kappa(\beta, \gamma) \kappa(\gamma, \alpha) = -\kappa(\beta, \alpha) \kappa(\gamma, \beta) \kappa(\alpha, \gamma).$$

Легко видеть, что это уравнение разрешается в виде

$$\frac{\kappa(\beta, \alpha)}{\kappa(\alpha, \beta)} = -\frac{\phi(\alpha)}{\phi(\beta)} \kappa(\alpha, \beta),$$

что эквивалентно кососимметричности функции $k(\alpha, \beta) = \phi(\alpha)\kappa(\alpha, \beta)$. Равенство (2.19) переписывается в виде

$$\frac{\tilde{h}(u, v; \alpha, \beta)}{k(\alpha, \beta)} = \frac{\tilde{h}(u, v; \alpha, \gamma)}{k(\alpha, \gamma)},$$

и обозначая общее значение через $h(u, v; \alpha)$, приходим к требуемому представлению. Наконец, опять воспользуемся симметрией (2.6). Имеем

$$\delta_{w,z}(Q) = k(\alpha, \beta)h(u, v, \alpha), \quad \delta_{v,z}(Q) = k(\beta, \alpha)h(u, w, \beta)$$

и, так как $\delta_v(\delta_{w,z}(Q)) = \delta_w(\delta_{v,z}(Q))$ в силу тождества (2.14), то

$$r(u) = \delta_v(h(u, v, \alpha)) = \delta_w(h(u, w, \beta)),$$

откуда следует, что r не зависит от α . □

Свойство, доказанное в этом утверждении, оказывается довольно эффективным и “почти” достаточным: мы увидим, что оно позволяет получить список 2.1 уже почти в окончательной форме, так что непосредственная проверка 3D-совместности, не представляющая особого труда, приводит лишь к уточнению коэффициентов в двух самых вырожденных случаях (см. уравнения (2.26) и (2.27) ниже).

Первый шаг на пути к списку совершенно очевиден: поскольку соответствие между уравнением (2.5) и многочленом r инвариантно относительно дробно-линейных замен, то мы можем воспользоваться ими для приведения r к одной из следующих канонических форм:

$$\begin{array}{ll} (u^2 - 1)(k^2 u^2 - 1) & \text{(четыре простых корня),} \\ u^2 - 1 & \text{(два простых корня и один двойной),} \\ u^2 & \text{(два двойных корня),} \\ u & \text{(простой и тройной корни),} \\ 1 & \text{(корень кратности четыре),} \\ 0 & (\emptyset). \end{array} \tag{2.20}$$

Тем самым будет уничтожена бóльшая часть параметрической свободы в задаче. В первой форме мы всегда будем предполагать, что $k \neq 0, \pm 1$, так что вторая и третья формы не считаются частным случаем первой. В то же время, вторую и третью формы иногда удобно объединять, как $u^2 - \delta$.

2.2.2 Восстановление квад-уравнений

Теперь нужно обратить преобразования $Q \rightarrow h \rightarrow r$ (восстановление черепа по челюсти и внешнего вида по черепу). Так как на каждом шаге часть информации теряется, этот этап классификации немного сложнее.

$$r(u) = (u^2 - 1)(k^2 u^2 - 1) :$$

$$h = \frac{1}{2\alpha}(k^2 \alpha^2 u^2 v^2 + 2Auv - u^2 - v^2 + \alpha^2), \quad A^2 = r(\alpha), \quad (q_4)$$

$$u^2 - \delta : \quad h = \frac{\alpha}{1 - \alpha^2}(u^2 + v^2) - \frac{1 + \alpha^2}{1 - \alpha^2}uv + \frac{\delta(1 - \alpha^2)}{4\alpha}, \quad (q_3^\delta)$$

$$u^2 : \quad h = \lambda u^2 v^2 + \mu uv + \nu, \quad \mu^2 - 4\lambda\nu = 1, \quad (h_3)$$

$$u : \quad h = \frac{1}{4\alpha}(u - v)^2 - \frac{\alpha}{2}(u + v) + \frac{\alpha^3}{4}, \quad (q_2)$$

$$1 : \quad h = \frac{1}{2\alpha}(u - v)^2 - \frac{\alpha}{2}, \quad (q_1^1)$$

$$h = \lambda(u + v)^2 + \mu(u + v) + \nu, \quad \mu^2 - 4\lambda\nu = 1, \quad (h_2)$$

$$0 : \quad h = \frac{1}{\alpha}(u - v)^2, \quad (q_1^0)$$

$$h = (\lambda uv + \mu(u + v) + \nu)^2. \quad (h_1)$$

Таблица 2.2. Канонические формы симметричных биквадратичных многочленов

Лемма 2.5. Симметричные биквадратичные многочлены $h(u, v; \alpha)$, связанные с многочленом $r(u)$ в канонической форме (2.20) соотношением

$$h_v^2 - 2hh_{vv} = r(u) \quad (2.21)$$

имеют вид, указанный в таблице 2.2.

Доказательство. Уравнения (2.21) эквивалентны системе из пяти квадратичных уравнений для 6 неизвестных коэффициентов многочлена h . Таблица получается прямым решением этой системы для различных r . \square

Сделаем пояснения относительно нумерации, принятой в таблице. Для каждой из шести канонических форм r имеется однопараметрическое семейство многочленов h , помеченное буквой q (многочлену $r = u^2$ отвечает (q_3^0)). Этим многочленам в списке 2.1 отвечают уравнения, помеченные буквой Q . Для полных квадратов $r = 0, 1, u^2$ имеются дополнительные двух- или трёх-параметрические семейства, помеченные буквой h . В списке 2.1 им отвечают уравнения типа H и A .

Многочлен (q_4) отвечает канонической форме Якоби для многочлена r с простыми корнями. Приведём ещё ответ для канонической формы Вейер-

штрасса $r = 4u^3 - g_2u - g_3$:

$$h = \frac{1}{\sqrt{r(\alpha)}} \left((uv + \alpha u + \alpha v + g_2/4)^2 - (u + v + \alpha)(4\alpha uv - g_3) \right). \quad (2.22)$$

Этот многочлен определяет алгебраическую формулу сложения эллиптических функций, а именно, равенство $h(\wp(U), \wp(V); \wp(A)) = 0$ эквивалентно $U \pm V \pm A = 0$ по модулю решётки периодов \wp -функции Вейерштрасса.

Доказательство теоремы 2.3. Прежде всего, покажем, что задача сводится к случаю многочленов вида (2.8), поскольку в случае (2.9) не выполняется свойство тетраэдральности. Действительно, для этого случая имеем

$$\delta_{w,z}(Q) = \tilde{h}(u, v; \alpha, \beta) = \tilde{h}(u, v; \beta, \alpha) = -P(u; \alpha, \beta)P(v; \alpha, \beta),$$

где $P(u; \alpha, \beta) = a_1u^2 - a_2u - a_3$, и соотношение (2.18) превращается в

$$\begin{aligned} P(u_1; \alpha_1, \alpha_2)P(u_2; \alpha_2, \alpha_3)P(u_3; \alpha_3, \alpha_1) \\ = -P(u_1; \alpha_3, \alpha_1)P(u_2; \alpha_1, \alpha_2)P(u_3; \alpha_2, \alpha_3). \end{aligned}$$

Равенство нулю коэффициентов при $(u_1u_2u_3)^s$, $s = 0, 1, 2$, даёт $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ — противоречие.

Далее, для каждого $h(u, v; \alpha)$ из таблицы 2.2 предстоит определить, из формулы (2.15), кососимметрический множитель $k(\alpha, \beta)$ и аффинно-линейный многочлен Q вида (2.8). Имеем:

$$\begin{aligned} \tilde{h}(u, v; \alpha, \beta) &= (\bar{a}_2a_0 - a_1^2)u^2v^2 + (a_1(\bar{a}_2 - \tilde{a}_2) + a_0a_3 - a_1a_2)uv(u + v) \\ &\quad + (a_1a_3 - a_2\tilde{a}_2)(u^2 + v^2) + (\bar{a}_2^2 - \tilde{a}_2^2 + a_0a_4 - a_2^2)uv \\ &\quad + (a_3(\bar{a}_2 - \tilde{a}_2) + a_1a_4 - a_2a_3)(u + v) + \bar{a}_2a_4 - a_3^2, \end{aligned}$$

и аналогичное выражение для $\tilde{h}(u, v; \beta, \alpha)$ получается при замене $\bar{a}_2 \leftrightarrow \tilde{a}_2$. Введём обозначения для коэффициентов многочлена h :

$$h(u, v; \alpha) = b_0u^2v^2 + b_1uv(u + v) + b_2(u^2 + v^2) + \hat{b}_2uv + b_3(u + v) + b_4, \quad (2.23)$$

где $b_i = b_i(\alpha)$, и обозначим $b'_i = b_i(\beta)$. Это даёт следующую систему, в которой a_k и $k = k(\alpha, \beta)$ неизвестны, а b_i и b'_i берутся из таблицы 2.2:

$$\begin{aligned} kb_0 &= \bar{a}_2a_0 - a_1^2, & -kb'_0 &= \tilde{a}_2a_0 - a_1^2, \\ kb_1 &= a_1(\bar{a}_2 - \tilde{a}_2) + a_0a_3 - a_1a_2, & -kb'_1 &= a_1(\tilde{a}_2 - \bar{a}_2) + a_0a_3 - a_1a_2, \\ kb_2 &= a_1a_3 - a_2\tilde{a}_2, & -kb'_2 &= a_1a_3 - a_2\bar{a}_2, \\ k\hat{b}_2 &= \bar{a}_2^2 - \tilde{a}_2^2 + a_0a_4 - a_2^2, & -k\hat{b}'_2 &= \tilde{a}_2^2 - \bar{a}_2^2 + a_0a_4 - a_2^2, \\ kb_3 &= a_3(\bar{a}_2 - \tilde{a}_2) + a_1a_4 - a_2a_3, & -kb'_3 &= a_3(\tilde{a}_2 - \bar{a}_2) + a_1a_4 - a_2a_3, \\ kb_4 &= \bar{a}_2a_4 - a_3^2, & -kb'_4 &= \tilde{a}_2a_4 - a_3^2. \end{aligned}$$

Поскольку многочлен Q определён с точностью до множителя, удобно обозначить $a = \bar{a}_2 - \tilde{a}_2$ и ввести кососимметрические функции от α, β :

$$A_i = \frac{a_i}{a}, \quad \hat{A}_2 = \frac{\bar{a}_2}{a} - \frac{1}{2} = \frac{\tilde{a}_2}{a} + \frac{1}{2}, \quad K = \frac{k}{a^2}$$

(легко видеть, что $a \neq 0$, так как иначе $h \equiv 0$). После элементарных преобразований рассматриваемая система сводится к уравнениям

$$\begin{aligned} 2(b_0 - b'_0) &= K((\hat{b}_2 + \hat{b}'_2)(b_0 + b'_0) - (b_1 + b'_1)^2), \\ b_1 - b'_1 &= K((b_0 + b'_0)(b_3 + b'_3) - (b_1 + b'_1)(b_2 + b'_2)), \\ 2(b_2 - b'_2) &= K((b_1 + b'_1)(b_3 + b'_3) - (b_2 + b'_2)(\hat{b}_2 + \hat{b}'_2)), \\ \hat{b}_2 - \hat{b}'_2 &= 2K((b_0 + b'_0)(b_4 + b'_4) - (b_2 + b'_2)^2), \\ b_3 - b'_3 &= K((b_1 + b'_1)(b_4 + b'_4) - (b_2 + b'_2)(b_3 + b'_3)), \\ 2(b_4 - b'_4) &= K((\hat{b}_2 + \hat{b}'_2)(b_4 + b'_4) - (b_3 + b'_3)^2), \end{aligned} \quad (2.24)$$

и уравнениям, служащим для определения A_i :

$$\begin{aligned} A_0 &= K(b_0 + b'_0), \quad 2A_1 = K(b_1 + b'_1), \quad A_2 = K(b_2 + b'_2), \\ 4\hat{A}_2 &= K(\hat{b}_2 + \hat{b}'_2), \quad 2A_3 = K(b_3 + b'_3), \quad A_4 = K(b_4 + b'_4), \\ \bar{A}_2 &= \hat{A}_2 + 1/2, \quad \tilde{A}_2 = \hat{A}_2 - 1/2. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Каждое решение системы (2.24) определяет некоторый многочлен Q по формулам (2.25). По построению, этот многочлен удовлетворяет свойству из утверждения 2.4 и тем самым соответствующее уравнение является кандидатом в 3D-совместные.

Анализ системы (2.24) тривиален в тех случаях, когда коэффициенты b_i являются вполне определёнными функциями от α , то есть, для биквадратичного многочлена h вида (q_4) , (q_3^{δ}) , (q_2) , (q_1^1) или (q_1^0) . Нужно лишь проверить, что выполняется маленькое чудо: все шесть уравнений этой системы приводят к одному и тому же значению K . После этого остаётся вычислить многочлен Q по формулам (2.25) и проверить свойство 3D-совместности (и тетраэдральности). Все эти вычисления совершенно механические и во всех случаях действительно приводят к 3D-совместному уравнению из списка 2.1, в соответствии с обозначениями.

Остаётся рассмотреть биквадратичные многочлены (h_3) , (h_2) , (h_1) . Аккуратный анализ системы (2.24) приводит в этих случаях к решениям, перечисленным ниже. Применение формул (2.25) даёт оставшуюся часть списка квад-уравнений. При этом проверка 3D-совместности выполняется автоматически для всех найденных уравнений, кроме (2.26), (2.27), для которых она приводит к уточнению функции k .

Случай (h_1) . Здесь имеется два решения:

1) $h = (\varepsilon_0 u + \varepsilon_1)^2 (\varepsilon_0 v + \varepsilon_1)^2$, с коэффициентами не зависящими от α , а функция K произвольна. Подходящим дробно-линейного преобразованием можно

положить $h = 1$, в результате приходим к следующему уравнению, подозрительному на 3D-совместность:

$$(u - u_{ij})(u_i - u_j) + k(\alpha_i, \alpha_j) = 0, \quad (2.26)$$

где k произвольная кососимметрическая функция. Она уточняется при непосредственной проверке условия совместности: оказывается, что оно выполняется, если и только если

$$k(\alpha_1, \alpha_2) + k(\alpha_2, \alpha_3) + k(\alpha_3, \alpha_1) = 0$$

(причём свойство тетраэдральности также выполняется). Полагая $\alpha_3 = \text{const}$ и учитывая кососимметричность, получаем $k(\alpha_1, \alpha_2) = f(\alpha_2) - f(\alpha_1)$. Переобозначая параметры $f(\alpha) \rightarrow \alpha$, приходим к уравнению (H_1);

2) $h = (\varepsilon_0 uv + \varepsilon_1(u + v) + \varepsilon_2)^2/\alpha$, коэффициенты ε_i не зависят от α . В этом случае можно использовать дробно-линейное преобразование для приведения h к виду $(u + v)^2/\alpha$, затем проверяется, что все уравнения (2.24) дают одно значение K , и формулы (2.25) приводят к уравнению (A_1^0).

Случай (h_2). Здесь также имеется два решения:

$$h = u + v + \alpha, \quad h = \frac{(u + v)^2}{2\alpha} - \frac{\alpha}{2},$$

приводящие, соответственно, к уравнениям (H_2) и (A_1^1).

Случай (h_3). Имеется три решения:

1) $h = uv$, функция K произвольна. В этом случае приходим к уравнению, подозрительному на 3D-совместность:

$$(1 + k)(uu_i + u_j u_{ij}) = (1 - k)(uu_j + u_i u_{ij}), \quad (2.27)$$

с произвольной кососимметрической функцией $k(\alpha_i, \alpha_j)$. Проверка условия совместности приводит к связи

$$\ell(\alpha_1, \alpha_2)\ell(\alpha_2, \alpha_3)\ell(\alpha_3, \alpha_1) = 1, \quad \ell := \frac{1 + k}{1 - k}, \quad \ell(\beta, \alpha) = \frac{1}{\ell(\alpha, \beta)}.$$

Это соотношение разрешается, с точностью до замены параметров, в виде $\ell(\alpha, \beta) = \alpha/\beta$, и мы приходим к уравнению (H_3^0);

2) $h = uv + \alpha$, что приводит к уравнению (H_3^1);

3) $h = \frac{\alpha}{1 - \alpha^2}(u^2 v^2 + 1) - \frac{1 + \alpha^2}{1 - \alpha^2} uv$, что приводит к уравнению (A_2). \square

2.3 Трёхногая форма квад-уравнений

Здесь мы обсудим одно любопытное свойство, которым обладают все квад-уравнения из списка 2.1. На первый взгляд, его можно посчитать случайным обстоятельством, но фактически именно эта внутренняя структура уравнения является механизмом, обеспечивающим как свойство тетраэдральности, так и само свойство 3D-совместности. Более того, это свойство оказывается исключительно важным для теории дискретных уравнений типа Тоды, как будет показано в разделе 5.2.

Определение 2.6. Уравнение $Q(u, u_1, u_2, u_{12}; \alpha_1, \alpha_2) = 0$ обладает *трёхногой формой* с вершиной u , если оно эквивалентно уравнению вида

$$f(u, u_{12}; \alpha_1, \alpha_2) = g(u, u_1; \alpha_1) - g(u, u_2; \alpha_2). \quad (2.28)$$

Мы будем предполагать, что уравнение обладает симметрией квадрата. Тогда все входящие в него переменные равноправны и наряду с трёхногой формой с вершиной u имеются аналогичные трёхногие формы с вершинами u_1 , u_2 и u_{12} . Отметим, что обычно удобнее рассматривать мультипликативный вариант трёхногой формы:

$$F(u, u_{12}; \alpha_1, \alpha_2) = G(u, u_1; \alpha_1)/G(u, u_2; \alpha_2). \quad (2.29)$$

Это видно из таблицы 2.3, в которой приводятся трёхногие формы для уравнений из списка 2.1. Однако, для следующих двух утверждений явный вид функций f, g не важен, и для определённости мы будем придерживаться обозначений (2.28).

Теорема 2.7. Если уравнение 3D-совместно, допускает симметрию квадрата и обладает трёхногой формой, то для него выполняется свойство тетраэдральности.

Доказательство. Рассмотрим три грани, смежные с вершиной u_{123} , а именно, $(u_1, u_{12}, u_{123}, u_{13})$, $(u_2, u_{23}, u_{123}, u_{12})$, и $(u_3, u_{13}, u_{123}, u_{23})$. Суммирование трёхногих форм с вершиной u_{123} для уравнений на этих трёх гранях даёт

$$f(u_{123}, u_1; \alpha_2, \alpha_3) + f(u_{123}, u_2; \alpha_3, \alpha_1) + f(u_{123}, u_3; \alpha_1, \alpha_2) = 0,$$

что и требуется. □

Теорема 2.8. Пусть уравнение (2.42) допускает симметрию квадрата и обладает трёхногой формой специального вида

$$f(u, u_{12}; \alpha_1 - \alpha_2) = f(u, u_1; \alpha_1) - f(u, u_2; \alpha_2). \quad (2.30)$$

Тогда оно 3D-совместно.

Доказательство. По определению 3D-совместности, если переменные u_{12}, u_{13}, u_{23} вычисляются из уравнений

$$Q(u, u_1, u_2, u_{12}; \alpha_1, \alpha_2) = 0, \quad (2.31)$$

$$Q(u, u_2, u_3, u_{23}; \alpha_2, \alpha_3) = 0, \quad (2.32)$$

$$Q(u, u_3, u_1, u_{31}; \alpha_3, \alpha_1) = 0, \quad (2.33)$$

то уравнения

$$Q(u_1, u_{12}, u_{31}, u_{123}; \alpha_2, \alpha_3) = 0, \quad (2.34)$$

$$Q(u_2, u_{23}, u_{12}, u_{123}; \alpha_3, \alpha_1) = 0, \quad (2.35)$$

$$Q(u_3, u_{31}, u_{23}, u_{123}; \alpha_1, \alpha_2) = 0, \quad (2.36)$$

должны дать одно и то же значение u_{123} . В силу симметрии, достаточно показать, что если значение u_{123} определено из уравнения (2.34), то выполняется также (2.35).

Рассмотрим уравнения (2.31), (2.33), (2.34) в трёхногой форме с вершиной u_1 :

$$\begin{aligned} f(u_1, u_2; \alpha_2 - \alpha_1) &= f(u_1, u_{12}; \alpha_2) - f(u_1, u; \alpha_1), \\ f(u_1, u_3; \alpha_3 - \alpha_1) &= f(u_1, u_{31}; \alpha_3) - f(u_1, u; \alpha_1), \\ f(u_1, u_{123}; \alpha_2 - \alpha_3) &= f(u_1, u_{12}; \alpha_2) - f(u_1, u_{31}; \alpha_3). \end{aligned}$$

Отсюда получаем

$$f(u_1, u_{123}; \alpha_2 - \alpha_3) = f(u_1, u_2; \alpha_2 - \alpha_1) - f(u_1, u_3; \alpha_3 - \alpha_1),$$

что есть не что иное, как трёхногая форма для уравнения

$$Q(u_1, u_2, u_3, u_{123}; \alpha_2 - \alpha_1, \alpha_2 - \alpha_3) = 0, \quad (2.37)$$

с вершиной в u_1 . Перенесём вершину в u_2 , что приведёт к циклической перестановке индексов:

$$f(u_2, u_{123}; \alpha_3 - \alpha_1) = f(u_2, u_3; \alpha_3 - \alpha_2) - f(u_2, u_1; \alpha_1 - \alpha_2).$$

Это уравнение, вместе с трёхногими формами для уравнений (2.31), (2.32) (с вершиной в u_2), даёт трёхногую форму (2.35), как и требовалось. \square

Из доказательства ясно, что предположение о том, что трёхногая форма имеет специальный вид (2.30) нужно только для того, чтобы гарантировать симметричность уравнения на тетраэдре (2.37), поэтому утверждение можно было бы сформулировать и в чуть более общем виде. Впрочем, мы увидим сейчас, что оно и так охватывает бóльшую часть списка.

Теорема 2.9. Уравнения из списка 2.1 обладают трёхногими формами, указанными в таблице 2.3.

$$\begin{aligned}
(Q_4) : \quad & F(u, v; \alpha, \beta) = G(u, v; \alpha - \beta), \\
& G(u, v; \alpha) = \frac{\Theta(U + \alpha)(\operatorname{sn}(U + \alpha) - \operatorname{sn}(V))}{\Theta(U - \alpha)(\operatorname{sn}(U - \alpha) - \operatorname{sn}(V))} \\
& u = \operatorname{sn}(U), \quad v = \operatorname{sn}(V), \quad \Theta(U) \text{ тэта-функция Якоби} \\
(Q_3^1) : \quad & F(u, v; \alpha, \beta) = G(u, v; \alpha - \beta), \quad G(u, v; \alpha) = \frac{\sin(U + \alpha) - \sin(V)}{\sin(U - \alpha) - \sin(V)} \\
& u = \sin(U), \quad v = \sin(V) \\
(Q_3^0) : \quad & F(u, v; \alpha, \beta) = G(u, v; \alpha/\beta), \quad G(u, v; \alpha) = \frac{\alpha u - v}{u - \alpha v} \\
(Q_2) : \quad & F(u, v; \alpha, \beta) = G(u, v; \alpha - \beta), \quad G(u, v; \alpha) = \frac{(U + \alpha)^2 - V^2}{(U - \alpha)^2 - V^2} \\
& u = U^2, \quad v = V^2 \\
(Q_1^1) : \quad & F(u, v; \alpha, \beta) = G(u, v; \alpha - \beta), \quad G(u, v; \alpha) = \frac{u - v + \alpha}{u - v - \alpha} \\
(Q_1^0) : \quad & f(u, v; \alpha, \beta) = g(u, v; \alpha - \beta), \quad g(u, v; \alpha) = \frac{\alpha}{u - v} \\
(H_3^s) : \quad & F(u, v; \alpha, \beta) = \frac{\beta u - \alpha v}{\alpha u - \beta v}, \quad G(u, v; \alpha) = uv + \delta\alpha \\
(H_2) : \quad & F(u, v; \alpha, \beta) = \frac{u - v + \alpha - \beta}{u - v - \alpha + \beta}, \quad G(u, v; \alpha) = u + v + \alpha \\
(H_1) : \quad & f(u, v; \alpha, \beta) = \frac{\alpha - \beta}{u - v}, \quad g(u, v; \alpha) = v
\end{aligned}$$

Таблица 2.3. Трёхногие формы квад-уравнений. Функции f, g отвечают аддитивной записи, F, G мультипликативной.

Доказательство теоремы заключается в прямой проверке. Можно указать и общий способ вывода трёхногой формы. Случаю $r(u) = 0$ отвечают уравнения (Q_1^0) и (H_1) , обладающие аддитивными трёхногими формами, которые легко обнаружить непосредственно, поэтому достаточно ограничиться случаем $r(u) \neq 0$. При этом удобнее работать с мультипликативной трёхногой формой.

Будем рассматривать $Q(u, v, w, z; \alpha, \beta)$, как многочлен от v, w, z , считая u (вершину искомой трёхногой формы) параметром. Заметим, что, в силу определения (2.15), равенство $h(u, v; \alpha) = 0$ характеризует значения v , при которых многочлен Q , рассматриваемый как аффинно-линейный от w, z , является приводимым. Так как $r(u) \neq 0$, то уравнение $h = 0$ имеет два различных кор-

ня $v = a(u, \alpha)$ и $v = A(u, \alpha)$ (в случае уравнений (H_2) и (H_3^δ) , для которых $h(u, v; \alpha)$ равен, соответственно, $u + v + \alpha$ и $uv + \delta\alpha$, один из корней равен бесконечности; для единообразия будем предполагать далее, что он переведён в конечную точку). Тогда любой многочлен первой степени по v можно представить в виде линейной комбинации $v - a$ и $v - A$, и для Q получаем представление

$$Q = d(v - a(u, \alpha))(w - b)(z - c) + D(v - A(u, \alpha))(w - B)(z - C),$$

где b, B, c, C, d, D некоторые функции от u, α, β . При этом многочлен $(w - b)(w - B)$ совпадает с $h(u, w; \beta)$, с точностью до умножения на функцию от u . Таким образом, имеет место либо представление вида

$$Q = d(u, \alpha, \beta)(v - a(u, \alpha))(w - a(u, \beta))(z - c(u, \alpha, \beta)) \\ + D(u, \alpha, \beta)(v - A(u, \alpha))(w - A(u, \beta))(z - C(u, \alpha, \beta)),$$

либо вида

$$Q = d(u, \alpha, \beta)(v - a(u, \alpha))(w - A(u, \beta))(z - c(u, \alpha, \beta)) \\ + D(u, \alpha, \beta)(v - A(u, \alpha))(w - a(u, \beta))(z - C(u, \alpha, \beta)).$$

Чтобы выяснить, какая из возможностей реализуется, используем свойство симметрии (2.6) относительно замены $v \leftrightarrow w, \alpha \leftrightarrow \beta$. Заметим, что $(z - c)(z - C)$ совпадает, с точностью до умножения на функцию от u , с биквадратичным многочленом $\hat{h}(u, z; \alpha, \beta) = \delta_{vw}(Q)$, отвечающим диагонали квадрата. В силу свойства симметрии и соотношения (2.15) имеем

$$\hat{h}(u, z; \alpha, \beta) = \hat{h}(u, z; \beta, \alpha), \quad \delta_z(\hat{h}(u, z; \alpha, \beta)) = k^2(\alpha, \beta)r(u).$$

Таким образом, мы имеем квадратный трёхчлен по z , коэффициенты которого симметричны относительно α, β , а корень из дискриминанта кососимметричен. Отсюда вытекает, что корни $c(u, \alpha, \beta)$ и $C(u, \alpha, \beta)$ не являются симметричными, следовательно, они переходят друг в друга при перестановке α и β : $C(u, \alpha, \beta) = c(u, \beta, \alpha)$. Поскольку само уравнение при перестановке должно переходить в себя, заключаем, что выполняется второе из выписанных выше представлений, точнее,

$$Q = d(u, \alpha, \beta)(v - a(u, \alpha))(w - A(u, \beta))(z - c(u, \alpha, \beta)) \\ + \varepsilon d(u, \beta, \alpha)(v - A(u, \alpha))(w - a(u, \beta))(z - c(u, \beta, \alpha)), \quad \varepsilon = \pm 1,$$

что, очевидно, и даёт искомую трёхногую форму. Все входящие в неё функции находятся алгоритмически, и являются рациональными относительно u и $\sqrt{r(u)}$, что и подсказывает униформизирующую замену переменных $u \rightarrow U$ указанную в таблице.

2.4 Преобразования Бэклунда для уравнений типа КдФ

Все квад-уравнения из списка 2.1 задают принцип нелинейной суперпозиции преобразований Бэклунда для некоторых уравнений типа КдФ. Согласно предыдущей главе, уравнение (H_1) отвечает преобразованию Бэклунда (1.6) для потенциального уравнения КдФ (1.42):

$$u_x + v_x = (v - u)^2 + \alpha, \quad u_t = u_{xxx} - 6u_x^2.$$

Несложное вычисление (аналогичное доказательству теоремы 1.2) показывает, что уравнение (H_3^0) отвечает преобразованию Бэклунда

$$\frac{u_x}{u} + \frac{v_x}{v} = \frac{\alpha}{2} \left(\frac{u}{v} + \frac{v}{u} \right).$$

Это преобразование, после замены $u \rightarrow e^u$, $v \rightarrow e^v$, обслуживает иерархию интегрируемых уравнений, содержащую потенциальное модифицированное уравнение КдФ, а также уравнение sinh-Гордон:

$$u_x + v_x = \alpha \cosh(u - v), \quad u_t = u_{xxx} - 2u_x^3, \quad u_{xy} = \cosh(2u).$$

Остальные случаи описываются следующей теоремой (легко видеть, почему она неприменима к уравнениям (H_1) и (H_3^0) : отвечающие им многочлены $h = 1$ и $h = uv$ не содержат параметра и система (2.40), (2.41) тривиализуется).

Теорема 2.10. Уравнение из списка 2.1, за исключением (H_1) и (H_3^0) , задаёт принцип нелинейной суперпозиции преобразований Бэклунда вида

$$u_x v_x = h(u, v; \alpha), \tag{2.38}$$

где многочлен h определён формулой (2.15), для уравнения

$$u_t = u_{xxx} - \frac{3(u_{xx}^2 - r(u))}{2u_x}, \quad r(u) = h_v^2 - 2hh_{vv}. \tag{2.39}$$

Доказательство. Рассмотрим систему из четырёх уравнений вида (2.38), ассоциированных с рёбрами диаграммы Бьянки:

$$u_x v_x = h(u, v; \alpha), \quad u_x w_x = h(u, w; \beta), \tag{2.40}$$

$$v_x z_x = h(v, z; \beta), \quad w_x z_x = h(w, z; \alpha). \tag{2.41}$$

Нужно показать, что если выполняются уравнения (2.40), и z определяется из уравнения $Q(u, v, w, z; \alpha, \beta) = 0$, то уравнения (2.41) тоже выполняются. Вычислим отношение двух первых уравнений:

$$\frac{v_x}{w_x} = \frac{h(u, v; \alpha)}{h(u, w; \beta)} = -\frac{Q_w Q_z - Q Q_{wz}}{Q_v Q_z - Q Q_{vz}} = -\frac{Q_w}{Q_v},$$

где второе равенство следует из (2.15), а последнее выполняется в силу уравнения $Q = 0$. Это же соотношение следует из второй пары:

$$\frac{v_x}{w_x} = \frac{h(v, z; \beta)}{h(w, z; \alpha)} = -\frac{Q_u Q_w - Q Q_{uw}}{Q_u Q_v - Q Q_{uv}} = -\frac{Q_w}{Q_v},$$

следовательно, уравнения (2.41) эквивалентны друг другу и достаточно проверить, что выполняется первое. Дифференцируя равенство $Q = 0$, получаем

$$Q_u u_x + Q_v v_x + Q_w w_x + Q_z z_x = 0 \quad \Rightarrow \quad Q_u u_x + Q_z z_x = 0,$$

поскольку второе и третье слагаемые сокращаются в силу доказанного соотношения. Выполняя те же вычисления в обратном порядке, имеем

$$\frac{z_x}{u_x} = -\frac{Q_u}{Q_z} = -\frac{Q_u Q_w - Q Q_{uw}}{Q_w Q_z - Q Q_{wz}} = \frac{h(v, z; \beta)}{h(u, v; \alpha)}$$

и умножая на первое уравнение (2.40), получаем первое уравнение (2.41), что и требовалось.

Чтобы доказать, что соотношение (2.38) определяет преобразование Бэклунда между (2.39) и идентичным уравнением для v , нужно продифференцировать это соотношение по t и проверить, что результат является его дифференциальным следствием. Это делается прямым, не очень трудным вычислением, причём явный вид многочленов h, r не нужен и используется только равенство $r(u) = h_v^2 - 2hh_{vv}$. Более трудоёмкое, но также прямолинейное вычисление доказывает, что равенство $D_t(Q) = 0$ выполняется в силу самого уравнения $Q = 0$ и системы (2.40), (2.41). \square

Замечание 2.11. Можно проверить, что уравнение $u_x v_x = h(u, v)$ определяет преобразование Бэклунда между уравнениями

$$u_t = u_{xxx} - \frac{3(u_{xx}^2 - r(u))}{2u_x}, \quad v_t = v_{xxx} - \frac{3(v_{xx}^2 - R(v))}{2v_x},$$

где $r(u) = h_v^2 - 2hh_{vv}$ и $R(v) = h_u^2 - 2hh_{uu}$, для любого биквадратичного многочлена h , не обязательно симметричного. Насколько при этом могут отличаться r и R , видно из теоремы 2.21 ниже.

То, что уравнения pot-КдФ и pot-мКдФ выпали из общей схемы, не означает, что они имеют принципиально иную природу. Наоборот, имеются дифференциальные подстановки типа преобразования Миуры, связывающие эти уравнения с другими уравнениями типа КдФ, в том числе и с уравнениями вида (2.39), отвечающими многочленам $r(u)$ с кратными корнями. Мы не будем приводить здесь эти замены, но следует отметить, что вообще преобразования Миуры и преобразования Бэклунда очень тесно связаны, как это видно на примере одевающей цепочки (1.12). Подчеркнём, что далеко не все подстановки приводят к преобразованиям Бэклунда вида (2.38), и не всегда

принцип нелинейной суперпозиции записывается в виде квад-уравнения, к тому же аффинно-линейного.

Уравнение (2.39), отвечающее многочлену $r(u)$ с простыми корнями, называется уравнением Кричевера-Новикова. Оно играет особую роль, поскольку доказано, что это единственное интегрируемое уравнение типа КдФ, которое не сводится дифференциальными подстановками к самому уравнению КдФ. Случай кратных корней можно рассматривать как предельный, и он уже связан со всеми остальными уравнениями. Таким образом, уравнение Кричевера-Новикова отвечает, в определённом смысле, случаю общего положения. Соответственно, и уравнение (Q_4) выступает в качестве наиболее общего дискретного уравнения, хотя и не самого сложного на вид (ср. напр. с (1.18)).

В заключение этого раздела покажем, что преобразование Бэклунда можно вывести из квад-уравнения на решётке \mathbb{Z}^2 при помощи непрерывного предела вдоль одного из координатных направлений, а предел по второму направлению даёт и уравнение в частных производных. Формулы для этих предельных переходов немного отличаются для разных уравнений, поэтому мы ограничимся достаточно простым примером уравнения (Q_1^δ) . Используя полные обозначения, перепишем это уравнение в виде

$$\alpha_n(u_{n,k} - u_{n,k+1})(u_{n+1,k} - u_{n+1,k+1}) - \beta_k(u_{n,k} - u_{n+1,k})(u_{n,k+1} - u_{n+1,k+1}) + \delta\alpha_n\beta_k(\alpha_n - \beta_k) = 0$$

и положим

$$x = \varepsilon k, \quad u_{n,k} = u_n(x), \quad u_{n,k+1} = u_n(x + \varepsilon) = u_n + \varepsilon u_{n,x} + o(\varepsilon), \quad \beta_k = \varepsilon^2/2.$$

Легко видеть, что в пределе $\varepsilon \rightarrow 0$ возникает цепочка

$$u'_n u'_{n+1} = \frac{1}{2\alpha_n} (u_n - u_{n+1})^2 - \frac{\delta\alpha_n}{2},$$

как раз совпадающая с (2.38) для данного Q . Далее, подставим в неё

$$u_n(x) = \varepsilon^2 n + \varepsilon x + u\left(x + \varepsilon n, t + \frac{\varepsilon^3 n}{12}\right), \quad \alpha_n = \frac{\varepsilon^2}{2},$$

тогда первые два коэффициента в разложении по степеням ε сокращаются, а равенство нулю коэффициента при ε^2 даёт уравнение

$$u_t = u_{xxx} - \frac{3(u_{xx}^2 - \delta)}{2u_x}.$$

Фактически, это вычисление даёт альтернативное доказательство теоремы 2.10, поскольку, в силу 3D-совместности, можно осуществить предел по двум направлениям в многомерной решётке, сохраняя совместность с оставшимися дискретными направлениями, которые будут отвечать за преобразования Бэклунда и принцип нелинейной суперпозиции. Более того, с помощью аналогичных пределов можно вывести и высшие симметрии из иерархии.

2.5 Уравнения с невырожденными биквадратиками

2.5.1 Анализ сингулярных решений

Биквадратичные многочлены $h^{ij} = \delta_{u_k, u_l}(Q)$ для данного $Q \in \mathcal{P}_4^1$ просто связаны с сингулярными решениями аффинно-линейного уравнения

$$Q(u_1, u_2, u_3, u_4) = 0. \quad (2.42)$$

Многочлен $Q \in \mathcal{P}_4^1$ предполагается неприводимым (в проективном смысле; в частности, $Q_{u_i} \not\equiv 0$, так как иначе замена $u_i \mapsto 1/u_i$ переводит Q в $u_i Q$). Очевидно, уравнение (2.42) разрешимо относительно любой переменной: пусть $Q = p(u_j, u_k, u_l)u_i + q(u_j, u_k, u_l)$, тогда $u_i = -q/p$ для значений u_j, u_k, u_l общего положения. Однако, значение u_i не определено в точках (u_j, u_k, u_l) , лежащих на кривой в $(\mathbb{C}\mathbb{P}^1)^3$

$$S_i: \quad p(u_j, u_k, u_l) = q(u_j, u_k, u_l) = 0, \quad Q \equiv pu_i + q. \quad (2.43)$$

Проекцией этой кривой на координатную плоскость (j, k) является биквадратика $h^{jk} = pq_{u_l} - p_{u_l}q = 0$.

Определение 2.12. Решение (u_1, u_2, u_3, u_4) уравнения (2.42), удовлетворяющее также уравнению $Q_{u_i}(u_1, u_2, u_3, u_4) = 0$, называется *сингулярным* относительно u_i . Кривая S_i называется *сингулярной кривой* для u_i .

Лемма 2.13. Если решение (u_1, u_2, u_3, u_4) уравнения (2.42) сингулярно относительно u_i , то $h^{jk} = h^{jl} = h^{kl} = 0$. Наоборот, если для некоторого решения $h^{jk} = 0$, то это решение сингулярно, либо относительно u_i , либо относительно u_l .

Доказательство. Так как $h^{jk} = Q_{u_i}Q_{u_l} - QQ_{u_i, u_l}$, то уравнения $h^{jk} = 0$ и $Q_{u_i}Q_{u_l} = 0$ эквивалентны на решениях уравнения $Q = 0$. \square

Введём следующее понятие невырожденности биквадратичных многочленов и квад-уравнений.

Определение 2.14. Биквадратичный многочлен $h(u, v) \in \mathcal{P}_2^2$ называется *невырожденным*, если его класс эквивалентности по модулю дробно-линейных преобразований не содержит многочленов, делящихся на множитель вида $u - \text{const}$ или $v - \text{const}$. Аффинно-линейное квад-уравнение называется невырожденным, если невырождены все четыре отвечающих ему биквадратичных многочлена h^{jk} . Наконец, система (2.2) называется невырожденной, если невырождены все её уравнения.

Легко видеть, что невырожденный многочлен h либо неприводим, либо имеет вид $h = (\alpha_1 uv + \beta_1 u + \gamma_1 v + \delta_1)(\alpha_2 uv + \beta_2 u + \gamma_2 v + \delta_2)$, где $\alpha_i \delta_i \neq \beta_i \gamma_i$. В обоих случаях уравнение $h = 0$ определяет v , как двузначную функцию от

u и наоборот. Примером вырожденного многочлена служит $h(u, v) = u - v^2$, так как инверсия $u \mapsto 1/u$ переводит его в $u(1 - uv^2)$.

Вернёмся теперь к общей задаче о совместной шестёрке уравнений (2.2). Функции A, \dots, \bar{C} считаются аффинно-линейными (то есть, из \mathcal{P}_4^1), но не обязаны быть симметричными и а priori никак не связаны друг с другом. Для соответствующих биквадратичных многочленов будем использовать обозначения $A^{ij} = \delta_{u_k, u_l} A$ и т.д..

Теорема 2.15. Пусть система (2.2) 3D-совместна и невырождена. Тогда:

1) для каждого ребра, два биквадратичных многочлена отвечающих этому ребру (пришедшие с двух граней, смежных по данному ребру) совпадают с точностью до постоянного множителя;

2) произведение этих множителей вокруг любой вершины равно -1 , точнее, выполняются тождества типа (2.17), например, для вершины $u = u_0$ имеем

$$A^{0,1} B^{0,3} C^{0,2} + A^{0,2} B^{0,1} C^{0,3} = 0; \quad (2.44)$$

3) система (2.2) обладает свойством тетраэдральности $\partial u_{123} / \partial u = 0$.

Доказательство. Исключение u_{12} , u_{13} и u_{23} приводит к уравнениям

$$\begin{aligned} F(\overset{2}{u}, \overset{1}{u_1}, \overset{1}{u_2}, \overset{3}{u_3}, \overset{1}{u_{123}}) &= \bar{A}_{u_{13}, u_{23}} BC - \bar{A}_{u_{23}} B_{u_{13}} C - \bar{A}_{u_{13}} BC_{u_{23}} + \bar{A} B_{u_{13}} C_{u_{23}} = 0, \\ G(\overset{2}{u}, \overset{1}{u_1}, \overset{3}{u_2}, \overset{1}{u_3}, \overset{1}{u_{123}}) &= \bar{B}_{u_{12}, u_{23}} AC - \bar{B}_{u_{23}} A_{u_{12}} C - \bar{B}_{u_{12}} AC_{u_{23}} + \bar{B} A_{u_{12}} C_{u_{23}} = 0, \\ H(\overset{2}{u}, \overset{3}{u_1}, \overset{1}{u_2}, \overset{1}{u_3}, \overset{1}{u_{123}}) &= \bar{C}_{u_{12}, u_{13}} AB - \bar{C}_{u_{13}} A_{u_{12}} B - \bar{C}_{u_{12}} AB_{u_{13}} + \bar{C} A_{u_{12}} B_{u_{13}} = 0. \end{aligned}$$

Здесь числа над аргументами F, G, H указывают степень, с которой данная переменная входит в правую часть (степень понимается в проективном смысле, см. пример в конце предыдущего раздела). В силу 3D-совместности, выражения для u_{123} , как функции от u, u_1, u_2, u_3 , найденные из этих уравнений, должны совпадать. Следовательно, имеют место разложения на множители:

$$\begin{aligned} F &= f(u, \overset{2}{u_3})K, & G &= g(u, \overset{2}{u_2})K, & H &= h(u, \overset{2}{u_1})K, \\ K &= K(u, \overset{1}{u_1}, \overset{1}{u_2}, \overset{1}{u_3}, \overset{1}{u_{123}}), \end{aligned} \quad (2.45)$$

где f, g, h некоторые многочлены степени 2 по второму аргументу. Степень по u следует уточнить.

Пусть начальные значения u, u_1, u_2 суть свободные переменные, а u_3 выберем так, чтобы выполнялось уравнение $f(u, u_3) = 0$. Тогда $F \equiv 0$ и, следовательно, система $B = C = \bar{A} = 0$ не даёт определённого значения u_{123} . При этом уравнение $B = 0$ разрешимо относительно u_{13} , так как иначе начальные данные были бы связаны соотношением $B^{0,1}(u, u_1) = 0$. Аналогично, уравнения $C = 0$ разрешимо относительно u_{23} . Следовательно, неопределённость возникает из-за сингулярности уравнения $\bar{A} = 0$ относительно u_{123} . Следовательно, выполняется связь $\bar{A}^{3,13}(u_3, u_{13}) = 0$. В силу предположения теоремы,

u_{13} является (двузначной) функцией u_3 и не зависит от u_1 . Это значит, что уравнение $B = 0$ сингулярно относительно u_1 и, следовательно, $B^{0,3}(u, u_3) = 0$. Аналогично, $C^{0,3}(u, u_3) = 0$.

Итак, мы доказали, что если $u_3 = \varphi(u)$ ноль многочлена f , то он является также нулём многочленов $B^{0,3}$, $C^{0,3}$. Если один из этих трёх многочленов неприводим, то отсюда уже следует их совпадение с точностью до постоянного множителя. Если многочлены приводимы, то мы не можем это утверждать, так как имеется возможность $f = a^2$, $B^{0,3} = ab$, $C^{0,3} = ac$, где факторы a, b, c аффинно-линейны по u, u_3 . Однако, в любом случае имеем $\deg_u f = 2$ и этого достаточно для завершения доказательства.

Действительно, отсюда следует $\deg_u K = 0$, то есть выполняется свойство тетраэдральности. В свою очередь, отсюда следует соотношение (2.44), как было показано при доказательстве утверждения 2.4. Переменные в этом соотношении разделяются: $B^{0,3}/C^{0,3} = -A^{0,2}/C^{0,2} \cdot B^{0,1}/A^{0,1}$, так что $B^{0,3}/C^{0,3}$ может зависеть лишь от u . В силу предположения теоремы это отношение постоянно. \square

Доказанная теорема даёт очень сильные необходимые условия для 3D-совместности невырожденных систем, что и позволит полностью описать их в двух последующих подразделах. Ответ оказывается очень прост (см. теорему 2.25): любая 3D-совместная невырожденная система эквивалентна системе уравнений типа Q из списка 2.1. Таким образом, в невырожденном случае отказ от предположений трансляционной инвариантности, симметрии и тетраэдральности не приводит к новым ответам. Этот результат сводит классификацию квад-уравнений к изучению вырожденных систем, что, впрочем, может оказаться весьма сложной задачей. Напомним, что именно вырожденные уравнения типов H, A из списка 2.1 требовали дополнительных усилий при анализе системы (2.24).

В заключение, приведём несколько примеров, из которых видно, что для вырожденных 3D-совместных систем утверждения теоремы 2.15 могут как выполняться, так и не выполняться.

Пример 2.16. Простейшим 3D-совместным уравнением является линейное (2.11). В этом случае все биквадратичные многочлены равны 1, так что утверждение 1) выполнено, а утверждение 2) нет. Так как 2) следует из свойства тетраэдральности 3), то последнее также не выполняется. Множитель f в этом примере также равен 1, но это совпадение нарушается при дробно-линейных преобразованиях. Действительно, в этом случае $\deg_u K = 1$, и после инверсии всех переменных $u_I \rightarrow 1/u_I$ мы приходим к $f = uu_3^2$, тогда как $B^{0,3}$ переходит в $u^2u_3^2$.

Пример 2.17. Рассмотрим уравнение Хиетаринты

$$(u - e_j)(u_i - o_i)(u_j - e_i)(u_{ij} - o_j) - (u - e_i)(u_i - e_j)(u_j - o_j)(u_{ij} - o_i) = 0, \quad (2.46)$$

где e_i, o_i приписаны i -му направлению. Нетрудно проверить, что это уравнение 3D-совместно, но утверждение 1) не выполняется:

$$\begin{aligned} B^{0,3} &= (e_3 - o_1)(o_1 - o_3)(u - e_3)(u - e_1)(u_3 - e_1)(u_3 - o_3), \\ C^{0,3} &= (e_3 - o_2)(o_2 - o_3)(u - e_3)(u - e_2)(u_3 - e_2)(u_3 - o_3). \end{aligned}$$

Множитель f пропорционален $(u - e_3)(u_3 - e_1)(u_3 - e_2)$. Соответственно, $\deg_u K = 1$ и свойство тетраэдральности не выполняется.

Пример 2.18. Для дискретного уравнения КдФ (H_1)

$$(u - u_{ij})(u_i - u_j) + \alpha_i - \alpha_j = 0$$

все утверждения теоремы выполняются, несмотря на вырожденность биквадратик:

$$B^{0,3} = \alpha_1 - \alpha_3, \quad C^{0,3} = \alpha_2 - \alpha_3, \quad f = 1$$

(напомним, что степень понимается в проективном смысле. При инверсии эти многочлены превращаются в $u^2 u_3^2$). Аналогичными свойствами обладают уравнения (H_2), (H_3^δ).

Пример 2.19. Рассмотрим невырожденное уравнение (Q_1^δ)

$$\begin{aligned} Q(u, u_i, u_j, u_{ij}; \alpha_i, \alpha_j) \\ = \alpha_i(u - u_j)(u_i - u_{ij}) - \alpha_j(u - u_i)(u_j - u_{ij}) + \delta \alpha_i \alpha_j (\alpha_i - \alpha_j) = 0. \end{aligned}$$

Оказывается, что оно совместно не только само с собой, но также и с линейными уравнениями. Именно, 3D-совместна вырожденная система, образованная уравнениями

$$Q(u, u_1, u_{12}, u_2; \alpha_1, \alpha_2; \delta) = 0, \quad u_{13} - u_3 = u_1 - u, \quad u_{23} - u_3 = u_2 - u$$

и их копиями на противоположных гранях. В этом случае ребру (u, u_3) отвечают многочлены

$$B^{0,3} = C^{0,3} = -1, \quad f = 1.$$

В отличие от предыдущего примера, свойство тетраэдральности не выполняется и $\deg_u K = 2$. При инверсии, многочлен f переходит в u_3^2 . Более того, биквадратичные многочлены отвечающие ребру (u, u_1) не совпадают:

$$A^{0,1} = \alpha_2(\alpha_1 - \alpha_2)((u_1 - u)^2 - \delta \alpha_1^2), \quad B^{0,1} = -1, \quad h = 1.$$

2.5.2 Инварианты дробно-линейных преобразований

Классификация невырожденных систем, как и раньше, основана на спуске $Q \rightarrow h \rightarrow r$, но задача сильно усложняется из-за расширения группы эквивалентности от PSL_2 до $(PSL_2)^8$, действующей независимыми дробно-линейные

преобразованиями в каждой вершине куба. Поэтому предварительно необходимо развить алгебраический аппарат, позволяющий учесть действие этой группы. Кроме того, в этом подразделе будет решена задача восстановления биквадратичного многочлена h по паре дискриминантов (она не сильно усложняется по сравнению с симметричным случаем). В следующем подразделе будет проведено восстановление Q по многочленам h^{ij} , при условии невырожденности последних, и размещение уравнений Q на кубе (в симметричном случае этот этап отсутствовал).

Для классификации орбит дробно-линейных преобразований (2.12) исключительно важны *относительные инварианты*. Для многочленов четвёртой степени от одной переменной, $r \in \mathcal{P}_1^4$, эти относительные инварианты хорошо известны и определяются, как коэффициенты вейерштрассовской нормальной формы $r = 4u^3 - g_2u - g_3$. Для данного многочлена $r(u) = r_4u^4 + r_3u^3 + r_2u^2 + r_1u + r_0$ они задаются формулами (см. напр. [31])

$$\begin{aligned} g_2(r) &= \frac{1}{48}(2rr^{IV} - 2r'r''' + (r'')^2) = \frac{1}{12}(12r_0r_4 - 3r_1r_3 + r_2^2), \\ g_3(r) &= \frac{1}{3456}(12rr''r^{IV} - 9(r')^2r^{IV} - 6r(r''')^2 + 6r'r''r''' - 2(r'')^3) \\ &= \frac{1}{432}(72r_0r_2r_4 - 27r_1^2r_4 + 9r_1r_2r_3 - 27r_0r_3^2 - 2r_2^3). \end{aligned}$$

При дробно-линейной замене $u = u_1$ эти величины лишь умножаются на постоянные множители:

$$g_k(M[r]) = \Delta_1^{2k} g_k(r), \quad k = 2, 3.$$

Для биквадратичных многочленов $h \in \mathcal{P}_2^2$,

$$\begin{aligned} h(u, v) &= h_{22}u^2v^2 + h_{21}u^2v + h_{20}u^2 \\ &\quad + h_{12}uv^2 + h_{11}uv + h_{10}u + h_{02}v^2 + h_{01}v + h_{00}, \end{aligned} \quad (2.47)$$

относительными инвариантами являются величины

$$\begin{aligned} i_2(h) &= 2hh_{uuuv} - 2h_uh_{uvv} - 2h_vh_{uuv} + 2h_{uu}h_{vv} + h_{uv}^2 \\ &= 8h_{00}h_{22} - 4h_{01}h_{21} - 4h_{10}h_{12} + 8h_{02}h_{20} + h_{11}^2, \\ i_3(h) &= \frac{1}{4} \det \begin{pmatrix} h & h_u & h_{uu} \\ h_v & h_{uv} & h_{uuv} \\ h_{vv} & h_{uvv} & h_{uuuv} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} h_{22} & h_{21} & h_{20} \\ h_{12} & h_{11} & h_{10} \\ h_{02} & h_{01} & h_{00} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Заметим, что i_3 можно определить также формулой

$$-4i_3(h) = \delta_{u,v}(\delta_{u,v}(h))/h.$$

Закон преобразования при дробно-линейных заменах $u = u_1$ и $v = u_2$ имеет вид

$$i_k(M[h]) = \Delta_1^k \Delta_2^k i_k(h), \quad k = 2, 3.$$

Следующие свойства операций $\delta_{u,v}$, δ_u проверяются прямыми вычислениями (для полноты мы повторяем здесь уже знакомое нам тождество (2.14)).

Лемма 2.20. Для любого аффинно-линейного многочлена $Q(u_1, u_2, u_3, u_4) \in \mathcal{P}_4^1$ выполняются тождества

$$\delta_{u_3}(\delta_{u_1, u_2}(Q)) = \delta_{u_2}(\delta_{u_1, u_3}(Q)), \quad (2.48)$$

$$i_k(\delta_{u_1, u_2}(Q)) = i_k(\delta_{u_3, u_4}(Q)), \quad k = 2, 3; \quad (2.49)$$

для любого биквадратичного многочлена $h(u_1, u_2) \in \mathcal{P}_2^2$ верно тождество

$$g_k(\delta_{u_1}(h)) = g_k(\delta_{u_2}(h)), \quad k = 2, 3. \quad (2.50)$$

Обозначим $h^{ij} = h^{ji} = \delta_{u_k, u_l}(Q)$ где $\{i, j, k, l\} = \{1, 2, 3, 4\}$. Формулы (2.48) означают, что следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{array}{ccccc} r_4(u_4) & \xleftarrow{\delta_{u_3}} & h^{34}(u_3, u_4) & \xrightarrow{\delta_{u_4}} & r_3(u_3) \\ \delta_{u_1} \uparrow & & \uparrow \delta_{u_1, u_2} & & \uparrow \delta_{u_2} \\ h^{14}(u_1, u_4) & \xleftarrow{\delta_{u_2, u_3}} & Q(u_1, u_2, u_3, u_4) & \xrightarrow{\delta_{u_1, u_4}} & h^{23}(u_2, u_3) \\ \delta_{u_4} \downarrow & & \downarrow \delta_{u_3, u_4} & & \downarrow \delta_{u_3} \\ r_1(u_1) & \xleftarrow{\delta_{u_2}} & h^{12}(u_1, u_2) & \xrightarrow{\delta_{u_1}} & r_2(u_2) \end{array} \quad (2.51)$$

Более того, из формул (2.49) и (2.50) следует, что биквадратичные многочлены на противоположных сторонах имеют одинаковые инварианты i_2, i_3 , а инварианты g_2, g_3 совпадают для всех многочленов четвёртой степени r_i . Диаграмму можно дополнить многочленами h^{13}, h^{24} , отвечающими диагоналям (так что возникает граф тетраэдра), но они нам не понадобятся.

Диаграмма (2.51) подсказывает способ классификации аффинно-линейных уравнений $Q = 0$ по модулю дробно-линейных преобразований (действующих независимо на каждую переменную). Первый шаг заключается в том, чтобы использовать эти преобразования для приведения к канонической форме многочленов $r_i(u_i)$, ассоциированных с вершинами квадрата. Согласно формулам (2.13),

$$\delta_{u_i}(\delta_{u_j, u_k}(M[Q])) = \Delta_j^2 \Delta_k^2 \Delta_l^2 M[\delta_{u_i}(\delta_{u_j, u_k}(Q))] = \frac{C}{\Delta_i^2} M[r_i],$$

где $C = \Delta_1^2 \Delta_2^2 \Delta_3^2 \Delta_4^2$. Так как многочлен Q определён с точностью до произвольного множителя, то можно принять, что дробно-линейные замены переменных в уравнении $Q = 0$ индуцируют для многочленов r_i преобразования

$$r_i \mapsto \frac{1}{\Delta_i^2} M[r_i].$$

Это позволяет привести каждый из r_i к одной из форм (2.20).

Не всякая пара $r_1(u), r_2(v)$ может отвечать смежным вершинам, так как относительные инварианты многочленов в такой паре должны совпадать, согласно (2.50). В следующей теореме, представляющей собой усложнённый вариант леммы 2.5, определяются все допустимые пары и приводится решение задачи восстановления соответствующего многочлена h .

Теорема 2.21. Биквадратичные многочлены с парой дискриминантов

$$\delta_v(h) = h_v^2 - 2hh_{vv} = r_1(u), \quad \delta_u(h) = h_u^2 - 2hh_{uu} = r_2(v), \quad (2.52)$$

взятых в канонической форме, существуют для пар, отмеченных в таблице

	$(v^2 - 1)(k^2v^2 - 1)$	$v^2 - 1$	v^2	v	1	0
$(u^2 - 1)(k^2u^2 - 1)$	+					
$u^2 - 1$		+	+			
u^2		+	+			
u				+	+	
1				+	+	+
0					+	+

Соответствующие многочлены h , с точностью до перестановки u, v , и их относительные инварианты i_2, i_3 перечислены в таблице 2.4.

Доказательство. Уравнения (2.52) эквивалентны системе из 10 квадратичных уравнений для 9 неизвестных коэффициентов многочлена h . Список получен прямым решением этой системы для различных канонических пар (r_1, r_2) . Учёт тождества (2.50) значительно сокращает перебор. Действительно, $g_2^3 \neq 27g_3^2$ только в одном случае, а относительные инварианты для многочлена $r_1 = au^2 + bu + c$ равны $12g_2 = a^2$, $216g_3 = -a^3$, так что второй многочлен должен иметь вид $r_2 = av^2 + \tilde{b}v + \tilde{c}$. Решение для пары $(u, 0)$ оказывается пустым. \square

Замечание 2.22. Формула (2.53) (совпадающая с (q4)) показывает, что орбита общего положения группы $(PSL_2)^2$ на множестве биквадратичных многочленов параметризуется модулем эллиптической кривой и точкой на ней.

Основные вычислительные трудности возникают на следующем этапе восстановления многочлена Q по биквадратичным. При доказательстве классификационной теоремы 2.3 решение этой задачи достигалось непосредственным анализом системы уравнений (2.24) на коэффициенты. В несимметричном случае такой путь нереален, не столько из-за увеличения числа коэффициентов, сколько из-за того, что коэффициенты многочленов h на разных сторонах не являются независимыми. К счастью, имеются некоторые соотношения, позволяющие получить явные формулы для Q .

$$\begin{aligned}
(r(u), r(v)), \quad r(u) &= (u^2 - 1)(k^2 u^2 - 1) : \\
h &= \frac{1}{2\alpha}(k^2 \alpha^2 u^2 v^2 + 2Auv - u^2 - v^2 + \alpha^2), \quad A^2 = r(\alpha), \\
i_2 &= 3(k^2 \alpha^2 + \alpha^{-2}) - k^2 - 1, \quad 4i_3 = A(k^2 \alpha - \alpha^{-3}); \quad (2.53)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(u^2 - \delta, v^2 - \delta) : \quad h &= \frac{\alpha}{1 - \alpha^2}(u^2 + v^2) - \frac{1 + \alpha^2}{1 - \alpha^2}uv + \frac{\delta(1 - \alpha^2)}{4\alpha}, \\
i_2 &= \frac{1 + 10\alpha^2 + \alpha^4}{(1 - \alpha^2)^2}, \quad i_3 = \frac{\alpha^2(1 + \alpha^2)}{(1 - \alpha^2)^3}; \quad (2.54)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(u^2, v^2) : \quad h &= \lambda u^2 + \mu uv + \nu v^2, \quad \mu^2 - 4\lambda\nu = 1, \\
i_2 &= 1 + 12\lambda\nu, \quad i_3 = -\lambda\mu\nu; \quad (2.55)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h &= \lambda u^2 v^2 + \mu uv + \nu, \quad \mu^2 - 4\lambda\nu = 1, \\
i_2 &= 1 + 12\lambda\nu, \quad i_3 = \lambda\mu\nu; \quad (2.56)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(u, v) : \quad h &= \frac{1}{4\alpha}(u - v)^2 - \frac{\alpha}{2}(u + v) + \frac{\alpha^3}{4}, \\
i_2 &= \frac{3}{4\alpha^2}, \quad i_3 = \frac{1}{32\alpha^3}; \quad (2.57)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(1, 1) : \quad h &= \lambda(u \pm v)^2 + \mu(u \pm v) + \nu, \quad \mu^2 - 4\lambda\nu = 1, \\
i_2 &= 12\lambda^2, \quad i_3 = \mp 2\lambda^3; \quad (2.58)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(0, 0) : \quad h &= (\varkappa uv + \lambda u + \mu v + \nu)^2, \\
i_2 &= 12(\varkappa\nu - \lambda\mu)^2, \quad i_3 = 2(\varkappa\nu - \lambda\mu)^3; \quad (2.59)
\end{aligned}$$

$$(u^2 - 1, v^2) : \quad h = \alpha v^2 \pm uv + \frac{1}{4\alpha}, \quad i_2 = 1, \quad i_3 = 0; \quad (2.60)$$

$$(u, 1) : \quad h = \pm \frac{1}{4}(v - \alpha)^2 \mp u, \quad i_2 = 0, \quad i_3 = 0; \quad (2.61)$$

$$(1, 0) : \quad h = \lambda v^2 + \mu v + \nu, \quad \mu^2 - 4\lambda\nu = 1, \quad i_2 = 0, \quad i_3 = 0. \quad (2.62)$$

Таблица 2.4. Канонические формы биквадратичных многочленов и их инварианты

Лемма 2.23. Для любого многочлена $Q(u_1, u_2, u_3, u_4) \in \mathcal{P}_4^1$ выполнены следующие тождества (используются обозначения $h^{ij}(u_i, u_j) = \delta_{u_k, u_l}(Q) \in \mathcal{P}_2^2$):

$$4i_3(h^{12})h^{14} = \det \begin{pmatrix} h^{12} & h_{u_1}^{12} & \ell \\ h_{u_2}^{12} & h_{u_1 u_2}^{12} & \ell_{u_2} \\ h_{u_2 u_2}^{12} & h_{u_1 u_2 u_2}^{12} & \ell_{u_2 u_2} \end{pmatrix}, \quad (2.63)$$

где $\ell = h_{u_3 u_3}^{23} h^{34} - h_{u_3}^{23} h_{u_3}^{34} + h^{23} h_{u_3 u_3}^{34}$;

$$h^{12}h^{34} - h^{14}h^{23} = PQ, \quad P = \det \begin{pmatrix} Q & Q_{u_1} & Q_{u_3} \\ Q_{u_2} & Q_{u_1 u_2} & Q_{u_2 u_3} \\ Q_{u_4} & Q_{u_1 u_4} & Q_{u_3 u_4} \end{pmatrix} \in \mathcal{P}_4^1; \quad (2.64)$$

$$\frac{2Q_{u_1}}{Q} = \frac{h_{u_1}^{12}h^{34} - h_{u_1}^{14}h^{23} + h^{23}h_{u_3}^{34} - h_{u_3}^{23}h^{34}}{h^{12}h^{34} - h^{14}h^{23}}. \quad (2.65)$$

Тождество (2.63) показывает, что h^{14} можно выразить через три остальные биквадратичные многочлена (при условии $i_3(h^{12}) \neq 0$). Тождество (2.64) определяет Q , как один из сомножителей в выражении, составленном из h^{ij} . Наконец, дифференцируя (2.65) по u_2 или u_4 , мы получаем соотношение вида $Q^2 = F[h^{12}, h^{23}, h^{34}, h^{14}]$, где F рациональное выражение от h^{ij} и их производных. Таким образом, для восстановления Q достаточно знать биквадратичные многочлены на трёх сторонах из четырёх. В принципе, это сводит классификацию аффинно-линейных многочленов к перебору троек биквадратичных многочленов из списка, причём из леммы 2.23 ясно, что допустима далеко не всякая тройка. Всё же, такой перебор слишком утомителен, и так как нашей целью является классификация только невырожденных систем, мы не будем его проводить.

2.5.3 Классификация невырожденных систем

Важно отметить, что после приведения многочленов $r_i(u_i)$ к каноническому виду ещё остаётся некоторая свобода. Именно, можно применять дробно-линейные преобразования, не меняющие вид r , для дальнейшего упрощения многочленов h и Q . По этой причине, таблица 2.4 является избыточной по сравнению со списком биквадратичных многочленов по модулю дробно-линейных преобразований.

Действительно, многочлен (2.55) превращается в (2.56) при инверсии u ; замена $u \mapsto -u$ позволяет зафиксировать знаки в многочленах (2.58), (2.60); в случае (2.61) знак фиксируется заменой $u \mapsto -u$, $v \mapsto iv$; многочлены (2.59), (2.62) допускают дальнейшее упрощение.

Однако, при восстановлении Q следует учесть, что преобразование переменной, отвечающей одной вершине квадрата, влияет на биквадратичные многочлены, отвечающие двум смежным сторонам. Поэтому, априори нельзя гарантировать, что все четыре биквадратичных многочлена можно привести к некоторой определённой форме одновременно. Например, если каждой

вершине отвечает многочлен $r_i = u_i^2$, то рёбрам отвечают многочлены вида (2.55) либо вида (2.56). Верно ли утверждение, что многочлены на всех рёбрах можно одновременно привести к одному и тому же виду (хотя бы и с разными коэффициентами)? Оказывается, что это возможно, как показывает доказательство следующей теоремы, в которой проводится восстановление аффинно-линейных многочленов по биквадратичным. Так как нашей целью является классификация невырожденных систем, нам не нужно решать эту задачу во всей полноте. Мы отбрасываем случаи (2.60), (2.61) и (2.62), так как соответствующие биквадратики вырождены. По этой же причине, накладываются дополнительные ограничения на значения параметров: $\lambda\nu \neq 0$ в случаях (2.55), (2.56), $\lambda \neq 0$ в случае (2.58), и $\mu\nu - \lambda\mu \neq 0$ в случае (2.59).

Теорема 2.24. С точностью до дробно-линейных преобразований из $(PSL_2)^4$, любое невырожденное аффинно-линейное уравнение $Q(u_1, u_2, u_3, u_4) = 0$ эквивалентно одному из следующих:

$$\begin{aligned} & \operatorname{sn}(\alpha) \operatorname{sn}(\beta) \operatorname{sn}(\alpha + \beta)(k^2 u_1 u_2 u_3 u_4 + 1) - \operatorname{sn}(\alpha)(u_1 u_2 + u_3 u_4) \\ & - \operatorname{sn}(\beta)(u_1 u_4 + u_2 u_3) + \operatorname{sn}(\alpha + \beta)(u_1 u_3 + u_2 u_4) = 0, \end{aligned} \quad (2.66)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\alpha^2 - 1}{\alpha}(u_1 u_2 + u_3 u_4) + \frac{\beta^2 - 1}{\beta}(u_1 u_4 + u_2 u_3) - \frac{\alpha^2 \beta^2 - 1}{\alpha \beta}(u_1 u_3 + u_2 u_4) \\ & + \frac{\delta}{4\alpha^2 \beta^2}(\alpha^2 - 1)(\beta^2 - 1)(\alpha^2 \beta^2 - 1) = 0, \end{aligned} \quad (2.67)$$

$$\begin{aligned} & \alpha(u_1 - u_4)(u_2 - u_3) + \beta(u_1 - u_2)(u_4 - u_3) \\ & - \alpha\beta(\alpha + \beta)(u_1 + u_2 + u_3 + u_4) + \alpha\beta(\alpha + \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2) = 0, \end{aligned} \quad (2.68)$$

$$\alpha(u_1 - u_4)(u_2 - u_3) + \beta(u_1 - u_2)(u_4 - u_3) - \delta\alpha\beta(\alpha + \beta) = 0. \quad (2.69)$$

Доказательство. Пусть многочлены h^{12} , h^{23} , h^{34} и h^{14} имеют вид (2.53), с параметрами (α, A) , (β, B) , $(\tilde{\alpha}, \tilde{A})$ и $(\tilde{\beta}, \tilde{B})$ соответственно, лежащими на эллиптической кривой $A^2 = r(\alpha)$. Относительные инварианты i_2, i_3 многочленов h^{12} и h^{34} должны совпадать в силу (2.49), и легко убедиться, что это условие оставляет для $(\tilde{\alpha}, \tilde{A})$ только следующие возможные значения:

$$(\alpha, A), \quad (-\alpha, -A), \quad \frac{1}{k\alpha^2}(\alpha, -A), \quad \frac{1}{k\alpha^2}(-\alpha, A)$$

и аналогично для $(\tilde{\beta}, \tilde{B})$. На первый взгляд, нам предстоит перебор 16 четвёрок h^{ij} , но на самом деле ситуация значительно лучше. Действительно, согласно (2.13), при дробно-линейных преобразованиях в уравнении $Q = 0$ выполняются соотношения

$$\delta_{u_k, u_l}(M[Q]) = \Delta_k \Delta_l M[\delta_{u_k, u_l}(Q)] = \frac{C}{\Delta_i \Delta_j} M[h^{ij}],$$

где $C = \Delta_1 \Delta_2 \Delta_3 \Delta_4$. Так как Q определён с точностью до умножения на константу, то можно принять, что дробно-линейные замены в уравнении $Q = 0$

индуцируют преобразования

$$h^{ij} \mapsto \frac{1}{\Delta_i \Delta_j} M[h^{ij}]$$

биквадратичных многочленов h^{ij} . В частности, если

$$h^{34} = h(u_3, u_4, -\alpha, -A) \quad \text{или} \quad h^{34} = h\left(u_3, u_4, \frac{1}{k\alpha}, -\frac{A}{k\alpha^2}\right),$$

то преобразование $u_3 \mapsto -u_3$ или, соответственно, $u_3 \mapsto 1/(ku_3)$ приведёт h^{34} к виду

$$-h(-u_3, u_4; -\alpha, -A), \quad \text{соотв.} \quad -ku_3^2 h\left(\frac{1}{ku_3}, u_4; \frac{1}{k\alpha}, -\frac{A}{k\alpha^2}\right),$$

что совпадает с $h(u_3, u_4, \alpha, A)$ в силу симметрий многочлена (2.53). Таким образом, сделав подходящую замену переменной u_3 (причём многочлен $r(u_3)$ не меняется), можно принять, не теряя общности, что $(\tilde{\alpha}, \tilde{A}) = (\alpha, A)$. После этого, многочлен h^{14} однозначно определяется по формуле (2.63), и оказывается, что при этом автоматически выполнено равенство $(\tilde{\beta}, \tilde{B}) = (\beta, B)$. Итак, замена всего одной переменной позволяет достичь совпадения параметров на противоположных сторонах квадрата. После этого, прямое вычисление с использованием формулы (2.65) приводит к уравнению

$$\begin{aligned} \alpha\beta\gamma(k^2 u_1 u_2 u_3 u_4 + 1) + \alpha(u_1 u_2 + u_3 u_4) \\ + \beta(u_1 u_4 + u_2 u_3) + \gamma(u_1 u_3 + u_2 u_4) = 0, \end{aligned}$$

где $\gamma = (\alpha B + \beta A)/(k^2 \alpha^2 \beta^2 - 1)$. Это и есть формула (2.66), после замены $\alpha \rightarrow \text{sn}(\alpha)$, $A \rightarrow \text{sn}'(\alpha)$ и аналогично для β .

По этой же схеме проводятся вычисления и в других случаях: сначала подходящая дробно-линейная замена переменных u_2, u_3, u_4 позволяет привести многочлены h к виду $h^{12} = h(u_1, u_2, \alpha)$, $h^{23} = h(u_2, u_3, \beta)$, $h^{34} = h(u_3, u_4, \alpha)$. После этого, прямое вычисление по формуле (2.63) доказывает, что также $h^{14} = h(u_1, u_4, \beta)$. Наконец, ответ находится при помощи (2.65).

Подробнее, многочлены (2.54) приводят к уравнению (2.67). В этом случае из уравнений (2.49) следует, что параметры α многочленов h^{12} и h^{34} отличаются не более чем знаком. Это компенсируется заменой $u_3 \rightarrow -u_3$, возможной благодаря симметрии $h(u, v, \alpha) = -h(-u, v, -\alpha)$.

В случаях (2.55), (2.56) подходящие растяжения и, если необходимо, инверсии переменных u_2, u_3, u_4 позволяют привести h^{12}, h^{23}, h^{34} к виду (2.54) без свободного члена; таким образом, мы приходим к тому же случаю при $\delta = 0$.

Многочлен (2.57) отвечает уравнению (2.68). Это наиболее простой случай, так как параметры фиксируются уже условием (2.49).

В случае (2.58) подходящие сдвиги и, если необходимо, смена знаков u_2, u_3, u_4 , позволяют привести h^{12}, h^{23}, h^{34} к виду $2h(u, v, \alpha) = \alpha^{-1}(u - v)^2 - \delta\alpha$

при $\delta = 1$. Аналогично, в случае (2.59) подходящее дробно-линейное преобразование общего вида приводит h^{12} , h^{23} , h^{34} к тому же виду с $\delta = 0$. В обоих случаях, полуинварианты равны $i_2 = 3\alpha^{-2}$, $4i_3 = \alpha^{-3}$, следовательно параметры h^{12} и h^{34} совпадают и дальнейшие замены не нужны. В результате получается уравнение (2.69). \square

На заключительном этапе нужно расположить вокруг куба найденные выше уравнения и выбрать параметры таким образом, чтобы выполнилось условие (2.17). Эффект от этого условия может привести к смене знака или инверсии одного из параметров. В следующей теореме мы возвращаемся к обозначениям переменных и параметров согласно сдвигам на решётке.

Теорема 2.25. Любая 3D-совместная невырожденная (2.2) приводится, дробно-линейными преобразованиями (разными в разных вершинах), к системе из уравнений (Q_1^δ) , (Q_2) , (Q_3^δ) или (Q_4) из списка 2.1.

Доказательство. Прежде всего, заметим, что уравнения разных типов (2.66)–(2.69) совместны быть не могут, так как различны соответствующие сингулярные кривые. В частности, параметры k^2 в случае (2.66) и δ в случаях (2.67), (2.69) должны быть одни и те же на всех гранях куба. Более того, каждое уравнение списка обладает симметрией квадрата, то есть, инвариантно относительно замен $(u_1 \leftrightarrow u_2, u_3 \leftrightarrow u_4)$ and $(u_1 \leftrightarrow u_3, \alpha \leftrightarrow \beta)$.

Таким образом, уравнения на всех гранях могут отличаться лишь значениями α и β . Рассмотрим уравнения на трёх гранях, сходящихся в одной вершине, для определённости, u :

$$\begin{aligned} Q(u, u_1, u_2, u_{12}, \alpha, \tilde{\beta}) &= 0, & Q(u, u_2, u_3, u_{23}, \beta, \tilde{\gamma}) &= 0, \\ Q(u, u_3, u_1, u_{13}, \gamma, \tilde{\alpha}) &= 0. \end{aligned}$$

Пусть

$$\delta_{u_2, u_{12}} Q(u, u_1, u_2, u_{12}, \alpha, \tilde{\beta}) = \kappa(\alpha, \tilde{\beta}) h(u, u_1, \alpha).$$

Тогда, в силу симметрии,

$$\delta_{u_1, u_{12}} Q(u, u_1, u_2, u_{12}, \alpha, \tilde{\beta}) = \kappa(\tilde{\beta}, \alpha) h(u, u_2, \tilde{\beta})$$

и, согласно Теореме 2.15, параметры должны быть связаны следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{h(u, u_1, \alpha)}{h(u, u_1, \tilde{\alpha})} &= m(\alpha, \tilde{\alpha}), & \frac{h(u, u_2, \beta)}{h(u, u_2, \tilde{\beta})} &= m(\beta, \tilde{\beta}), & \frac{h(u, u_3, \gamma)}{h(u, u_3, \tilde{\gamma})} &= m(\gamma, \tilde{\gamma}), \\ \frac{\kappa(\alpha, \tilde{\beta})\kappa(\beta, \tilde{\gamma})\kappa(\gamma, \tilde{\alpha})}{\kappa(\tilde{\beta}, \alpha)\kappa(\tilde{\gamma}, \beta)\kappa(\tilde{\alpha}, \gamma)} m(\alpha, \tilde{\alpha})m(\beta, \tilde{\beta})m(\gamma, \tilde{\gamma}) &= -1. \end{aligned}$$

В случае (2.66), прямое вычисление показывает, что $\kappa(\alpha, \beta) = 2 \operatorname{sn}(\alpha) \operatorname{sn}(\beta) \operatorname{sn}(\alpha + \beta)$ и

$$h(u, v, \alpha) = \frac{1}{2 \operatorname{sn}(\alpha)} (k^2 \operatorname{sn}^2(\alpha) u^2 v^2 + 2 \operatorname{sn}'(\alpha) uv - u^2 - v^2 + \operatorname{sn}^2(\alpha)),$$

следовательно $\tilde{\alpha}$ может принимать значения $\pm\alpha$ и аналогично для β, γ . Очевидно, с точностью до перенумерации, возможны два случая:

$$\tilde{\alpha} = -\alpha, \quad \tilde{\beta} = -\beta, \quad \tilde{\gamma} = -\gamma \quad \text{или} \quad \tilde{\alpha} = \alpha, \quad \tilde{\beta} = \beta, \quad \tilde{\gamma} = -\gamma.$$

Более того, это фактически один и тот же случай так как мы можем сделать замену $(\alpha, \tilde{\beta}) \rightarrow (-\alpha, -\tilde{\beta})$ не меняющую уравнение $Q(u, u_1, u_2, u_{12}, \alpha, \tilde{\beta}) = 0$, как легко видно из (2.66). Нетрудно проверить, что расстановка знаков на всём кубе всегда приводится к той, что указана в системе (Q₄).

Для случая (2.67) имеем

$$\kappa(\alpha, \beta) = -\frac{(1 - \alpha^2\beta^2)(1 - \alpha^2)(1 - \beta^2)}{\alpha^2\beta^2},$$

$$h(u, v, \alpha) = \frac{\alpha}{1 - \alpha^2}(u^2 + v^2) - \frac{1 + \alpha^2}{1 - \alpha^2}uv + \frac{(1 - \alpha^2)\delta}{4\alpha}$$

и $\tilde{\alpha} = \alpha$ или $\tilde{\alpha} = 1/\alpha$. Учитывая инвариантность уравнения (2.67) относительно одновременной инверсии α, β , можно положить, не теряя общности,

$$\tilde{\alpha} = 1/\alpha, \quad \tilde{\beta} = 1/\beta, \quad \tilde{\gamma} = 1/\gamma$$

что приводит к системе (Q₃^δ). В случаях (2.68), (2.69) имеем соответственно

$$\kappa(\alpha, \beta) = -4\alpha\beta(\alpha + \beta), \quad h(u, v, \alpha) = \frac{1}{4\alpha}(u - v)^2 - \frac{\alpha}{2}(u + v) + \frac{\alpha^3}{4},$$

$$\kappa(\alpha, \beta) = -2\alpha\beta(\alpha + \beta), \quad h(u, v, \alpha) = \frac{1}{2\alpha}(u - v)^2 - \frac{\alpha\delta}{2}$$

и можно положить $\tilde{\alpha} = -\alpha, \tilde{\beta} = -\beta, \tilde{\gamma} = -\gamma$ в точности как и выше. Это даёт системы (Q₂), (Q₁^δ). \square

2.6 Примеры асимметричных систем

При доказательстве теорем 2.24 и 2.25 была описана некоторая процедура восстановления системы квад-уравнений по биквадратичным многочленам. Можно попробовать построить примеры вырожденных систем, применяя её к вырожденным многочленам из списка 2.4. Оказывается, что она срабатывает, хотя теперь для этого нет теоретических оснований. При этом получаются системы, для которых свойства, указанные в теореме 2.15 выполняются, несмотря на вырождение биквадратик.

Прежде всего, можно проверить, что стартуя с многочленов (2.55), (2.56) при $\lambda\mu = 0$, (2.58) при $\lambda = 0$, и (2.59) при $\kappa\nu - \lambda\mu = 0$, исключенных из рассмотрения в предыдущем разделе, мы получим все системы типа H, A из списка 2.1.

Далее, рассмотрим асимметричные случаи (2.60), (2.61), (2.62) с разными многочленами в вершинах. Согласно теореме 2.21, допустимы только следующие варианты, с точностью до перестановок (ясно, что когда рассматривается одно уравнение, диагонали и стороны равноправны):

$$\begin{aligned} (u_1^2 - 1, u_2^2, u_3^2, u_4^2), & \quad (u_1^2 - 1, u_2^2 - 1, u_3^2, u_4^2), & \quad (u_1^2 - 1, u_2^2 - 1, u_3^2 - 1, u_4^2), \\ (u_1, 1, 1, 1), & \quad (u_1, u_2, 1, 1), & \quad (u_1, u_2, u_3, 1), \\ (1, 0, 0, 0), & \quad (1, 1, 0, 0), & \quad (1, 1, 1, 0). \end{aligned}$$

Прямая проверка показывает, что на самом деле до аффинно-линейного многочлена поднимаются только варианты с двумя парами. Размещая их по диагонально противоположным вершинам квадрата, получим следующие уравнения:

$$\alpha_1(uu_1 + u_2u_{12}) - \alpha_2(uu_2 + u_1u_{12}) + (\alpha_1^2 - \alpha_2^2)\left(\delta + \frac{\varepsilon u_1 u_2}{\alpha_1 \alpha_2}\right) = 0, \quad (H_3^{\delta, \varepsilon})$$

$$\begin{aligned} (u - u_{12})(u_1 - u_2) + (\alpha_2 - \alpha_1)(u + u_1 + u_2 + u_{12}) + \alpha_2^2 - \alpha_1^2 \\ + \varepsilon(\alpha_2 - \alpha_1)(2u_1 + \alpha_1 + \alpha_2)(2u_2 + \alpha_1 + \alpha_2) + \varepsilon(\alpha_1 - \alpha_1)^3 = 0, \quad (H_2^\varepsilon) \end{aligned}$$

$$(u - u_{12})(u_1 - u_2) + (\alpha_2 - \alpha_1)(1 + \varepsilon u_1 u_2) = 0. \quad (H_1^\varepsilon)$$

Каждое из них обладает симметрией ромба

$$Q(u, u_1, u_2, u_{12}, \alpha_1, \alpha_2) = -Q(u_{12}, u_1, u_2, u, \alpha_2, \alpha_1) = -Q(u, u_2, u_1, u_{12}, \alpha_2, \alpha_1).$$

Эти примеры можно рассматривать как ε -деформацию соответствующих уравнений типа H из списка 2.1. Отметим, что в (H_1^ε) многочлен $1 + \varepsilon u_1 u_2$ можно заменить на многочлен $\kappa u_1 u_2 + \mu(u_1 + u_2) + \nu$ с произвольными коэффициентами. Соответствующие биквадратичные многочлены и их дискриминанты приведены в следующей таблице (с точностью до нормировки $Q \rightarrow \mu(\alpha_1, \alpha_2)Q$):

	$h(u, u_1; \alpha_1)$	$r(u)$	$\tilde{r}(u_1)$
$(H_3^{\delta, \varepsilon})$	$uu_1 + \varepsilon u_1^2 / \alpha_1 + \delta \alpha_1$	$u^2 - 4\delta\varepsilon$	u_1^2
(H_2^ε)	$u + u_1 + \alpha_1 + 2\varepsilon(u_1 + \alpha_1)^2$	$1 - 8\varepsilon u$	1
(H_1^ε)	$1 + \varepsilon u_1^2$	-4ε	0

Для выполнения свойства 3D-совместности уравнения на решётке должны чередоваться в шахматном порядке со своей симметричной копией, так чтобы совпадали многочлены h , приходящие на ребро с соседних квадратов. Точнее, вид уравнения на грани u, u_i, u_j, u_{ij} определяется чётностью базовой вершины $u = u(l, m, n)$:

$$Q(u, u_i, u_j, u_{ij}, \alpha_i, \alpha_j) = 0, \quad l + m + n = 0 \pmod{2},$$

$$Q(u_i, u, u_{ij}, u_j, \alpha_i, \alpha_j) = 0, \quad l + m + n = 1 \pmod{2}.$$

Отметим, что при этом уравнения на противоположных гранях куба разные. Можно проверить, что при таком размещении уравнений система на 3-мерной решётке будет совместной и удовлетворять свойству тетраэдральности.

В качестве последнего примера рассмотрим систему, в которой вершинам отвечает многочлен $r(u) = 1$ на одной грани куба, и $r(u) = 0$ на противоположной. На этой паре граней зададим, соответственно, уравнения

$$Q_1(u, u_1, u_2, u_{12}; \alpha_1, \alpha_2; 1) = 0, \quad Q_1(u_3, u_{13}, u_{23}, u_{123}; \alpha_1, \alpha_2; 0) = 0,$$

с многочленом отвечающим уравнению (Q_1^δ):

$$Q_1(u, v, w, z; \alpha, \beta; \delta) = \alpha(u - w)(v - z) - \beta(u - v)(w - z) + \delta\alpha\beta(\alpha - \beta).$$

Остальным граням припишем уравнения

$$Q(u, u_i, u_3, u_{i,3}, \alpha_i, \varepsilon) = 0, \quad Q(u_j, u_{ij}, u_{j,3}, u_{123}, \alpha_i, \varepsilon) = 0, \quad \{i, j\} = \{1, 2\},$$

где многочлен

$$Q(u, v, w, z, \alpha, \varepsilon) = (u - v)(z - w) + \alpha(\varepsilon^{-1} - \varepsilon wz)$$

фактически тот же, что и в (H_1^ε), с точностью до растяжения и перестановки v и z . Эта система оказывается 3D-совместной и обладает свойством тетраэдральности. Очевидно, её можно продолжить на решётку \mathbb{Z}^3 , в которой чередуются плоскости с уравнением (Q_1^δ) при $\delta = 1$ и $\delta = 0$.

Комментарии к главе 2

Глава основана на работах Адлера, Бобенко и Суриса [15, 17].

▷ Список 2.1 3D-совместных квад-уравнений получен в [15]. В этой работе рассматривались уравнения, удовлетворяющие свойствам 1)–4) из раздела 2.1. В работе [17] рассматривались уравнения, удовлетворяющие свойству 1) и условию невырожденности биквадратик.

▷ В наиболее общей постановке задача классификации остаётся открытой. Пример 2.17 без свойства тетраэдральности был найден Хиетаринтой [82], позднее было показано, что он линейаризуется [146]. Геометрическая интерпретация этого уравнения имеется в [12].

▷ Интегрируемость общего симметричного уравнения (2.8) отмечалась в работе Виалле [186]. Использование этой общей калибровки вполне оправдано, особенно в вопросах, не связанных со свойством 3D-совместности, то есть, пока уравнение рассматривается само по себе, а не как член совместной тройки. Расширения списка 2.1 при этом, однако, не происходит, как указано в замечании 2.2.

▷ Линейное уравнение (2.11) с минусами, $u - u_i - u_j + u_{ij} = 0$, играет гораздо большую роль в нашем изложении, чем это может показаться. Действительно,

построение всех рисунков с кубами использует решения именно этого скромного уравнения. Отметим также, что 3D-совместность для линейных уравнений с *переменными* коэффициентами играет роль представления нулевой кривизны для трёхмерных дискретных уравнений типа Δ ВКР.

▷ Многие уравнения из списка 2.1 уже были известны как формулы нелинейной суперпозиции преобразований Бэклунда для уравнений типа КдФ и \sin -Гордон. Вероятно, наиболее старыми являются (H_1) и (H_3^0) , которые можно найти в работах Хироты [85, 87]. Уравнения (Q_1^{δ}) и (Q_3^0) восходят к работе Куиспела, Найхофа, Капела и ван дер Линдена [143], см. также обзор Найхофа и Капела [132]. Уравнения (Q_2) и (Q_3^1) , являющиеся частными случаями (Q_4) , а также (H_2) и (H_3^1) в явном виде появились, по-видимому, только в [15]. Эквивалентные им отображения типа (1.19) приведены в кандидатской диссертации автора.

▷ Основное уравнение (Q_4) и отвечающее ему преобразование Бэклунда (2.38) для уравнения Кричевера-Новикова (2.39) впервые были выведены Адлером [7]. В этой работе использовалась калибровка, отвечающая многочлену $r(u)$ в форме Вейерштрасса. Представленная в Теореме 2.3 существенно более компактная версия (Q_4) , отвечающая якобиевой канонической форме $r(u)$, была предложена Хиетаринтой [83]. Представление Лакса для (Q_4) найдено Найхофом [131] методом, основанным на трёхмерной совместности.

▷ Само уравнение (2.39), с многочленом $r(u)$ без кратных корней, возникло (с точностью до замены $u = p(\tilde{u})$, $\dot{p}^2 = r(p)$) в работе Кричевера и Новикова [101], в связи с изучением конечнозонных решений уравнения Кадомцева-Петвиашвили. Утверждение о том, что не существует дифференциальных подстановок, связывающих его с другими уравнениями типа КдФ, приведено в работе Свинолупова, Соколова и Ямилова [171].

▷ Связь биквадратичного многочлена (2.22) с формулой сложения для \wp -функции отмечена, напр. в учебнике Гурвица и Куранта [89].

▷ Биквадратичные многочлены возникают не только в теории квад-уравнений, но и во многих других разделах теории интегрируемых систем. С ними связаны также уравнения типа Ландау-Лифшица и их дискретизации, рассматриваемые далее в главах 6, 5, 7. Впрочем, это неудивительно, если принять во внимание связь этих уравнений с трёхногой формой квад-уравнений. Вне рамок рассматриваемых в диссертации вопросов отметим роль биквадратичных многочленов для отображений QRT (Куиспела-Робертса-Томпсона) и моделей статистической механики.

▷ Задача восстановления биквадратичного многочлена по паре дискриминантов впервые была решена при классификации цепочек типа Тоды, в работе Адлера и Шабата [20] (по сравнению с теоремой 2.21, в несколько более специальной постановке).

▷ Понятие трёхногой формы уравнения появилось в работе Бобенко и Суриса [43]. Там же были указаны трёхногие формы для уравнений (Q_1^{δ}) , (Q_3^0) ,

(H_1) , (H_3^0) , остальные появились в [15]. Дискретные уравнения Тоды, связанные с трёхногой формой, рассматриваются в главах 5, 7.

▷ Непрерывные пределы типа рассмотренного в конце раздела 2.4 изучались, для простейших примеров, в работах Леви, Бруски и Рагниско.

▷ В настоящее время известны только следующие 3D-совместные аналоги квад-уравнений с некоммутативными (например, матричными) переменными u (параметры считаются коммутативными):

$$\begin{aligned} (Q_1^{\delta^2}) : & \quad \alpha_1(u - u_2 - \delta\alpha_2)(u_2 - u_{12} + \delta\alpha_1)^{-1} \\ & \quad = \alpha_2(u - u_1 - \delta\alpha_1)(u_1 - u_{12} + \delta\alpha_2)^{-1}, \\ (Q_3^0) : & \quad (1 - \alpha_1^2)(u_1 - \alpha_2 u_{12})(\alpha_1 u - u_1)^{-1} \\ & \quad = (1 - \alpha_2^2)(u_2 - \alpha_1 u_{12})(\alpha_2 u - u_2)^{-1}. \end{aligned}$$

Для этих уравнений имеются трёхногие формы, представления нулевой кривизны и некоммутативные аналоги преобразования Бэклунда (2.38) и уравнения (2.39). Из этих примеров видно, что в некоммутативном случае требование, чтобы уравнение рационально разрешалось относительно любой переменной, не эквивалентно аффинной линейности. Аналог уравнения (Q_1^0) появился в статье Бобенко и Суриса [44], два других случая найдены Соколовым и Адлером.

▷ Квантовые системы со свойством совместности представлены в работах Бажанова, Сергеева и Мангазеева [38, 37].

Глава 3

Уравнения на квад-графах

Квад-уравнения, изучавшиеся в предыдущей главе с локальной точки зрения, можно задавать не только на квадратной решётке, но и на более общих графах. В данной главе обсуждаются некоторые глобальные свойства таких систем. Преобразования Бэклунда и представления нулевой кривизны вводятся при помощи свойства 3D-совместности. Это свойство позволяет также решить проблему выбора начальных данных, являющуюся нетривиальной по сравнению со случаем квадратной решётки.

3.1 Основные понятия

Напомним, что граф G называется вложенным в двумерную поверхность, если все его рёбра $E(G)$ лежат на ней и пересекаются только в вершинах $V(G)$. При этом возникает разбиение поверхности на области $F(G)$, ограниченные рёбрами, которые называются гранями, или ячейками. Допускаются также рёбра, не принадлежащие границе какой-либо грани. Валентностью грани называется число рёбер, образующих её границу; аналогично, валентностью вершины называется число рёбер, выходящих из неё. Граф называется *квад-графом*, если все его грани имеют валентность 4, то есть являются (криволинейным) четырёхугольником. Мы ограничимся рассмотрением плоских конечных односвязных квад-графов.

Целью этой главы является получение критерия корректности задачи Коши для интегрируемых (то есть, 3D-совместных) уравнений, заданных на таких квад-графах.

Относительно уравнений предполагается, что они удовлетворяют условиям 1) и 3) из раздела 2.1, то есть имеют вид

$$Q(u, u_1, u_2, u_{12}; \alpha_1, \alpha_2) = 0 \quad (3.1)$$

с аффинно-линейным многочленом Q , обладающей группой D_4 симметрий

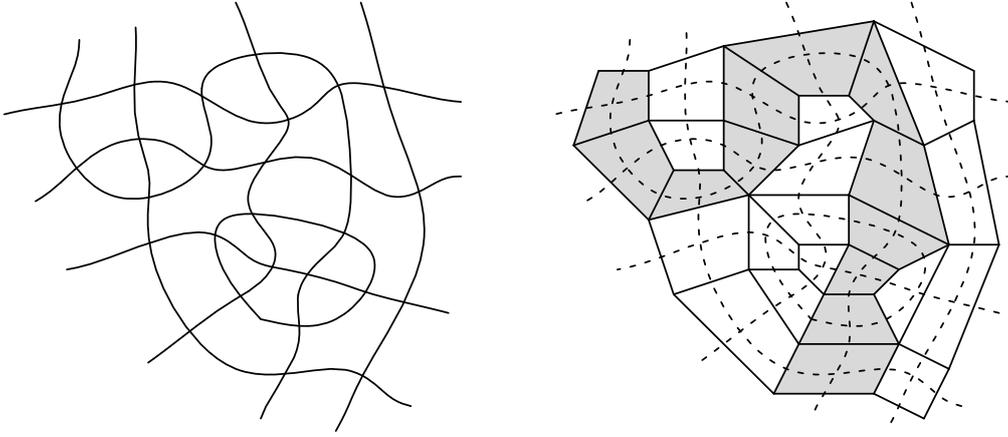


Рис. 3.1. Полосы квад-графа

квадрата:

$$\begin{aligned} Q(u, u_1, u_2, u_{12}; \alpha_1, \alpha_2) &= \varepsilon Q(u, u_2, u_1, u_{12}; \alpha_2, \alpha_1) \\ &= \sigma Q(u_1, u, u_{12}, u_2; \alpha_1, \alpha_2), \quad \varepsilon^2 = \sigma^2 = 1. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Напомним, что список 2.1 состоит именно из таких уравнений. Свойство симметрии снимает вопрос о том, как сопоставлять переменные в уравнении (3.1) с переменными в вершинах квад-графа. Действительно, в силу этого свойства уравнение на каждой грани однозначно определяется значениями параметров α_i , если считать, что эти параметры ассоциированы с рёбрами и параметры на противоположных рёбрах грани совпадают. Отображение $\alpha : E(\Gamma) \rightarrow \mathbb{C}$ удовлетворяющее этому правилу называется *разметкой* квад-графа.

В дальнейшем исключительно важную роль играет понятие *полосы*, то есть последовательности граней, смежных по противоположным рёбрам. В некоторых отношениях полосы играют роль характеристик гиперболического уравнения второго порядка. В случае обычной квадратной решётки имеется два семейства прямолинейных полос, параллельных координатным осям. В общем случае полосы могут изгибаться и пересекаться сколь угодно сложным образом (на рисунках в этой главе некоторые полосы выделены штриховкой или продольной пунктирной линией). Действительно, квад-граф с предписанными полосами можно получить, как дуальный граф клеточного разбиения плоскости кривыми, пересекающимися попарно и трансверсально (см. рис. 3.1). Множество полос квад-графа будем обозначать $S(\Gamma)$. При заданной разметке всем поперечным рёбрам полосы отвечает один и тот же параметр, то есть, фактически, параметр отвечает целой полосе. Иначе говоря, разметку квад-графа можно определить, как отображение $\alpha : S(\Gamma) \rightarrow \mathbb{C}$.

Уточним теперь понятие решения уравнения на квад-графе. Напомним, что в разделе 2.5.1 мы рассматривали сингулярные решения уравнения (3.1), то есть такие специальные решения, для которых нарушается свойство разрешимости уравнения относительно какой-то из переменных (скажем, перемен-

ная u может быть произвольна, за счёт того, что три остальные подчинены определённой связи). Таких решений следует избегать, поскольку они портят единственность задачи Коши. В простейшем случае квадратной решётки сингулярные решения возникают случайно за счёт неудачного выбора начальных данных, чего можно избежать их малой деформацией. Однако, в следующем разделе мы приведём примеры, показывающие, что для более сложных квад-графов сингулярность может возникать и для общих начальных данных. Проконтролировать такие решения, или сформулировать условия на квад-граф, при которых их нет, довольно сложно. Мы снимем эту трудность наиболее радикальным способом, просто заложив отсутствие сингулярности в само определение решения.

Определение 3.1. Отображение $u : \Gamma \rightarrow \mathbb{CP}^1$ называется неособым решением уравнения (3.1) на размеченном квад-графе Γ , если для каждой грани $(i, j, l, k) \in F(\Gamma)$ выполняются равенство $Q(u_i, u_j, u_k, u_l; \alpha_{ij}, \alpha_{ik}) = 0$ и неравенства $\partial Q / \partial u_s \neq 0$, $s = i, j, k, l$.

Для неособого решения, любая переменная на каждой грани квад-графа однозначно определяется значениями трёх остальных переменных.

Требование неособости решения приводит к некоторым дополнительным ограничениям на разметку квад-графа и даже на сам квад-граф. Рассматривая уравнения из списка 2.1, нетрудно установить, что при некоторых специальных значениях параметров они становятся приводимыми. Прежде всего, при $\alpha_j = \alpha_i$ все уравнения, без исключения, сводятся к

$$(u - u_{12})(u_1 - u_2) = 0.$$

Все решения этого уравнения особые, следовательно для существования неособого решения на квад-графе нужно требовать, чтобы параметры на смежных рёбрах каждой грани были различны. Это равносильно запрету пересечения полос, несущих один параметр, и, в частности, самопересечений. Заметим, что это условие можно выполнить, уничтожая преступные грани, как показано на рис. 3.2. Два варианта отождествления противоположных вершин отвечают, очевидно, выбору между двумя решениям $u = u_{12}$ и $u_1 = u_2$ (подчёркнём, этот выбор делается заранее, а не в процессе построения решения).

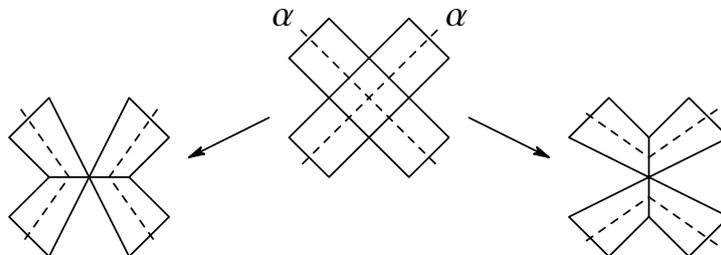


Рис. 3.2. Исключение пересечения полос с одинаковым параметром

Имеются и другие специальные значения, например, для уравнения (Q_3^δ) имеем следующие приводимые случаи:

$$\begin{aligned} (u_i \mp u_j)(u \mp u_{i,j}) &= 0 && \text{при } \alpha_j = \pm\alpha_i, \\ (u \mp u_j)(u_i \mp u_{i,j}) &= 0 && \text{при } \alpha_j = \pm 1, \\ uu_i u_j u_{i,j} &= 0 && \text{при } \alpha_j = 0, \delta \neq 0, \text{ после инверсии } u \rightarrow 1/u. \end{aligned}$$

Такие вырождения нетрудно указать для всех уравнений из списка. Мы не будем этого делать, поскольку дальнейшие рассмотрения проводятся в общем виде, без учёта специфики конкретных уравнений. Для краткости, будем говорить, что разметка квад-графа *неособая*, если уравнение на каждой грани неприводимо.

Следующая теорема, определяющая преобразование Бэклунда для квад-уравнения, является прямым следствием свойства 3D-совместности.

Теорема 3.2. Пусть переменные u_i , $i \in V(\Gamma)$ задают неособое решение 3D-совместного уравнения (3.1) на размеченном квад-графе Γ с параметрами α_{ij} , $(i, j) \in E(\Gamma)$. Выберем произвольно вершину i_0 , произвольный дополнительный параметр α , и значение \bar{u}_{i_0} в общем положении. Тогда формулы

$$Q(u_i, u_j, \bar{u}_i, \bar{u}_j; \alpha_{ij}, \alpha) = 0, \quad (i, j) \in E(\Gamma) \quad (3.3)$$

однозначно определяют новое неособое решение \bar{u}_i уравнения (3.1).

Доказательство. Рассмотрим какой-нибудь путь из i_0 в заданную вершину i_n . Вдоль него имеем последовательность уравнений вида

$$Q(u_{i_m}, u_{i_{m+1}}, \bar{u}_{i_m}, \bar{u}_{i_{m+1}}; \alpha_{i_m, i_{m+1}}, \alpha) = 0, \quad m = 0, \dots, n-1.$$

Решения этих уравнений могут быть сингулярными (например, если $\alpha = \alpha_{i_m, i_{m+1}}$), но можно показать, что при \bar{u}_{i_0} общего положения сингулярность может возникнуть только относительно переменных u_{i_k} , и переменные $\bar{u}_{i_1}, \dots, \bar{u}_{i_n}$

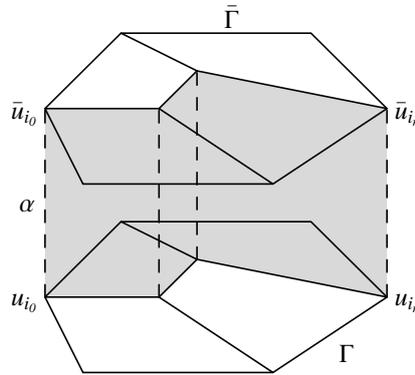


Рис. 3.3. Преобразование Бэклунда

находятся рекуррентно и однозначно. Свойство 3D-совместности гарантирует, что различные пути приводят к одному и тому же результату, и что построенные переменные \bar{u}_i также удовлетворяют уравнению (3.1). \square

Напомним (см. раздел 1.3), что преобразование Бэклунда тесно связано с представлением нулевой кривизны. Положим $\alpha = \lambda$ и перепишем формулу (3.3) в виде

$$\bar{u}_j = L_{ji}(\bar{u}_i), \quad (i, j) \in E(\Gamma),$$

где, в силу сделанных предположений, L_{ji} дробно-линейная функция с коэффициентами зависящими от u_i, u_j, α_{ij} и λ . Переходя к матрице дробно-линейного преобразования, получим набор матриц $W_{ji} = W(u_j, u_i; \alpha_{ij}, \lambda)$, ассоциированных с направленными рёбрами $\overrightarrow{(i, j)}$ и определяющих преобразования волновых функций, ассоциированных с вершинами, по формуле $\Psi_j = W_{ji}\Psi_i$, причём $W_{ij} = c(\alpha_{ij}, \lambda)W_{ji}^{-1}$. На односвязном квад-графе, произведение этих матриц вдоль двух путей с общим началом и концом может отличаться только скалярным множителем.

В локальной формулировке, представление нулевой кривизны определяется, как матричное соотношение

$$W(u_{12}, u_2; \alpha_1, \lambda)W(u_2, u; \alpha_2, \lambda) = W(u_{12}, u_1; \alpha_2, \lambda)W(u_1, u; \alpha_1, \lambda), \quad (3.4)$$

эквивалентное уравнению (3.1) тождественно по спектральному параметру λ . Это определение относится к одному элементарному четырёхугольнику, следовательно, оно годится не только для квадратной решётки, но и для произвольного квад-графа. Глобальное утверждение о независимости произведения матриц W от пути является следствием тождества (3.4).

Замечание 3.3. Сделаем пояснения относительно линейного уравнения $u \pm u_1 \pm u_2 + u_{12} = 0$. Это уравнение 3D-совместно и не имеет сингулярных решений, поэтому все дальнейшие рассуждения применимы и к нему. Понятие разметки здесь, очевидно, является излишним. В частности, самопересекающиеся полосы допустимы, но, чтобы не рассматривать этот случай отдельно, мы по прежнему будем их исключать. Преобразование Бэклунда корректно определено, но соответствующая матрица (3.4)

$$W_{j,i} = \begin{pmatrix} 1 & u_j - u_i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

не содержит спектрального параметра и поэтому не представляет интереса.

3.2 Задача Коши

Простейший пример задачи Коши доставляет квадратная решётка с начальными данными на “лесенке”, или один квадрант с начальными данными типа

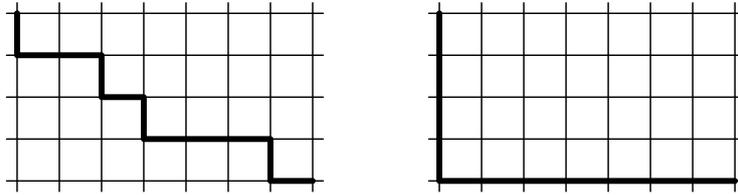


Рис. 3.4. Возможный выбор начальных данных на квадратной решётке

Гурса на полуосях (см. рис. 3.4; здесь и далее подграф с начальными данными помечен жирной линией). Нетрудно видеть, что в этом примере решение в каждой вершине можно найти за конечное число шагов, состоящих в разрешении одного квад-уравнения относительно одной переменной при трёх остальных уже известных. В таких случаях будем говорить, что имеется *явная* схема вычислений. Если (как в данном примере) после вычисления всех переменных все уравнения на квад-графе исчерпаны, то явная схема даёт доказательство существования и единственности решения. Однако, может случиться ситуация, когда переменные кончаются быстрее, чем уравнения, и в таких случаях требуется дополнительный анализ (см., в частности, пример 3.9 ниже). Кроме того, явная схема существует далеко не всегда.

Таким образом, для систем на квад-графах возникает вопрос об описании корректных постановок задачи Коши. Мы обратимся к чисто комбинаторной стороне этого вопроса, ограничиваясь случаем конечных графов (в частности, это позволяет пренебречь исследованием устойчивости решений). Примем следующее определение корректности задачи Коши.

Определение 3.4. Задача Коши для уравнения (3.1) на плоском конечном односвязном квад-графе Γ с неособой разметкой и с начальными данными на связном подграфе P называется корректно поставленной, если для начальных данных общего положения неособое решение существует и единственно.

Для простоты, в последующих рассуждениях мы ограничимся случаем, когда в качестве P выбирается *простой путь*, то есть связная последовательность рёбер графа без самопересечений.

Подчёркнём, что существование и число особых решений не учитывается. Например, задача считается некорректной, даже если решение существует и единственно, но является особым для общих начальных данных. Наоборот, если помимо единственного неособого решения имеется ещё несколько особых, то задача считается корректной.

Прежде чем формулировать критерий корректности задачи Коши, рассмотрим несколько примеров. Имеются следующие логические возможности: задача Коши может быть корректно поставленной, или она может быть переопределённой (не иметь неособых решений для произвольных начальных данных) или недоопределённой (иметь более одного неособого решения); в

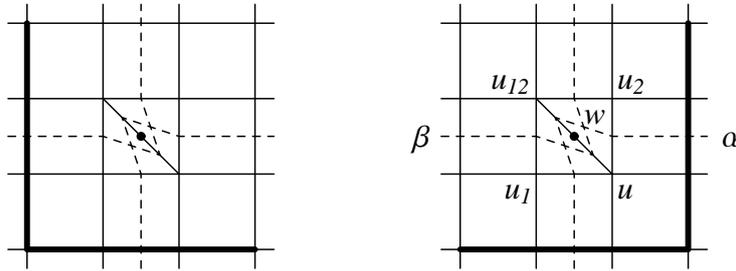


Рис. 3.5. Корректная и переопределённая задачи Коши

каждом случае вычислительная схема может быть явной или неявной. Все эти возможности легко обнаружить уже на очень простых квад-графах.

Пример 3.5. Нетрудно видеть, что задача Коши изображённая на рис. 3.5 слева корректна: для начальных данных общего положения все переменные однозначно определяются по явной схеме. Другой выбор начальных данных для того же графа, показанный на правом рисунке, приводит к неявной схеме и некорректной задаче Коши. Значения u , u_1 , u_2 находятся однозначно, а для переменных w , u_{12} имеем систему из двух уравнений (с учётом симметрии (3.2)):

$$Q(u, u_1, w, u_{12}; \alpha, \beta) = 0, \quad Q(u, u_2, w, u_{12}; \alpha, \beta) = 0.$$

Вообще говоря, эта система имеет решения, но они особые. Действительно, для неособого решения можно выразить u_1 и u_2 через u , w , u_{12} , но это приводит к равенству $u_1 = u_2$, что является связью на начальные данные. Таким образом, в общем случае $u_1 \neq u_2$ неособого решения нет (более того, даже если начальные данные выбраны так, что $u_1 = u_2$, то решение неединственно, поскольку на w и u_{12} остаётся лишь одно уравнение). Как устроено особое решение, легко понять на конкретном примере уравнения двойного отношения (Q_1^0)

$$Q(u, u_i, u_j, u_{ij}; \alpha_i, \alpha_j) = \alpha_i(u - u_j)(u_i - u_{ij}) - \alpha_j(u - u_i)(u_j - u_{ij}) = 0,$$

для которого сингулярные решения характеризуются совпадением значений, по крайней мере, трёх из четырёх переменных. Действительно, для этого уравнения решение выписанной системы при $u_1 \neq u_2$ имеет вид $w = u_{12} = u$.

Пример 3.6. Обе задачи Коши на рис. 3.6 корректны. Для левого рисунка это очевидно, поскольку имеется явная схема вычислений, для правого мы приходим к следующей системе относительно переменных v , w , u_{12} :

$$Q(u, u_1, v, u_{12}; \alpha, \beta) = 0, \quad Q(u, w, v, u_{12}; \alpha, \beta) = 0, \quad Q(u, w, u_2, u_{12}; \alpha, \beta) = 0.$$

В предположении неособости решения, находим $v = u_2$, $w = u_1$, после чего u_{12} находится из уравнения $Q(u, u_1, u_2, u_{12}; \alpha, \beta) = 0$. Отметим, что кроме

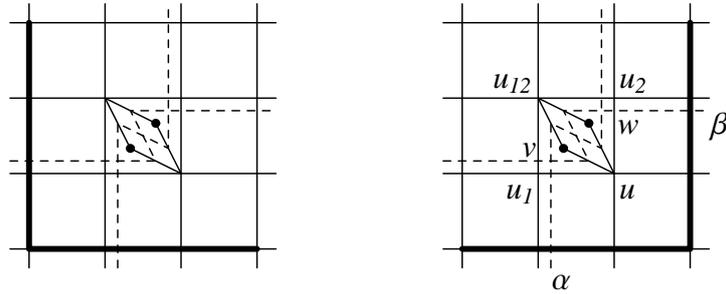


Рис. 3.6. Корректные задачи Коши с явной и неявной схемой

этого решения могут быть и дополнительные особые решения, например, в случае уравнения (Q_1^0) находим ещё решение $v = w = u_{12} = u$, независимо от значений u_1, u_2 ; такие решения отбрасываются.

Обратим внимание, что в данном примере порча квадратной решётки не влияет на динамику, поскольку u_{12} находится из того же самого уравнения, что и на решётке без вершин v, w . В таких случаях можно говорить о *прозрачных дефектах* на решётке.

Пример 3.7. На рис. 3.7 показаны три варианта постановки задачи Коши для одного и того же квад-графа. Во всех случаях вычисления проводятся по явной схеме. Рассмотрим квадрат в левом нижнем углу, ограниченный отмеченной полосой. В случае а) решение внутри этого квадрата успешно находится, но уравнения на самой полосе несовместны, так как одно начальное данное лишнее; наоборот, в случае б) для определения значений внутри квадрата одного данного не хватает; в случае в) задачи Коши корректна.

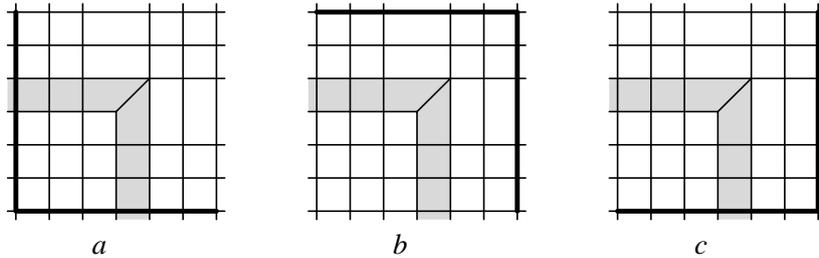


Рис. 3.7. Переопределённая, недоопределённая и корректная задачи Коши

Рассмотрение этих и других примеров, а также аналогия с непрерывным случаем (характеристики, пересекающие кривую с начальными данными) приводят к следующей гипотезе:

задача Коши с начальными данными на простом пути P корректна если и только если P содержит в точности по одному поперечному ребру из каждой полосы в Γ .

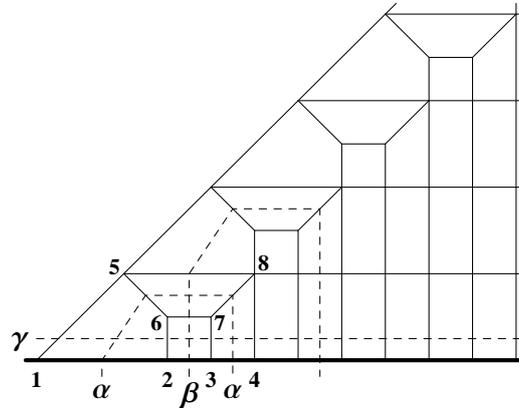


Рис. 3.8. Эта задача Коши корректна для общих квад-уравнений и некорректна для 3D-совместных

Следующие два примера показывают, что справедливость этого утверждения может зависеть от интегрируемости уравнения. Отметим, что при анализе предыдущих примеров использовались только свойства симметрии квад-уравнения, но не свойство 3D-совместности.

Пример 3.8. На квад-графе, изображённом на рис. 3.8, вертикальные полосы разворачиваются и пересекают начальные данные дважды, тогда как горизонтальные полосы их вовсе не пересекают. Решение можно строить по следующей неявной схеме:

1) неявный шаг: при заданных u_1, u_2, u_3, u_4 неизвестные u_5, u_6, u_7, u_8 находятся из системы

$$\begin{aligned} Q(u_1, u_2, u_5, u_6; \alpha, \gamma) &= 0, & Q(u_2, u_3, u_6, u_7; \beta, \gamma) &= 0, \\ Q(u_3, u_4, u_7, u_8; \alpha, \gamma) &= 0, & Q(u_6, u_7, u_5, u_8; \beta, \alpha) &= 0; \end{aligned} \quad (3.5)$$

- 2) далее, остальные переменные на нижней полосе вычисляются явно;
- 3) процедура повторяется для следующей полосы.

Естественно, возникает вопрос о разрешимости выписанной системы. В случае произвольного аффинно-линейного уравнения (3.1) с симметриями (3.2) не видно причин, почему бы эта система была вырождена. Ясно, что переменные u_6, u_7, u_8 можно рациональным образом выразить через остальные из трёх первых уравнений, и тогда оставшееся превратится в уравнение четвёртой степени относительно u_5 . Таким образом, для уравнения общего вида можно считать эту задачу Коши корректной, с той оговоркой, что решение её не единственно, а содержит произвол в выборе корня на каждом шаге неявной схемы.

Ситуация меняется для 3D-совместного уравнения. Используем опять, в качестве примера, уравнение (Q_1^0). Оказывается, что при общих начальных данных u_1, u_2, u_3, u_4 система (3.5) действительно имеет два решения кратности

два, но оба они особые. Одно из них имеет вид

$$u_5 = u_6 = u_7 = u_2, \quad u_8 = \frac{\gamma u_2(u_3 - u_4) + \alpha u_4(u_2 - u_3)}{\gamma(u_3 - u_4) + \alpha(u_2 - u_3)},$$

второе получается при очевидной симметрии системы относительно полосы β .

Причину вырождения легко понять. отождествим грани, отвечающие системе (3.5), с четырьмя гранями куба. Допустим, что эта система имеет неособое решение, тогда все переменные можно выразить, например, через u_6 , u_2 , u_5 и u_7 , причём в силу свойства 3D-совместности будут выполняться аналогичные уравнения на двух оставшихся гранях, то есть $Q(u_1, u_2, u_4, u_3; \alpha, \beta) = 0$ и $Q(u_1, u_4, u_5, u_8; \beta, \gamma) = 0$. Но первое из этих уравнений является связью на начальные данные задачи Коши, следовательно, для начальных данных общего положения система неособого решения не имеет. Более того, ясно, что если эту связь наложить, то решение, хотя и станет неособым, но зато потеряет единственность (ср. с примером 3.5). Действительно, тогда одну из переменных u_5, u_6, u_7, u_8 можно выбрать произвольно, остальные найдутся из трёх уравнений системы, а четвёртое выполнится автоматически в силу 3D-совместности. Итак, для 3D-совместного уравнения рассмотренная задача Коши плохо поставлена.

Пример 3.9. Квад-граф на рис. 3.9 даёт пример противоположной ситуации: задача Коши корректна для интегрируемого уравнения и переопределена в общем случае. Здесь имеется три полосы, каждая из которых пересекает путь с начальными данными u_2, u_3, u_4, u_5 по одному ребру. Четыре переменные u_1, u_6, u_7, u_8 должны удовлетворить пяти уравнениям. Значение u_8 можно вычислить двумя способами: непосредственно по данным u_3, u_4, u_5 или за несколько шагов, после вычисления u_1, u_6 и u_7 . Вообще говоря, эти значения будут различными, то есть задача является переопределённой. Однако, для 3D-совместного уравнения оба значения совпадут, поскольку рассматриваемый граф есть не что иное, как проекция куба на плоскость.

Докажем теперь нашу гипотезу в предположении о 3D-совместности уравнения.

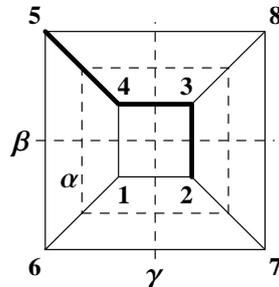


Рис. 3.9. Эта задача Коши корректна для 3D-совместного уравнения и переопределена в общем случае

Теорема 3.10. Рассмотрим задачу Коши для 3D-совместного уравнения (3.1) на плоском конечном односвязном квад-графе Γ с неособой разметкой и с начальными данными общего положения на простом пути P . Тогда:

- 1) если каждая полоса в Γ пересекает P в точности по одному ребру, то неособое решение задачи Коши существует и единственно;
- 2) если некоторая полоса пересекает P более одного раза, то неособого решения не существует;
- 3) если некоторая полоса не пересекает P , то если неособое решение существует, то оно неединственно.

Доказательство. 1) *Существование.* Построим погружение Γ в N -мерный единичный куб, где N — длина P . Для этого припишем рёбрам P операторы τ_n , $n = 1, \dots, N$. Действие τ_n на N -мерный вектор x определим формулой $\tau_n(x) = x + e_n \pmod{2}$, где e_n обозначает n -й координатный вектор. Далее, разнесём эти операторы на все рёбра Γ по правилу разметки, то есть, сопоставляя оператор целой полосе. Благодаря условию 1), это делается однозначно. Сопоставим первой вершине i_0 пути $P = (i_0, i_1, \dots, i_N)$ начало координат $(0, \dots, 0)$ и определим координаты образов всех остальных вершин $i \in V(\Gamma)$ при помощи операторов τ вдоль любого пути P_i из i_0 в i . Результат не зависит от выбора P_i . Действительно, любой замкнутый путь пересекает любую полосу чётное число раз и следовательно эквивалентен тождественному оператору. Вообще говоря, при таком отображении разным вершинам Γ может отвечать одна и та же вершина N -мерного куба, но единственность прообраза для нас не важна. Важно, что образом каждой грани Γ является некоторая 2-мерная грань этого куба. Путь P с начальными данными отображается в путь

$$((0, 0, \dots, 0), (1, 0, \dots, 0), (1, 1, \dots, 0), \dots, (1, 1, \dots, 1)),$$

что, очевидно, позволяет вычислить значения u в каждой вершине куба (ср. с обсуждением выбора начальных данных перед теоремой 1.6). Однозначность обеспечивается свойством 3D-совместности. Общим начальным данным отвечает решение, несингулярное на всех двумерных гранях куба. Ограничивая его на образ графа, получаем некоторое решение исходной задачи Коши.

Единственность. Рассмотрим операцию стягивания в точку поперечных рёбер одной из полос квад-графа. На рис. 3.10 показан, для простоты, случай простой полосы, но допускаются также замкнутые полосы и полосы, касающиеся сами себя. Легко убедиться, что данная операция не нарушает неособость разметки, не порождает новых полос и не влияет на пересечение остальных полос с P . Остальные полосы могут лишь укоротиться на несколько ячеек, в зависимости от числа пересечений с удаляемой полосой, в частности, допускается их вырождение в одно ребро.

Рассмотрим полосу C , проходящую через крайнее ребро (i, j) пути $P = (i, j, \dots)$. Пусть она разделяет Γ на подграф Γ_1 , содержащий P , и Γ_2 , не содержащий P . К ограничению решения на Γ_2 применим преобразование Бэкунда из теоремы 3.2, с параметром полосы и начальным данным u_j . Сшивая

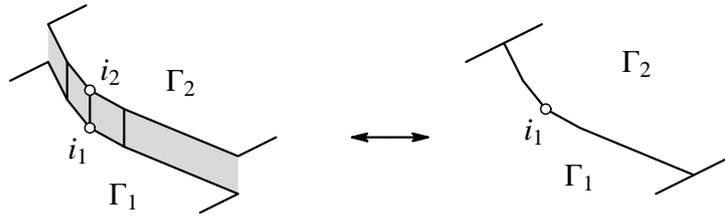


Рис. 3.10. Удаление и вставка полосы

его с ограничением решения на Γ_1 , получим неособое (для общих начальных данных) решение задачи Коши на квад-графе G' , полученном из G стягиванием полосы C и, следовательно, с укороченным путём P' . Если на Γ имеется два различных неособых решения с одинаковыми начальными данными, то эта операция приведёт к различным неособым решениям на G' , и повторяя процедуру, мы придём за конечное число шагов к противоречию.

2) Пусть некоторая полоса C пересекает путь P с начальными данными дважды, по рёбрам (i, j) и (k, l) . Допустим, что неособое решение задачи Коши существует. Рассмотрим его на подграфе Γ_1 , ограниченном C и P (см. рис. 3.11; отметим, что если полоса подходит к (k, l) с другой стороны, то она входит в Γ_1 , и так как самопересечения запрещены, то она пересекает P ещё раз; тем самым мы возвращаемся к ситуации, показанной на рисунке). Саму полосу вложим в трёхмерное пространство, так чтобы её внешняя граница лежала над внутренней, с вершиной i над j и l над k . Замкнём полосу, рассматривая последовательность уравнений (3.3) вдоль пути P . В силу свойства 3D-совместности, эта последовательность должна привести к тому же значению, что и путь по полосе C , то есть к u_i . Таким образом, u_i является функцией от остальных переменных на P , то есть начальные данные не являются общими.

3) Можно считать, что Γ не содержит полос пересекающих P более одного раза, так как тогда, согласно доказанному, решения нет. Рассмотрим последовательность квад-графов, полученных друг из друга операцией стягивания в точку поперечных рёбер одной из полос, не пересекающих P , пока все та-

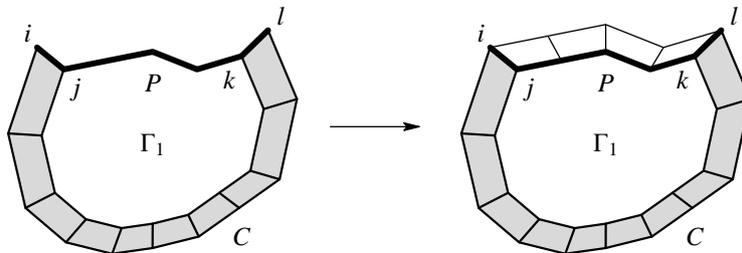


Рис. 3.11. Связь на начальные данные

кие полосы не будут удалены. Для последнего квад-графа существует неособое решение, согласно утверждению 1). Далее, применим в обратном порядке операции вставки полос, при помощи преобразования Бэклунда с параметром, отвечающим вставляемой полосе. Именно, пусть квад-граф Γ'' получен из квад-графа Γ' стягиванием полосы C , разделяющей Γ' на подграф Γ'_1 , содержащий P , и Γ'_2 , не содержащий P . Преобразование Бэклунда для неособого решения на Γ'_2 содержит однопараметрический произвол в выборе дополнительного начального данного и для его общих значений приводит к неособому решению на Γ'_2 и на самой полосе C . Сшив их со старым решением на Γ'_1 , получаем неособое решение на всём Γ' . Повторение этой операции приводит к неособому решению на исходном квад-графе Γ и доказывает его неединственность. \square

Замечание 3.11. Если задача Коши для 3D-совместного уравнения корректна, то её решение в любой вершине квад-графа является рациональной функцией от начальных данных. Действительно, если даже на самом квад-графе нет явной схемы вычислений, из доказательства следует, что её можно получить за счёт добавления некоторых виртуальных точек. При доказательстве существования решения использовались вершины N -мерного куба. Ясно, что для больших систем этот алгоритм неэффективен, так как число этих вершин 2^N , а число вершин в плоском квад-графе растёт как N^2 . Поэтому с практической точки зрения представляет интерес поиск погружений квад-графа в решётку \mathbb{Z}^d как можно меньшей размерности.

Другая явная схема основана на операциях удаления и вставки полос из доказательств единственности и части 3). Построим последовательность квад-графов, удаляя на каждом шаге полосу, проходящую через последнее ребро пути P , и тем самым укорачивая его. Вообще говоря, при этом могут появляться “холостые” рёбра, не принадлежащие какой-либо грани; они считаются за целую полосу. На последнем шаге получается “квад-граф” состоящий всего из одной точки — начала пути P . Далее проведём обратную процедуру, строя решение при помощи преобразований Бэклунда, с заданными начальными условиями.

Нетрудно видеть, что оба алгоритма существенно используют свойство 3D-совместности и непригодны для уравнений, им не обладающих. Для последних построение решения (если оно существует) по неявной схеме сводится к системе нелинейных уравнений и может быть достаточно трудоёмким. При этом, вообще говоря, оно не выражается рациональной функцией от начальных данных.

Относительно применимости доказанного критерия, необходимо отметить, что путь, пересекающий каждую полосу ровно один раз, существует далеко не для всякого квад-графа (например, нетрудно убедиться, что такого пути нет для квад-графов на рис. 3.1 и на рис. 3.8). Таким образом, корректная постановка задачи Коши с начальными данными на простом пути возможна не всегда.

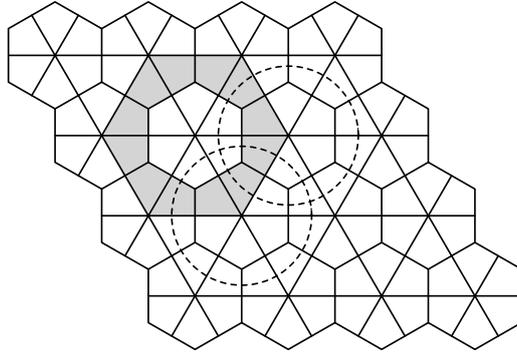


Рис. 3.12. Квад-граф, у которого все полосы замкнуты

Для многих квад-графов положение можно поправить, рассматривая в качестве носителей начальных данных, вместо простых путей, произвольные связные подграфы P . Доказательство теоремы без особого труда переносится и на этот случай, причём условие на P по-прежнему заключается в том, что каждая полоса в Γ пересекает его ровно один раз (например, для рис. 3.8 в качестве P годится наклонная прямая, ограничивающая квад-граф слева, вместе с торчащими из неё горизонтальными рёбрами). Мы не будем выяснять, при каких условиях на квад-граф существуют связные подграфы P с таким свойством, и как их искать. Отметим только, что такие подграфы существуют не всегда. На рис. 3.12 показана решётка, у которой все полосы замкнуты (она получается из решётки кагоме при помощи операции дубля, см. определение в разделе 5.2). Нетрудно видеть, что для неё любой путь, соединяющий две достаточно далёкие вершины, пересекает какую-то из полос более одного раза. Следовательно, на этой решётке нельзя поставить корректную задачу Коши с начальными данными на связном подграфе.

3.3 Квадратная решётка с локальным дефектом

Как уже отмечалось, простейшим примером корректной задачи Коши служит задача на одном квадранте регулярной решётки, с начальными данными на координатных полуосях:

$$\begin{aligned} Q(u_{m,n}, u_{m+1,n}, u_{m,n+1}, u_{m+1,n+1}; \alpha_m, \beta_n) &= 0, \quad m, n \geq 0, \\ u_{m,0} &= p_m, \quad u_{0,n} = q_n, \quad p_0 = q_0. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Предполагается, что уравнение 3D-совместно, параметры подчиняются ограничениям неособой разметки, в частности, $\alpha_m \neq \beta_n$ для всех m, n . В этом разделе мы рассмотрим один достаточно специальный класс задач Коши, возникающий из такой задачи при замене прямоугольника размера $M \times N$ на конечный квад-граф D с теми же вершинами на границе, причём и начальные

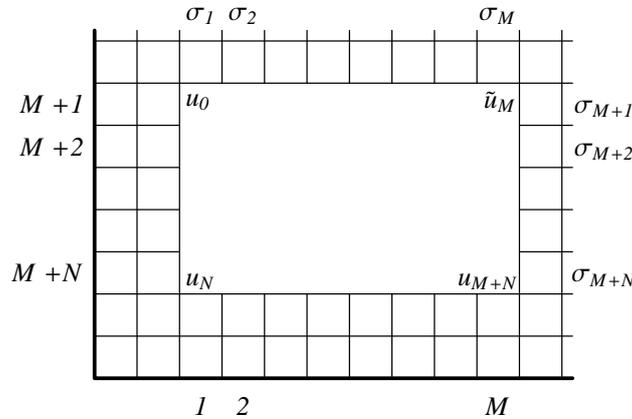


Рис. 3.13. Нумерация полос и границы дефекта

условия, и разметка для нового квад-графа определяются старыми значениями вдоль координатных осей.

Согласно теореме 3.10, для того, чтобы новая задача Коши была корректной, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:

- новая разметка должна быть неособой;
- полосы, вошедшие в D со стороны начальных условий должны выйти с противоположной стороны;
- квад-граф D не должен содержать замкнутых полос.

В случае, когда эти условия выполняются, будем говорить о задаче Коши на решётке с *локальным дефектом* D . Следует подчеркнуть, что в этом определении важна не только структура самого дефекта, но и то, что мы фиксируем его расположение в квадранте $m, n \geq 0$. Действительно, пример 3.5 показывает, что задача Коши с дефектом может быть корректна при одном выборе носителя начальных данных и некорректна при другом.

Легко видеть, что в вершинах, лежащих на полосах между дефектом и координатными осями (в том числе, и в вершинах на границе дефекта) решения старой и новой задач Коши совпадают. Решением на самом дефекте мы интересоваться не будем и выясним лишь, как он влияет на решение в оставшейся части плоскости. Заметим, что при этом можно даже отказаться от условия, что D не содержит замкнутых полос, так как из доказательства утверждения 3) теоремы 3.10 следует, что замкнутые полосы удаляются (или вставляются), не затрагивая решения во внешней части квад-графа.

Оказывается, что для ответа на поставленный вопрос внутреннее строение дефекта совершенно не важно и значение имеет лишь вызванная им перестановка полос квадратной решётки. Чтобы определить её, рассмотрим полосы, входящие в D со стороны начальных условий, и занумеруем вертикальные через $1, \dots, M$, считая слева направо, и горизонтальные через $M+1, \dots, M+N$, считая сверху вниз (см. рис. 3.13). Затем рассмотрим последовательность

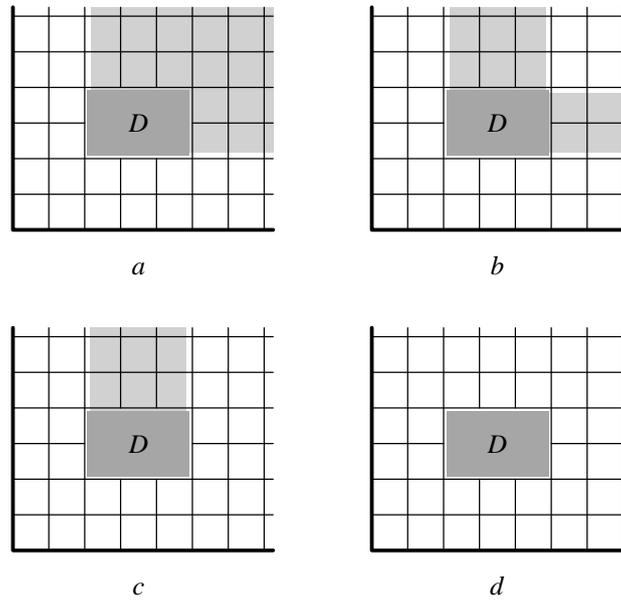


Рис. 3.14. Область влияния на решение задачи Коши: а) общий локальный дефект; б) вертикальные и горизонтальные полосы переставляются отдельно; в) переставляются только вертикальные полосы; г) прозрачный дефект

$(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{M+N})$ полос, выходящих из D через противоположные стороны рассматриваемого прямоугольника, начиная с верхнего левого угла. На обычной квадратной решётке эти полосы образуют тождественную перестановку $(1, 2, \dots, M+N)$. Все дефекты с такой же перестановкой будем называть *прозрачными*.

Теорема 3.12. 1) Если два локальных дефекта, с одной и той же границей, приводят к одинаковым перестановкам полос, то вне дефекта и на его границе решения соответствующих задач Коши совпадают. В частности, прозрачные дефекты не влияют на решение задачи (3.6) (см. рис. 3.14).

2) Если дефект переставляет лишь полосы одного типа, скажем, вертикальные, то решение меняется лишь вдоль этих полос.

3) Если вертикальные полосы не переставляются с горизонтальными, то есть $\sigma_i \leq M$, $i = 1, \dots, M$, то вне объединения полос, выходящих из дефекта, решение не меняется.

Доказательство. 1) Рассмотрим достаточно большой прямоугольник с вершинами $(0, 0)$, $(t, 0)$, (t, n) , $(0, n)$, полностью накрывающий дефект. Погрузим квад-графы, отвечающие обоим дефектам, в $t+n$ -мерный куб, как описано в доказательстве теоремы 3.10. Напомним, что образ любой вершины при таком погружении определяется множеством полос, которые приходится пересечь на пути к началу координат, причём выбор пути не важен, поскольку учитывается лишь чётность числа пересечений с каждой полосой. Пусть два дефекта

приводят к одной и той же перестановке полос. Тогда любой путь к началу координат, не проходящий через дефект, проходит через одни и те же полосы на обоих квад-графах, и следовательно любая вершина вне дефекта отображается в одну и ту же вершину на кубе. Так как начальные условия совпадают, то совпадают и решения в этой вершине.

2) В этом случае, в вершину, лежащую вне рассматриваемых полос, всё ещё можно попасть из начала координат по пути, проходящему через те же полосы, что и на решётке без дефекта.

3) В этом случае, путь к вершине, лежащей вне полос, выходящих из дефекта, лишь перестановкой отличается от пути на решётке без дефекта. Так как порядок пересечения полос неважен, то эта вершина отображается в ту же вершину куба, что и в отсутствие дефекта. \square

Ещё одно доказательство, дающее, кроме того, эффективную вычислительную схему для прохождения через дефект, можно получить на основе факторизации произведения матриц из представления нулевой кривизны (3.4) (правда, для линейного волнового уравнения это доказательство не срабатывает). Переобозначим через γ_i параметр, отвечающий i -й полосе, проходящей через дефект, согласно нумерации на рис. 3.14. Рассмотрим два пути по границе дефекта из верхнего левого угла в правый нижний, и переобозначим переменные вдоль нижнего пути через u_0, \dots, u_{M+N} , и вдоль верхнего через $u_0, \tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_{M+N-1}, u_{M+N}$. Тогда из представления нулевой кривизны вытекает равенство вида

$$\begin{aligned} & W(u_{M+N}, \tilde{u}_{M+N-1}; \gamma_{\sigma_{M+N}}, \lambda) W(\tilde{u}_{M+N-1}, \tilde{u}_{M+N-2}; \gamma_{\sigma_{M+N-1}}, \lambda) \\ & \quad \cdots W(\tilde{u}_2, \tilde{u}_1; \gamma_{\sigma_2}, \lambda) W(\tilde{u}_1, u_0; \gamma_{\sigma_1}, \lambda) \\ = & W(u_{M+N}, u_{M+N-1}; \gamma_M, \lambda) \cdots W(u_{N+1}, u_N; \gamma_1, \lambda) \\ & \quad W(u_N, u_{N-1}; \gamma_{M+N}, \lambda) \cdots W(u_1, u_0; \gamma_{M+1}, \lambda), \end{aligned}$$

независимо от устройства дефекта (даже если внутри имеются замкнутые полосы). Утверждение 1) теоремы вытекает из единственности разложения в левой части при заданной перестановке σ , так как после прохождения дефекта решение в оставшейся части решётки находится по явной схеме. Для дискретного уравнения КдФ свойство единственности разложения было доказано в разделе 1.3, и его можно установить также для всех уравнений из списка 2.1. Разумеется, вместо произведения матриц по границе дефекта можно сразу рассматривать произведения по границе прямоугольника с вершинами $(0, 0)$, $(m, 0)$, (m, n) , $(0, n)$. При этом решение на квад-графе с дефектом получается из решения на квадратной решётке после дополнительного переразложения произведения матриц на верхней и правой сторонах в соответствии с перестановкой σ . Доказательство утверждений 2) и 3) следует из того, что в этом переразложении участвует только часть матриц. Напомним, что действие перестановок на решениях описывается преобразованиями типа (1.19), то есть тем же самым квад-уравнением (3.6), интерпретируемым, как преобразование цепочки переменных.

3.4 Солитоны на квад-графах

В качестве простейшего примера построим некоторые явные решения дискретного уравнения КдФ (1.25)

$$(v - v_{ij})(v_i - v_j) = \alpha_i - \alpha_j.$$

При этом полезно учитывать также непрерывную динамику, определяемую преобразованием Бэклунда (1.6)

$$v_{i,x} + v_x = (v_i - v)^2 - \alpha_i.$$

Решая уравнение Риккати, нетрудно получить профиль решения в форме кинка, после чего разностное уравнения сводится к определению зависимости фазы от дискретных переменных (можно также определить зависимость фазы от времени t в силу уравнения рот-КдФ $v_t = v_{xxx} - 6v_x^2$ и его высших симметрий).

Начнём с регулярной квадратной решётки с постоянными параметрами $\alpha_1 = \alpha$, $\alpha_2 = \beta$. Здесь мы имеем очевидное затравочное решение

$$v(m, n) = am + bn + px + q, \quad a^2 - b^2 = \alpha - \beta \quad (3.7)$$

и применяя преобразование Бэклунда с параметром $\lambda = 2p - k_i^2$, получаем

$$v_i(m, n) = am + bn + px + q - k_i \tanh(k_i x + \phi_i(m, n)).$$

Будем искать фазу в виде $\phi_i(m, n) = \mu_i m + \nu_i n + \xi_i$. Подстановка в уравнение даёт тождество если и только если параметры связаны соотношениями

$$a \tanh \mu_i = b \tanh \nu_i = k_i.$$

Таким образом, кинкообразное решение имеет вид

$$v_i(m, n) = am + bn + px + q - k_i \tanh(k_i x + \mu_i m + \nu_i n + \xi_i), \quad (3.8)$$

где

$$a^2 - b^2 = \alpha - \beta, \quad \mu_i = \frac{1}{2} \log \frac{a + k_i}{a - k_i}, \quad \nu_i = \frac{1}{2} \log \frac{b + k_i}{b - k_i},$$

причём должно быть $|k_i| < \max\{|a|, |b|\}$, чтобы μ_i, ν_i были вещественными. Зависимостью от параметра x можно пренебречь, но её можно использовать также для того, чтобы перейти от кинка к солитону $u_{m,n} = -2\partial_x(v_{m,n})$, отвечающему обычному уравнению КдФ $u_t = u_{xxx} + 6uu_x$. Напомним, что дискретная динамика в этом случае описывается более сложным уравнением (1.18).

Двух-кинковое решение получается при помощи формулы нелинейной суперпозиции, и имеет вид

$$v_{12} = v - \frac{k_2^2 - k_1^2}{k_2 \tanh(k_2 x + \phi_2) - k_1 \tanh(k_1 x + \phi_1)}$$

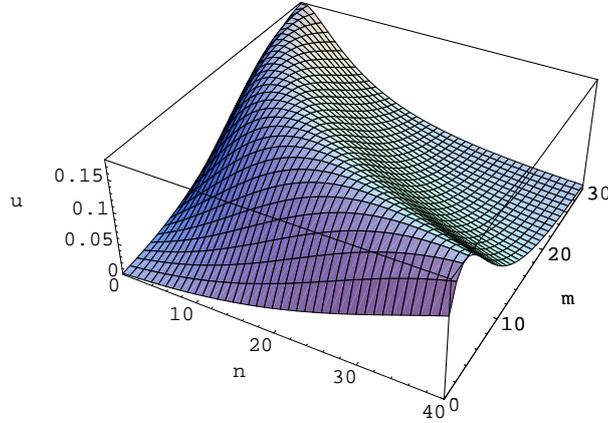


Рис. 3.15. Солитон неавтономного уравнения

где затравочное решение v и фазы ϕ_1, ϕ_2 определены выше. Чтобы решения не было сингулярно по x , следует положить $k_2 > k_1 > 0$ и сделать сдвиг $\phi_2 \rightarrow \phi_2 + \frac{\pi i}{2}$. Таким способом можно построить общее мультисолитонное решение.

Затравочное решение (3.7) легко обобщается на случай переменных параметров $\alpha_1 = \alpha(m), \alpha_2 = \beta(n)$:

$$\begin{aligned} v(m, n) &= a(m) + b(n) + px + q, \\ (a(m+1) - a(m))^2 - \alpha(m) &= (b(n+1) - b(n))^2 - \beta(n) = \delta. \end{aligned}$$

Вычисляя по прежней схеме, получаем кинк, движущийся с переменной скоростью (на рис. 3.15 изображён график соответствующего солитона $u = -2v_x$):

$$v(m, n) = a(m) + b(n) + px + q - k \tanh(kx + \mu(m) + \nu(n) + \xi), \quad (3.9)$$

где

$$\mu(m+1) - \mu(m) = \frac{1}{2} \log \frac{a(m+1) - a(m) + k}{a(m+1) - a(m) - k}$$

и аналогично для $\nu(n), b(n)$.

Решения на квад-графах можно строить, вкладывая их в многомерную решётку, порождаемую 3D-совместным квад-уравнением. Для этого важно заметить, что хотя в этой решётке все направления равноправны, для рассмотренных выше решений исходная двумерная решётка играла выделенную роль: сдвиги по ней не приводили к одеванию решения, но лишь к сдвигу фазы. Таких “пассивных” или “пространственных” направлений может быть сколько угодно. Например, формула (3.9) легко обобщается на случай решётки \mathbb{Z}^d , в которой каждая двумерная подрешётка удовлетворяет дискретному

уравнению КдФ:

$$v(n_1, \dots, n_d) = a_1(n_1) + \dots + a_d(n_d) + px + q - k \tanh(kx + \nu_1(n_1) + \dots + \nu_d(n_d) + \xi), \quad (3.10)$$

где

$$(a_s(n+1) - a_s(n))^2 - \alpha_s(n) = \delta, \\ \nu_s(n+1) - \nu_s(n) = \frac{1}{2} \log \frac{a_s(n+1) - a_s(n) + k}{a_s(n+1) - a_s(n) - k}, \quad s = 1, \dots, d.$$

Это наблюдение немедленно даёт нам решения типа кинков для квад-графов, вложимых в \mathbb{Z}^d . Например, первый график на рис. 3.16 получается, если в ку-

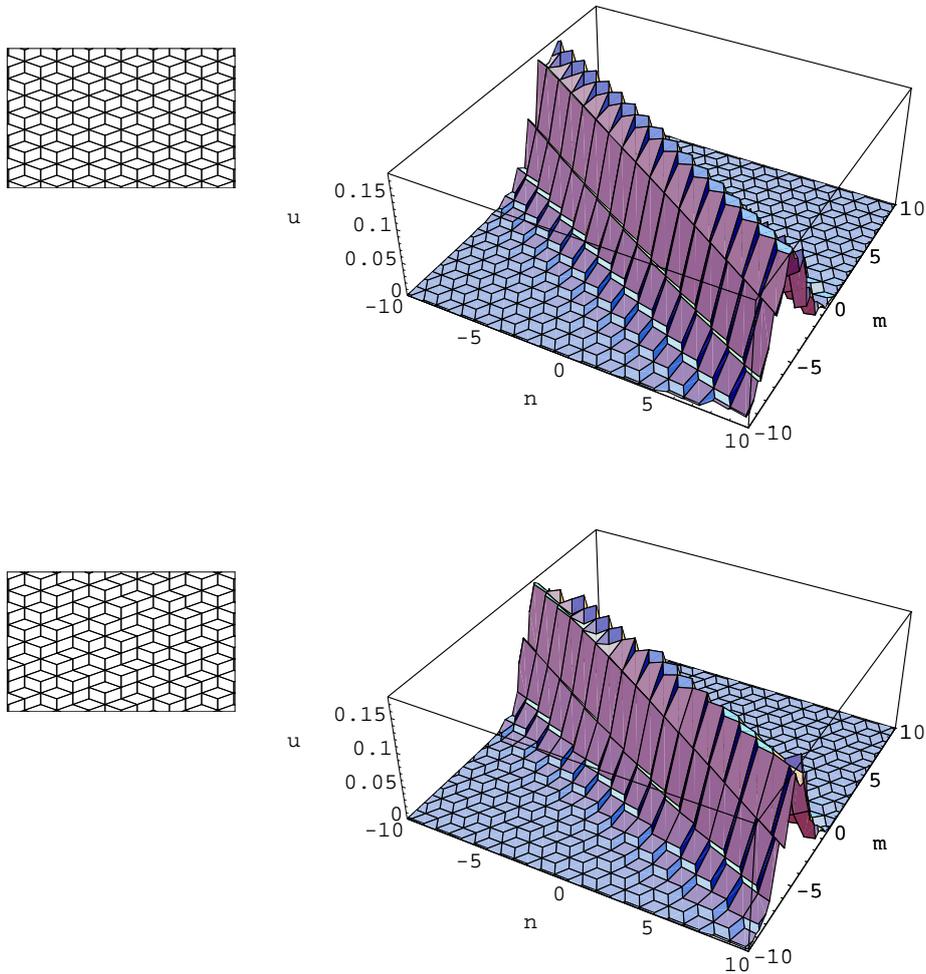


Рис. 3.16. Солитон на регулярной и квази-регулярной решётках

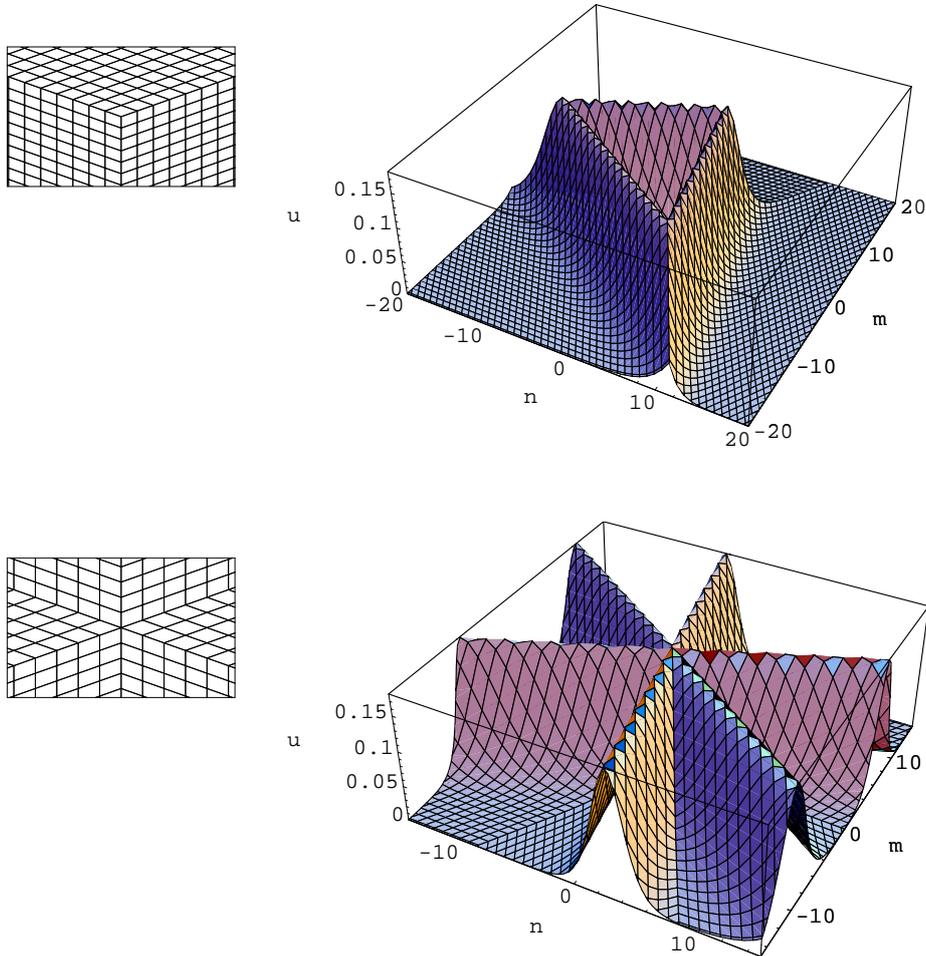


Рис. 3.17. Солитон на трёх и на шести квадрантах

бической решётке взять все грани, пересекающие плоскость $n_1 + n_2 + n_3 = 0$. Соответственно, кинк для этого графа задаётся формулой (3.10) при $d = 3$, ограниченной на значения $n_1 + n_2 + n_3 \in \{-1, 0, 1\}$. В случае линейной фазы $\nu_s(n_s) = \nu_s n_s$ соответствующий солитон распространяется в направлении $(\nu_3 - \nu_2, \nu_1 - \nu_3, \nu_2 - \nu_1)$. Таким образом можно получить и некоторые квазипериодические замощения, выбирая другие секущие плоскости и используя проекцию де Брюна (определение см. напр. в [154]). Формула (3.10) работает и на таких квад-графах. Второй график на рис. 3.16 представляет то же самое трёхмерное решение, но ограниченное на другую двумерную плоскость.

Два графика на рис. 3.17 демонстрируют 3-мерные решения, ограниченные на координатные квадранты.

Комментарии к главе 3

Глава основана на работе Адлера и Веселова [29].

▷ Для простоты, изложение в этой главе ограничивается плоскими графами. В литературе пока что нет результатов, связанных с нелинейными уравнениями на более сложных квад-графах (например, вложенных на поверхность рода g). В линейном случае некоторые интересные результаты имеются в статьях Новикова и Дынникова [137, 65, 138].

▷ Понятие представления нулевой кривизны на произвольном плоском графе было введено в статьях Адлера [11] и Бобенко, Суриса [43].

▷ Отсутствие полос с самопересечением играет важную роль в задаче вложения квад-графа в кубическую решётку, подробно изучавшуюся в работе Долбилина, Седракияна, Штанько и Штогина [56]. Фактически наше доказательство существования решения использует сходный приём, но вместо кубической решётки используется единичный многомерный куб.

▷ Задача Коши на квадратной решётке с начальными данными на “лесенке” подробно изучалась в работах Капела, Найхофа, Папагеоргиу [140, 54] и др.. Этот случай важен тем, что его можно интерпретировать, как дискретную эволюционную систему (шаг по времени отвечает параллельному переносу на решётке и задаётся явным отображением). Наложение дополнительных граничных условий (например, периодических) приводит к весьма общим конструкциям конечномерных интегрируемых отображений и отображений Пенлеве-типа, чему также посвящена богатая литература.

▷ Основным результатом этой главы является критерий корректности задачи Коши для *интегрируемых* квад-уравнений. Возникает вопрос, существует ли такой критерий для уравнений общего вида. Нетрудно предъявить примеры квад-графов, для которых вопрос о корректности задачи Коши зависит лишь от выбора носителя начальных данных, но не от вида уравнения. Тем не менее, полное описание такой ситуации остаётся открытой и, вероятно, довольно трудной комбинаторной задачей.

▷ В частности, примеры типа 3.9 (задача Коши корректна для 3D-совместного уравнения и переопределена в общем случае) возможны, по-видимому, только при наличии замкнутых полос. Это нуждается в обосновании, но наводящие соображения следуют из простого подсчёта числа неизвестных и уравнений. Для незамкнутых кривых на плоскости, пересекающихся лишь попарно и трансверсально, нетрудно доказать формулу типа Эйлера

$$V = F + S + 1,$$

где V число областей, на которые разбивается плоскость, F число точек пересечения, S число кривых. При переходе к дуальному графу возникает плоский односвязный квад-граф без замкнутых полос, для которого эта формула устанавливает связь, соответственно, между числом вершин, граней и полос

(причём “холостые” рёбра, не принадлежащие какой-либо грани, считаются за целую полосу; они отвечают кривым, не имеющим пересечений с другими). Отсюда видно, что если число начальных данных равно $S + 1$ (в соответствии с условием, что каждая полоса пересекает подграф P с начальными данными ровно один раз), то число неизвестных и уравнений совпадает, поэтому естественно ожидать, что система квад-уравнений общего вида имеет решение.

Нетрудно убедиться, что добавление замкнутой кривой нарушает баланс числа областей и точек пересечения только в том случае, если эта кривая не пересекает другие. Отсюда следует, что если среди кривых есть замкнутые, то выполняется соотношение

$$V = F + S + Q + 1,$$

где S по-прежнему обозначает число незамкнутых кривых, а Q число ограниченных компонент связности объединения всех кривых. Вообще говоря, $S + Q$ меньше общего числа кривых; в терминах квад-графа это означает, что число “свободных” переменных $V - F$ меньше чем длина подграфа с начальными условиями, то есть задача Коши в общем случае переопределена.

Глава 4

Квадрилирациональные отображения

В этой главе рассматриваются 3D-совместные отображения $F : (u, v) \rightarrow (\bar{u}, \bar{v})$ со скалярными переменными на рёбрах решётки. Такие отображения возникают при редукции из квад-уравнений, допускающих непрерывную группу точечных симметрий. Для них имеется также красивая геометрическая интерпретация, в которой свойство 3D-совместности эквивалентно одной теореме инцидентности для линейного пучка коник. Все эти примеры квадрилирациональны, то есть отображение F бирационально и его график служит одновременно графиком некоторого бирационального отображения $\hat{F} : (\bar{u}, \bar{v}) \rightarrow (u, v)$. Это свойство заменяет в данном случае свойство аффинно-линейности для квад-уравнений. Все квадрилирациональные отображения на $\mathbb{C}\mathbb{P}^1 \times \mathbb{C}\mathbb{P}^1$ можно явно описать.

4.1 Основные определения

4.1.1 3D-совместность и отображения Янга-Бакстера

Напомним обозначения для переменных, ассоциированных с рёбрами решётки: верхний индекс обозначает направление соответствующего ребра, нижний обозначает сдвиги на решётке. Простейшим типом уравнений с переменными на рёбрах служат отображения

$$F : (u^1, u^2) \rightarrow (u_2^1, u_1^2),$$

переводящие поля на двух соседних рёбрах квадрата в поля на противоположных рёбрах. Понятие 3D-совместности для таких уравнений формулируется следующим образом (см. рис. 4.1). Рассмотрим начальные данные u^1, u^2, u^3 на рёбрах куба, выходящих из одной вершины и отображения F_{ij} , ассоциированные с гранями куба. Первое применение отображений порождает шесть

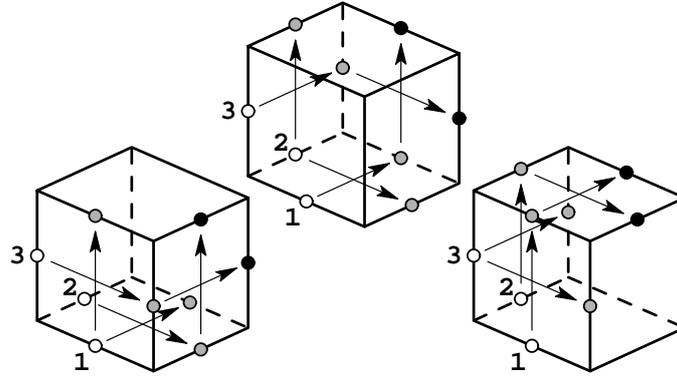


Рис. 4.1. 3D-совместность

новых значений переменных:

$$F_{ij} : (u^i, u^j) \mapsto (u_j^i, u_i^j) = (f_j^i(u^i, u^j), f_i^j(u^j, u^i)), \quad i, j = 1, 2, 3, \quad i \neq j,$$

а на втором шаге для переменных $u_{23}^1, u_{13}^2, u_{12}^3$ получаются по два значения:

$$u_{jk}^i = f_j^i(u_k^i, u_k^j) \quad \text{и} \quad u_{jk}^i = f_k^i(u_j^i, u_j^k).$$

Отображения F_{ij} называются 3D-совместными, если эти значения совпадают тождественно по начальным данным, то есть

$$f_j^i(f_k^i(u^i, u^k), f_k^j(u^j, u^k)) \equiv f_k^i(f_j^i(u^i, u^j), f_j^k(u^k, u^j)), \quad i \neq j \neq k \neq i. \quad (4.1)$$

Простейшим нетривиальным примером 3D-совместного отображения служит отображение (1.27)

$$u_j^i = f_j^i(u^i, u^j) = -u^j - \frac{\alpha_i - \alpha_j}{u^i - u^j}.$$

Альтернативой 3D-совместности является понятие отображений Янга-Бакстера. Пусть X множество значений полевых переменных и отображения $R_{ij} : X^3 \rightarrow X^3$ действуют на i -м и j -м множителях в прямом произведении, а на оставшемся тождественно. Отображения R_{ij} называются отображениями Янга-Бакстера, если они удовлетворяют тождеству

$$R_{23}R_{13}R_{12} = R_{12}R_{13}R_{23}. \quad (4.2)$$

Если начальные условия $(u^1, u^2, u^3) \in X^3$ сопоставить с цепочкой рёбер, соединяющих противоположные вершины куба, то уравнение (4.2) означает, что оба возможных способа определения переменных на противоположных рёбрах дают один результат. Это иллюстрируется рис. 4.2, где левой и правой частям уравнения отвечают последовательности отображений на задних и передних гранях куба.

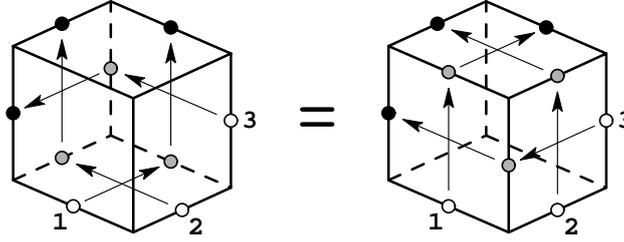


Рис. 4.2. Уравнение Янга-Бакстера $R_{23}R_{13}R_{12} = R_{12}R_{13}R_{23}$

Таким образом, различие между 3D-совместностью и уравнением Янга-Бакстера заключается в разном выборе начальных условий, что обуславливает и разное “направление” отображений. Нетрудно видеть, что эти два понятия сводятся друг к другу при условии, что уравнения, определяющие рассматриваемые отображения, можно разрешить относительно каждой из следующих пар переменных:

$$\begin{aligned}
 F : (u, v) &\mapsto (\bar{u}, \bar{v}), & \hat{F}^{-1} : (u, \bar{v}) &\mapsto (\bar{u}, v), \\
 \hat{F} : (\bar{u}, v) &\mapsto (u, \bar{v}), & F^{-1} : (\bar{u}, \bar{v}) &\mapsto (u, v).
 \end{aligned}$$

Будем называть отображения \hat{F}, \hat{F}^{-1} сопутствующими для F, F^{-1} . Если изображать отображение, как на предыдущих рисунках, парой стрелок, ведущих от смежных рёбер к противоположным, то сопутствующим отображениям отвечает обращение одной из стрелок, а обратному обращению обеих стрелок (см. рис. 4.3). В этом случае 3D-совместность эквивалентна уравнению Янга-Бакстера, причём $F_{ij} = \hat{R}_{ij}$, то есть в качестве отображений F берутся сопутствующие к R . С точки зрения логической простоты, некоторым недостатком понятия 3D-совместности можно считать то, что его нельзя записать в виде равенства отображений, как в уравнении Янга-Бакстера, а приходится использовать покомпонентную запись (4.1). Преимущество же заключается в том, что вложенность отображений равна двум, а не трём.

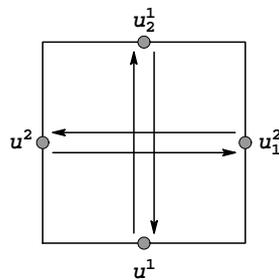


Рис. 4.3. Отображение F , его обратное и сопутствующие

4.1.2 Квадрирациональные отображения

Особенный интерес представляет случай, когда все четыре отображения $F^{\pm 1}$, $\hat{F}^{\pm 1}$ оказываются рациональными. Примем следующее определение.

Определение 4.1. Пусть U, V, \bar{U}, \bar{V} неприводимые алгебраические многообразия над \mathbb{C} . Отображение $F : U \times V \rightarrow \bar{U} \times \bar{V}$ называется квадрирациональным, если оно рационально и его график $\Gamma \subset U \times V \times \bar{U} \times \bar{V}$ является одновременно графиком рациональных отображений

$$\hat{F} : \bar{U} \times V \rightarrow U \times \bar{V}, \quad \hat{F}^{-1} : U \times \bar{V} \rightarrow \bar{U} \times V \quad \text{и} \quad F^{-1} : \bar{U} \times \bar{V} \rightarrow U \times V.$$

Не считая пары примеров с $X = \mathbb{C}\mathbb{P}^d$ в разделе 4.5, далее мы ограничимся простейшим скалярным случаем $X = \mathbb{C}\mathbb{P}^1$.

Напомним, что для квад-уравнений из главы 2 свойство разрешимости относительно любой из переменных в рациональном виде обеспечивалось аффинно-линейной структурой уравнения. Квадрирациональность служит аналогом этого свойства для отображений с полями на рёбрах, но какая структура его обеспечивает, сразу не очевидно. Сложность заключается в том, что в данном случае отображение задаётся системой из двух полиномиальных уравнений $A = 0$, $B = 0$, и их выбор не является однозначным. Тем не менее, будет показано, что такие системы всё же допускают достаточно простое явное описание.

Теорема 4.2. Неприводимое отображение F квадрирационально если и только если его можно задать системой из двух полиномиальных уравнений одного из следующих двух типов:

$$A(u, \bar{u}, v) = 0, \quad B(u, \bar{u}, \bar{v}) = (\gamma\bar{v} + \delta)^2 A\left(u, \bar{u}, \frac{\alpha\bar{v} + \beta}{\gamma\bar{v} + \delta}\right) = 0, \quad (4.3)$$

где $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$ и многочлен A имеет первую степень по двум первым аргументам и вторую по последнему; или же

$$A(u, \bar{u}, v) = 0, \quad B(u, \bar{u}, \bar{v}) = 0. \quad (4.4)$$

где A, B аффинно-линейные многочлены.

Эта теорема сводит классификацию квадрирациональных отображений к чисто алгебраической и не очень сложной задаче перечисления орбит действия группы $(PSL_2(\mathbb{C}))^4$ на множестве полиномиальных систем указанного вида. Само по себе это не представляет особенного интереса, так как при рассмотрении 3D-совместных отображений классификация должна проводиться одновременно для шести систем, отвечающих граням куба, по модулю группы $(PSL_2(\mathbb{C}))^{12}$. Полное решение этой классификационной задачи в настоящее время неизвестно. Тем не менее, будет доказан следующий частный результат.

$$u_j^i = \frac{\alpha_i u^j ((\alpha_i - 1)u^j - (\alpha_j - 1)u^i + \alpha_j - \alpha_i)}{\alpha_i(\alpha_j - 1)u^j - \alpha_j(\alpha_i - 1)u^i + (\alpha_i - \alpha_j)u^j u^i} \quad (F_I)$$

$$u_j^i = \frac{\alpha_i(\alpha_j - 1)u^j - \alpha_j(\alpha_i - 1)u^i + (\alpha_i - \alpha_j)u^j u^i}{u^j ((\alpha_i - 1)u^j - (\alpha_j - 1)u^i + \alpha_j - \alpha_i)} \quad (\tilde{F}_I)$$

$$u_j^i = \frac{u^j(\alpha_i u^i - \alpha_j u^j + \alpha_j - \alpha_i)}{\alpha_i(u^i - u^j)} \quad (F_{II})$$

$$u_j^i = \frac{(1 - u^j)(\alpha_i u^i - \alpha_j u^j)}{\alpha_i(u^i - u^j)} \quad (\tilde{F}_{II})$$

$$u_j^i = \frac{u^j(\alpha_i u^i - \alpha_j u^j)}{\alpha_i(u^i - u^j)} \quad (F_{III})$$

$$u_j^i = \frac{u^i - u^j}{u^j(\alpha_i u^i - \alpha_j u^j)} \quad (\tilde{F}_{III})$$

$$u_j^i = u^j \left(1 - \frac{\alpha_i - \alpha_j}{u^i - u^j}\right) \quad (F_{IV})$$

$$u_j^i = u^j + \frac{\alpha_i - \alpha_j}{u^i - u^j} \quad (F_V)$$

$$u_j^i = -u^j - \frac{\alpha_i - \alpha_j}{u^i - u^j} \quad (\tilde{F}_V)$$

Список 4.1. Некоторые 3D-совместные квадрирациональные отображения

Теорема 4.3. Отображения из списка 4.1 являются 3D-совместными и квадрирациональными типа (4.3). Любое отображение типа (4.3), не сводящееся к (4.4) после переобозначения $(u, \bar{u}) \leftrightarrow (v, \bar{v})$, эквивалентно, по модулю группы $(PSL_2(\mathbb{C}))^4$, одному из отображений (F_ω) .

То, что список содержит, кроме (F_ω) , ещё и другие отображения, как раз объясняется различием в действии групп дробно-линейных замен на квадрате и на кубе. Происхождение всех перечисленных отображений поясняется в двух следующих разделах. Раздел 4.2 содержит геометрическую конструкцию, связанную с кониками в $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$, причём переменные из $X = \mathbb{C}\mathbb{P}^1$ интерпретируются, как рациональные параметры на кониках, и каждой конике отвечает свой экземпляр X . Отображения, определяемые этой конструкцией, 3D-совместны в силу одной теоремы инцидентности для линейного пучка коник. Вторая конструкция, из раздела 4.3, связана с редукциями в квад-уравнениях из списка 2.1, допускающих непрерывную группу точечных симметрий. При этом 3D-совместность наследуется автоматически.

В разделе 4.4 приводится доказательство теоремы 4.2, а также доказатель-

ство того, что отображения (F_ω) покрывают все квадрилирациональные отображения вида (4.3). Вместе с результатами предыдущих разделов это даёт доказательство теоремы 4.3. Менее интересные отображения вида (4.4) рассмотрены только вкратце.

4.2 3D-совместные отображения на кониках

Рассмотрим пару невырожденных различных коник P, Q на плоскости $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$. Для точек $p \in P$ и $q \in Q$ определим $\bar{p} \in P$ и $\bar{q} \in Q$ как дополнительные точки пересечения прямой pq с кониками. Тем самым задано отображение

$$\Phi : (p, q) \mapsto (\bar{p}, \bar{q}), \quad \bar{p} = (P \cap pq) \setminus p, \quad \bar{q} = (Q \cap pq) \setminus q. \quad (4.5)$$

\mathbb{R}^2 -часть этого отображения иллюстрируется рис. 4.4. Касание прямой и коники интерпретируется, как пересечение кратности два, поэтому допускается совпадение p с \bar{p} или q с \bar{q} .

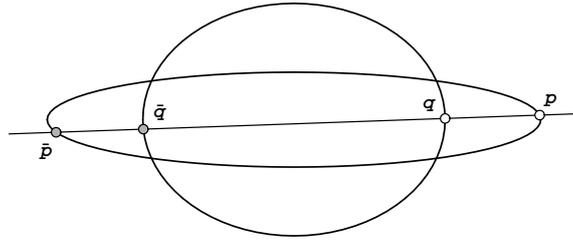


Рис. 4.4. Квадрилирациональное отображение на паре коник

Отображение не определено только при $p = q$, то есть пары (p, p) являются сингулярными точками отображения Φ . Они отвечают четырём, с учётом кратности, точкам пересечения коник $P \cap Q$, которые называются локусом. Эти точки очень важны, так как их кратность определяет взаимное расположение коник с точностью до проективных преобразований плоскости, и тем самым вид самого отображения. Всего имеется пять проективных типов пересечения двух коник:

- I четыре простых точки пересечения;
- II две простых точки и одна точка касания;
- III две точки касания;
- IV одна простая точка и одна точка касания второго порядка;
- V одна точка касания третьего порядка.

Любые пары коник одного типа переводятся друг в друга проективным преобразованием. Чуть позже мы проследим эту геометрическую классификацию на уровне формул, однако следующие два утверждения, описывающие основные свойства отображения, выполняются независимо от типа локуса.

Утверждение 4.4. Отображение $\Phi : P \times Q \mapsto P \times Q$ квадрилирационально, инволютивно и совпадает с сопутствующими.

Доказательство. Рассмотрим некоторые (произвольные, не связанные друг с другом) рациональные параметризации коник

$$\mathbb{CP}^1 \ni u \mapsto p(u) \in P \subset \mathbb{CP}^2, \quad \mathbb{CP}^1 \ni v \mapsto q(v) \in Q \subset \mathbb{CP}^2.$$

При этом отображение Φ записывается как отображение $F : (u, v) \mapsto (\bar{u}, \bar{v})$ на $\mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1$. Пересечение коники с любой прямой описывается квадратным уравнением относительно параметра, и если один корень известен, то второй определяется рациональным образом. Следовательно, отображение F рационально, и утверждение следует из того, что роли всех точек равноправны. \square

Свойство 3D-совместности формулируется для коник из линейного пучка, то есть однопараметрического семейства коник с общим локусом. При доказательстве следующей теоремы мы будем отождествлять кривые и их уравнения в однородных координатах на \mathbb{CP}^2 ; при этом линейный пучок, содержащий коники P и Q , записывается как $\lambda P + \mu Q = 0$.

Теорема 4.5. Пусть Q^1, Q^2, Q^3 невырожденные коники из линейного пучка, и Φ_{ij} отображения, действующие на $Q^i \times Q^j$, как описано выше. Эти отображения 3D-совместны.

Доказательство. Пусть $q^i \in Q^i$ произвольные начальные точки на кониках. По определению отображения Φ_{ij} , на первом шаге проводятся прямые $\ell^{ij} = q^i q^j$ и определяются точки

$$q_j^i = (\ell^{ij} \cap Q^i) \setminus q^i.$$

На следующем шаге проводятся прямые $L^{ij} = q_k^i q_k^j$. Согласно одному из способов построения, определим точки

$$q_{23}^1 = (L^{12} \cap Q^1) \setminus q_3^1, \quad q_{13}^2 = (L^{12} \cap Q^2) \setminus q_3^2.$$

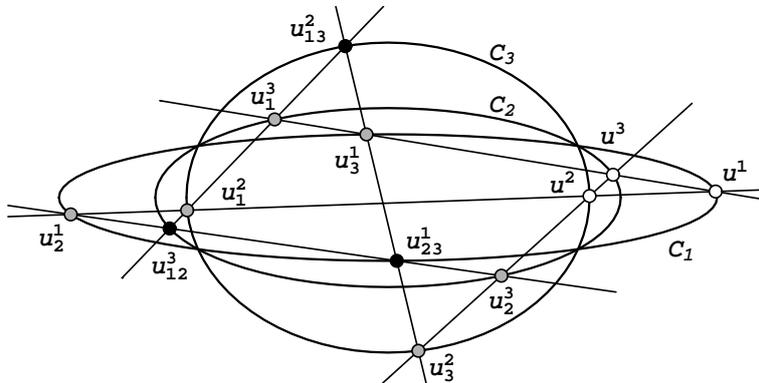


Рис. 4.5. 3D-совместность на линейном пучке коник

Для проверки свойства 3D-совместности достаточно показать, что $q_{23}^1 \in L^{13}$. Если исходные точки q^1, q^2, q^3 коллинеарны, то все рассматриваемые прямые совпадают и утверждение тривиально. Будем далее считать, что q^1, q^2, q^3 неколлинеарны.

Определим прямые

$$\tilde{L}^{13} = q_2^1 q_{23}^1, \quad \tilde{L}^{23} = q_1^2 q_{13}^2.$$

По построению, точки q^1, q_2^1, q_3^1 и q_{23}^1 лежат на Q^1 , и каждая из вырожденных коник $L^{12}\ell^{12} = 0$ и $\tilde{L}^{13}\ell^{13} = 0$ также проходит через эти четыре точки. Следовательно, коника Q^1 имеет уравнение вида

$$Q^1 = \mu_1 \tilde{L}^{13} \ell^{13} + L^{12} \ell^{12} = 0$$

с некоторым $\mu_1 \in \mathbb{C}\mathbb{P}^1$. Аналогично, коника Q^2 имеет уравнение

$$Q^2 = \mu_2 \tilde{L}^{23} \ell^{23} + L^{12} \ell^{12} = 0.$$

Коника

$$Q^1 - Q^2 = \mu_1 \tilde{L}^{13} \ell^{13} - \mu_2 \tilde{L}^{23} \ell^{23} = 0$$

принадлежит линейному пучку, определяемому Q^1 и Q^2 , и содержит точку $q^3 = \ell^{23} \cap \ell^{13}$. Следовательно, она совпадает с Q^3 . Точка $q_2^3 \in Q^3$ лежит на прямой ℓ^{23} и не лежит на ℓ^{13} (иначе q^1, q^2, q^3 коллинеарны), следовательно, она лежит на \tilde{L}^{13} . Но это означает, что $\tilde{L}^{13} = q_2^1 q_2^3 = L^{13}$, что и требуется. \square

Обращаясь теперь к приведённой выше классификации линейных пучков коник, докажем следующее утверждение.

Теорема 4.6. Отображения (F_ω) из списка 4.1 эквивалентны отображению Φ для линейного пучка коник соответствующего типа, при подходящей параметризации. Эти отображения инволютивны, совпадают с сопутствующими и 3D-совместны.

Доказательство. Вычисления существенно упрощаются при помощи подходящих проективных преобразований плоскости $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$. Напомним, что они позволяют перевести любую четвёрку точек общего положения (никакие три не коллинеарны) в любую другую. При этом всегда можно добиться, чтобы рациональным параметром u на конике служила просто декартова координата x . В качестве такой нормировки можно принять следующие пучки коник (локус дан в однородных, а уравнения в неоднородных координатах):

I	$(0:0:1), (1:1:1), (1:0:0), (0:1:0)$	$y(x - \alpha) = (1 - \alpha)x,$
II	$(0:0:1), (1:0:1), (0:1:0)^2$	$y = \alpha x(x - 1),$
III	$(0:0:1)^2, (0:1:0)^2$	$y = \alpha x^2,$
IV	$(0:0:1), (0:1:0)^3$	$y = x(x - \alpha),$
V	$(0:1:0)^4$	$y = x^2 + \alpha.$

Условие коллинеарности точек P, Q, \bar{P} , отвечающих значениям параметра u, v, \bar{u} , имеет вид

$$\det \begin{pmatrix} u & y(u, \alpha) & 1 \\ v & y(v, \beta) & 1 \\ \bar{u} & y(\bar{u}, \alpha) & 1 \end{pmatrix} / (u - \bar{u}) = 0.$$

Вывод отображения сводится к решению этого уравнения относительно \bar{u} , что представляет собой несложную выкладку. Свойства отображений F_ω вытекают из свойств отображения Φ . \square

Что касается отображений (\tilde{F}_ω) , то они отвечают той же самой геометрической картине, отличие же заключается в том, что переменные u^i и u_j^i отвечают теперь двум разным параметризациям одной и той же коники Q_i (например, $(x, y) = (t, t^2 + \alpha)$ и $(x, y) = (-t, t^2 + \alpha)$). Происхождение этих, менее симметричных, отображений удобнее проследить при помощи связи с квад-уравнениями.

4.3 Редукция квад-уравнений

В качестве первого примера рассмотрим дискретное волновое уравнение

$$q_{12} - q_1 - q_2 + q = 0. \quad (4.6)$$

Оно инвариантно относительно однопараметрической группы трансляций $q_{m,n} \rightarrow q_{m,n} + a$ и допускает редукцию на инварианты этой группы $u^i = q_i - q$, которые естественно ассоциировать с рёбрами решётки. При этом возникает отображение

$$u_j^i = u^i. \quad (4.7)$$

Этот тривиальный пример заслуживает упоминания, поскольку показывает, что при рассмотрении квад-уравнений можно, в принципе, обойтись без понятия разметки рёбер: параметры α , подчиняющиеся уравнениям (4.7), можно заменить на дополнительные поля в вершинах, подчиняющиеся уравнению (4.6).

Уравнение (4.6) инвариантно также относительно растяжения, что позволяет перейти к инвариантам $u^i = q_i/q$. При этом возникает 3D-совместное отображение

$$u_j^i = \frac{u^i + u^j - 1}{u^j}. \quad (4.8)$$

Оно квадирационально, но не совпадает с обратным и сопутствующими, так как симметрия нарушается при замене.

Аналогичные точечные симметрии имеются и для некоторых квад-уравнений из списка 2.1, что можно установить стандартным групповым анализом. Для удобства, эти уравнения выписаны ещё раз в таблице 4.2, причём переменные и параметры переобозначены через q и γ (в уравнении (Q_1^q) изменён

$$\begin{aligned}
(Q_3^0) : & \left(\gamma_i - \frac{1}{\gamma_i}\right)(qq_i + q_jq_{ij}) - \left(\gamma_j - \frac{1}{\gamma_j}\right)(qq_j + q_iq_{ij}) \\
& = \left(\frac{\gamma_i}{\gamma_j} - \frac{\gamma_j}{\gamma_i}\right)(qq_{ij} + q_iq_j) \\
(A_2) : & \left(\gamma_i - \frac{1}{\gamma_i}\right)(qq_j + q_iq_{ij}) - \left(\gamma_j - \frac{1}{\gamma_j}\right)(qq_i + q_jq_{ij}) \\
& = \left(\frac{\gamma_i}{\gamma_j} - \frac{\gamma_j}{\gamma_i}\right)(qq_iq_jq_{ij} + 1) \\
(Q_1^\delta) : & \gamma_i(q - q_j)(q_i - q_{ij}) - \gamma_j(q - q_i)(q_j - q_{ij}) = \delta^2\gamma_i\gamma_j(\gamma_j - \gamma_i) \\
(A_1^\delta) : & \gamma_i(q + q_j)(q_i + q_{ij}) - \gamma_j(q + q_i)(q_j + q_{ij}) = \delta^2\gamma_i\gamma_j(\gamma_i - \gamma_j) \\
(H_3^\delta) : & \gamma_i(qq_i + q_jq_{ij}) - \gamma_j(qq_j + q_iq_{ij}) = \delta(\gamma_j^2 - \gamma_i^2) \\
(H_2) : & (q - q_{ij})(q_i - q_j) + (\gamma_j - \gamma_i)(q + q_i + q_j + q_{ij}) = \gamma_i^2 - \gamma_j^2 \\
(H_1) : & (q - q_{ij})(q_i - q_j) = \gamma_i - \gamma_j
\end{aligned}$$

Таблица 4.2. 3D-совместные квад-уравнения, допускающие редукцию на рёбра

также параметр δ). При этом группы точечных симметрий исчерпываются трансляцией, растяжением и их знакопеременными версиями:

$$q_{m,n} \rightarrow q_{m,n} + \varepsilon^{m+n}a, \quad q_{m,n} \rightarrow q_{m,n} \exp(\varepsilon^{m+n}a), \quad \varepsilon = \pm 1.$$

Им отвечают инварианты $I(q_i, q)$, равные

$$q_i - q, \quad q_i/q, \quad q_i + q, \quad q_iq.$$

Некоторые квад-уравнения допускают несколько подстановок, приводящих к разным отображениям, и наоборот, разные уравнения могут приводить к одному и тому же отображению. Перебор приводит к следующему утверждению.

Теорема 4.7. Отображения из списка 4.1 и квад-уравнения из таблицы 4.2 связаны заменами, указанными в таблице 4.3.

Отсюда, прежде всего, следует 3D-совместность всех отображений из списка 4.1. Далее, свойства симметрии отображений определяются видом замен, с учётом симметрий (2.6), (2.7) квад-уравнений. Для отображений F_ω замены инвариантны относительно перестановки $q \leftrightarrow q_i$. Отсюда следует, что эти отображения совпадают со своими сопутствующими и обратным, как это уже

$(Q_3^0) \rightarrow (\tilde{F}_I)$:	$u^i = \gamma_i q_i / q,$	$\alpha_i = \gamma_i^2$
$(A_2) \rightarrow (F_I)$:	$u^i = \gamma_i q q_i,$	$\alpha_i = \gamma_i^2$
$(Q_1^\delta) \rightarrow (\tilde{F}_{II})$:	$u^i = \frac{q - q_i}{2\delta\gamma_i} + \frac{1}{2},$	$\alpha_i = \gamma_i$
$(A_1^\delta) \rightarrow (F_{II})$:	$u^i = \frac{q + q_i}{2\delta\gamma_i} + \frac{1}{2},$	$\alpha_i = \gamma_i$
$(Q_1^0) \rightarrow (\tilde{F}_{II})$:	$u^i = \frac{q}{q - q_i},$	$\alpha_i = \gamma_i$
$(A_1^0) \rightarrow (\tilde{F}_{II})$:	$u^i = \frac{q}{q + q_i},$	$\alpha_i = \gamma_i$
$(H_3^\delta) \rightarrow (F_{II})$:	$u^i = -\frac{q q_i}{\delta\gamma_i},$	$\alpha_i = \gamma_i^2$
$(H_3^0) \rightarrow (F_{III})$:	$u^i = q q_i / \gamma_i,$	$\alpha_i = \gamma_i^2$
$(H_3^0) \rightarrow (\tilde{F}_{III})$:	$u^i = \gamma_i q_i / q,$	$\alpha_i = \gamma_i^{-2}$
$(H_2) \rightarrow (F_{IV})$:	$u^i = q_i + q + \gamma_i,$	$\alpha_i = 2\gamma_i$
$(H_1) \rightarrow (F_V)$:	$u^i = q_i + q,$	$\alpha_i = -\gamma_i$
$(H_1) \rightarrow (\tilde{F}_V)$:	$u^i = q_i - q,$	$\alpha_i = \gamma_i$

Таблица 4.3. Редукции в квад-уравнениях

было установлено в предыдущем разделе. Что касается отображений \tilde{F}_ω , то они представляются в виде композиции коммутирующих инволюций

$$\tilde{F}_\omega = J_\omega F_\omega = F_\omega J_\omega, \quad F_\omega^2 = J_\omega^2 = \text{id}$$

и, следовательно, также инволютивны, но с сопутствующими не совпадают. Инволюции J_ω имеют вид

$$\begin{aligned} J_I : u^i &\rightarrow \alpha_i / u^i, & J_{II} : u^i &\rightarrow 1 - u^i, \\ J_{III} : u^i &\rightarrow 1 / (\alpha_i u^i), & J_V : u^i &\rightarrow -u^i. \end{aligned}$$

4.4 Структура квадирациональных отображений

Рассмотрим квадирациональное отображение на $\mathbb{C}\mathbb{P}^1 \times \mathbb{C}\mathbb{P}^1$,

$$F : (u, v) \mapsto (\bar{u}, \bar{v}), \quad \bar{u} = f(u, v), \quad \bar{v} = g(u, v). \quad (4.9)$$

В дальнейшем будем предполагать выполненными следующие условия невырожденности:

$$(i) \quad f_u g_v - f_v g_u \neq 0, \quad (ii) \quad f_u \neq 0, \quad g_v \neq 0, \quad (iii) \quad f_v \neq 0, \quad g_u \neq 0.$$

Условия (i,ii) следуют из существования обратного и сопутствующих отображений; условия (iii) накладываются искусственно, чтобы исключить приводимые отображения: если одно из них нарушено, то подходящая дробно-линейная замена приводит к отображению с $\bar{u} = u$ или $\bar{v} = v$, по существу, одномерному.

При фиксированном v , возможно, за исключением конечного числа сингулярных значений, первая компонента отображения F задаёт бирациональное отображение $u \leftrightarrow \bar{u}$. Точно так же, при фиксированном u , вторая компонента отображения задаёт бирациональное отображение $v \leftrightarrow \bar{v}$. Бирациональные отображения на $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ исчерпываются дробно-линейными, следовательно отображение F должно иметь вид

$$F : \quad \bar{u} = \frac{a(v)u + b(v)}{c(v)u + d(v)}, \quad \bar{v} = \frac{p(u)v + q(u)}{r(u)v + s(u)}, \quad (4.10)$$

с полиномиальными a, b, c, d и p, q, r, s . Будем называть такие отображения *дважды дробно-линейными*.

Обратное утверждение неверно: не любое отображение вида (4.10) квадрирационально. Для него можно утверждать лишь, что рациональны сопутствующие отображения. Например, если разрешить второе уравнение (4.10) относительно v и результат подставить в первое, то получится рациональное отображение $\hat{F}^{-1} : (u, \bar{v}) \rightarrow (\bar{u}, v)$:

$$\hat{F}^{-1} : \quad v = h(u, \bar{v}) = \frac{s(u)\bar{v} - q(u)}{p(u) - r(u)\bar{v}}, \quad \bar{u} = \frac{a(h(u, \bar{v}))u + b(h(u, \bar{v}))}{c(h(u, \bar{v}))u + d(h(u, \bar{v}))}. \quad (4.11)$$

Ясно, что выражение для \bar{u} дробно-линейно относительно u только для каких-то специальных многочленов a, b, c, d, p, q, r, s . Повторяя те же рассуждения для сопутствующих отображений, приходим к следующему выводу: дважды дробно-линейное отображение (4.10) квадрирационально, если и только если оба сопутствующих дважды дробно-линейны. При этом и обратное отображение также дважды дробно-линейно.

Лемма 4.8. Для графика Γ квадрирационального отображения (4.9) существуют четыре представления множествами решений полиномиальных систем следующего вида:

$$(\Gamma = \Gamma_F) : \quad A(u, \bar{u}, v) = 0, \quad P(v, \bar{v}, u) = 0, \quad (4.12)$$

$$(\Gamma = \Gamma_{\hat{F}}) : \quad A(u, \bar{u}, v) = 0, \quad Q(v, \bar{v}, \bar{u}) = 0, \quad (4.13)$$

$$(\Gamma = \Gamma_{\hat{F}^{-1}}) : \quad B(u, \bar{u}, \bar{v}) = 0, \quad P(v, \bar{v}, u) = 0, \quad (4.14)$$

$$(\Gamma = \Gamma_{F^{-1}}) : \quad B(u, \bar{u}, \bar{v}) = 0, \quad Q(v, \bar{v}, \bar{u}) = 0, \quad (4.15)$$

где A, B, P, Q многочлены первой степени по двум первым аргументам, и первой либо второй по последнему, причём

$$\deg_v A = \deg_{\bar{v}} B, \quad \deg_u P = \deg_{\bar{u}} Q. \quad (4.16)$$

Доказательство. Из формул (4.10) следует первое представление с аффинно-линейными многочленами по двум первым аргументам. Остальные представления следуют из аналогичных формул для сопутствующих и обратного отображений. Остаётся уточнить степень многочленов по третьему аргументу.

Исключая переменную \bar{u} из уравнений $A(u, \bar{u}, v) = 0$, $B(u, \bar{u}, \bar{v}) = 0$, получаем уравнение

$$A_{\bar{u}}B - AB_{\bar{u}} = 0.$$

Многочлен в левой части не равен нулю тождественно (это противоречит условиям невырожденности). Следовательно, это уравнение является следствием второго уравнения (4.12) (или (4.14)), то есть

$$A_{\bar{u}}B - AB_{\bar{u}} = \mu(v, \bar{v}, u)P(v, \bar{v}, u) \quad (4.17)$$

с некоторым многочленом $\mu \neq 0$. Так как левая часть не более чем квадратична по u , то это же верно и для P . Случай, когда P вовсе не зависит от u , исключается условиями невырожденности, следовательно $\deg_u P = 1$ или 2 . Аналогично рассматриваются остальные многочлены.

Наконец, если $\deg_v A = 1$, то многочлены a, b, c, d в формуле (4.10) имеют степень не выше первой, и тогда из (4.11) следует, что выражение для \bar{u} дробно-линейно по \bar{v} , то есть также $\deg_{\bar{v}} B = 1$. С учётом равноправия всех переменных, это рассуждение доказывает (4.16). \square

В силу доказанной леммы, можно разбить все квадрилирациональные отображения на три класса:

$$\begin{aligned} [2:2] \quad & \deg_v A = \deg_{\bar{v}} B = \deg_u P = \deg_{\bar{u}} Q = 2; \\ [1:2] \quad & \deg_v A = \deg_{\bar{v}} B = 1, \quad \deg_u P = \deg_{\bar{u}} Q = 2, \quad \text{или наоборот}; \\ [1:1] \quad & \deg_v A = \deg_{\bar{v}} B = \deg_u P = \deg_{\bar{u}} Q = 1. \end{aligned}$$

При этом степени совпадают с максимальными степенями коэффициентов в обеих дробях (4.10). Наиболее богатым и интересным является класс [2:2], к которому относятся все примеры из разделов 4.2, 4.3.

Доказательство теоремы 4.2. Достаточность) Проверим, что решение системы $A = 0$, $B = 0$ относительно любой из пар (\bar{u}, \bar{v}) , (\bar{u}, v) , (u, \bar{v}) , (u, v) задаётся рациональными функциями от двух оставшихся переменных. Это достаточно сделать для первой пары, в силу симметрии вида систем относительно замен $u \leftrightarrow \bar{u}$, $v \leftrightarrow \bar{v}$. В случае (4.4), решая первое уравнение относительно \bar{u} , второе относительно \bar{v} , получаем

$$\bar{u} = f(u, v), \quad \bar{v} = h(u, \bar{u}) = h(u, f(u, v)) = g(u, v),$$

с рациональными f, g, h .

В случае (4.3) сделаем замену одной из переменных $\frac{\alpha\bar{v} + \beta}{\gamma\bar{v} + \delta} \rightarrow \bar{v}$, что, очевидно, не влияет на квадрилирациональность. Это приводит систему к более удобному виду

$$A(u, \bar{u}, v) = 0, \quad A(u, \bar{u}, \bar{v}) = 0. \quad (4.18)$$

Как и в предыдущем случае, из первого уравнения имеем рациональное решение $\bar{u} = f(u, v)$. Второе уравнение квадратично по \bar{v} , но один из корней, очевидно, совпадает с v , поэтому второй находится в рациональном виде $\bar{v} = g(u, v)$. Более строго, второе уравнение системы можно заменить на

$$A_{\bar{u}}(u, \bar{u}, v)A(u, \bar{u}, \bar{v}) - A(u, \bar{u}, v)A_{\bar{u}}(u, \bar{u}, \bar{v}) = (\bar{v} - v)P(v, \bar{v}, u), \quad (4.19)$$

где P многочлен первой степени по \bar{v} (фактически, это формула (4.17), но теперь мы выводим из неё существование P). Таким образом, множество решений системы (4.18) состоит из объединения графика Γ некоторого квадрилирационального отображения F и “лишней” ветви $\bar{v} = v$. Эта ветвь отбрасывается в силу предположения невырожденности (iii). Если $\deg_u P = 2$, то отображение F относится к классу [2:2], если же $\deg_u P = 1$, то к классу [1:2]. Отметим, что в последнем случае, переобозначая переменные $(u, \bar{u}) \leftrightarrow (v, \bar{v})$ можно заменить систему (4.3) на более простую систему вида (4.4). Поэтому, во второй части теоремы 4.3 речь идёт фактически об отображениях класса [2:2].

Необходимость) Случай (4.4) для отображений классов [1:1] и [1:2] следует непосредственно из Леммы 4.8. Остаётся доказать, что квадрилирациональные отображения класса [2:2] задаются уравнениями вида (4.3).

Для отображений из этого класса множитель μ в (4.17) не зависит от u , то есть является аффинно-линейным относительно v, \bar{v} . Кроме того, он неприводим. Действительно, допустим, что $\mu(v_0, \bar{v}) \equiv 0$. Если $v_0 = \infty$ (то есть, $\mu = \mu(\bar{v})$), то определим $K(u, \bar{u})$ как коэффициент при v^2 в A , если же $v_0 \neq \infty$, то положим $K(u, \bar{u}) = A(u, \bar{u}, v_0)$. Тогда из (4.17) следует $K_{\bar{u}}B - KB_{\bar{u}} \equiv 0$, откуда дифференцированием получаем $K_{\bar{u}}B_{\bar{v}} - KB_{\bar{u}\bar{v}} \equiv 0$. Из этих двух равенств следует $VB_{\bar{u}\bar{v}} - B_{\bar{u}}B_{\bar{v}} \equiv 0$, что противоречит условию невырожденности. Итак, μ имеет вид

$$\mu = \gamma v \bar{v} + \delta v - \alpha \bar{v} - \beta, \quad \alpha \delta - \beta \gamma \neq 0.$$

Рассмотрим многочлен

$$C(u, \bar{u}, \bar{v}) = (\gamma \bar{v} + \delta)^2 A\left(u, \bar{u}, \frac{\alpha \bar{v} + \beta}{\gamma \bar{v} + \delta}\right).$$

Из (4.17) следует $C_{\bar{u}}B - CB_{\bar{u}} = 0$, следовательно $B = \nu(u, \bar{v})C$, и так как B и C оба линейны по u и квадратичны по \bar{v} , то $B = \text{const } C$. \square

Для завершения доказательства теоремы 4.3 остаётся доказать следующее утверждение.

Утверждение 4.9. Любое отображение класса [2:2] эквивалентно одному из отображений (F_ω) , по модулю дробно-линейных замен из $(PSL_2(\mathbb{C}))^4$.

Доказательство. Можно считать, что рассматриваемое отображение задано системой (4.18), причём многочлен P из формулы (4.19) имеет вторую степень по u . Этот многочлен тоже задаёт наше отображение, при помощи системы типа (4.3)

$$P(v, \bar{v}, u) = 0, \quad P\left(v, \bar{v}, \frac{\alpha\bar{u} + \beta}{\gamma\bar{u} + \delta}\right) = 0.$$

Делая замену \bar{u} , её можно привести к виду, аналогичному (4.18):

$$P(v, \bar{v}, u) = 0, \quad P(v, \bar{v}, \bar{u}) = 0.$$

Отличие от (4.18) заключается в том, что многочлен P по построению симметричен относительно v, \bar{v} . Итак, мы показали, что отображение класса [2:2] приводится, дробно-линейными заменами двух из четырёх переменных, к виду, симметричному относительно перестановок $u \leftrightarrow \bar{u}$ и $v \leftrightarrow \bar{v}$.

Задача при этом сводится к классификации многочленов $A(u, \bar{u}, v)$, симметричных по u, \bar{u} , но это то же самое, что классификация биквадратичных многочленов $a(u, v) = A(u, u, v)$. Остаётся лишь перебрать ответы, указанные в теореме 2.21. Следует учесть, что таблица 2.4 для рассматриваемой сейчас задачи является избыточной. Напомним, что при её выводе дробно-линейные замены использовались лишь для приведения к каноническому виду многочленов $r_1(u), r_2(v)$, но не для упрощения самих биквадратичных многочленов; кроме того, сейчас нас интересует ответ лишь с точностью до произвольного множителя, и следует отсеивать многочлены степени ниже второй по любой из переменных. В результате, вся таблица 2.4 сводится к многочленам $a(u, v)$ вида

$$u^2v^2 + u^2 + v^2 + \gamma uv + \delta, \quad u^2 + v^2 + \gamma uv + \delta, \quad (u - v)^2 + u + v.$$

Прямая проверка показывает, что отображения, отвечающие системе (4.18) с $A(u, \bar{u}, v) = 2a\left(\frac{u+\bar{u}}{2}, v\right) - \frac{1}{2}a(u, v) - \frac{1}{2}a(\bar{u}, v)$ принадлежат орбитам отображений (F_ω) , при любом выборе констант γ, δ . \square

В заключение, обсудим коротко отображения, отвечающие системам типа (4.4). Рассмотрим нули квадратичных многочленов $a(v) = \delta_{u, \bar{u}}A = A_u A_{\bar{u}} - A A_{u, \bar{u}}$ и $b(\bar{v}) = \delta_{u, \bar{u}}B$. Они отвечают тем значениям v и \bar{v} , при которых многочлены A и B становятся приводимыми. В случае общего положения эти нули простые и дробно-линейные замены позволяют перевести их в 0 и ∞ , при этом система (4.4) приводится к виду

$$\begin{aligned} v(u - \mu_1)(\bar{u} - \nu_1) + (u - \mu_2)(\bar{u} - \nu_2) &= 0, \\ \bar{v}(u - \mu_3)(\bar{u} - \nu_3) + (u - \mu_4)(\bar{u} - \nu_4) &= 0 \end{aligned}$$

с некоторыми $\mu_i, \nu_i \in \mathbb{CP}^1$. Опять, в случае общего положения, каждая четвёрка μ_i и ν_i состоит из простых точек, три из которых можно перевести в 0, 1, ∞

подходящими дробно-линейными преобразованиями по u и \bar{u} . В результате, вид системы можно упростить до

$$v(\bar{u} - \nu) = u(\bar{u} - 1), \quad \bar{v}(u - \mu) = (u - 1)\bar{v},$$

что приводит к отображению

$$\bar{u} = \frac{u - \nu v}{u - v}, \quad \bar{v} = \frac{(u - \nu v)(u - 1)}{(u - v)(u - \mu)}. \quad (4.20)$$

Это и есть представитель двухпараметрической орбиты общего положения из класса [1:2]. Можно перечислить и вырождения, получающиеся при совпадении некоторых из точек μ_i или ν_i , а также при кратных нулях многочленов $a(v)$ или $b(\bar{v})$. Все эти случаи приводят к орбитам меньшей размерности. В частности, линейризуемое отображение (4.8), не содержащее параметров, является представителем общей орбиты из класса [1:1]. Этот пример показывает, что отображения вида (4.4) также могут быть 3D-совместными, однако классификация 3D-совместных троек отсутствует. Судя по всему, такие тройки, вообще говоря, состоят из отображений, принадлежащих разным орбитам и даже разным классам (ср. с примерами смешанных троек квад-уравнений из раздела 2.6). Ограничимся лишь одним примером.

Пример 4.10. Рассмотрим отображение

$$G_{\alpha,\beta}(u, v) \mapsto (\bar{u}, \bar{v}), \quad \bar{u} = \frac{(\beta u - \alpha v)(v - 1)}{(u - v)(v - \beta)}, \quad \bar{v} = \frac{\beta u - \alpha v}{\alpha(u - v)},$$

эквивалентное (4.20), и отображение

$$F_{\alpha,\beta}(u, v) \mapsto (\bar{u}, \bar{v}), \quad \bar{u} = \frac{(\beta u - \alpha v)(v - 1)}{(u - v)(v - \beta)}, \quad \bar{v} = \frac{(\beta u - \alpha v)(u - 1)}{(u - v)(u - \alpha)},$$

эквивалентное (F1) (при инволюции $u^i \mapsto \alpha_i(u^i - 1)/(u^i - \alpha_i)$). Тогда следующие отображения совместны на кубе:

$$\begin{aligned} (u_2^1, u_1^2) &= G_{\alpha,\beta}(u^1, u^2), & (u_3^1, u_1^3) &= G_{\alpha,\gamma}(u^1, u^3), & (u_3^2, u_2^3) &= F_{\beta,\gamma}(u^2, u^3), \\ (u_{23}^1, u_{13}^2) &= G_{\alpha,\beta}(u_3^1, u_2^2), & (u_{23}^1, u_{12}^3) &= G_{\alpha,\gamma}(u_2^1, u_2^3), & (u_{13}^2, u_{12}^3) &= F_{\frac{\beta}{\alpha}, \frac{\gamma}{\alpha}}(u_1^2, u_1^3). \end{aligned}$$

4.5 Многополевые обобщения

Легко видеть, что в конструкции из раздела 4.2 коники могут быть заменены на квадрики произвольной размерности. Действительно, все точки q_j^i, q_{jk}^i , участвующие в определении 3D-совместности, лежат в двумерной плоскости, проходящей через начальные точки q^1, q^2, q^3 , и рассматривая сечение квадратик этой плоскостью, мы возвращаемся к теореме 4.5. При таком обобщении мы получаем квадрирациональные отображения на $\mathbb{C}\mathbb{P}^d \times \mathbb{C}\mathbb{P}^d$, пользуясь параметризацией квадратик при помощи стереографической проекции.

Другая возможность заключается в том, чтобы поднять рассматриваемое отображение Φ до отображения на объемлющем пространстве. Отображение (4.5) задано на многообразии $\mathbb{C}\mathbb{P}^1 \times \mathbb{C}\mathbb{P}^1$, реализованном как пара коник из линейного пучка, отвечающих двум заранее выбранным параметрам α, β . Однако, можно не фиксировать эти параметры заранее, а определять по начальным точкам $p, q \in \mathbb{C}\mathbb{P}^2$. Поскольку через каждую точку плоскости (не принадлежащую локусу) проходит единственная коника из пучка, это поднимает отображение Φ до квадрилирационального отображения на $\mathbb{C}\mathbb{P}^2 \times \mathbb{C}\mathbb{P}^2$. Нетрудно видеть, что это отображение 3D-совместно, так как при любых неособых начальных данных $q^1, q^2, q^3 \in \mathbb{C}\mathbb{P}^2$ мы возвращаемся к ситуации, описанной в теореме 4.5; отличие только в том, что теперь не точки q^i выбираются на кониках Q^i , а коники проводятся через заданные точки.

Ещё один, более интересный способ поднятия заключается в том, чтобы сохранить параметры α, β , но ослабить требование, что коники принадлежат линейному пучку. В данном случае удобно перейти к аффинным координатам. Пусть \langle, \rangle обозначает евклидово скалярное произведение, тогда линейный пучок коник на \mathbb{C}^2 или \mathbb{R}^2 записывается в виде

$$Q_\lambda : \quad Q(x, \lambda) = \langle x, (\lambda S + T)x \rangle + \langle \lambda s + t, x \rangle + \lambda \sigma + \tau = 0, \quad (4.21)$$

где S, T симметричные матрицы, s, t векторы, σ, τ скаляры. Пусть $p \in Q_\alpha$ и $q \in Q_\beta$. В результате несложных вычислений для двух других точек пересечения коник с прямой pq получаются формулы

$$\begin{aligned} \bar{p} &= q + \frac{(\alpha - \beta)(\langle q, Sq \rangle + \langle s, q \rangle + \sigma)}{\langle p - q, (\alpha S + T)(p - q) \rangle} (p - q), \\ \bar{q} &= p + \frac{(\alpha - \beta)(\langle p, Sp \rangle + \langle s, p \rangle + \sigma)}{\langle p - q, (\beta S + T)(p - q) \rangle} (p - q). \end{aligned} \quad (4.22)$$

Это не единственная форма записи, поскольку её можно менять в силу соотношений $Q(p, \alpha) = Q(q, \beta) = 0$. Например, если исключить отсюда α, β , то мы придём к поднятию, описанному выше. Формулы (4.22) замечательны тем, что в них исключены другие параметры, а именно, не участвуют вектор t и скаляр τ . Оказывается, что это тоже позволяет интерпретировать начальные точки p, q как свободные точки на плоскости, или в пространстве, если перейти от коник к квадратам.

Утверждение 4.11. Формулы (4.22) определяют 3D-совместное отображение $\mathbb{C}^d \times \mathbb{C}^d \rightarrow \mathbb{C}^d \times \mathbb{C}^d$ для любой размерности d .

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай $d = 2$. В этом случае вектор t и скаляр τ содержат три параметра, и их можно определить из уравнений $Q(q^1, \alpha_1) = Q(q^2, \alpha_2) = Q(q^3, \alpha_3) = 0$. Действительно, нетрудно видеть, что эти уравнения представляют собой линейную систему относительно t, τ , невырожденную в случае общего положения (определитель равен нулю, если и только если точки q^i коллинеарны). Вычислив t, τ , мы получаем линейный пучок коник (4.21) и можем применить теорему 4.5. \square

Отметим, что отображение (4.22) сохраняет смысл и для скалярного случая $d = 1$, и при различном выборе параметров приводит к отображениям (F_{II}) – (F_V) .

Комментарии к главе 4

Глава основана на работе Адлера, Бобенко и Суриса [16].

▷ Абстрактное определение отображений Янга-Бакстера было введено Дринфельдом [63], под именем теоретико-множественных решений уравнения Янга-Бакстера. Ряд примеров для случая, когда X конечное множество, был найден Хиетаринтой [81], классификационные результаты для этого случая получены Этингофом, Шедлером и Соловьёвым [67], см. также работу Лу, Яна и Жу [111].

▷ В этой главе нас интересует случай, когда X алгебраическое многообразие, а R бирациональный изоморфизм на $X \times X$. В работе Этингофа [66] такие отображения называются “рациональной теоретико-множественной R -матрицей”. Термин “отображения Янга-Бакстера”, которого мы придерживаемся, предложен Веселовым в статьях [183, 184]. В этих работах исследовалась связь таких отображений с понятием интегрируемости, в частности, были введены коммутирующие отображения монодромии и представления Лакса. Общая конструкция представлений Лакса дана Сурисом и Веселовым [169].

▷ Термин “квадринациональное отображение” введён в [16], вместо “невырожденного отображения” из [66].

▷ В [63] рассматривался следующий пример отображения Янга-Бакстера:

$$\tilde{u}_i = 1 - u_i + u_i u_{i+1}, \quad \tilde{u}_{i+1} = \frac{u_i u_{i+1}}{1 - u_i + u_i u_{i+1}}, \quad \tilde{u}_j = u_j, \quad j \neq i, i + 1.$$

Это отображение совпадает с сопутствующим для отображения (4.8) и является линейризуемым.

▷ Пять проективных типов линейных пучков коник подробно рассматриваются в книге Берже [39].

▷ Вывод отображений Янга-Бакстера из квад-уравнений, близкий к представленному в разделе 4.3, рассматривался в работе Папагеоргиу, Тонгаса и Веселова [141]. В ней отмечено, что использование многомерной решётки (возможное в силу 3D-совместности) позволяет построить башню замен, связывающую все рассматриваемые отображения. Следует отметить также, что замены указанные в теореме 4.7 согласованы с непрерывной динамикой, определяемой соответствующими одевающими цепочками и уравнениями типа КдФ. Это позволяет интерпретировать данные замены как дифференциальные подстановки типа преобразования Миуры, при этом инварианты точечной группы удовлетворяют модифицированным уравнениям типа КдФ (простейший пример, связанный с (F_V) подробно обсуждался в главе 1, см. также раздел 2.4).

На уровне цепочек башня замен типа Миуры рассматривалась, в частности, в работе [191] и в кандидатской диссертации автора.

▷ В частности, отображение (F_I) связано с преобразованием Бэклунда для экспоненциального уравнения Калоджеро-Дегаспериса, и, как указано в работе [141], также с преобразованием Бэклунда для уравнения Эрнста. Пример F_V рассматривался Адлером [3] в связи с преобразованиями Дарбу для уравнения Шрёдингера, см. раздел 1.2.

▷ Доказательство утверждения 4.9, приведённое в [16], основано на довольно трудоёмком анализе сингулярных решений (как и в разделе 2.5.1 для квадратичных уравнений). Достоинством этого подхода является то, что он сразу приводит к отображениям в форме (F_ω) , в отличие от элементарного доказательства, представленного в диссертации. По-видимому, анализ сингулярных решений может привести и к общей классификации совместных отображений на кубе.

▷ Ряд примеров, выходящих за рамки рассматриваемых здесь отображений на $\mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1$ и их обобщений из раздела 4.5, содержится в работах [66, 183], Гончаренко, Веселова [78], Папагеоргиу, Тонгаса [142].

Глава 5

Уравнения типа Тоды

В этой главе приводится ряд результатов для дискретных и дифференциально-разностных уравнений типа Тоды. Среди дискретных наиболее фундаментальными являются уравнения, возникающие из квад-уравнений на двудольных квад-графах при ограничении на вершины одного типа. Возможность такого ограничения обеспечивается трёхной формой квад-уравнений. Для приложений особенно важны уравнения на квадратной и треугольной решётках, являющиеся разностными аналогами цепочек Тоды и Рудженарса-Тоды. Основные примеры связаны с дискретизациями уравнения Ландау-Лифшица. Для уравнений специального вида, инвариантных относительно сдвига $u \rightarrow u + a$, развивается альтернативный, более простой подход, основанный на так называемом преобразовании дуальности. Оказывается нетрудным получить списки дискретных уравнений и цепочек, допускающих это преобразование.

5.1 Дискретные уравнения типа Тоды на графе

В этой главе рассматриваются графы, вложенные в ориентированную двумерную поверхность. Множества вершин, рёбер и граней графа G обозначаются, соответственно, $V(G)$, $E(G)$ и $F(G)$. Дуальный граф G^* строится следующим образом: каждая грань G отождествляется с произвольно выбранной на ней точкой (служащей вершиной для G^*), а каждое ребро G заменяется на пересекающее его ребро, связывающее выбранные точки в смежных гранях. Будем предполагать, что граф G односвязный, тогда $G^{**} = G$. Кроме того, будем предполагать, что в графах G и G^* нет петель и двойных рёбер. Отсюда следует также, что в них нет граней, смежных с собой, и граней, смежных по нескольким рёбрам.

Под дискретными уравнениями типа Тоды на графе G будут пониматься уравнения вида

$$\sum_{j:(i,j) \in E(G)} f_{ij}(u_i, u_j) = 0, \quad i \in V(G) \quad (5.1)$$

относительно полевых переменных u_i , приписанных вершинам графа. Урав-

нения такого типа могут служить дискретным аналогом эллиптических уравнений, например, описывать равновесное положение системы шариков, соединённых пружинами (отвечающими рёбрам графа). В случае регулярных решёток такие уравнения могут описывать также эволюционную систему, если одно из направлений на \mathbb{Z}^2 интерпретировать как дискретную пространственную переменную, а второе как дискретное время.

Представление нулевой кривизны для уравнений (5.1) определяется в терминах ψ -функций $\psi_a(\lambda)$, заданных в вершинах a дуального графа G^* (то есть, на гранях G), и связывающих их матриц перехода вдоль рёбер G^* (то есть, поперёк рёбер G):

$$\psi_b = L_{ba}(\lambda)\psi_a,$$

с некоторой матрицей, зависящей от полевых переменных u и спектрального параметра λ .

Определение 5.1. Матрицы L задают представление нулевой кривизны для уравнения (5.1) если оно эквивалентно следующему условию: для любого замкнутого пути вдоль рёбер дуального графа произведение соответствующих матриц равно скалярной матрице.

Проверка того, что данный набор матриц L определяет представление нулевой кривизны сводится к проверке для двух элементарных типов путей на G^* : переход по ребру и обратно; циклический обход вокруг грани (или, в терминах G , обход вокруг вершины по инцидентным с ней граням, см. рис. 5.1). Эти условия записываются в виде

$$L_{ab}L_{ba} = \text{const } I, \quad (5.2)$$

$$L_{a_1, a_N} L_{a_N, a_{N-1}} \cdots L_{a_2, a_1} = \text{const } I. \quad (5.3)$$

Нетрудно видеть, что в силу первого равенства начальная точка и направление обхода во втором равенстве несущественны.

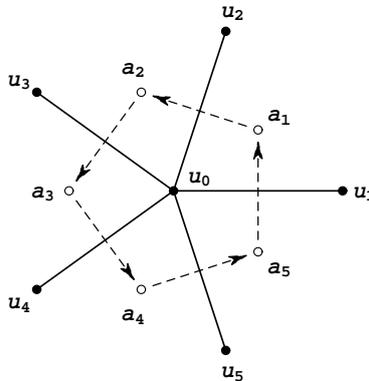


Рис. 5.1. Обход вокруг вершины

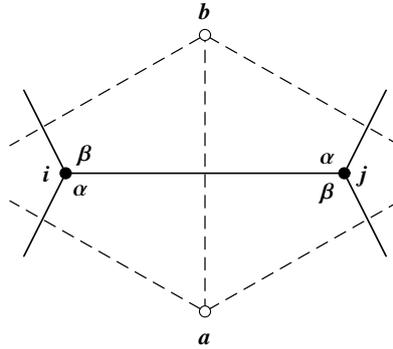


Рис. 5.2. Обозначения для вершин G^* и разметка углов:

$$\begin{aligned} a &= a_{ij}^- = a_{ji}^+, & b &= a_{ij}^+ = a_{ji}^-, \\ \alpha &= \alpha_{ij}^- = \alpha_{ji}^+, & \beta &= \alpha_{ij}^+ = \alpha_{ji}^-. \end{aligned}$$

Данное определение является весьма общим. Не исключается случай, когда законы взаимодействия соседей, определяемые функциями f_{ij} в (5.1), различны для разных рёбер. Соответственно, структура матриц L , определяющих переход через эти рёбра, также может быть разной. Несколько примеров такого типа, на квадратной и треугольной решётках, будет указано в разделе 5.4. Пока же мы рассмотрим такие законы взаимодействия, чтобы отвечающие им уравнения допускали представления нулевой кривизны независимо от структуры графа. Прежде чем привести пример, показывающий, что такие уравнения вообще существуют, дадим следующее определение.

Пусть в каждой грани a графа G каждому углу с вершиной i приписан некоторый параметр $\alpha(a, i)$. Будем говорить, что этот набор параметров на G является *разметкой*, если для каждого ребра (i, j) , разделяющего грани a и b , выполняются равенства (см. рис. 5.2)

$$\alpha(a, i) = \alpha(b, j), \quad \alpha(b, i) = \alpha(a, j). \quad (5.4)$$

Чтобы упростить обозначения, удобно воспользоваться взаимной ориентацией дуальных рёбер $(i, j) \in E(G)$ и $(a, b) \in E(G^*)$, индуцированной ориентацией поверхности. Положим

$$a = a_{ij}^- = a_{ji}^+, \quad b = a_{ij}^+ = a_{ji}^-, \quad (5.5)$$

если пара направленных рёбер (i, j) и (a, b) имеет положительную ориентацию в точке пересечения. (Например, можно считать, что при переходе из грани a в b через ребро (i, j) вершина i оказывается слева, как на рис. 5.2). Для параметров тогда можно принять обозначение $\alpha_{ij}^\pm = \alpha(a_{ij}^\pm, i)$. При этом условие разметки запишется, как

$$\alpha_{ij}^\pm = \alpha_{ji}^\pm.$$

Пример 5.2. В качестве простейшего примера рассмотрим, на графе с заданной разметкой, уравнение вида

$$\sum_{j:(i,j) \in E(G)} \frac{\alpha_{ij}^+ - \alpha_{ij}^-}{u_i - u_j} = 0, \quad i \in V(G). \quad (5.6)$$

Отметим, что оно является уравнением Эйлера-Лагранжа $\delta\mathcal{L} = 0$ для функционала

$$\mathcal{L} = \sum_{(i,j) \in E_G} (\alpha_{ij}^+ - \alpha_{ij}^-) \log(u_i - u_j).$$

Покажем, что это уравнение обладает представлением нулевой кривизны с матрицами

$$L_{\alpha_{ij}^+, \alpha_{ij}^-} = L(u_i, u_j; \alpha_{ij}^-, \alpha_{ij}^+; \lambda),$$

где

$$L(u, v; \alpha, \beta; \lambda) = (\lambda - \alpha)I + (\alpha - \beta)S(u, v), \quad S(u, v) = \frac{1}{u - v} \begin{pmatrix} u & 1 \\ -uv & -v \end{pmatrix}.$$

При этом условия (5.2) и (5.3) записываются в виде

$$L(v, u; \alpha, \beta; \lambda)L(u, v; \alpha, \beta; \lambda) = \text{const } I, \\ L_N \dots L_2 L_1 = \text{const } I, \quad L_n = L(u_0, u_n; \alpha_{n-1}, \alpha_n; \lambda),$$

где $\alpha_n = \alpha_{0,n}^+ = \alpha_{0,n+1}^-$ угловые параметры в вершине 0, при нумерации инцидентных с ней вершин по циклу от $n = 1$ до $n = N$, как на рис. 5.1.

Легко проверить тождества

$$S(u, v) + S(v, u) = I, \quad S(u, v)S(u, w) = S(u, v),$$

откуда находим

$$L(v, u; \alpha, \beta; \lambda)L(u, v; \alpha, \beta; \lambda) = (\lambda - \alpha)(\lambda - \beta)I.$$

Далее, используя свойство $S_m S_n = S_m$, где $S_n = S(u_0, u_n)$, нетрудно доказать по индукции формулу

$$L_n \dots L_1 = (\lambda - \alpha_{n-1}) \dots (\lambda - \alpha_1) \\ \times ((\lambda - \alpha_N)I + (\alpha_N - \alpha_1)S_1 + (\alpha_1 - \alpha_2)S_2 + \dots + (\alpha_{n-1} - \alpha_n)S_n),$$

и тогда условие $L_N \dots L_2 L_1 = (\lambda - \alpha_N) \dots (\lambda - \alpha_1)I$ сводится к равенству

$$(\alpha_N - \alpha_1)S_1 + (\alpha_1 - \alpha_2)S_2 + \dots + (\alpha_{N-1} - \alpha_N)S_N = 0,$$

что эквивалентно (5.6). Из этого вычисления уже видно, что выполнение тождества (5.3) для вершины любой валентности происходит благодаря определённого телескопическому сокращению “лишних” членов, возникающих при перемножении матриц L_n . Механизм этого сокращения полностью объясняется в следующем разделе.

5.2 Связь с уравнениями на квад-графах

Пусть G граф, вложенный в двумерную поверхность, со всеми оговорками сделанными в начале предыдущего раздела. Имеется простая конструкция, позволяющая построить по нему некоторый квад-граф G^+ , вложенный в эту же поверхность. Именно, к вершинам G^+ отнесём вершины самого графа G и его дуального G^* ; в качестве рёбер рассмотрим кривые на поверхности, соединяющие вершины $i \in G$ и вершины $a \in G^*$, отвечающие граням, инцидентным с i . При этом грани G^+ будут четырёхугольниками, у которых диагоналями служат взаимно дуальные рёбра $(i, j) \in E(G)$ и $(a, b) \in E(G^*)$. Такой квад-граф G^+ называется *дублем* G (см. рис. 5.3). Наоборот, пусть квад-граф Γ *двудольный*, то есть, его вершины разбиты на два подмножества (на рисунках они отличаются цветом) и рёбра соединяют вершины разного типа. Тогда два графа, рёбрами которых служат диагонали квад-графа, соединяющие вершины одного типа, дуальны друг другу.

Нетрудно видеть, что при таком соответствии правило (5.4) разметки углов графа G есть не что иное как уже знакомое нам из раздела 3.1 правило разметки рёбер квад-графа G^+ , ср. рис. 5.2 и 5.4

Замечательным образом, и сами дискретные цепочки Тоды тесно связаны с квад-уравнениями. Эта связь возникает благодаря трёхногой форме послед-

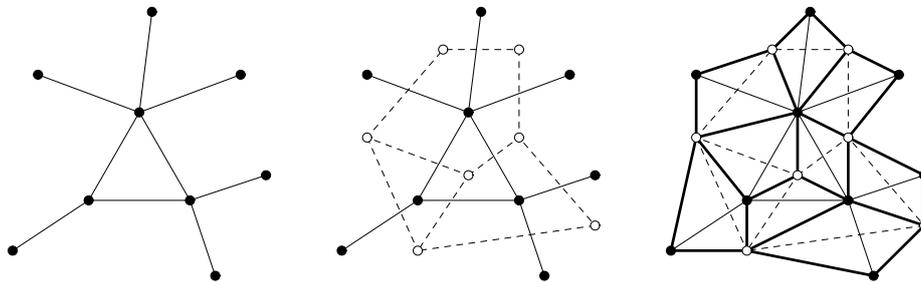


Рис. 5.3. Граф G , дуальный граф G^* , дубль G^+ .

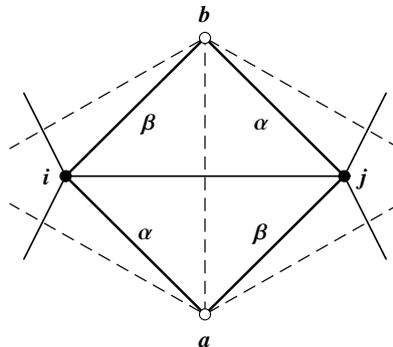


Рис. 5.4. Разметка рёбер дубля G^+

них. Действительно, пусть на дубле G^+ задано решение квад-уравнения (2.5) со свойством симметрии квадрата (2.6), (2.7) и обладающего трёхной формой (2.28)

$$f(u, u_{ij}; \alpha_i, \alpha_j) = g(u, u_i; \alpha_i) - g(u, u_j; \alpha_j).$$

Суммирование этих соотношений для граней квад-графа, инцидентных данной вершине валентности N даёт

$$\sum_{i \in \mathbb{Z}_N} f(u, u_{i, i+1}; \alpha_i, \alpha_{i+1}) = 0,$$

что отличается от (5.1) лишь способом нумерации вершин (ср. рис. 5.1 и 5.5). В обозначениях из предыдущего раздела это уравнение запишется как

$$\sum_{j: (i, j) \in E(G)} f(u_i, u_j; \alpha_{ij}^-, \alpha_{ij}^+) = 0, \quad i \in V(G). \quad (5.7)$$

Ясно, что такие же уравнения возникают и для вершин из G^* , и система квад-уравнений на G^+ распадается на две системы типа Тоды на G и G^* .

Если, наоборот, дано решение уравнения (5.7) на G , с функциями f из трёхной формы некоторого квад-уравнения, то его можно продолжить до решения этого квад-уравнения на G^+ . Для этого достаточно выбрать, произвольным образом, значение u в одной из вершин G^* . Так как граф G^* односвязный, то значения в остальных вершинах можно вычислить при помощи самого квад-уравнения. То, что эти значения будут совпадать независимо от порядка вычислений, то есть, при разных обходах G^* , следует из совпадения при обходе вокруг одной вершины, но это как раз обеспечивается трёхной формой уравнения. При этом мы фактически приходим к понятию представления нулевой кривизны, с переменными на G^* выступающими в роли ψ -функций. Прежде чем сформулировать точный результат, следует оговориться, что указанное соответствие между уравнениями типа Тоды и квад-уравнениями не является взаимно-однозначным.

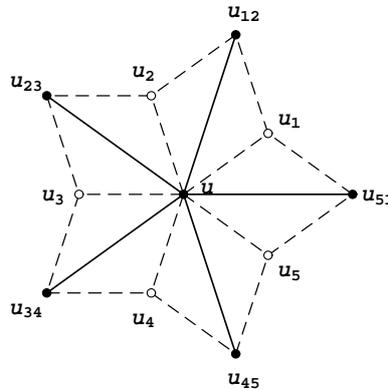


Рис. 5.5. Суммирование трёхных форм

Во-первых, из таблицы 2.3 трёхногих форм видно, что “длинные ноги” f совпадают для уравнений (Q_3^0) и (H_3^δ) , (Q_1^1) и (H_2) , (Q_1^0) и (H_1) , поэтому эти пары квад-уравнений порождают одни и те же уравнения типа Тоды. Например, уравнение (5.6) получается как из (Q_1^0) , так и из (H_1) .

Во-вторых, имеется неоднозначность при восстановлении параметров квад-уравнения. Из таблицы видно, что все “длинные ноги” зависят лишь от разности параметров $\alpha - \beta$ (в случае (Q_3^0) - (H_3^δ) , после замены $\alpha \rightarrow e^\alpha$). Поэтому данному уравнению типа Тоды отвечает однопараметрическое семейство порождающих его квад-уравнений

$$Q(u, u_i, u_j, u_{ij}; \alpha_i + \lambda, \alpha_j + \lambda) = 0, \quad (5.8)$$

причём нетрудно убедиться, что в самом уравнении зависимость от λ не пропадает, за исключением случаев (H_1) и (H_3^0) . Это обстоятельство позволяет доказать следующую теорему.

Теорема 5.3. Все уравнения типа Тоды, возникающие из уравнений списка 2.1 при ограничении на вершины одного типа на двудольном квад-графе, обладают представлениями нулевой кривизны в смысле определения 5.1.

Доказательство. Достаточно переписать (5.8) как дробно-линейное преобразование переменных на одной диагонали квадрата (принадлежащей $E(G^*)$), с коэффициентами зависящими от переменных на второй диагонали (принадлежащей $E(G)$):

$$u_j = L(u, u_{ij}, \alpha_i + \lambda, \alpha_j + \lambda)[u_i].$$

Нормированная матрица этого преобразования и служит матрицей перехода вдоль рёбер $E(G^*)$. Выполнение тождества (5.3) следует из сокращения переменных u_i при суммировании трёхногих форм.

В случае уравнений (H_1) и (H_3^0) зависимость от λ пропадает, как было сказано выше, поэтому построенные таким образом матрицы не представляют интереса. Вместо них годятся матрицы, построенные, соответственно, по уравнениям (Q_1^0) и (Q_3^0) , приводящим к тем же самым уравнениям Тоды (в частности, по (Q_1^0) строятся матрицы из примера 5.2). \square

Существует ли интегрируемое уравнение типа Тоды, которое нельзя получить из некоторого квад-уравнения, в настоящее время неизвестно. В разделе 5.4 для случая треугольной решётки будет предложена некоторая специальная конструкция, приводящая к списку уравнений типа Тоды, в котором попадаются примеры с разными функциями f на рёбрах, в отличие от (5.7). Однако, они тоже получаются из квад-уравнений, если отказаться от симметричности и размещать на гранях квад-графа уравнения разного вида. Всё, что нужно при этом обеспечить, это взаимное сокращение “коротких ног” g . Понятно, что систематическое исследование таких обобщений весьма утомительно, и мы не будем его проводить.

На произвольном графе рассмотрим только один пример, связанный с понижением симметрии квад-уравнения до симметрии ромба. При этом вид трёхногой формы отличается в зависимости от того, относится ли вершина трёхногой формы к графу G или G^* , но так как при суммировании вокруг вершины используются формулы одного типа, то “короткие ноги” g сокращаются, как и раньше. Отличие от симметричного случая заключается в том, что уравнения на G и G^* определяются разными функциями f . Тем не менее, для квад-уравнений $(H_3^{\delta,\varepsilon})$, (H_2^ε) , (H_1^ε) из раздела 2.6 можно проверить, что при этом новых уравнений Тоды не возникает.

Пример 5.4. Рассмотрим уравнение (H_1^ε) при $\varepsilon = -1$ (без потери общности), переписав его в виде

$$(u - \tilde{u})(v - \tilde{v}) + (\beta - \alpha)(1 - u\tilde{u}) = 0.$$

Переменные u, \tilde{u} отнесём к графу G , а переменные v, \tilde{v} к G^* , и будем считать, что параметры α и β приписаны, соответственно, рёбрам (u, v) и (u, \tilde{v}) . Трёхногая форма с центром u очевидна:

$$(\beta - \alpha) \frac{1 - u\tilde{u}}{u - \tilde{u}} = \tilde{v} - v.$$

Может показаться, что это даёт новую цепочку Тоды, поскольку “длинная нога” не содержится в таблице 2.3, но это не так. Действительно, можно переписать эквивалентно

$$(\beta - \alpha) \frac{1 - u^2}{u - \tilde{u}} = (\tilde{v} - \beta u) - (v - \alpha u)$$

откуда видно, что после суммирования и сокращения общего множителя $1 - u^2$ мы получим уже знакомое нам уравнение (5.6).

Чтобы найти трёхногую форму с центром u , перепишем уравнение в виде

$$p = \frac{1 - u\tilde{u}}{u - \tilde{u}} = \frac{\tilde{v} - v}{\beta - \alpha}$$

и заметим, что $p \pm 1 = (1 \pm u)(1 \mp \tilde{u}) / (u - \tilde{u})$. Отсюда следует мультипликативная трёхногая форма

$$\frac{\tilde{v} - v + \alpha - \beta}{\tilde{v} - v - \alpha + \beta} = \frac{1 + \tilde{u}}{1 - \tilde{u}} \Big/ \frac{1 + u}{1 - u},$$

с той же “длинной ногой”, что и для симметричных квад-уравнений (Q_1^1) и (H_2) . Соответствующее уравнение на G^* имеет вид

$$\prod_{j:(i,j) \in E(G^*)} \frac{v_j - v_i + \alpha_{ij}^+ - \alpha_{ij}^-}{v_j - v_i - \alpha_{ij}^+ + \alpha_{ij}^-} = 1, \quad i \in V(G^*).$$

5.3 Уравнения типа Тоды на треугольной решётке

Теория уравнений на произвольных графах является, пожалуй, слишком общей. Для приложений более важен случай регулярных решёток, хотя бы потому что для них можно рассматривать предельные переходы к непрерывным моделям. Квадратная решётка с *5-точечными* уравнениями типа Тоды

$$f(u, u_1) + \bar{f}(u, u_{-1}) + g(u, u_2) + \bar{g}(u, u_{-2}) = 0 \quad (5.9)$$

является, конечно, наиболее простым примером. Более интересной оказывается треугольная решётка с *7-точечными* уравнениями

$$f(u, u_1) + \bar{f}(u, u_{-1}) + g(u, u_2) + \bar{g}(u, u_{-2}) + h(u, u_{1,2}) + \bar{h}(u, u_{-1,-2}) = 0 \quad (5.10)$$

(в этом и следующих разделах индекс i будет обозначать сдвиг по i -му координатному направлению, $-i$ обратный сдвиг). Как и раньше, уравнения типа Тоды будут трактоваться, как ограничение некоторой системы квад-уравнений на вершины одного типа в двудольном квад-графе. Специфические и красивые свойства *7-точечных* уравнений связаны с тем, что треугольная решётка естественным образом реализуется, как секущая плоскость решётки \mathbb{Z}^3 , ортогональная какой-либо из больших диагоналей кубической ячейки. Таким образом, в игру вступает свойство 3D-совместности, которое до сих пор явно не использовалось (правда, свойство трёхности ему практически эквивалентно, как показано в разделе 2.3).

Предположим, что рассматриваемое уравнение имеет вид

$$f(u, u_1, \gamma - \alpha) + f(u, u_{-1}, \gamma - \alpha) + f(u, u_2, \beta - \gamma) + f(u, u_{-2}, \beta - \gamma) + f(u, u_{1,2}, \alpha - \beta) + f(u, u_{-1,-2}, \alpha - \beta) = 0, \quad (5.11)$$

где функция f определяет одну из “длинных ног” в таблице 2.3, после перехода к аддитивной записи. Параметры α, β, γ будем считать, для простоты, постоянными на всей решётке.

Теорема 5.5. Существует рациональное отображение $T : \tilde{u} = R(u, u_1, u_{1,2})$, переводящее решения уравнения (5.11) в решения. Это отображение обратимо в силу уравнения, и обратное имеет вид $T^{-1} : u = R(\tilde{u}, \tilde{u}_{-1}, \tilde{u}_{-1,-2})$. Трёхмерная решётка, порождённая итерациями отображения T , изоморфна чётной подрешётке $\{(m, n, k) \in \mathbb{Z}^3 : m + n + k \in 2\mathbb{Z}\}$ кубической решётки, и несёт на себе, помимо (5.11), ещё три *7-точечных* уравнения типа Тоды, а также три *5-точечных*.

Доказательство. Разместим переменные u на плоскости $m - n - k = 0$, делая переобозначение $u(m, n) \rightarrow u(m, n, m - n)$. При этом каждому члену в уравнении (5.11) будет отвечать диагональ некоторой квадратной ячейки, то

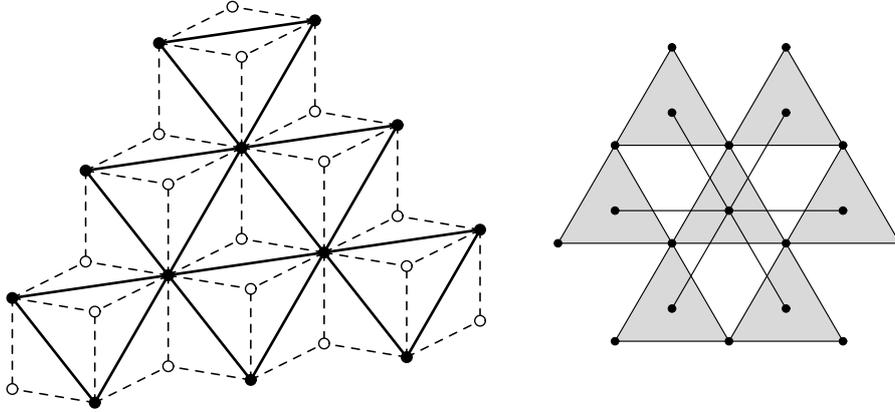


Рис. 5.6. Вложение треугольной решётки в кубическую; отображение T

есть дубль треугольной решётки будет реализован как поверхность в \mathbb{Z}^3 (она изображена на рис. 5.6). Нетрудно убедиться, что параметры α, β, γ отвечают при этом координатным направлениям. Сопоставим каждой квадратной грани в \mathbb{Z}^3 квад-уравнение, отвечающее данной функции f , и зададим дополнительное начальное значение u в одной вершине дуального графа. Пользуясь 3D-совместностью, продолжим решение на \mathbb{Z}^3 . При этом переменные $u(m, n, m - n \pm 2)$ будут лежать в плоскостях, параллельных исходной, и удовлетворять уравнению (5.11). В силу свойства тетраэдральности (см. раздел 2.1), для вычисления этих переменных нужны только исходные значения u . Это и приводит к отображениям $T^{\pm 1}$.

Дополнительные 7-точечные уравнения возникают при ограничении построенного решения на плоскости $m - n + k = \text{const}$, $m + n - k = \text{const}$ и $m + n + k = \text{const}$, а 5-точечные при ограничении на координатные плоскости. \square

Как уже отмечалось в предыдущем разделе, продолжение решения на дуальную решётку неединственно, из-за совпадений в списке ног и сдвига параметров; кроме того, имеется произвол в выборе дополнительного начального данного. Соответственно, неединственно и продолжение решения на всю решётку \mathbb{Z}^3 . Тем не менее, нетрудно видеть, что ограничение этого продолжения на чётную подрешётку единственно. Действительно, отображение T , рассматриваемое как квад-уравнение, имеет трёхногую форму, в которую входят только заданные функции f .

Параметры на кубической решётке могут меняться вдоль соответствующего направления, так как можно считать, что α, β, γ зависят, соответственно, от m, n, k . Это приводит к уравнениям (5.11) с переменными параметрами, подчиняющимися условию разметки (5.4).

5.4 Преобразования дуальности на треугольной решётке

5.4.1 Преобразования дуальности

В этом разделе мы рассмотрим весьма частный класс 7-точечных уравнений общего вида

$$(T_1 - 1)f(x) + (T_2 - 1)g(y) + (T_1T_2 - 1)h(z) = 0, \quad (5.12)$$

где x, y, z обозначают разности

$$x = u - u_{-1}, \quad y = u - u_{-2}, \quad z = u - u_{-1,-2}.$$

Чтобы исключить 5-точечные уравнения, будем предполагать, что $f'g'h' \neq 0$. Этот класс уравнений не так важен, как (5.11): из таблицы 2.3 следует, что в нём не содержится уравнений, связанных с (Q_4) , (Q_3^1) и (Q_2) . С другой стороны, упрощение вида уравнений позволяет выработать альтернативный подход к классификации, приняв к качеству определения наличие преобразования T из теоремы 5.5. При этом не предполагается, что оно рационально и как-то связано с ранее изучавшимися квад-уравнениями. Помимо методического значения, это даёт также несколько примеров, которые не содержатся в классе (5.11), поскольку отвечают разным функциям f, g, h .

Отметим, что любая из переменных x, y, z выражается через две другие, например $z = x + y_{-1} = y + x_{-2}$, и выполняется тождество

$$(T_1 - 1)y_2 = (T_2 - 1)x_1. \quad (5.13)$$

Уравнение (5.12) допускает закон сохранения импульса, вытекающий, согласно теореме Нётер, из инвариантности функции Лагранжа $\mathcal{L} = \sum_{m,n} (p(x) + q(y) + r(z))$ относительно сдвига $u \rightarrow u + \text{const}$. Запишем этот закон сохранения двумя (эквивалентными по модулю полной дивергенции) способами:

$$\begin{aligned} & (T_1 - 1)(f(x) + h(z_2)) + (T_2 - 1)(g(y) + h(z)) = 0 \\ \Leftrightarrow & (T_1 - 1)(f(x) + h(z)) + (T_2 - 1)(g(y) + h(z_1)) = 0. \end{aligned}$$

Эти формулы позволяют ввести новые разности X, Y и \tilde{X}, \tilde{Y} , отвечающие переменным U и \tilde{U} (определённым с точностью до сдвига). Определим преобразования

$$S_+ : (X, Y_{-1}) = S(x, y_2), \quad S_- : (\tilde{X}_{-2}, \tilde{Y}) = S(x_1, y), \quad (5.14)$$

где отображение $S : (x, y) \rightarrow (X, Y)$ задаётся формулами

$$S : \quad X = g(y) + h(x + y), \quad Y = -f(x) - h(x + y). \quad (5.15)$$

Чтобы переписать уравнения в новых переменных, нужно разрешить уравнения (5.14) относительно x, y и использовать тождество (5.13). Вообще говоря, уравнения для X, Y и \tilde{X}, \tilde{Y} различны.

$f(x)$	$g(y)$	$h(z)$	
$\frac{\alpha - \gamma}{x}$	$\frac{\gamma - \beta}{y}$	$\frac{\beta - \alpha}{z}$	(A)
$(\alpha - \gamma) \coth x$	$(\gamma - \beta) \coth y$	$(\beta - \alpha) \coth z$	(B)
$\log \frac{x + \alpha - \gamma}{x - \alpha + \gamma}$	$\log \frac{y + \gamma - \beta}{y - \gamma + \beta}$	$\log \frac{z + \beta - \alpha}{z - \beta - \alpha}$	(C)
$\log x$	$\log y$	$\log(1 - 1/z)$	(D)
$-e^x$	e^{-y}	$\frac{1}{1 + e^z}$	(E)
$\log(e^x - 1)$	$\log(e^y - 1)$	$-\log(e^z - 1)$	(F)
$-\log(e^{-x} - 1)$	$\log(e^y - 1)$	$-z$	(G)
$\log(e^x + 1)$	$\log(e^{-y} - 1)$	$\log \frac{e^z + \alpha}{e^z + 1}$	(H)
$\log \frac{\alpha e^x - \gamma}{\gamma e^x - \alpha}$	$\log \frac{\gamma e^y - \beta}{\beta e^y - \gamma}$	$\log \frac{\beta e^z - \alpha}{\alpha e^z - \beta}$	(I)

Список 5.1. Дискретные уравнения Тоды

$$(T_1 - 1)f(u - u_{-1}) + (T_2 - 1)g(u - u_{-2}) + (T_1 T_2 - 1)h(u - u_{-1, -2}) = 0,$$

допускающие преобразование дуальности.

Определение 5.6. Уравнение (5.12) допускает преобразование дуальности (5.14), (5.15), если отображение S обратимо и переменные U, \tilde{U} удовлетворяют одному и тому же уравнению. Последнее называется дуальным к (5.12).

Данное определение достаточно жёстко и позволяет выделить интегрируемые уравнения. Основным результатом является следующий список.

Теорема 5.7. Уравнения (5.12) допускающие преобразование дуальности исчерпываются, с точностью до замен вида $\tilde{u}(m, n) = \lambda u(m, n) + \mu m + \nu n + \kappa$ и перестановки осей x, y, z , наборами функций f, g, h из списка 5.1.

Преобразование дуальности (5.14), (5.15) связывает пары уравнений, отвечающих наборам (B) и (C), (D) и (E), (F) и (G), а уравнения, отвечающие наборам (A), (H) и (I) дуальны сами себе (с точностью до линейной замены переменных).

Заметим, что случаи (A) и (B) связаны точечной заменой $u = e^{2\tilde{u}}$ (эта эквивалентность уже фактически обсуждалась в примере 5.4). Таким образом, для этих уравнений имеется два преобразования дуальности. Это объясняется тем, что лагранжиан $\sum((\alpha - \gamma) \log x + (\gamma - \beta) \log y + (\beta - \alpha) \log z)$ инвариантен не

только относительно сдвига $u \rightarrow u + c$, но и относительно растяжения $u \rightarrow cu$, что приводит к ещё одному закону сохранения.

Что касается сравнения с уже известными квад-уравнениями, то из таблицы 2.3 очевидно, что случаи (A), (C), (I) порождены, соответственно, трёхногими формами для уравнений (H_1) или (Q_1^0) , (H_2) или (Q_1^1) , (H_3^δ) или (Q_3^0) .

Происхождение остальных примеров поясняет сравнение с конструкцией из предыдущего раздела. Нетрудно понять, что переменные U, \tilde{U} имеют смысл переменных на дуальном графе треугольной решётки. На рис. 5.6 слева они отвечают белым вершинам. Грани треугольной решётки распадаются на два класса (треугольники остриём вверх или вниз), и переменные U отвечают одному классу, а переменные \tilde{U} второму. Подробно вложение в трёхмерную решётку описано в разделе 5.4.3. Впрочем ответ нетрудно угадать уже сейчас.

Утверждение 5.8. Уравнение (5.12) и его дуальное возникают на наклонных плоскостях $m + n + k = \text{const}$ решётки \mathbb{Z}^3 , если на гранях последней заданы 3D-совместные квад-уравнения вида

$$u_{12} - u = f(u_2 - u_1), \quad u_{23} - u = g(u_3 - u_2), \quad u_{13} - u = h(u_1 - u_3),$$

для нечётных вершин u (играющих роль дуальных переменных), и вида

$$u_{12} - u = F(u_2 - u_1), \quad u_{23} - u = G(u_3 - u_2), \quad u_{13} - u = H(u_1 - u_3)$$

для чётных вершин u .

Таким образом, классификационную задачу можно переформулировать, как вопрос о 3D-совместности систем квад-уравнений такого типа. Напомним, что примеры 3D-совместных систем на чёрно-белой решётке уже приводились в разделе 2.6.

5.4.2 Доказательство классификационной теоремы

В следующей теореме устанавливается характеристическое свойство отображения S . Из него следует, что преобразование дуальности не выводит из множества уравнений вида (5.12), и что отношение дуальности симметрично.

Теорема 5.9. Уравнение (5.12) допускает преобразование дуальности, если и только если отображение обратное к (5.15) имеет вид

$$S^{-1}: \quad x = G(Y) + H(X + Y), \quad y = -F(X) - H(X + Y). \quad (5.16)$$

При этом дуальное уравнение имеет вид

$$(T_1 - 1)F(X) + (T_2 - 1)G(Y) + (T_1 T_2 - 1)H(Z) = 0. \quad (5.17)$$

Доказательство. Пусть S^{-1} задаётся отображением

$$x = \Phi(X, Y), \quad y = \Psi(X, Y),$$

тогда преобразования, обратные к (5.14) имеют вид

$$\begin{aligned} S_+^{-1} : \quad x &= \Phi(X, Y_{-1}), \quad y_2 = \Psi(X, Y_{-1}), \\ S_-^{-1} : \quad x_1 &= \Phi(\tilde{X}_{-2}, \tilde{Y}), \quad y = \Psi(\tilde{X}_{-2}, \tilde{Y}) \end{aligned}$$

и исключение x, y при помощи тождества (5.13) даёт уравнения

$$\begin{aligned} \Phi(X_{1,2}, Y_2) - \Phi(X_1, Y) - \Psi(X_1, Y) + \Psi(X, Y_{-1}) &= 0, \\ \Phi(\tilde{X}, \tilde{Y}_2) - \Phi(\tilde{X}_{-2}, \tilde{Y}) - \Psi(\tilde{X}_1, \tilde{Y}_{1,2}) + \Psi(\tilde{X}, \tilde{Y}_2) &= 0. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Легко проверить, что для Φ, Ψ вида (5.16) оба уравнения совпадают с (5.17).

Наоборот, допустим, что уравнения (5.18) совпадают, и покажем, что тогда Φ, Ψ имеют вид (5.16). Чтобы сравнить уравнения, опустим тильду во втором из них и перепишем его, при помощи тождества (5.13), в виде

$$\Phi(X, Y_2) - \Phi(X + Y_{-1} - Y, Y) - \Psi(X_1, X_{1,2} + Y_2 - X_1) + \Psi(X, Y_2) = 0,$$

то есть в тех же переменных $X_{1,2}, X_1, X, Y_2, Y, Y_{-1}$, что и первое. Считая $X_{1,2}$ функцией от остальных переменных из этого набора (нетрудно видеть, что они независимы), получим для $\partial X_{1,2}/\partial Y_2$ два выражения:

$$-\frac{\Phi^{(0,1)}(X_{1,2}, Y_2)}{\Phi^{(1,0)}(X_{1,2}, Y_2)} = \frac{\Phi^{(0,1)}(X, Y_2) + \Psi^{(0,1)}(X, Y_2)}{\Psi^{(0,1)}(X_1, X_{1,2} + Y_2 - X_1)} - 1.$$

Это равенство должно выполняться тождественно. Дифференцируя его по X и X_1 , получаем

$$\Phi^{(1,1)}(X, Y_2) + \Psi^{(1,1)}(X, Y_2) = 0, \quad \partial_{X_1} \Psi^{(0,1)}(X_1, X_{1,2} + Y_2 - X_1) = 0,$$

откуда находим

$$\Phi(X, Y) + \Psi(X, Y) = G(Y) - F(X), \quad \Psi(X, Y) = K(X) - H(X + Y).$$

Доказательство завершает сравнение с формулой

$$\Phi(X, Y) = L(Y) + M(X + Y),$$

которая выводится аналогичным образом: сначала получаем тождество

$$-\frac{\Psi^{(1,0)}(X, Y_{-1})}{\Psi^{(0,1)}(X, Y_{-1})} = \frac{\Phi^{(1,0)}(X, Y_2) + \Psi^{(1,0)}(X, Y_2)}{\Phi^{(1,0)}(X + Y_{-1} - Y, Y)} - 1,$$

вычисляя $\partial Y_{-1}/\partial X$, и затем дифференцируем его по Y . □

Доказанная теорема сводит описание уравнений, допускающих преобразование дуальности, к задаче перечисления троек функций f, g, h , для которых преобразование обратное к (5.15) имеет вид (5.16). Это означает, что, во-первых, якобиан $\Delta = f'g' + g'h' + h'f'$ отображения (5.15) должен быть отличен от нуля и, во-вторых, должны выполняться равенства

$$x_{XY} + y_{XY} = 0, \quad x_{XY} = x_{XX}, \quad y_{XY} = y_{YY}.$$

Эти три соотношения эквивалентны друг другу. Действительно, матрица Якоби равна

$$\begin{pmatrix} x_X & y_X \\ x_Y & y_Y \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} -h' & f' + h' \\ -g' - h' & h' \end{pmatrix},$$

откуда $x_X = -y_Y$. Несложное вычисление показывает, что единственное оставшееся условие сводится к функциональному уравнению

$$(g' + h') \frac{f''}{f'} + (f' + h') \frac{g''}{g'} = (f' + g') \frac{h''}{h'}$$

относительно $f(x)$, $g(y)$ и $h(x + y)$. Обозначив $f' = 1/a$, $g' = 1/b$, $h' = 1/c$, перепишем его в более удобной форме:

$$(b(y) + c(x + y))a'(x) + (a(x) + c(x + y))b'(y) = (a(x) + b(y))c'(x + y). \quad (5.19)$$

К решению этого уравнения и сводится классификационная задача, при условии $a(x) + b(y) + c(x + y) \neq 0$ (эквивалентном $\Delta \neq 0$). Функции a, b, c можно умножать на произвольную постоянную и допускаются линейные замены

$$\tilde{x} = \lambda x + \mu, \quad \tilde{y} = \lambda y + \nu \quad \Leftrightarrow \quad \tilde{u}(m, n) = \lambda u(m, n) + \mu m + \nu n + \kappa,$$

а также перестановки осей x, y, z .

Случай, когда две из трёх функций постоянны, можно считать вырожденным и в дальнейшем мы исключим его из рассмотрения. Действительно, если a и b постоянны, то из (5.19) следует, что либо c также постоянна, либо $a = -b$, а c произвольна. В первом случае уравнение (5.12) линейно, а во втором имеет вид

$$u_1 + u_{-1} - u_2 - u_{-2} + h(u_{1,2} - u) - h(u - u_{-1,-2}) = 0$$

и “интегрированием” $(T_1 T_2 - 1)^{-1}$ сводится к квад-уравнению:

$$u_1 - u_2 + h(u_{1,2} - u) = \text{const}.$$

Лемма 5.10. Функции a, b, c удовлетворяют уравнениям

$$(a')^2 = \delta a^2 + 2\alpha a + \varepsilon, \quad (b')^2 = \delta b^2 + 2\beta b + \varepsilon, \quad (c')^2 = \delta c^2 + 2\gamma c + \varepsilon. \quad (5.20)$$

Доказательство. Покажем, что функции $a(x)$ и $b(y)$ удовлетворяют уравнению

$$(a'' - b'')(a + b) - (a')^2 + (b')^2 = k(a - b), \quad k = \text{const}. \quad (5.21)$$

Для этого исключим c из (5.19). Применяв оператор $\partial_x - \partial_y$, получим систему линейных уравнений относительно $c + a, c'$:

$$\begin{pmatrix} a' + b' & -a - b \\ a'' - b'' & b' - a' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c + a \\ c' \end{pmatrix} = (a - b) \begin{pmatrix} a' \\ a'' \end{pmatrix}.$$

Её определитель D равен левой части равенства (5.21). Если он тождественно равен нулю, то формула (5.21) доказана, в противном случае имеем

$$c + a = \frac{a - b}{D}(aa'' - (a')^2 + a''b + a'b'), \quad c' = \frac{a - b}{D}(a''b' + a'b''),$$

откуда

$$\left(\frac{a - b}{D}\right)_y (aa'' - (a')^2 + a''b + a'b') = 0.$$

Допустим, что второй множитель равен нулю. Если $a' \not\equiv 0$, то $b' = -a''b/a' + a' - aa''/a'$, откуда $b'' = -a''b'/a'$, но тогда легко проверить, что $D = 0$. Если $a' = 0$, то $c + a = 0$, что приводит к исключённому выше вырожденному случаю. Таким образом, можно считать, что второй множитель отличен от нуля, откуда $((a - b)/D)_y = 0$. В силу симметрии между a и b , выполняется также равенство $((a - b)/D)_x = 0$ и формула (5.21) доказана.

Далее, перепишем (5.21) в виде

$$\left(\frac{a'}{a + b}\right)_x = \frac{b'' + k}{a + b} - \frac{(b')^2 + 2kb}{(a + b)^2},$$

умножим на $a'/(a + b)$ и проинтегрируем по x . Это даст

$$(a')^2 = \delta(y)(a + b)^2 - 2(b'' + k)(a + b) + (b')^2 + 2kb.$$

Меняя местами a и b , получим

$$(b')^2 = \tilde{\delta}(x)(a + b)^2 - 2(a'' + k)(a + b) + (a')^2 + 2ka.$$

Вычитая одно уравнение из другого получим, с учетом (5.21), $\tilde{\delta} = \delta = \text{const}$. Складывая и деля на $a + b$, получим $a'' + b'' = \delta(a + b) - k$. Разделение переменных приводит к уравнениям $(a')^2 = \delta a^2 + 2\alpha a + \varepsilon$, $(b')^2 = \delta b^2 + 2\beta b + \tilde{\varepsilon}$, где $\alpha + \beta = -k$, и подстановка в (5.21) дает $\varepsilon = \tilde{\varepsilon}$. Третье уравнение (5.20) следует автоматически из симметрии осей x, y, z . \square

Уравнения (5.20) решаются в элементарных функциях. Не любое решение этой системы удовлетворяет уравнению (5.19). Ответ находится с точностью до нескольких постоянных, которые проще всего уточнить непосредственной подстановкой в (5.19). Этот анализ не представляет принципиальных трудностей и доказательство теоремы 5.7 получается прямым перебором.

5.4.3 Вложение в кубическую решётку

Классификация, основанная на преобразовании дуальности, не срабатывает для 5-точечных уравнений

$$(T_1 - 1)f(u - u_{-1}) + (T_2 - 1)g(u - u_{-2}) = 0,$$

поскольку для них преобразования S_+ и S_- всегда совпадают и определение 5.6 становится бессодержательным. Тем не менее, некоторый набор примеров можно извлечь из результатов, полученных для 7-точечных уравнений. Покажем, что преобразование дуальности порождает трёхмерную решётку, описанную в разделе 5.3 и содержащую четыре 7-точечных и три 5-точечных уравнения. При этом будет получено и доказательство утверждения 5.8.

Рассмотрим итерации преобразования $T_3 = S_-^{-1}S_+$, полагая $u(m, n, 0) = u(m, n)$ и

$$U(m, n, k) = S_+[u(m, n, k)], \quad U(m, n, k - 1) = S_-[u(m, n, k)]$$

(соответственно, сдвиг по k будем обозначать индексом 3). Уравнения (5.12), (5.17) можно переписать в смешанных переменных x, X . Действительно, из (5.14), (5.15) имеем соотношения

$$X_{-2} = g(y) + h(x_{-2} + y), \quad X_{-3} = g(y_2) + h(x_{1,2} + y_2),$$

в силу которых уравнение (5.12) записывается, как

$$(T_1 - 1)f(x) + X_{-3} - X_{-2} = 0. \quad (5.22)$$

Аналогично, в силу (5.16) уравнение (5.17) эквивалентно

$$(T_1 - 1)F(X) + x_{1,2} - x_{1,3} = 0.$$

“Интегрирование” $(T_1 - 1)^{-1}$ даёт (постоянные интегрирования можно положить равными нулю не теряя общности, поскольку функции определяются по уравнениям (5.12), (5.17) неоднозначно)

$$f(u_1 - u) = U_{-2} - U_{-3}, \quad F(U - U_{-1}) = u_3 - u_2. \quad (5.23)$$

Из последнего уравнения имеем $X = F^{-1}(u_3 - u_2)$ и подстановка в (5.22) приводит к 5-точечному уравнению

$$(T_1 - 1)f(u - u_{-1}) - (T_2^{-1}T_3 - 1)F^{-1}(u - u_{2,-3}) = 0$$

в плоскости $n + k = \text{const}$. Поскольку роли переменных x, y, z в исходном уравнении равноправны, аналогичные вычисления можно повторить, переписывая его в смешанных переменных y, Y или z, Z . Это приводит к 5-точечным уравнениям

$$\begin{aligned} (T_2 - 1)g(u - u_{-2}) - (T_1T_3 - 1)G^{-1}(u - u_{-1,-3}) &= 0, \\ (T_1T_2 - 1)h(u - u_{-1,-2}) + (T_3 - 1)H^{-1}(u - u_{-3}) &= 0. \end{aligned}$$

Дополнительные 7-точечные уравнения можно получить, комбинируя уже выведенные. Например, вычитая из исходного уравнения (5.12) два последних, получаем уравнение в плоскости $n = \text{const}$:

$$(T_1 - 1)f(u - u_{-1}) - (T_3 - 1)H^{-1}(u - u_{-3}) + (T_1T_3 - 1)G^{-1}(u - u_{-1,-3}) = 0.$$

Наконец, чтобы получить решётку, объединяющую переменные u и U , ассоциируем первое из квад-уравнений (5.23) с одним из трёх типов граней на дубле треугольной решётки (см. рис. 5.6), а второе на дубле сдвинутой треугольной решётки. Аналогичные уравнения имеются и на остальных гранях, и после линейного преобразования решётки мы приходим к системе квад-уравнений, указанной в утверждении 5.8.

5.5 Цепочки Рудженарса-Тоды

Перейдём теперь к дифференциально-разностным уравнениям на переменную $u_n(t)$. В общей постановке, цепочки Рудженарса-Тоды определяются как уравнения общего вида

$$\ddot{u} = F(\dot{u}_1, \dot{u}, \dot{u}_{-1}, u_1, u, u_{-1}), \quad (5.24)$$

и в качестве определения их интегрируемости принимается наличие иерархии высших симметрий. Сначала мы рассмотрим цепочки специального вида, являющиеся непрерывным аналогом уравнений (5.12), и проведём их классификацию на основе преобразования дуальности.

5.5.1 Преобразование дуальности

Рассмотрим цепочки Рудженарса-Тоды вида

$$\dot{z} = r(z)(h(y_1)z_1 - h(y)z_{-1} + g(y_1) - g(y)), \quad \dot{y} = z - z_{-1}, \quad (5.25)$$

где обозначено $z = \dot{u}$, $y = u - u_{-1}$.

Чтобы исключить цепочки типа Тоды и Вольтерра, будем предполагать выполненными условия невырожденности $h \neq 0$ и $(g', h') \neq (0, 0)$.

Цепочка (5.25) является уравнением Эйлера-Лагранжа для функционала

$$\mathcal{L} = \int \sum_n L_n dt, \quad L_n = a(z_n) - b(y_n) - c(y_n)z_n, \quad (5.26)$$

$$r = 1/a'', \quad g = b', \quad h = c'.$$

Инвариантность относительно сдвига $u \rightarrow u + \text{const}$ приводит к закону сохранения импульса, который можно записать в двух эквивалентных формах

$$D_t(a'(z) - c(y_1)) = (T_1 - 1)(h(y)z_{-1} + g(y))$$

$$\Leftrightarrow D_t(a'(z) - c(y)) = (T_1 - 1)(h(y)z + g(y)).$$

$$\dot{z} = z_1 e^{y_1} - z_{-1} e^y - e^{2y_1} + e^{2y} \quad (\text{a})$$

$$\dot{z} = z \left(\frac{z_1}{y_1} - \frac{z_{-1}}{y} + y_1 - y \right) \quad (\text{b})$$

$$\dot{z} = z \left(\frac{z_1}{1 + \mu e^{-y_1}} - \frac{z_{-1}}{1 + \mu e^{-y}} + \nu(e^{y_1} - e^y) \right) \quad (\text{c})$$

$$\dot{z} = z(z + 1) \left(\frac{z_1}{y_1} - \frac{z_{-1}}{y} \right) \quad (\text{d})$$

$$\dot{z} = z(z - \mu) \left(\frac{z_1}{\mu + e^{y_1}} - \frac{z_{-1}}{\mu + e^y} \right) \quad (\text{e})$$

$$\dot{z} = (z^2 + \mu) \left(\frac{z_1 - y_1}{\mu + y_1^2} - \frac{z_{-1} - y}{\mu + y^2} \right) \quad (\text{f})$$

$$\dot{z} = \frac{1}{2}(z^2 + 1 - \mu^2) \left(\frac{z_1 - \sinh y_1}{\mu + \cosh y_1} - \frac{z_{-1} - \sinh y}{\mu + \cosh y} \right) \quad (\text{g})$$

Список 5.2. Цепочки Рудженарса-Тоды, допускающие преобразование дуальности ($z = \dot{u}$, $y = u - u_{-1}$)

Это позволяет определить пару преобразований

$$S_+ : (Z, Y) = S(z, y_1), \quad S_- : (\tilde{Z}_{-1}, \tilde{Y}) = S(y, z) \quad (5.27)$$

где отображение $S : (z, y) \rightarrow (Z, Y)$ имеет вид

$$Z = h(y)z + g(y), \quad Y = a'(z) - c(y). \quad (5.28)$$

Определение 5.11. Цепочка (5.25) допускает преобразование дуальности (5.27), (5.28) если отображение S обратимо и переменные U, \tilde{U} удовлетворяют одной и той же цепочке. Последняя называется дуальной к (5.25).

Отметим, что функции a, b, c определены с точностью до некоторых линейных замен, следовательно, отображение (5.28) определено не однозначно. Однако, легко проверить, что эта неоднозначность сводится к линейным заменам переменных Z, Y и все цепочки, дуальные данной, эквивалентны по модулю преобразований вида $U_n \rightarrow \alpha U_n + \beta n + \gamma t$.

Теорема 5.12. С точностью до преобразований $u_n \rightarrow \alpha u_n + \beta t + \gamma n$, $t \rightarrow \delta t$, невырожденные цепочки (5.25) допускающие преобразования дуальности исчерпываются списком 5.2.

Преобразования дуальности (5.27), (5.28) связывают вместе уравнения (а) и (b), (d) и (e₀), (f_μ) при $\mu \neq 0$ и (g_{±1}), а остальные уравнения дуальны сами себе. Подробнее, замены S_- перечислены в первой части таблицы 5.3. Кроме

$(a) \rightarrow (b)$	$Y = z - e^y, \quad Z_1 = (z - e^y)e^y$
$(b) \rightarrow (a)$	$Y = \log \frac{z}{y}, \quad Z_1 = \frac{z}{y} + y$
$(c_{\mu, \nu}) \rightarrow (c_{\nu e^\delta, \mu e^{-\delta}})$	$Y = \log \frac{z}{\mu + e^y} + \delta, \quad Z_1 = \frac{z}{1 + \mu e^{-y}} + \nu e^y$
$(d) \rightarrow (e_0)$	$Y = \log \frac{z}{y(z+1)}, \quad Z_1 = \frac{z}{y}$
$(e_0) \rightarrow (d)$	$Y = e^{-y} - \frac{1}{z}, \quad Z_1 = ze^{-y} - 1$
$(e_\mu) \rightarrow (e_\mu)$	$Y = \log \frac{\mu z}{(\mu - z)(1 + \mu e^{-y})}, \quad Z_1 = \mu - \frac{\mu z}{\mu + e^y}, \quad \mu \neq 0$
$(f_0) \rightarrow (f_0)$	$Y = \frac{1}{z} - \frac{1}{y}, \quad Z_1 = \frac{1}{y} - \frac{z}{y^2}$
$(f_{-\nu^2}) \rightarrow (g_{-1})$	$Y = \log \frac{(z - \nu)(y + \nu)}{(z + \nu)(y - \nu)}, \quad Z_1 = \frac{2\nu(z - y)}{y^2 - \nu^2}, \quad \nu \neq 0$
$(g_{-1}) \rightarrow (f_{-\nu^2})$	$Y = \nu \left(\frac{e^y + 1}{e^y - 1} - \frac{2}{z} \right), \quad Z_1 = \nu \frac{z - \sinh y}{\cosh y - 1}, \quad \nu \neq 0$
$(g_\mu) \rightarrow (g_\mu)$	$Y = \log \frac{(\lambda - z)(e^y + \nu)}{(\lambda + z)(\nu e^y + 1)}, \quad Z_1 = \lambda \frac{z - \sinh y}{\mu + \cosh y}, \quad \mu \neq \pm 1$ $2\mu = \nu + 1/\nu, \quad 2\lambda = \nu - 1/\nu$

$(c_{\mu, \nu}) \rightarrow (b)$	$Y = z + \nu(e^y + \mu), \quad Z_1 = \frac{z_1 z}{1 + \mu e^{-y}} + \nu z_1 e^y$
$(d) \rightarrow (c_{-1, 0})$	$Y = \log(z + 1), \quad Z_1 = \frac{z z_1}{y}$
$(e_\mu) \rightarrow (c_{-1, 0})$	$Y = \log(z - \mu) - y, \quad Z_1 = z_1 \left(\frac{z}{\mu + e^y} - 1 \right)$
$(e_\mu) \rightarrow (c_{\mu, -1})$	$Y = \log(z - \mu), \quad Z_1 = \frac{z z_1}{\mu + e^y}$
$(f_{-\nu^2}) \rightarrow (c_{-1, -1})$	$Y = \log \frac{z + \nu}{y + \nu}, \quad Z_1 = \frac{(z_1 - \nu)(z - y)}{y^2 - \nu^2}$
$(g_\mu) \rightarrow (c_{-1, \nu})$	$Y = \log \frac{z + \lambda}{e^y + \nu}, \quad Z_1 = \frac{z_1 - \lambda}{2} \left(\frac{z - \sinh y}{\mu + \cosh y} - 1 \right),$ $2\mu = \nu + 1/\nu, \quad 2\lambda = \nu - 1/\nu$

Таблица 5.3. Преобразования дуальности и дополнительные подстановки для цепочек Рудженарса-Тоды

них, между цепочками из списка имеются и другие замены (некоторые из них необратимые), перечисленные во второй части таблицы. Нетрудно убедиться

в связности графа замен. Таким образом, можно сказать, что все рассматриваемые цепочки представляют собой разные записи одного и того же объекта.

Мы получим доказательство теоремы 5.12, повторяя логику предыдущего раздела. Отметим, что вместо этого можно было бы использовать и прямой пересчёт, поскольку цепочки (5.25) являются непрерывным пределом уравнений (5.12). Действительно, легко видеть, что лагранжиан для цепочки (5.25) получается, в пределе $\varepsilon \rightarrow 0$, из семейства лагранжианов

$$\mathcal{L}_\varepsilon = \sum_{m,n} (\varepsilon a(x_{m,n}/\varepsilon) - \varepsilon b(y_{m,n}) + k(y_{m,n}) - k(z_{m,n})),$$

где $k' = c$, $u(m, n) = u_n(t)$, $t = m\varepsilon$. Преобразования (5.27) также получаются из (5.14) в результате этого предельного перехода, но мы не будем проследивать детали соответствия между списками.

5.5.2 Доказательство классификационной теоремы

Теорема 5.13. Цепочка (5.25) допускает преобразование дуальности, если и только если отображение, обратное к (5.28) имеет вид

$$z = H(Y)Z + G(Y), \quad y = A'(Z) - C(Y), \quad H = C'. \quad (5.29)$$

При этом дуальное уравнение также является релятивистской цепочкой Тоды вида ($R = 1/A''$)

$$\dot{Z} = R(Z)(H(Y_1)P_1 - H(Y)Z_{-1} + G(Y_1) - G(Y)), \quad \dot{Y} = Z - Z_{-1}. \quad (5.30)$$

Доказательство. Пусть S^{-1} имеет вид (5.29), тогда исключение z, y из (5.27), при помощи тождества $\dot{y}_1 = z_1 - z$, приводит в обоих случаях к уравнению (5.30).

Чтобы доказать обратное утверждение, сравним уравнения на переменные U и \tilde{U} . Непосредственное вычисление доказывает, что переменные Z, Y удовлетворяют уравнению вида

$$\dot{Z} = r(z)(h(y_1)(Z - Z_{-1}) + \Delta(z, y_1)(z_1 - z)), \quad \dot{Y} = Z - Z_{-1}, \quad (5.31)$$

где $\Delta(y, z) = h^2(y) + \frac{1}{r(z)}(h'(y)z + g'(y))$ и переменные z_1, z, y_1 следует ещё выразить через Z_1, Z, Y_1, Y . Таким образом, дуальное уравнение должно быть линейным по Z_{-1} . Аналогично, рассматривая уравнение на \tilde{U} можно показать, что дуальное уравнение должно быть линейно по Z_1 . Так как в (5.31) только z_1 зависит от Z_1 , то отображение S должно удовлетворять условию $\partial^2 z / \partial Z^2 = 0$. Это доказывает первую формулу в (5.29). Вторая следует из свойства $\partial y / \partial Y = -\partial z / \partial Z$, очевидного из структуры матрицы Якоби

$$\begin{pmatrix} \partial z / \partial Z & \partial y / \partial Z \\ \partial z / \partial Y & \partial y / \partial Y \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta(y, z)} \begin{pmatrix} h(y) & 1/r(z) \\ h'(y)z + g'(y) & -h(y) \end{pmatrix},$$

где $\Delta \neq 0$ в силу определения 5.11. □

Как и в дискретном случае, мы видим, что исходная цепочка дуальна к своей дуальной, то есть композиция $S_-^{-1}S_+$ определяет преобразование Бэклунда для (5.25).

Лемма 5.14. Цепочки (5.25), допускающие преобразование дуальности, характеризуются следующими уравнениями на коэффициенты:

$$\begin{aligned} r &= r_2 z^2 + r_1 z + r_0, \\ g' &= r_2 g^2 + R_1 g + R_0 - r_0 h^2, \quad h' = 2r_2 gh - r_1 h^2 + R_1 h. \end{aligned} \quad (5.32)$$

Коэффициенты дуальной цепочки удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} R &= r_2 Z^2 + R_1 Z + R_0, \\ G' &= r_2 G^2 + r_1 G + r_0 - R_0 H^2, \quad H' = 2r_2 GH - R_1 H^2 + r_1 H. \end{aligned} \quad (5.33)$$

Доказательство. Прямое вычисление доказывает, что необходимое и достаточное условие $\partial^2 z / \partial Z^2 = 0$ эквивалентно следующему соотношению для функций $r(z), g(y), h(y)$:

$$h(h''z + g'') - h'(h'z + g') + 2rh^2 h' - r'h^2(h'z + g') = 0. \quad (5.34)$$

Двукратное дифференцирование по z дает $r'''(h'z + g') = 0$. Так как, в силу условия невырожденности, h' и g' не равны обе нулю, то $r''' = 0$. Деля (5.34) на h^2 и интегрируя по y , получаем

$$h'z + g' + 2rh^2 - r'h(hz + g) = h(\alpha + R_1 z),$$

с постоянными α и R_1 . Пусть $r = r_2 z^2 + r_1 z + r_0$, тогда расщепление этого соотношения по z приводит к системе

$$g' = \alpha h + r_1 gh - 2r_0 h^2, \quad h' = 2r_2 gh - r_1 h^2 + R_1 h,$$

что эквивалентно (5.32) по модулю первого интеграла

$$r_2 g^2 + R_1 g + R_0 - r_1 gh + r_0 h^2 = \alpha h. \quad (5.35)$$

Формула для R легко получается из соотношения $R = \Delta(z, y)r$. Таким образом, уравнения для g и h однозначно определяются коэффициентами многочленов r и R . Так как, согласно Теореме 5.13, отношение дуальности симметрично, то уравнения для G и H выписываются автоматически. \square

Замечание 5.15. Первый интеграл (5.35) можно пересчитать в первый интеграл для системы (5.33), последовательно исключая g, h и z при помощи соотношений $g = Z - hz$, $h = RH/r$ и $z = HZ + G$. Это приводит к формуле

$$r_2 G^2 + r_1 G + r_0 - R_1 GH + R_0 H^2 = \alpha H,$$

то есть, значение постоянной интегрирования α при переходе к дуальной цепочке не меняется. Отметим, что роль этой постоянной на самом деле весьма важна, так как она может зависеть от n . Это приводит к интегрируемым цепочкам, содержащим произвольный параметр в каждом узле. Для простоты, мы не рассматриваем здесь это обобщение.

С учетом первого интеграла (5.35) система (5.32) сводится к уравнению

$$(h')^2 = (r_1^2 - 4r_2r_0)h^4 + (4\alpha r_2 - 2R_1r_1)h^3 + (R_1^2 - 4r_2R_0)h^2, \quad (5.36)$$

которое интегрируется в элементарных функциях. Перебор решений при всех возможных значениях параметров доставляет доказательство теоремы 5.12.

5.5.3 Цепочки Тоды

Как и в дискретном случае, подкласс цепочек Тоды

$$\dot{z} = r(z)(f(y_1) - f(y)), \quad \dot{y} = z - z_{-1} \quad (5.37)$$

выпадает из классификации, поскольку для него преобразования S_+ и S_- совпадают. В результате, преобразование дуальности

$$Z = f(y_1), \quad Y = a'(z), \quad a'' = 1/r,$$

определено для любых r, f и не имеет отношения к интегрируемости. Коэффициенты дуальной цепочки определяются формулами $f' = R(f)$, $F(a'(z)) = z$. Например, обычная цепочка Тоды $\ddot{u} = \exp(u_1 - u) - \exp(u - u_{-1})$ дуальна цепочке $\ddot{U} = \dot{U}(U_1 - 2U + U_{-1})$.

Тем не менее, цепочки Тоды возникают, как и в дискретном случае, при рассмотрении преобразования дуальности для цепочек Рудженарса-Тоды. Рассмотрим итерации преобразования $T_2 = S_-^{-1}S_+$, полагая $u_{(n,0)} = u_{(n)}$ и

$$U_{(n,k)} = S_+[u_{(n,k)}], \quad U_{(n,k-1)} = S_-[u_{(n,k)}]$$

(соответственно, сдвиг по k будем обозначать индексом 2). Тогда формулы (5.27), (5.28), (5.29) принимают вид

$$Z_{-1} = h(y)z_{-1} + g(y), \quad Z_{-2} = h(y_1)z_1 + g(y_1) \quad (5.38)$$

$$z_2 = H(Y)Z_{-1} + G(Y), \quad z = H(Y)Z + G(Y). \quad (5.39)$$

Отсюда следует, что цепочки (5.25), (5.30) можно переписать в виде спаренной цепочки типа Вольтерра

$$\dot{z} = r(z)(Z_{-2} - Z_{-1}), \quad \dot{Z} = R(Z)(z_1 - z_2).$$

Полагая

$$Z = f(u_1 - u_2), \quad f' = R(f) \quad (5.40)$$

получим цепочку Тоды

$$\ddot{u} = r(\dot{u})(f(u_{1,-2} - u) - f(u - u_{-1,2}))$$

на переменные, расположенные вдоль прямой $n + k = \text{const}$. При этом

$$r(z) = r_2z^2 + r_1z + r_0, \quad f' = r_2f^2 + R_1f + R_0, \quad (5.41)$$

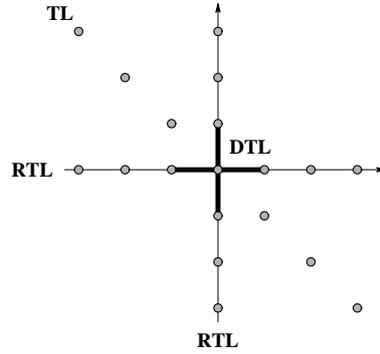


Рис. 5.7. Уравнения, ассоциированные с RTL

в силу леммы 5.14.

Напомним, что в дискретном случае преобразования дуальности порождали трёхмерную решётку, содержащую четыре 7-точечных и три 5-точечных уравнения. В непрерывном случае картина проще: переменные $u_{(n,k)}$ образуют двумерную решётку, содержащую две цепочки типа Тоды-Рудженарса, отвечающие сдвигам T_1, T_2 , а сдвиг по диагонали $T_1 T_2^{-1}$ отвечает цепочке Тоды, как было доказано выше. Кроме того, следующее утверждение гласит, что в этой картине имеется место и для 5-точечного дискретного уравнения типа Тоды.

Утверждение 5.16. Переменные $u, u_{\pm 1}, u_{\pm 2}$ подчиняются дискретному уравнению типа Тоды

$$(T_1 - 1)c(u - u_{-1}) + (T_2 - 1)c(u_{-2} - u + \delta) = 0. \quad (5.42)$$

Доказательство. Функция ϕ , обратная к A' , удовлетворяет уравнению $\phi' = R(\phi)$, то есть $f(y) = \phi(y + \varepsilon)$. Следовательно,

$$C(Y) = A'(Z) - y_1 = A'(f(u_1 - u_2)) - u_1 + u = u - u_2 + \varepsilon,$$

то есть $Y = s(u - u_2 + \varepsilon)$, где s функция обратная к C . Легко показать, что s' удовлетворяет тому же уравнению (5.36), что и $h = c'$, откуда $s(y) = c(y + \tilde{\varepsilon}) + \text{const}$. Исключая z из формулы

$$Y = a'(z) - c(y_1), \quad Y_{-2} = a'(z) - c(y),$$

получаем $Y_{-2} - Y = (T_2 - 1)c(y)$, что завершает доказательство. \square

Ясно, что параметр δ можно обратить в ноль за счёт надлежащего выбора функции f в формуле (5.40) или, что то же самое, сдвигом $u_{(n,k)} \rightarrow u_{(n,k)} + \delta k$. Таким образом, оба члена в (5.42) симметричны. Это не всегда так для дискретных цепочек Тоды из раздела 5.4.3.

Сдвиги T_1 и T_2 играют в (5.42) одинаковую роль, хотя их происхождение и было различным. То, что сдвиг T_2 также соответствует некоторой цепочке Рудженарса-Тоды, легко показать. Действительно, исключение Z из уравнения $\dot{z} = r(z)(Z_{-2} - Z_{-1})$ при помощи соотношений (5.39) приводит к уравнению

$$\dot{z} = r(z) \left(-\frac{z_2}{H(Y)} + \frac{z_{-2}}{H(Y_{-2})} + \frac{G(Y)}{H(Y)} - \frac{G(Y_{-2})}{H(Y_{-2})} \right)$$

и так как $Y = c(u - u_2 + \delta)$, то мы снова получаем некоторую цепочку типа (5.30). Её коэффициенты совпадают с h, g с точностью до сдвига аргумента.

5.6 Вариационные симметрии

Классификация цепочек Тоды-Рудженарса может быть получена также из совсем других соображений, на основе анализа высших непрерывных симметрий. Постулируем, что цепочка (5.25) допускает вариационную симметрию общего вида

$$u_{n,\tau} = \Phi(\dot{u}_{n+1}, \dot{u}_n, \dot{u}_{n-1}, u_{n+1}, u_n, u_{n-1}), \quad (5.43)$$

то есть для лагранжиана (5.26) выполняется условие

$$\mathcal{L}_{n,\tau} = N_{n,x} + M_n - M_{n-1},$$

где N_n, M_n некоторые функции от $u_n, u_{n\pm 1}, z_n, z_{n\pm 1}$. Исходя отсюда, можно показать сначала, что эта симметрия с необходимостью имеет вид

$$u_{n,\tau} = r(z_n)(z_{n+1}h(y_n) + z_{n-1}h(y_{n-1}) + g(y_n) + g(y_{n-1})) + s(z_n),$$

где $s(z) = \alpha z^2 + \mu z + \nu$, то есть её правая часть очень просто связана с правой частью самой цепочки. Дальнейшая несложная проверка приводит к цепочкам (5.25), (5.32) либо (5.37), (5.41). При этом коэффициенты μ и ν произвольны (они отвечают классическим симметриям $x \rightarrow x + c_1, u \rightarrow u + c_2$), в частности их можно положить равными нулю. При $r_2 \neq 0$ коэффициент α также может быть уничтожен за счет переобозначения $g \rightarrow g + c$, что не меняет самой цепочки.

Более того, этот подход позволяет проклассифицировать и более общие цепочки вида (5.24). Это приводит дополнительно к цепочке типа Рудженарса-Тоды

$$z_{n,t} = -(z_n^2 + r(u_n)) \left(\frac{z_{n+1}}{h(u_{n+1}, u_n)} - \frac{z_{n-1}}{h(u_n, u_{n-1})} - \frac{1}{2} \partial_{u_n} \log(h(u_{n+1}, u_n)h(u_n, u_{n-1})) \right) - \frac{1}{2} r'(u_n), \quad (5.44)$$

где $h(u, v)$ симметрический биквадратичный многочлен и $4r(u) = 2hh_{vv} - h_v^2$, и к цепочке типа Тоды

$$z_{n,t} = -(z_n^2 + r(u_n)) \left(\frac{1}{u_{n+1} - u_n} - \frac{1}{u_n - u_{n-1}} \right) - \frac{1}{2} r'(u_n), \quad r^V = 0. \quad (5.45)$$

Соответствующие лагранжианы имеют вид

$$L_n = c(z_n, u_n) - z_n a(u_{n+1}, u_n) + \frac{1}{2} \log h(q_{n+1}, q_n), \quad a_u(u, v) = 1/h(u, v),$$

и

$$L_n = c(z_n, u_n) - \log(u_{n+1} - u_n),$$

где функция c в обоих случаях равна

$$c(z, u) = -\frac{1}{2\sqrt{r}} \left((\sqrt{r} + iz) \log(\sqrt{r} + iz) + (\sqrt{r} - iz) \log(\sqrt{r} - iz) \right),$$

а соответствующие вариационные симметрии имеют вид

$$u_{n,\tau} = -(z_n^2 + r(u_n)) \left(\frac{z_{n+1}}{h(u_{n+1}, u_n)} + \frac{z_{n-1}}{h(u_n, u_{n-1})} - \frac{1}{2} \partial_{u_n} \log \frac{h(u_{n+1}, u_n)}{h(u_n, u_{n-1})} \right),$$

и

$$u_{n,\tau} = (z_n^2 + r(u_n)) \left(\frac{1}{u_{n+1} - u_n} + \frac{1}{u_n - u_{n-1}} \right).$$

Приведённые ответы составляют содержание следующей теоремы.

Теорема 5.17. Лагранжевы цепочки (5.24), допускающие вариационную симметрию вида (5.43), исчерпываются цепочками типа Рудженарса-Тоды (5.25), (5.32) и (5.44), и цепочками типа Тоды (5.37), (5.41) и (5.45).

Цепочки (5.44) и (5.45) определяют два типа преобразования Бэклунда для уравнения Ландау-Лифшица. Более подробно они будут рассмотрены в главе 7. Здесь отметим только, что, как и в сдвигово-инвариантном случае, эти цепочки могут быть объединены на квадратной решётке, несущей дискретное 5-точечное уравнение.

Комментарии к главе 5

Глава основана на работах Адлера, Шабата [20, 21] и Адлера [8, 9, 11].

▷ Цепочка Тоды введена в [176], релятивистская цепочка Тоды введена Рудженарсом [149, 150].

▷ Дискретные уравнения типа Тоды на \mathbb{Z}^2 впервые рассматривались Хиротой [86]. Некоторые примеры уравнений типа Тоды на квадратной и треугольных решётках рассматривались в [8, 11] и работах Суриса, см. напр. [162, 163, 164, 165, 166].

▷ Уравнения типа Тоды на плоском графе введены в [11]. Их связь с теорией квад-уравнений обнаружена в работе Бобенко и Суриса [43]. В работе Адлера и Суриса [27] проведён подробный анализ дискретных уравнений и цепочек (5.45), (5.44), связанных с основным квад-уравнением (Q_4), см. главу 7 далее.

▷ Для трёхмерных уравнений известны важные примеры вспомогательных линейных задач, которые формально являются квад-уравнениями и уравнениями типа Тоды — линейными, но с переменными коэффициентами. Такие линейные квад-уравнения по-прежнему могут допускать ограничение на чётную подрешётку, порождая линейные задачи тодовского типа. Это отвечает самосопряжённым редукциям последних. Содержательные примеры такого рода имеются в работах Доливы, Гриневича, Нишпорского и Сантини [58, 59].

▷ Полная классификация цепочек типа Тоды $\ddot{u} = f(\dot{u}, u_1, u, u_{-1})$ на основе симметричного подхода получена Ямиловым [190]. Классификация цепочек Рудженарса-Тоды, основанная на наличии вариационной симметрии, получена в [20]. Теорема 5.17 представляет собой объединение этих двух результатов.

▷ Понятие дуальной системы было введено Тодой “замещением частиц на пружины и пружин на частицы по определенным правилам” [175, 177]. Однако, это преобразование рассматривалось лишь для случая нелинейных цепочек вида (5.37), для которых оно не является характеристическим. Определение преобразования дуальности для случая цепочек типа Рудженарса-Тоды специального вида (5.25), и соответствующая классификация появились в [21].

▷ Преобразование дуальности для дискретных уравнений Тоды на треугольной решётке было введено и использовано для классификации в работах [8, 9]. Как отмечалось в тексте, некоторые из возникающих здесь уравнений несимметричны. То, что их можно получить из несимметричной системы квад-уравнений, показано в работе Болля и Суриса [49].

▷ Замены из таблицы 5.3 помогают установить бигамильтоновость цепочек Рудженарса-Тоды. В качестве простейшего примера можно взять последовательность (d) \rightarrow (c_{-1,0}) \rightarrow (b), в которой обе замены обратимы. Гамильтонианы для этих цепочек, относительно канонических скобки Пуассона, равны соответственно

$$I_1 = \sum \log(z_n + 1), \quad I_1 = \sum z_n, \quad I_1 = \sum (z_n + \frac{1}{2}y_n^2).$$

Можно проверить, что пересчёт в переменных одной из цепочек приводит к трём согласованным гамильтоновым структурам. Тригамильтоновость цепочки Рудженарса (c_{-1,0}) была установлена впервые в работе Ёвеля, Фуксштайнера, Жанга и Рагниско [139].

Глава 6

Двухкомпонентные гиперболические системы

В этой главе решается классификационная задача для одного типа нелинейных цепочек, тесно связанных с цепочками типа Рудженарса-Тоды. Ассоциированными системами являются двухкомпонентные гиперболические системы, для которых рассматриваемые цепочки определяют авто-преобразования Бэклунда, и системы типа НУШ.

6.1 Пары совместных цепочек

Рассмотрим задачу классификации совместных пар цепочек

$$u_x = F(u_1, u, v), \quad v_x = G(u, v, v_{-1}), \quad (6.1)$$

$$u_y = P(u_{-1}, u, v), \quad v_y = Q(u, v, v_1). \quad (6.2)$$

Здесь $u = u(n, x, y)$, $v = v(n, x, y)$, $n \in \mathbb{Z}$ и нижние индексы используются для обозначения как частных производных по x, y , так и сдвигов по n . Считается выполненным условие невырожденности

$$F_v F_{u_1} G_u G_{v_{-1}} P_v P_{u_{-1}} Q_u Q_{v_1} \neq 0. \quad (6.3)$$

Благодаря условию $F_v \neq 0$, переменную v можно выразить из первого уравнения цепочки (6.1). При этом второе уравнение переписывается как цепочка типа Рудженарса-Тоды

$$u_{xx} = A(u_{1,x}, u_x, u_{-1,x}, u_1, u, u_{-1}), \quad (6.4)$$

а поток (6.2) принимает вид

$$u_y = B(u_x, u_1, u, u_{-1}). \quad (6.5)$$

Ясно, что роли x и y равноправны и уравнение (6.4) можно заменить на цепочку вида

$$u_{yy} = C(u_{1,y}, u_y, u_{-1,y}, u_1, u, u_{-1}). \quad (6.6)$$

Цепочки, связанные точечными заменами

$$\tilde{u} = \phi(u), \quad \tilde{v} = \psi(v), \quad (6.7)$$

растяжениями $\tilde{x} = \alpha x$, $\tilde{y} = \beta y$ и переобозначениями

$$u \leftrightarrow v, \quad n \leftrightarrow -n, \quad F \leftrightarrow G, \quad P \leftrightarrow Q, \quad (6.8)$$

$$x \leftrightarrow y, \quad n \leftrightarrow -n, \quad F \leftrightarrow P, \quad G \leftrightarrow Q \quad (6.9)$$

естественно считать эквивалентными. Кроме этих преобразований, при классификации будут использоваться замены вида

$$\tilde{u} = u + \alpha x + \beta y + \gamma n, \quad \tilde{v} = v + \alpha x + \beta y + \gamma n, \quad (6.10)$$

применимые в том случае, если правые части цепочек зависят лишь от разностей $u - v$, $u_{\pm 1} - v$.

Классификация интегрируемых цепочек вида (6.1) была получена ранее Ямиловым. В его работах в качестве основного определения было принято существование, вместо (6.2), симметрий достаточно высокого порядка и, кроме того, цепочка предполагалась гамильтоновой. Здесь это свойство выводится. Точнее, сравнение ответов показывает, что список Ямилова совпадает с нашим, за исключением двух пар негамильтоновых цепочек

$$u_x = \frac{v + (1 + \varepsilon)u + u_1}{\varepsilon v - u_1}, \quad v_x = \frac{v_{-1} + (1 + \varepsilon^{-1})v + u}{v_{-1} - \varepsilon^{-1}u}, \quad (X_7)$$

$$u_y = \frac{v + (1 + \varepsilon^{-1})u + u_{-1}}{\varepsilon^{-1}v - u_{-1}}, \quad v_y = \frac{v_1 + (1 + \varepsilon)v + u}{v_1 - \varepsilon u}, \quad (Y_7)$$

$$u_x = f(v - u_1), \quad v_x = \varepsilon f(v_{-1} - u), \quad (X_8)$$

$$u_y = p(\varepsilon u_{-1} - v), \quad v_y = p(\varepsilon u - v_1). \quad (Y_8)$$

Это различие несущественно, так как в разделе 6.2.4 показано, что эти цепочки являются приводимыми, в некотором точном смысле. Основной классификационный результат содержится в следующей теореме.

Теорема 6.1. Совместные цепочки (6.1), (6.2), удовлетворяющие условию невырожденности (6.3), приводятся, указанными выше допустимыми заменами, к одной из пар перечисленных в списке 6.1, или к приводимым парам (X₇, Y₇) и (X₈, Y₈), или к линейным цепочкам. Все цепочки из списка имеют гамильтонову структуру общего вида

$$u_x = a(u, v)\delta_v H, \quad v_x = -a(u, v)\delta_u H, \quad H = K(u_{n+1}, v_n) + L(u_n, v_n), \quad (6.11)$$

$$u_y = a(u, v)\delta_v R, \quad v_y = -a(u, v)\delta_u R, \quad R = M(u_n, v_{n+1}) + N(u_n, v_n), \quad (6.12)$$

$$u_x = \frac{a}{v - u_1} - \frac{a_v}{2} \quad v_x = \frac{a}{v_{-1} - u} + \frac{a_u}{2} \quad (X_1)$$

$$u_y = \frac{a}{u_{-1} - v} + \frac{a_v}{2} \quad v_y = \frac{a}{u - v_1} - \frac{a_u}{2} \quad (Y_1)$$

$$a(u, v) = a(v, u), \quad a_{uuu} = 0$$

$$u_x = (u - u_1)(u - v) \quad v_x = (v_{-1} - v)(u - v) \quad (X_2)$$

$$u_y = \frac{u - u_{-1}}{v - u_{-1}} \quad v_y = \frac{v_1 - v}{v_1 - u} \quad (Y_2)$$

$$u_x = (1 + e^{u_1 - u})(1 + e^{u - v}) \quad v_x = (1 + e^{v - v_{-1}})(1 + e^{u - v}) \quad (X_3)$$

$$u_y = \frac{1 + e^{u_{-1} - u}}{1 - e^{u_{-1} - v}} \quad v_y = \frac{1 + e^{v - v_1}}{1 - e^{u - v_1}} \quad (Y_3)$$

$$u_x = e^{u_1 - u} + e^{u_1 - v} \quad v_x = e^{v - v_{-1}} + e^{u - v_{-1}} \quad (X_4)$$

$$u_y = e^{u_{-1} - u} + e^{u_{-1} - v} \quad v_y = e^{v - v_1} + e^{u - v_1} \quad (Y_4)$$

$$u_x = e^{u_1 - v} + e^{u - v} \quad v_x = e^{u - v_{-1}} + e^{u - v} \quad (X_5)$$

$$u_y = e^{v - u_{-1}} + e^{v - u} \quad v_y = e^{v_1 - u} + e^{v - u} \quad (Y_5)$$

$$u_x = e^{u_1 - u} + e^{u - v} \quad v_x = e^{v - v_{-1}} + e^{u - v} \quad (X_6)$$

$$u_y = \frac{e^{u_{-1} - u}}{e^{u_{-1} - v} - 1} \quad v_y = \frac{e^{v - v_1}}{e^{u - v_1} - 1} \quad (Y_6)$$

Список 6.1. Совместные пары цепочек (6.1), (6.2)

где $\delta_u H = \partial_u \sum_n T^n(H)$ обозначает разностную вариационную производную, с гамильтонианами H, R в инволюции. Соответствующие функции перечислены в таблице 6.2.

Интерес к цепочкам (6.1) вызван их тесной связью со многими интегрируемыми моделями. Высшие симметрии таких цепочек порождают иерархии эволюционных систем типа НШ. Например, цепочка (X_1) , основная в списке, была введена Шабатом и Ямиловым как преобразование Бэклунда для уравнения Ландау-Лифшица. В этом контексте, уравнение (6.2) определяет первый отрицательный поток иерархии и отвечает некоторой двух-компонентной гиперболической системе, см. раздел 6.3.1. Хотя так получаются далеко не все интегрируемые гиперболические системы, такое соотношение является источником важных примеров. Кроме того линейная комбинация потоков (6.1), (6.2) относится к классу цепочек типа Абловица-Ладика. В частности, паре (X_1, Y_1) отвечает цепочка Складина; этот пример подробно обсуждается в следующей

	a	H	R
(X_1, Y_1)		$\log(u_1 - v) - \frac{1}{2} \log a$	$-\log(u - v_1) + \frac{1}{2} \log a$
(X_2, Y_2)	$u - v$	$uv - u_1v$	$\log(u - v_1) - \log(u - v)$
(X_3, Y_3)	$1 + e^{v-u}$	$-e^{u_1-v} - e^{u-v}$	$\log(e^u - e^{v_1}) - \log(e^u + e^v)$
(X_4, Y_4)	$1 + e^{v-u}$	$-e^{u_1-v}$	$-e^{u-v_1}$
(X_5, Y_5)	1	$-e^{u_1-v} - e^{u-v}$	$e^{v_1-u} + e^{v-u}$
(X_6, Y_6)	$-e^{v-u}$	$e^{u_1-v} + \frac{1}{2}e^{2(u-v)}$	$\log(1 - e^{u-v_1})$

Таблица 6.2. Гамильтонова структура цепочек (6.1), (6.2)

главе.

В разделе 6.3.3 демонстрируется, что переход к цепочке Рудженарса-Тоды (6.4) отвечает скрытой дискретной симметрии цепочки (6.1). Именно, оказывается, что цепочки вида (6.4) для переменных u и v *совпадают* (при подходящей калибровке). Это позволяет распространить уравнения на квадратную решётку и вновь приводит к дискретным цепочкам типа Тоды из главы 5. Наоборот, цепочки вида (6.1) или (6.4) могут быть получены из дискретных цепочек Тоды в непрерывном пределе.

6.2 Классификация

6.2.1 Анализ условия совместности

Выведем некоторые следствия из условий совместности рассматриваемых цепочек.

Утверждение 6.2. Если потоки (6.1), (6.2) коммутируют, то существуют постоянная ε и функции $a(u, v)$, $b(u, u_1)$, $c(v, v_1)$, $h(u_1, v)$, $r(u, v_1)$, такие что

$$F_{u_1} = ah, \quad F_v = bh, \quad (6.13)$$

$$G_{v_{-1}} = -\varepsilon a T^{-1}(h), \quad G_u = -T^{-1}(ch), \quad (6.14)$$

$$P_{u_{-1}} = -\varepsilon a T^{-1}(r), \quad P_v = -T^{-1}(br), \quad (6.15)$$

$$Q_{v_1} = ar, \quad Q_u = cr. \quad (6.16)$$

Эти функции единственны с точностью до переобозначения

$$(a, b, c, h, r) \rightarrow (ka, kb, kc, h/k, r/k), \quad k = \text{const}.$$

Доказательство. Вычисляя u_{xy} двумя разными способами, приходим к уравнению

$$F_{u_1}T(P) + F_uP + F_vQ = P_{u_{-1}}T^{-1}(F) + P_uF + P_vG. \quad (6.17)$$

Дифференцируя его по u_1 и u_{-1} , получаем $F_{uu_1}P_{u_{-1}} = P_{uu_{-1}}F_{u_1}$, откуда следует

$$F_{u_1} = a(u, v)h(u_1, v), \quad P_{u_{-1}} = a(u, v)\hat{r}(u_{-1}, v).$$

Аналогично (можно применить симметрию (6.8))

$$G_{v_{-1}} = \tilde{a}(u, v)\hat{h}(u, v_{-1}), \quad Q_{v_1} = \tilde{a}(u, v)r(u, v_1).$$

Покажем, что выполняются также соотношения

$$\begin{aligned} T(P_v) &= -br, & \tilde{a}F_v &= abh, \\ T^{-1}(Q_u) &= -\hat{c}\hat{r}, & aG_u &= \tilde{a}\hat{c}\hat{h}, \\ T^{-1}(F_v) &= -\hat{b}\hat{h}, & \tilde{a}P_v &= a\hat{b}\hat{r}, \\ T(G_u) &= -ch, & aQ_u &= \tilde{a}cr \end{aligned} \quad (6.18)$$

с некоторыми функциями

$$b = b(u, u_1), \quad \hat{c} = \hat{c}(v_{-1}, v), \quad \hat{b} = \hat{b}(u_{-1}, u), \quad c = c(v, v_1).$$

Чтобы получить первые два соотношения, продифференцируем (6.17) по v_1 . Это даёт $F_v Q_{v_1} + F_{u_1} T(P_v) = 0$, что можно переписать, как $\tilde{a}F_v / (ah) = -T(P_v) / r$. Здесь левая и правая части равенства зависят соответственно от u_1, u, v и u, u_1, v_1 , следовательно их общее значение равно некоторой функции $b(u, u_1)$. Чтобы доказать остальные соотношения, достаточно применить симметрии (6.8), (6.9).

Далее, из (6.18) легко получить соотношения

$$\frac{a(u, v)}{\tilde{a}(u, v)} \cdot \frac{b(u, u_1)}{T(\hat{b}(u_{-1}, u))} = \frac{T(a(u, v))}{T(\tilde{a}(u, v))} \cdot \frac{c(v, v_1)}{T(\hat{c}(v_{-1}, v))}.$$

Отсюда следует $a/\tilde{a} = \psi(v)/\phi(u)$. Примем $a = \tilde{a}$, что возможно благодаря замене

$$a \rightarrow a\psi, \quad \tilde{a} \rightarrow \tilde{a}\phi, \quad h \rightarrow h/\psi, \quad \hat{r} \rightarrow \hat{r}/\psi, \quad \hat{h} \rightarrow \hat{h}/\phi, \quad r \rightarrow r/\phi.$$

Тогда $b = \varepsilon T(\hat{b})$, $c = \varepsilon T(\hat{c})$ с некоторой постоянной ε , а функции h, \hat{h} и r, \hat{r} связаны соотношениями

$$\hat{h} = -\varepsilon T^{-1}(h), \quad \hat{r} = -\varepsilon T^{-1}(r).$$

Собирая всё вместе, приходим к уравнениям (6.13)–(6.16). \square

Система (6.13)–(6.16) переопределена и дальнейший анализ её условий совместности доставляет большую часть информации, необходимой для уточнения вида цепочек. Это всё же не решает задачу полностью, хотя бы потому, что пары функций F, P и G, Q определяются из этой системы с точностью до

прибавления произвольных функций от u и v , соответственно. Следовательно, в какой-то момент нам потребуются некоторые дополнительные условия. Они доставляются следующим утверждением. Оказывается, что с его помощью правые части цепочек можно определить уже с точностью до нескольких постоянных коэффициентов, и окончательный ответ получается прямой проверкой условия совместности.

Утверждение 6.3. Если потоки (6.1), (6.2) коммутируют, то функции a, r, h , определённые в утверждении 6.2, удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} h_v Q + h_{u_1} T(P) &= -h(T(P_u) + Q_v + k_1), \\ a_u P + a_v Q &= a(P_u + Q_v + k_1), \\ r_u F + r_{v_1} T(G) &= -r(F_u + T(G_v) + k_2), \\ a_u F + a_v G &= a(F_u + G_v + k_2) \end{aligned} \tag{6.19}$$

с некоторыми постоянными k_1, k_2 .

Доказательство. Уравнения (6.19) эквивалентны законам сохранения

$$\begin{aligned} D_y(\log F_{u_1}) &= (1 - T)(P_u), & D_y(\log G_{v_{-1}}) &= (1 - T^{-1})(Q_v), \\ D_x(\log P_{u_{-1}}) &= (1 - T^{-1})(F_u), & D_y(\log Q_{v_1}) &= (1 - T)(G_v), \end{aligned}$$

в которых левые части раскрыты с учётом формул (6.13)–(6.16). Первый из этих законов сохранения получается при дифференцировании (6.17) по u_1 , для вывода остальных достаточно применить симметрии (6.8), (6.9). \square

Замечание 6.4. Если постулировать условие гамильтоновости, то решение задачи существенно упрощается. Из сравнения уравнений (6.11) с (6.13), (6.14) видно, что для гамильтоновых цепочек $h = H_{u_1 v}$ и $\varepsilon = 1$. В общем же случае параметр ε остаётся неопределённым почти до самого конца вычислений. Это довольно сильно усложняет анализ, так как приходится рассматривать несколько дополнительных случаев с $\varepsilon \neq 1$ (см. Утверждения 6.7, 6.8 ниже). Только в двух из этих случаев ответ оказывается непустым. Кроме того, можно показать, что в гамильтоновом случае вторые и четвёртое уравнение в (6.19) обращаются в тождества, а постоянные k_1, k_2 равны нулю.

Для дальнейшего использования замен (6.7) отметим, что они действуют на введённых функциях по формулам

$$\begin{aligned} \tilde{F} &= \phi'(u)F, & \tilde{G} &= \psi'(v)G, & \tilde{P} &= \phi'(u)P, & \tilde{Q} &= \psi'(v)Q, \\ \tilde{h} &= h/(\psi'(v)\phi'(u_1)), & \tilde{r} &= r/(\phi'(u)\psi'(v_1)), \\ \tilde{a} &= \phi'(u)\psi'(v)a, & \tilde{b} &= \phi'(u)\phi'(u_1)b, & \tilde{c} &= \psi'(v)\psi'(v_1)c. \end{aligned}$$

6.2.2 Цепочки с $a(u, v) \neq a_1(u)a_2(v)$

Удобно разбить все цепочки на два типа, в зависимости от того, имеет ли a вид $a(u, v) = a_1(u)a_2(v)$ или нет. Причина такого разбиения становится ясна при доказательстве следующего утверждения, в котором уточняется вид цепочек в том случае, когда факторизация не имеет места (к нему относится большая часть списка).

Утверждение 6.5. Если цепочка (6.1) удовлетворяет уравнениям (6.13), (6.14) при $aa_{uv} \neq a_u a_v$, то она приводится, заменой (6.7), к одному из следующих типов:

$$\begin{cases} u_x = au_1 + f_1(u)v + f(u), \\ v_x = -\varepsilon av_{-1} + g_1(v)u + g(v), \end{cases} \quad a = \sum_{i,j=0}^1 a_{ij}u^i v^j, \quad (6.20)$$

$$\begin{cases} u_x = \frac{a}{v - u_1} - \frac{a_v}{2} + f(u), \\ v_x = \frac{\varepsilon a}{v_{-1} - u} + \frac{\varepsilon a_u}{2} + g(v), \end{cases} \quad a = \sum_{i,j=0}^2 a_{ij}u^i v^j. \quad (6.21)$$

Доказательство. Из соотношений (6.13) следует, при вычислении перекрёстных производных,

$$a_v h + ah_v = b_{u_1} h + bh_{u_1}. \quad (6.22)$$

Деля на h и применяя оператор $\partial_v \partial_{u_1} - (\log h)_{vu_1}$, получаем

$$aN_{u_1} = bM_v, \quad N = \frac{h_{vv}}{h} - \frac{3h_v^2}{2h^2}, \quad M = \frac{h_{u_1 u_1}}{h} - \frac{3h_{u_1}^2}{2h^2}.$$

Дифференцирование по u даёт $a_u N_{u_1} = b_u M_v$. Так как $aa_{uv} \neq a_u a_v$, то $a_u b \neq ab_u$ и следовательно $M_v = N_{u_1} = 0$, то есть $M = M(u_1)$, $N = N(v)$. Нетрудно получить закон преобразования этих функций при замене (6.7):

$$M = (\phi')^2 \tilde{M} + \frac{\phi'''}{\phi'} - \frac{3(\phi'')^2}{2(\phi')^2}, \quad N = (\psi')^2 \tilde{N} + \frac{\psi'''}{\psi'} - \frac{3(\psi'')^2}{2(\psi')^2}.$$

Это позволяет принять $M = N = 0$ при подходящем выборе ϕ, ψ . Обозначим $h = H^{-2}$, тогда эти равенства и уравнение (6.22) принимают вид

$$H_{vv} = 0, \quad H_{u_1 u_1} = 0, \quad a_v H - 2aH_v = b_{u_1} H - 2bH_{u_1}. \quad (6.23)$$

Заметим, что в нашем распоряжении ещё остались дробно-линейные преобразования v и u_1 . Это позволяет привести H к виду $H = 1$ либо $H = v - u_1$ (в зависимости от того, приводим или нет исходный многочлен).

Если $h = 1$, то система (6.13) принимает вид $F_{u_1} = a(u, v)$, $F_v = b(u, u_1)$, откуда

$$F = \alpha(u)vu_1 + \beta(u)v + \gamma(u)u_1 + \delta(u).$$

Аналогично,

$$G = \varkappa(v)v_{-1}u + \lambda(v)v_{-1} + \mu(v)u + \nu(v),$$

кроме того, $-\varepsilon a = G_{v_{-1}} = -\varepsilon F_{u_1}$, и уравнения (6.20) получены.

Если $h = (v - u_1)^{-2}$, то из уравнений (6.23) легко найти, что $a = a_2 v^2 + a_1 v + a_0$, $b = -a_2 u_1^2 - a_1 u_1 - a_0$, где коэффициенты зависят от u . Решая систему (6.13), получаем

$$F = \frac{\alpha(u)vu_1 + \beta(u)v + \gamma(u)u_1 + \delta(u)}{v - u_1},$$

где $\alpha = a_2$, $\beta + \gamma = a_1$, $\delta = a_0$. Аналогично,

$$G = \frac{\varkappa(v)v_{-1}u + \lambda(v)v_{-1} + \mu(v)u + \nu(v)}{v_{-1} - u}$$

и то, что a биквадратичный многочлен, следует из сравнения с формулами

$$a = \alpha(u)v^2 + (\beta(u) + \gamma(u))v + \delta(u), \quad \varepsilon a = \varkappa(v)u^2 + (\lambda(v) + \mu(v))u + \nu(v).$$

Цепочка записывается в виде (6.21) с $2f = \beta - \gamma$, $2g = \lambda - \mu$. \square

Разумеется, аналогичное утверждение справедливо и для цепочки (6.2), в силу симметрии (6.9). Однако, замены (6.7) для обеих цепочек могут быть различными, поэтому вторую следует записывать в некоторых других переменных $U = U(u)$, $V = V(v)$:

$$\begin{cases} U_y = -\varepsilon AU_{-1} + p_1(U)V + p(U), \\ V_y = AV_1 + q_1(V)U + q(V), \end{cases} \quad A = \sum_{i,j=0}^1 A_{ij}U^iV^j, \quad (6.24)$$

$$\begin{cases} U_y = \frac{\varepsilon A}{U_{-1} - V} + \frac{\varepsilon AV}{2} + p(U), \\ V_y = \frac{A}{U - V_1} - \frac{AV}{2} + q(V), \end{cases} \quad A = \sum_{i,j=0}^2 A_{ij}U^iV^j. \quad (6.25)$$

Из цепочек (6.20), (6.21) и (6.24), (6.25) можно составить три варианта пар, с точностью до симметрии (6.9). В каждом случае некоторая дополнительная информация о правых частях может быть получена из сравнения формул для функций a, b, c , отвечающих обеим цепочкам. Полезна также следующая лемма. Здесь мы обозначаем

$$\tilde{F}(U_1, U, V) = U'F(u_1, u, v), \quad \tilde{G}(U, V, V_{-1}) = V'G(u, v, v_{-1})$$

для правых частей цепочки (6.1), переписанной в переменных U, V .

Лемма 6.6. Если цепочка (6.1) имеет вид (6.20), то её симметрия (6.2) удовлетворяет условиям $P_{uu} = Q_{vv} = 0$. Если цепочка (6.1) имеет вид (6.21), то $P_{uuu} = Q_{vvv} = 0$ и, кроме того, P и Q совпадают как функции от своих аргументов, то есть $P(u, v, v_1) = Q(u, v, v_1)$.

Аналогично, если цепочка (6.2) имеет вид (6.24), то $\tilde{F}_{UU} = \tilde{G}_{VV} = 0$, а если цепочка (6.2) имеет вид (6.25), то $\tilde{F}_{UUU} = \tilde{G}_{VVV} = 0$ и $\tilde{F}(U_1, U, V) = \tilde{G}(U_1, U, V)$.

Доказательство. Используем первое из соотношений (6.19). Если $h = 1$, то равенства $P_{uu} = Q_{vv} = 0$ следуют немедленно. Если $h = (v - u_1)^{-2}$, то дифференцирование по u_1 даёт

$$Q = T(P) + (v - u_1)T(P_u) + \frac{1}{2}(v - u_1)^2T(P_{uu}).$$

Ещё одно дифференцирование даёт $P_{uuu} = 0$. Кроме того, последнее уравнение определяет тейлоровское разложение по второму аргументу функции $P(u, v, v_1)$. Уравнения для F, G следуют в силу симметрии (6.9). \square

Утверждение 6.7. Совместные цепочки с условием $aa_{uv} \neq a_u a_v$ приводятся, допустимыми заменами, к одной из пар (X_1, Y_1) – (X_4, Y_4) или (X_7, Y_7) .

Доказательство. 1) Пусть цепочки имеют вид (6.21), (6.25). Тогда можно положить $h = (v - u_1)^{-2}$ и $r = (U - V_1)^{-2}U'V'_1$, после растяжения y . Сравнение функций a, b, c даёт

$$\begin{aligned} a &= a(u, v) = A(U, V)/(U'V'), \\ -b &= a(u, u_1) = \varepsilon A(U_1, U)/(U'_1U'), \\ -c &= \varepsilon a(v, v_1) = A(V_1, V)/(V'_1V'), \end{aligned} \quad (6.26)$$

где

$$a(u, v) = \sum_{i,j=0}^2 a_{ij}u^i v^j, \quad A(U, V) = \sum_{i,j=0}^2 A_{ij}U^i V^j.$$

При дифференцировании первого уравнения получаем

$$\begin{aligned} (a_u U' + aU'')V' &= A_U U', \quad (a_{uu}U' + 2a_u U'' + aU''')V' = A_{UU}(U')^2 + A_U U'', \\ (3a_{uu}U'' + 3a_u U''' + aU^{IV})V' &= 3A_{UU}U'U'' + A_U U''' \end{aligned}$$

и исключение A_U, A_{UU} приводит к равенству

$$(2U'''U' - 3(U'')^2)U'a_u = (4U'''U''U' - U^{IV}(U')^2 - 3(U'')^3)a.$$

Так как $aa_{uv} \neq a_u a_v$, то отсюда следует $2U'''U' - 3(U'')^2 = 0$, то есть U дробно-линейная функция. Это же верно и для V .

Так как вид цепочки (6.25) сохраняется при замене $\tilde{U} = M(U)$, $\tilde{V} = M(V)$ с произвольным дробно-линейным преобразованием M , то можно без потери общности положить $U = u$. Затем, можно применять дробно-линейное преобразование к самим переменным: $\tilde{u} = M(u)$, $\tilde{v} = M(v)$. При этом функция V меняется по формуле $\tilde{V} = MV M^{-1}$, и может быть приведена к виду $V(v) = \delta v$ либо $V(v) = v + 2\delta$. Система (6.26) становится эквивалентной уравнениям

$$a(u, v) = \varepsilon A(v, u), \quad \varepsilon a(u, v)V'(v) = a(V(v), u).$$

Первое просто определяет A , второе определяет некоторое обобщённое свойство симметрии функции a . Все биквадратичные многочлены, удовлетворяющие этому свойству, находятся непосредственно. Они перечислены в таблице

ε	$V(v)$	$a(u, v)$	
1	v	$a_{22}u^2v^2 + a_{12}uv(u+v) + a_{02}(u^2 + v^2) + a_{11}uv + a_{01}(u+v) + a_{00}$	(X_1, Y_1)
-1	v	$(u-v)(\alpha uv + \beta(u+v) + \gamma)$	-
1	$v + 2\delta$	$(u-v-\delta)^2 + \alpha, \quad \delta \neq 0$	(6.27)
-1	$v + 2\delta$	$u - v - \delta, \quad \delta \neq 0$	-
$\sqrt[3]{1}$	εv	$\alpha u^2v^2 + \varepsilon u + v, \quad \alpha \neq 0$	-
$\sqrt{-1}$	$-v$	$\alpha uv(u + \varepsilon v) + \beta(\varepsilon u + v), \quad \alpha\beta \neq 0$	-
-1	$-v$	$\alpha u^2v^2 + \beta(u^2 + v^2) + \gamma, \quad \beta\gamma \neq \alpha^2$	-
1	δv	$u^2 + \alpha uv + \delta v^2, \quad \delta \neq 0, 1$	(6.28)
-1	δv	$u^2 - \delta v^2, \quad \delta \neq 0, 1$	-
	$\varepsilon^{-2}v$	$\varepsilon u + v, \quad \varepsilon^2 \neq 1$	(X_7, Y_7)

Таблица 6.3. Решения уравнения $\varepsilon a(u, v)V'(v) = a(V(v), u)$

6.3 (с точностью до инверсии $(u, v) \rightarrow (1/u, 1/v)$; ограничения на параметры приведены с целью избежать пересечений и обеспечить условие $aa_{uv} \neq a_u a_v$). Теперь остаётся лишь найти коэффициенты функций f, g, p, q , которые являются квадратичными многочленами, согласно лемме 6.6. Это делается прямым вычислением, показывающим, что в большинстве случаев ответ пуст. В результате, мы получаем пары (X_1, Y_1) , (X_7, Y_7) а также пары

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{a}{v - u_1} + u - v + \beta, & v_x &= \frac{a}{v_{-1} - u} + u - v + \beta, \\ u_y &= \frac{a}{u_{-1} - v - 2\delta} - u + v + \gamma, & v_y &= \frac{a}{u - v_{-1} - 2\delta} - u + v + \gamma \end{aligned} \quad (6.27)$$

где $a = (u - v - \delta)^2 + \alpha$, и

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{a}{v - u_1} - \delta v + \beta u, & v_x &= \frac{a}{v_{-1} - u} + u + (\beta + \alpha)v, \\ u_y &= \frac{\delta a}{u_{-1} - \delta v} + \delta v + (\gamma + \alpha)u, & v_y &= \frac{a}{u - \delta v_{-1}} - u + \gamma v \end{aligned} \quad (6.28)$$

где $a = u^2 + \alpha uv + \delta v^2$. Эти цепочки приводятся к специальным случаям цепочки (X_1, Y_1) преобразованием вида (6.10). Для цепочек (6.27) следует использовать замену

$$u \rightarrow u + (\beta + \delta)x + (\gamma - \delta)y - \delta(n - 1), \quad v \rightarrow v + (\beta + \delta)x + (\gamma - \delta)y - \delta n$$

и новые переменные удовлетворяют цепочкам (X_1, Y_1) с $a = (u - v)^2 + \alpha$. Для (6.28) имеем аналогичную замену, сопряжённую экспоненцированием.

2) Пусть цепочки имеют вид (6.21), (6.24), $h = (v - u_1)^{-2}$, $r = U'V'_1$. Тогда

$$\begin{aligned} a(u, v) &= \sum_{i,j=0}^2 a_{ij}u^i v^j = (A_{11}UV + A_{10}U + A_{01}V + A_{00})/(U'V'), \\ b(u, u_1) &= -a(u, u_1) = (\varepsilon A_{11}UU_1 + \varepsilon A_{01}U - p_1(U_1))/(U'U'_1), \\ c(v, v_1) &= -\varepsilon a(v, v_1) = (A_{11}VV_1 + A_{10}V_1 + q_1(V))/(V'V'_1). \end{aligned}$$

Как в предыдущем случае, из первого уравнения следует, что функции U, V дробно-линейны. Оставшиеся два уравнения эквивалентны соотношениям

$$\frac{A_{11}V(v) + A_{10}}{V'(v)} = -\varepsilon \frac{A_{11}U(v) + A_{01}}{U'(v)}, \quad (6.29)$$

$$\frac{p_1(U(u))}{U'(u)} = \frac{A_{01}V(u) + A_{00}}{V'(u)}, \quad \frac{q_1(V(v))}{V'(v)} = -\varepsilon \frac{A_{10}U(v) + A_{00}}{U'(v)}. \quad (6.30)$$

Примем, не теряя общности, что $A = UV + 1$ или $A = \varepsilon U - V$. В первом случае из уравнения (6.29) следует $U(u) = cV(u)^{-\varepsilon}$ (и, следовательно, $\varepsilon = \pm 1$), а со вторым случаем имеем $U(u) = V(u) + c$. Подходящие замены, дробно-линейные в цепочке (6.21) и линейные в (6.24), сводят задачу к следующим случаям:

$$\begin{aligned} \varepsilon = 1, \quad U = u, \quad V = v^{-1}, \quad a = -v(u + \delta v), \quad A = UV + \delta, \quad \delta \neq 0; \\ \varepsilon = -1, \quad U = u, \quad V = v, \quad a = A = uv + 1; \\ U = u, \quad V = v, \quad a = A = \varepsilon u - v + \delta. \end{aligned}$$

Кроме того, функции p_1, q_1 определяются из соотношений (6.30), а функции $f(u), g(v), p(u), q(V)$ из уравнений

$$f'' = 0, \quad ((V'g)/V')' = 0, \quad p''' = 0, \quad (q/V')_{vv} = 0,$$

согласно лемме 6.6. В первом случае, коэффициенты находятся прямым вычислением и, после замен $u \rightarrow e^u$, $v \rightarrow e^v$ и (6.10), получаем цепочки (X_3, Y_3) . Второй случай оказывается пустым, третий содержит, при $\varepsilon = 1$, пару (X_2, Y_2) , с точностью до допустимых преобразований.

3) Пусть цепочки имеют вид (6.20), (6.24), $h = 1$ и $r = U'V'_1$. Сравнение выражений для функции a приводит к уравнению

$$(a_{11}uv + a_{10}u + a_{01}v + a_{00})U'V' = A_{11}UV + A_{10}U + A_{01}V + A_{00}.$$

Вычисляя $aa_{uv} - a_u a_v$, получаем равенство

$$(a_{11}a_{00} - a_{10}a_{01})U'V' = A_{11}A_{00} - A_{10}A_{01}$$

откуда следует $U'' = V'' = 0$. Следовательно, можно принять, после линейных замен, $U = u$, $V = v$, $A = a$. Из леммы 6.6 следует, что правые части обеих цепочек аффинно-линейны по каждой переменной. Часть уравнений для коэффициентов можно получить из соотношений для функций b, c :

$$\begin{aligned} b(u, u_1) &= a_{11}uu_1 + a_{01}u_1 + f_1(u) = \varepsilon a_{11}uu_1 + \varepsilon a_{01}u - p_1(u_1), \\ c(v, v_1) &= \varepsilon a_{11}vv_1 + \varepsilon a_{10}v - g_1(v_1) = a_{11}vv_1 + a_{10}v_1 + q_1(v). \end{aligned}$$

Окончательная проверка условий совместности приводит к паре (X_4, Y_4) . \square

6.2.3 Цепочки с $a(u, v) = a_1(u)a_2(v)$

Для завершения классификации осталось разобрать случай, когда функция a факторизуется.

Утверждение 6.8. Совместные цепочки с условием $aa_{uv} = a_u a_v$ приводятся, допустимыми заменами, к одной из пар (X_5, Y_5) , (X_6, Y_6) или (X_8, Y_8) .

Доказательство. Замена (6.7) позволяет свести задачу к случаю $a = 1$ (мы сделаем это временно, так как в конечном ответе такая калибровка не очень удобна). Тогда условия совместности для системы (6.13)–(6.16) имеют вид

$$\frac{h_v}{h} = b_{u_1} + b \frac{h_{u_1}}{h}, \quad \varepsilon \frac{h_{u_1}}{h} = c_v + c \frac{h_v}{h}, \quad \varepsilon \frac{r_{v_1}}{r} = b_u + b \frac{r_u}{r}, \quad \frac{r_u}{r} = c_{v_1} + c \frac{r_{v_1}}{r}. \quad (6.31)$$

Как следствие, имеем уравнения

$$b_u(\log h)_{vu_1} = 0, \quad c_{v_1}(\log h)_{vu_1} = 0, \quad b_{u_1}(\log r)_{uv_1} = 0, \quad c_v(\log r)_{uv_1} = 0.$$

Используем также уравнения

$$P_u + Q_v + k_1 = 0, \quad F_u + G_v + k_2 = 0, \quad (6.32)$$

следующие из соотношений (6.19).

1) Сначала допустим, что обе величины $(\log h)_{vu_1}$ и $(\log r)_{uv_1}$ не равны нулю. Тогда b, c постоянные и $bc = \varepsilon$. Растяжение u и v позволяет положить $b = -1, c = -\varepsilon$. После интегрирования уравнений (6.13)–(6.16), и учитывая (6.32), получаем цепочки вида

$$\begin{aligned} u_x &= f(v - u_1) + \alpha_1 u + \alpha, & v_x &= \varepsilon f(v_{-1} - u) + \beta_1 v, \\ u_y &= p(\varepsilon u_{-1} - v) + \gamma_1 u + \gamma, & v_y &= p(\varepsilon u - v_1) + \delta_1 v. \end{aligned}$$

Прямое вычисление доказывает (заметим, что $f''p'' \neq 0$ по предположению), что линейные члены отсутствуют и мы приходим к цепочке (X_8, Y_8) .

2) Пусть теперь $(\log h)_{vu_1} = 0$ или $(\log r)_{uv_1} = 0$. Симметрия (6.9) позволяет принять, для определённости, что $h = m(u_1)n(v)$. Тогда два первые уравнения (6.31) принимают вид

$$\frac{n'}{n} = b_{u_1} + b \frac{m'}{m}, \quad \varepsilon \frac{m'}{m} = c_v + c \frac{n'}{n},$$

откуда

$$m' = \mu m, \quad n' = \nu n, \quad b_{u_1} = \nu - \mu b, \quad c_v = \varepsilon \mu - \nu c.$$

Здесь приходится рассмотреть несколько случаев.

2.1) Пусть $\mu\nu \neq 0$. Применяя растяжения, положим $\mu = 1, \nu = -1, h = e^{u_1 - v}$. Тогда

$$b = e^{-u_1} \bar{m}(u) - 1, \quad c = e^v \bar{n}(v_1) - \varepsilon,$$

и два последние уравнения (6.31) сводятся к

$$\bar{m}'(u)r + \bar{m}(u)r_u = 0, \quad \bar{n}'(v_1)r + \bar{n}(v_1)r_{v_1} = 0, \quad r_u + \varepsilon r_{v_1} = 0.$$

При $\bar{m} = \bar{n} = 0$ получаем цепочку вида (X_8, Y_8) . В противном случае,

$$b = \beta e^{-\delta\varepsilon u - u_1} - 1, \quad c = \gamma e^{v + \delta v_1} - \varepsilon, \quad r = \lambda e^{\delta(\varepsilon u - v_1)}$$

где хотя бы один из коэффициентов β, γ ненулевой. Решение уравнений (6.13), (6.14) имеет вид

$$F = e^{u_1 - v} - \beta e^{-\delta\varepsilon u - v} + f(u), \quad G = \varepsilon e^{u - v - 1} - \gamma e^{u + \delta v} + g(v).$$

Функции P, Q тоже легко находятся. При помощи (6.32) легко выясняется, что $\delta = -1, \varepsilon = 1, \beta = \gamma$, а функции f, g линейны. После уточнения постоянных прямой проверкой и замены $e^u \rightarrow u, e^{-v} \rightarrow v$ (это, конечно, портит калибровку $a = 1$) приходим к паре (X_5, Y_5) .

2.2) Пусть $\mu = 0, \nu \neq 0$. Положив $\nu = 1, h = e^v$, получаем

$$b = u_1 + \bar{m}(u), \quad c = e^{-v}\bar{n}(v_1), \\ r_u = 0, \quad \bar{n}'(v_1)r + \bar{n}(v_1)r_{v_1} = 0, \quad \varepsilon r_{v_1} = \bar{m}'(u)r.$$

Отсюда $b = u_1 + \varepsilon\delta u + \beta, c = \gamma e^{-v - \delta v_1}, r = \lambda e^{\delta v_1}$ и решение уравнений (6.13), (6.14) имеет вид

$$F = (u_1 + \delta\varepsilon u + \beta)e^v + f(u), \quad G = -\varepsilon e^{v-1} - \gamma u e^{-\delta v} + g(v).$$

Второе уравнение (6.32) теперь принимает вид $\delta\varepsilon e^v + f'(u) + \gamma\delta u e^{-\delta v} + g'(v) + k_2 = 0$. Так как $\gamma \neq 0$ в силу условия невырожденности (6.3), то $\delta = 0$. Положим $r = 1$, тогда решение уравнений (6.15), (6.16) даёт

$$P = -\varepsilon u_{-1} - (u + \beta)v + p(u), \quad Q = v_1 + \gamma u e^{-v} + q(v).$$

Заметим, что из первого уравнения (6.32) следует $\gamma = 0$. Таким образом, этот случай оказывается пуст (как и случай $\mu \neq 0, \nu = 0$, в силу симметрии (6.8)).

2.3) Наконец, пусть $\mu = \nu = 0$. Тогда $b = b(u), c = c(v_1)$ и можно принять $h = 1$. Тогда $F = u_1 + b(u)v + f(u), G = -\varepsilon v_{-1} - c(v)u - g(v)$, и подстановка в (6.32) даёт

$$b'(u)v + f'(u) - c'(v)u - g'(v) + k_2 = 0.$$

Отсюда

$$b(u) = \alpha u^2 + 2\beta_1 u + \beta, \quad c(v) = \alpha v^2 + 2\gamma_1 v + \gamma.$$

Кроме того, исключение r из уравнений (6.31) приводит к соотношению

$$\varepsilon b'' + (b'^2 - bb'')c = \varepsilon^2 c'' + \varepsilon(c'^2 - cc'')b, \quad b = b(u), \quad c = c(v_1).$$

Обозначим $\Delta_b = b'^2 - 2bb'' = 4(\beta_1^2 - \alpha\beta)$, и аналогично для c , тогда это соотношение принимает вид

$$2\varepsilon\alpha + (\Delta_b + 2\alpha b)c = 2\varepsilon^2\alpha + \varepsilon(\Delta_c + 2\alpha c)b.$$

Если $\alpha \neq 0$, то $\varepsilon = 1$ и $\Delta_b = \Delta_c = 0$, то есть b и c полные квадраты. Линейная замена переменных приводит их к виду $b = u^2$, $c = v_1^2$. Далее, из (6.31) находим, что $r = (uv_1 - 1)^{-2}$; решение уравнений (6.15), (6.16) имеет вид $P = u_{-1}/(u_{-1}v - 1) + p(u)$, $Q = -v_1/(uv_1 - 1) + q(v)$. Из уравнений (6.32) следует, что функции f, g, p, q линейны и уточнение постоянных непосредственно из условия совместности приводит к паре (X_6, Y_6) .

Если $\alpha = 0$, то $\beta_1\gamma_1 = 0$, $\beta_1^2\gamma = \varepsilon\gamma_1^2\beta$. Так как функции b, c отличны от нуля, в силу (6.3), то $\beta_1 = \gamma_1 = 0$, то есть цепочка (6.1) линейна. Прямое вычисление позволяет доказать, что или второе уравнение тоже линейно, или имеет место частный случай пары (X_8, Y_8) . \square

6.2.4 Исключительные цепочки

Пары (X_7, Y_7) и (X_8, Y_8) представляют некоторый интерес как контр-примеры к утверждению, что наличие одной обобщённой симметрии ведёт к существованию целой иерархии. Эти цепочки не обладают высшими симметриями при произвольных f, g и ε . В частности, для ассоциированных цепочек вида (6.4) не выполнены необходимые условия интегрируемости. Согласно [192], простейшее из них имеет вид

$$D_x(\log A_{u_{1,x}}) \in \text{Im}(T - 1).$$

Нетрудно проверить, что исключение v из уравнений (X_7) приводит к цепочке

$$u_{xx} = \frac{(u_x + 1)(\varepsilon u_x - 1)}{1 + \varepsilon} \left(\frac{u_{1,x} + 1}{u_1 + \varepsilon u} - \frac{\varepsilon u_{-1,x} - 1}{u + \varepsilon u_{-1}} \right),$$

для которой данное условие выполняется лишь при $\varepsilon = 1$.

Оказывается, впрочем, что природа этих контр-примеров не глубока. Легко видеть, что при необратимой подстановке $U = v - u_1$, $V = \varepsilon u - v_1$ пара (X_8, Y_8) распадается на две независимые пары для переменных U и V :

$$U_x = \varepsilon f(U_{-1}) - f(U_1), \quad U_y = 0; \quad V_x = 0, \quad V_y = \varepsilon p(V_{-1}) - p(V_1).$$

Аналогичная, но не такая очевидная подстановка имеется и для пары (X_7, Y_7) : переменные

$$U = \frac{(1 + \varepsilon)(u + v)}{(\varepsilon v_{-1} - u)(\varepsilon v - u_1)}, \quad V = \frac{(1 + \varepsilon)(u + v)}{(\varepsilon u_{-1} - v)(\varepsilon u - v_1)} \quad (6.33)$$

удовлетворяют уравнениям

$$U_x = U(U_1 + U - \varepsilon(U + U_{-1})), \quad U_y = 0; \\ V_x = 0, \quad V_y = -V(V_1 + V - \varepsilon(V + V_{-1})).$$

Таким образом, в обоих случаях величины $U(n)$ являются локальными первыми интегралами (псевдоконстантами) для x -потока, а $V(n)$ для y -потока. В этих переменных совместность становится тривиальной и не связана с интегрируемостью (хотя при $\varepsilon = 1$ и некоторых f, p уравнения могут “случайно” совпасть с интегрируемыми цепочками типа Вольтерры).

То, что псевдоконстанта по одной независимой переменной удовлетворяет замкнутой цепочке относительно второй, легко объясняется при помощи ассоциированной гиперболической системы. Для пары (X_7, Y_7) эта система имеет вид

$$u_{xy} = \frac{(u_x + 1)(u_y + 1)}{u + v}, \quad v_{xy} = \frac{(v_x - 1)(v_y - 1)}{u + v} \quad (6.34)$$

(отметим, что её вид упрощается заменой $u \rightarrow u - x - y$, $v \rightarrow v + x + y$, что, правда, ведёт к неавтономной цепочке). Это система уравнений типа Лиувилля. Исключение сдвигов в первых интегралах (6.33) ведёт к инвариантам этой системы, то есть, к величинам $I(u, v, u_x, v_x, \dots)$, $J(u, v, u_y, v_y, \dots)$ для которых $I_y = 0$, $J_x = 0$ в силу (6.34). Можно показать, что в случае гиперболических систем второго порядка все решения уравнения $I_y = 0$ выражаются через производные по x от самое большее двух базисных инвариантов, откуда и следует, что инварианты U_1, U, U_{-1} должны быть связаны некоторым дифференциальным уравнением.

Система (6.34) является точно решаемой. Действительно, из неё следует

$$(\log u_{xy})_{xy} = 0, \quad (\log v_{xy})_{xy} = 0,$$

откуда получается формула для общего решения

$$u = a(x)b(y) + c(x) + d(y), \quad v = -u + (u_x + 1)(u_y + 1)/u_{xy},$$

при $a'b' \neq 0$. Подстановка этой формулы в цепочки (X_7, Y_7) приводит к рекуррентным соотношениям

$$a_1 = (\varepsilon c' - 1)/a', \quad c_1 = aa_1 - \varepsilon c; \quad b_1 = (d' + 1)/b', \quad d_1 = \varepsilon(bb_1 - d).$$

В частности, замена $a \rightarrow \varepsilon^n a$ и растяжение x приводит к уравнению

$$\varepsilon^n a_{n,x} = \frac{1}{a_{n+1} - a_{n-1}}.$$

Таким образом, зависимость от n не находится в явном виде, но описывается некоторой неавтономной цепочкой типа Вольтерра (интегрируемой при $\varepsilon = 1$).

Наконец, отметим, что рассмотренные примеры допускают обобщение с переменным параметром ε . Например, следующая пара совместна:

$$\begin{aligned} u_{n,x} &= \frac{v_n + (1 + \varepsilon_n)u_n + u_{n+1}}{\varepsilon_n v_n - u_{n+1}}, & v_{n,x} &= \frac{v_{n-1} + (1 + \varepsilon_{n-1}^{-1})v_n + u_n}{v_{n-1} - \varepsilon_{n-1}^{-1}u_n}, \\ u_{n,y} &= \frac{v_n + (1 + \varepsilon_{n-1}^{-1})u_n + u_{n-1}}{\varepsilon_{n-1}^{-1}v_n - u_{n-1}}, & v_{n,y} &= \frac{v_{n+1} + (1 + \varepsilon_n)v_n + u_n}{v_{n+1} - \varepsilon_n u_n}. \end{aligned}$$

6.3 Ассоциированные уравнения

6.3.1 Гиперболические системы

Благодаря условию невырожденности, уравнения (6.1), (6.2) можно разрешить относительно переменных $u_{\pm 1}$, $v_{\pm 1}$:

$$\begin{aligned} u_1 &= \tilde{F}(u_x, u, v), & v_{-1} &= \tilde{G}(u, v, v_x), \\ u_{-1} &= \tilde{P}(u_y, u, v), & v_1 &= \tilde{Q}(u, v, v_y). \end{aligned}$$

Эти переменные можно исключить их выражений для смешанных производных и, тем самым, возникает некоторая система уравнений в частных производных. Исходные цепочки определяют её автопреобразование Бэклунда. Общий вид системы задаётся уравнениями

$$u_{xy} = f_4 u_x u_y + f_3 u_x + f_2 u_y + f_1, \quad v_{xy} = g_4 v_x v_y + g_3 v_x + g_2 v_y + g_1$$

где коэффициенты зависят от u, v . Действительно, рассмотрим равенства

$$u_{xy} = F_{u_1} T(P) + F_u u_y + F_v v_y = P_{u_{-1}} T^{-1}(F) + P_u u_x + P_v v_x.$$

В первом выражении для u_{xy} исключаются только переменные u_1, v_1 и следовательно оно не содержит v_x и линейно по u_y . Аналогично, исключая u_{-1}, v_{-1} во втором выражении, получаем, что оно не зависит от v_y и линейно по u_x . Формула для v_{xy} доказывается аналогично.

Утверждение 6.9. Цепочки из списка 6.1 порождают, соответственно, следующие гиперболические системы:

$$\begin{aligned} a u_{xy} &= a_u u_x u_y + 2\tilde{a}(u_x - u_y) + \tilde{a} a_v - \tilde{a}_v a, & 4\tilde{a} &= a a_{uv} - a_u a_v & (XY_1) \\ a v_{xy} &= a_v v_x v_y - 2\tilde{a}(v_x - v_y) + \tilde{a} a_u - \tilde{a}_u a, \end{aligned}$$

$$u_{xy} = \frac{u_x(u_y - 1)}{u - v} + u_y(u - v) \quad v_{xy} = -\frac{v_x(v_y - 1)}{u - v} - v_y(u - v) \quad (XY_2)$$

$$u_{xy} = -\frac{u_x(u_y - 1)}{1 + e^{u-v}} + u_y(1 + e^{u-v}) \quad v_{xy} = \frac{v_x(v_y - 1)}{1 + e^{u-v}} - v_y(1 + e^{u-v}) \quad (XY_3)$$

$$u_{xy} = -\frac{u_x u_y}{1 + e^{u-v}} + 1 + e^{u-v} \quad v_{xy} = \frac{v_x v_y}{1 + e^{u-v}} - 1 - e^{u-v} \quad (XY_4)$$

$$u_{xy} = e^{u-v} u_y - e^{v-u} u_x \quad v_{xy} = e^{v-u} v_x - e^{u-v} v_y \quad (XY_5)$$

$$u_{xy} = -u_x u_y + 2e^{u-v} u_y - 1 \quad v_{xy} = v_x v_y - 2e^{u-v} v_y + 1 \quad (XY_6)$$

6.3.2 Цепочки Рудженарса-Тоды

При постановке задачи в разделе 6.1 уже отмечалось, что исключение переменной v позволяет переписать цепочку (6.1) в виде цепочки типа Рудженарса-Тоды (6.4), а её симметрию (6.2) в виде (6.5). При этом также выполняется

цепочка (6.6). Тройки цепочек, отвечающие списку 6.1 приведены в списке 6.4. Замечательным обстоятельством является то, что исключение u вместо v приводит к тем же самым уравнениям. Это можно доказать без вычислений, заметив, что цепочки из списка 6.1 инварианты относительно инволюции

$$u_n \leftrightarrow \sigma v_{-n}, \quad x \rightarrow -x, \quad y \rightarrow -y,$$

а цепочки из списка 6.4 относительно инволюции

$$u_n \leftrightarrow \sigma u_{-n}, \quad x \rightarrow -x, \quad y \rightarrow -y,$$

где $\sigma = 1$ для (X_1) , (Y_1) , (R_1) и $\sigma = -1$ в остальных случаях. Следует оговориться, что это свойство неинвариантно относительно общих замен (6.7): при произвольном выборе переменных u и v соответствующие им цепочки Рудженарса-Тоды совпадают лишь после некоторого преобразования. Что касается цепочек (X_7) , (Y_7) и (X_8) , (Y_8) , то они обладают указанной симметрией лишь при $\varepsilon = 1$.

6.3.3 Дискретные цепочки Тоды

Совпадение цепочек (6.4) для переменных u и v позволяет распространить уравнения на квадратную решётку и приводит к дискретным цепочкам типа Тоды. Действительно, это свойство означает, что уравнения (6.1), (6.2) определяют авто-преобразования Бэклунда для цепочек (6.4), (6.6) соответственно. Это позволяет определить переменную $u(m, n, x, y)$, так что пара $(u(n), v(n))$ идентифицируется с $(u(m, n), u(m + 1, n))$ при произвольном m . Перепишем цепочки (6.1), (6.2), обозначая сдвиги на квадратной решётке двойными индексами (то есть, переобозначая $u_1 \rightarrow u_{0,1}$, $v \rightarrow u_{1,0}$):

$$u_x = F(u_{0,1}, u, u_{1,0}) = G(u_{-1,0}, u, u_{0,-1}), \quad (6.35)$$

$$u_y = P(u_{0,-1}, u, u_{1,0}) = Q(u_{-1,0}, u, u_{0,1}). \quad (6.36)$$

Справедливы следующие свойства:

1) уравнения $F = G$ и $P = Q$ эквивалентны и переписываются в виде дискретной цепочки Тоды

$$f(u_{0,1}, u) + \tilde{f}(u_{0,-1}, u) = g(u_{1,0}, u) + \tilde{g}(u_{-1,0}, u); \quad (6.37)$$

2) уравнение (6.37) совместно с динамикой по x и y , то есть, соотношения, полученные дифференцированием (6.37) в силу (6.35) или (6.36) выполняются в силу этого уравнения тождественно;

3) переменные $u(n) = u(m, n)$ для любого m удовлетворяют цепочкам Рудженарса-Тоды (6.4), (6.6);

4) переменные $u(m) = u(m, n)$ для любого n также удовлетворяют цепочкам Рудженарса-Тоды (возможно, с другими правыми частями);

$$\begin{cases} u_{xx} = (u_x^2 + r(u)) \left(\frac{u_{1,x}}{T(a)} - \frac{u_{-1,x}}{a} + \frac{1}{2} \partial_u \log(T(a)a) \right) - \frac{1}{2} r'(u) \\ u_{yy} = (u_y^2 + r(u)) \left(\frac{u_{1,y}}{T(a)} - \frac{u_{-1,y}}{a} + \frac{1}{2} \partial_u \log(T(a)a) \right) - \frac{1}{2} r'(u) \\ (u_x u_y - r(u))(u_1 - u_{-1}) + (u_x + u_y) \left(a + \frac{1}{2} a_{u_{-1}} (u_1 - u_{-1}) \right) = 0 \\ a = a(u, u_{-1}), \quad 4r(u) = 2a a_{u_{-1} u_{-1}} - a_{u_{-1}}^2 \end{cases} \quad (R_1)$$

$$\begin{cases} u_{xx} = u_x \left(\frac{u_{1,x}}{u_1 - u} - \frac{u_{-1,x}}{u - u_{-1}} - u_1 + 2u - u_{-1} \right) \\ u_{yy} = -u_y (u_y - 1) \left(\frac{u_{1,y}}{u_1 - u} - \frac{u_{-1,y}}{u - u_{-1}} \right) \\ u_x u_y = (1 - u_y)(u_1 - u)(u - u_{-1}) \end{cases} \quad (R_2)$$

$$\begin{cases} u_{xx} = u_x \left(\frac{u_{1,x}}{1 + e^{u-u_1}} - \frac{u_{-1,x}}{1 + e^{u_{-1}-u}} - e^{u_1-u} + e^{u-u_{-1}} \right) \\ u_{yy} = -u_y (u_y - 1) \left(\frac{u_{1,y}}{1 + e^{u-u_1}} - \frac{u_{-1,y}}{1 + e^{u_{-1}-u}} \right) \\ u_x u_y = (u_y - 1)(e^{u_1-u} + 1)(e^{u-u_{-1}} + 1) \end{cases} \quad (R_3)$$

$$\begin{cases} u_{xx} = u_x (u_{1,x} - u_{-1,x} - e^{u_1-u} + e^{u-u_{-1}}) \\ u_{yy} = u_y (u_{-1,y} - u_{1,y} - e^{u_{-1}-u} + e^{u-u_1}) \\ u_x = u_y e^{u_1-u_{-1}} \end{cases} \quad (R_4)$$

$$\begin{cases} u_{xx} = \frac{u_{1,x} u_x}{1 + e^{u-u_1}} - \frac{u_x u_{-1,x}}{1 + e^{u_{-1}-u}} \\ u_{yy} = \frac{u_{1,y} u_y}{1 + e^{u-u_1}} - \frac{u_y u_{-1,y}}{1 + e^{u_{-1}-u}} \\ u_x u_y = (e^{u_1-u} + 1)(e^{u-u_{-1}} + 1) \end{cases} \quad (R_5)$$

$$\begin{cases} u_{xx} = e^{u_1-u} u_{1,x} - e^{u-u_{-1}} u_{-1,x} - e^{2(u_1-u)} + e^{2(u-u_{-1})} \\ u_{yy} = u_y^2 (e^{u_1-u} u_{1,y} - e^{u-u_{-1}} u_{-1,y}) \\ u_x - 1/u_y = e^{u_1-u} + e^{u-u_{-1}} \end{cases} \quad (R_6)$$

Список 6.4. Совместные пары цепочек Рудженарса-Тоды

5) переменные вдоль диагоналей $u(n) = u(m-n, n)$ удовлетворяют цепочке типа Тоды с производными по x

$$u_{xx} = \tilde{A}(u_x, u_1, u, u_{-1}),$$

а переменные вдоль диагоналей $u(n) = u(m+n, n)$ цепочке типа Тоды с про-

изводными по y

$$u_{yy} = \tilde{C}(u_y, u_1, u, u_{-1}).$$

6) все эти уравнения лагранжевы.

Комментарии к главе 6

Глава основана на работах Адлера, Шабата [23] и Адлера, Шабата, Ямилова [25].

▷ Цепочки типа Рудженарса-Тоды введены в работах Рудженарса [149, 150]. Им посвящена богатая литература, упомянем лишь статьи Бруски и Рагниско [51] и [163]. Хороший обзор можно найти в книге Суриса [168].

▷ Цепочки типа (6.1) изучались в работах Рагниско, Сантини [145], Шабата, Ямилова [156] и Адлера, Ямилова [30].

▷ Основной объект в списке 6.1, цепочка (X_1) , введена Шабатом и Ямиловым [156] как преобразование Бэклунда для уравнения Ландау-Лифшица. Модифицированное уравнение Ландау-Лифшица введено в [155].

▷ Цепочка Абловица-Ладика введена в [2]. Её связь с уравнением Полмейера-Лунда-Редже установлена в [156]. Интерпретация цепочек типа Абловица-Ладика и Складина как линейной комбинации потоков (6.1), (6.2) предложена в [25, 8].

▷ Задача классификации цепочек Рудженарса-Тоды (6.4) была решена, в различных постановках, в статьях Адлера и Шабата [20, 21, 22], см. также статьи Марихина, Шабата [115] и Адлера, Марихина, Шабата [19]. Подход, основанный на связи с цепочками (6.1) позволяет воспроизвести этот результат в чуть более общем виде.

▷ Классификация интегрируемых цепочек вида (6.1) получена Ямиловым [192], см. также [155, 156]. В этих работах в качестве классификационного признака было принято наличие, вместо (6.2), высших эволюционных симметрий, и, кроме того, цепочка предполагалась гамильтоновой.

▷ Система (6.34) относится к весьма многочисленному классу так называемых уравнений типа Лиувилля, характерными чертами которых являются наличие явной формулы для общего решения, линеаризуемость и существование нетривиальных инвариантов. Для таких уравнений имеется развитая теория и ряд классификационных результатов; упомянем лишь работы Жиберы, Ибрагимова, Шабата [196] и Соколова, Жиберы [161].

▷ Понятие ассоциированной системы введено в работе Леви [108]. Оно получило дальнейшее развитие в работах Шабата и Ямилова [155, 156], в основном на примере эволюционных симметрий цепочек (6.17). Гиперболические системы были проиллюстрированы на примере цепочки Абловица-Ладика, что приводит к уравнению Полмейера-Лунда-Редже. Для остальных цепочек из списка 6.1 ассоциированные гиперболические системы были выведены в [25].

▷ Для некоторых цепочек типа (6.1), (6.2) известны многополевые (в частности, векторные или матричные) обобщения. Вероятно, первый такой пример был найден Свинолуповым, Ямиловым [172] и Меролой, Рагниско, Гай-Жангом [118]. Он обобщает пару (X_6, Y_6) в рациональной форме:

$$\begin{aligned} u_x &= u_1 + \langle u, v \rangle u, & -v_x &= v_{-1} + \langle u, v \rangle v, \\ u_y &= \frac{u_{-1}}{\langle u_{-1}, v \rangle - 1}, & -v_y &= \frac{v_1}{\langle u, v_1 \rangle - 1}. \end{aligned}$$

Векторы u, v удовлетворяют, в силу этих уравнений, системе

$$u_{xy} = \langle u, v \rangle u_y + (\langle u_y, v \rangle - 1)u, \quad v_{xy} = -\langle u, v \rangle v_y - (\langle u, v_y \rangle + 1)v.$$

Аналог цепочки (R_6) в этом примере отсутствует.

▷ Для всех интегрируемых цепочек вида (6.1) или (6.4) имеются обобщения, содержащие параметры, зависящие от n в правой части [30, 22]. Эти параметры существенны при интерпретации цепочки как последовательности преобразований Бэклунда (см. напр. утверждение 7.7 из следующей главы). При этом цепочки (6.1) с параметрами по-прежнему допускают высшие симметрии, приводящие к ассоциированным системам типа НУШ. Оказывается, однако, что симметрии вида (6.2), отвечающие первому отрицательному потоку иерархии, при таком обобщении пропадают. Причина этого явления пока плохо понята. Отметим, что оно имеет место также для совместных пар из одевающих цепочек и цепочек типа Вольтерра. Например, цепочка $v_{n,x} + v_{n+1,x} = (v_n - v_{n+1})^2 + \alpha_n$ совместна с уравнением $v_{n,y} = (v_{n+1} - v_{n-1})^{-1}$ лишь при $\alpha_n = \alpha_{n+1}$.

Другой тип неавтономных цепочек связан с мастер-симметриями для цепочек (6.1), (6.2), см. в частности [25] и работы Фуксштайнера, Ёвеля, Жанга и Рагниско [74, 139].

Глава 7

Дискретизация уравнения Ландау-Лифшица

В предыдущей главе отмечалось, что основным уравнением в списке 6.1 является цепочка Шабата-Ямилова (X_1), определяющая преобразование Бэклунда для уравнения Ландау-Лифшица. Здесь этот пример обсуждается более подробно. В частности, устанавливается точечная эквивалентность между суммой потоков (X_1) и (Y_1), и моделью Склянина.

7.1 Цепочка Склянина

Цепочка Склянина определяется скобками Пуассона (здесь и далее индексы a, b, c образуют циклическую перестановку 1, 2, 3)

$$\{S_m^a, S_n^0\} = \delta_{m,n}(J_b - J_c)S_n^b S_n^c, \quad \{S_m^a, S_n^b\} = -\delta_{m,n}S_n^0 S_n^c, \quad m, n \in \mathbb{Z}, \quad (7.1)$$

и гамильтонианом

$$H = \sum_n \log \left(S_n^0 S_{n+1}^0 + \sum_{a=1}^3 \left(\frac{c_1}{c_0} - J_a \right) S_n^a S_{n+1}^a \right), \quad (7.2)$$

где c_0, c_1 значения (одни и те же во всех узлах решетки) функций Казимира

$$c_0 = \sum_{a=1}^3 (S_n^a)^2, \quad c_1 = (S_n^0)^2 + \sum_{a=1}^3 J_a (S_n^a)^2. \quad (7.3)$$

Цепочки Шабата-Ямилова (X_1, Y_1) перепишем, слегка изменяя обозначения, в виде

$$u_{x_+} = \frac{2h}{u_1 - v} + h_v, \quad v_{x_+} = \frac{2h}{u - v_{-1}} - h_u, \quad (7.4)$$

$$u_{x_-} = \frac{2h}{u_{-1} - v} + h_v, \quad v_{x_-} = \frac{2h}{u - v_1} - h_u, \quad (7.5)$$

где $h = h(u, v) = h(v, u)$ симметричный биквадратичный многочлен, $h_{uuu} = 0$. Гамильтонова структура для этих цепочек задаётся скобкой Пуассона

$$\{u_m, v_n\} = 2\delta_{m,n}h(u_n, v_n), \quad \{u_m, u_n\} = \{v_m, v_n\} = 0 \quad (7.6)$$

и гамильтонианами H_+ , H_- в инволюции,

$$H_{\pm} = \sum_n \left(\frac{1}{2} \log h(u_n, v_n) - \log(u_{n\pm 1} - v_n) \right).$$

Эквивалентность цепочки Складина и потока $\partial_{x_+} + \partial_{x_-}$ устанавливается в следующем утверждении, где используется отображение $(\mathbb{CP}^1)^2 \rightarrow \mathbb{S}_{\mathbb{C}}^2$

$$s = s(u, v) = \frac{1}{u-v} (1 - uv, i + iuv, u + v). \quad (7.7)$$

При $v = -1/\bar{u}$ это отображение совпадает со стереографической проекцией $\mathbb{CP}^1 \rightarrow \mathbb{S}_{\mathbb{R}}^2$

$$s(u) = \frac{1}{1 + |u|^2} (2 \operatorname{Re} u, 2 \operatorname{Im} u, |u|^2 - 1).$$

Утверждение 7.1. Пусть переменные u, v удовлетворяют цепочкам (7.4), (7.5) с многочленом

$$h(u, v) = \frac{i}{4} (u - v)^2 \langle s(u, v), K s(u, v) \rangle, \quad K = \operatorname{diag}(K_1, K_2, K_3). \quad (7.8)$$

Положим $s_n = s(u_n, v_n)$ и

$$J = CI - \det K \cdot K^{-1} \Leftrightarrow J = \operatorname{diag}(J_1, J_2, J_3), \quad J_a = C - K_b K_c. \quad (7.9)$$

Тогда переменные

$$S_n^0 = \rho \sqrt{\det K} \langle s_n, K s_n \rangle^{-1/2}, \quad (S_n^1, S_n^2, S_n^3) = -\rho \langle s_n, K s_n \rangle^{-1/2} K^{1/2} s_n \quad (7.10)$$

удовлетворяют скобкам (7.1), значения функций Казимира (7.3) равны $c_0 = \rho^2$, $c_1 = C\rho^2$, а гамильтониан (7.2) равен $H = -(H_+ + H_-) + \operatorname{const}$.

Доказательство получается прямым вычислением. Условие (7.8) не является ограничением, так как произвольный симметричный биквадратичный многочлен приводится к такому виду подходящей дробно-линейной заменой $(u, v) \rightarrow (Lu, Lv)$, $L \in PSL_2(\mathbb{C})$ (отвечающей ортогональному преобразованию, диагонализующему матрицы J и K).

Также непосредственным вычислением можно получить вид гамильтоновой структуры и потоков в терминах спиновых переменных s_n . Скобки Пуассона и гамильтониан H переписываются в виде

$$\{s_m^a, s_n^b\} = \delta_{m,n} \langle s_n, K s_n \rangle s_n^c, \quad H = - \sum_n \log \frac{\langle s_n, K s_n \rangle}{1 + \langle s_n, s_{n+1} \rangle}.$$

Для цепочек (7.4), (7.5) нетрудно вывести промежуточную компактную формулу

$$2is_{x_{\pm}} = \langle s, Ks \rangle (s(u_{\pm 1}, v) - s(u, v_{\mp 1})) - 2i[s, Ks],$$

куда следует подставить элементарное тождество

$$s(u_{\pm 1}, v) = \frac{i[s, s_{\pm 1}] + s + s_{\pm 1}}{1 + \langle s, s_{\pm 1} \rangle}. \quad (7.11)$$

Нетрудно видеть, что потоки $\partial_{x_{\pm}}$ порознь не согласованы с вещественностью s . Этим свойством обладают линейные комбинации $\partial_{x_+} + \partial_{x_-}$ и $i(\partial_{x_+} - \partial_{x_-})$. Определяемые ими вещественные потоки имеют вид

$$\begin{aligned} s_t = a \langle s, Ks \rangle & \left(\frac{[s, s_1]}{1 + \langle s, s_1 \rangle} + \frac{[s, s_{-1}]}{1 + \langle s, s_{-1} \rangle} \right) - 2a[s, Ks] \\ & + b \langle s, Ks \rangle \left(\frac{s + s_1}{1 + \langle s, s_1 \rangle} - \frac{s + s_{-1}}{1 + \langle s, s_{-1} \rangle} \right), \quad |s| = 1, \end{aligned} \quad (7.12)$$

с произвольными постоянными $a, b \in \mathbb{R}$. Модель Склянина эквивалентна цепочке с $b = 0$. В силу коммутативности потоков $\partial_{x_+}, \partial_{x_-}$, цепочка, отвечающая случаю $a = 0$, является её симметрией. Гамильтониан этой цепочки

$$\tilde{H} = H_+ - H_- = \sum_n (\log(u_n - v_{n+1}) - \log(u_{n+1} - v_n))$$

можно переписать в виде

$$\tilde{H} = 2 \sum_n \arg \left(1 + \frac{\langle p, i[s_n, s_{n+1}] + s_n + s_{n+1} \rangle}{1 + \langle s_n, s_{n+1} \rangle} \right),$$

где p — произвольный постоянный вектор единичной длины.

В частности, при $K = I$, $\rho = -1$ переменные S и s совпадают, при этом мы приходим к так называемой цепочке Гейзенберга

$$\begin{aligned} s_t = a & \left(\frac{[s, s_1]}{1 + \langle s, s_1 \rangle} + \frac{[s, s_{-1}]}{1 + \langle s, s_{-1} \rangle} \right) \\ & + b \left(\frac{s + s_1}{1 + \langle s, s_1 \rangle} - \frac{s + s_{-1}}{1 + \langle s, s_{-1} \rangle} \right), \quad |s| = 1. \end{aligned} \quad (7.13)$$

7.2 Уравнения в частных производных

Уравнение Ландау-Лифшица

$$s_t = [s, s_{xx} + Js], \quad s \in \mathbb{R}^3, \quad \langle s, s \rangle = 1, \quad J = \text{diag}(J_1, J_2, J_3). \quad (7.14)$$

получается из уравнений $S_{n,t}^a = \frac{1}{\varepsilon} \{H, S_n^a\}$ в непрерывном пределе $S_n^0 \rightarrow 1$, $S_n^a \rightarrow \frac{\varepsilon}{2} s_n^a(x)$, $x = i\varepsilon n$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Связь с цепочкой (7.4) носит другой характер. Именно, эта цепочка задает последовательность автопреобразований Бэклунда для системы эволюционных уравнений на переменные $u = u_{n+1}, v = v_n$:

$$\begin{aligned} iu_t &= u_{xx} - 2\frac{u_x^2 - r(u)}{u - v} - \frac{1}{2}r'(u), \\ -iv_t &= v_{xx} + 2\frac{v_x^2 - r(v)}{u - v} - \frac{1}{2}r'(v), \end{aligned} \quad (7.15)$$

где $x = x_+$, $r(u) = h_v^2 - 2hh_{vv}$. Это означает, что если в данной системе избавиться от производных по x , заменив их на сдвиги в силу (7.4), то полученная цепочка будет коммутировать с (7.4). Отметим, что преобразование $(u_{n+1}, v_n) \rightarrow (u_{n+2}, v_{n+1})$ сводится к решению уравнения Риккати для переменной v_{n+1} . При h и J заданных формулами (7.8), (7.9) данная система связана с уравнением (7.14) заменой $s = s(u, v)$, причем

$$r(u) = \frac{1}{4}(u - v)^4 \langle s_v, Js_v \rangle. \quad (7.16)$$

Подчеркнем, что векторы s в уравнении (7.14) и s_n в цепочке (7.12) различны. Замена (7.11), связывающая эти векторы, обратима, поэтому цепочку (7.12) можно в принципе переписать и непосредственно в терминах векторов $s(u_{n+1}, v_n)$. Для системы (7.15) эта замена эквивалентна дифференциальной подстановке, связывающей ее с модифицированной системой

$$\begin{aligned} iu_t &= u_{xx} - \frac{1}{h}(u_x^2 - r(u))(v_x + h_u) - \frac{1}{2}r'(u), \\ -iv_t &= v_{xx} + \frac{1}{h}(v_x^2 - r(v))(u_x - h_v) - \frac{1}{2}r'(v). \end{aligned} \quad (7.17)$$

Действительно, если считать, что здесь $u = u_n, v = v_n$, то легко видеть, что системы (7.15) и (7.17) эквивалентны в силу (7.4). Систему (7.17) можно записать и в векторной форме, но она значительно более громоздка, чем (7.14):

$$\begin{aligned} s_t &= [s, s_{xx} - Js] - \left(\frac{\langle Ks, Ks \rangle}{\langle s, Ks \rangle} - \text{tr } K \right) [s, Ks] \\ &+ \frac{1}{\langle s, Ks \rangle} (\langle s_x, s_x \rangle - \langle s, Js \rangle + \text{tr } J) s_x \\ &- \frac{1}{\langle s, Ks \rangle} (2\langle s, Ks_x \rangle [s, s_x] - \langle s_x, s_x \rangle [s, Ks]) \\ &- \frac{2}{\langle s, Ks \rangle \langle s_x, s_x \rangle} (\langle s_x, Js_x \rangle s_x + \langle [s, s_x], Js_x \rangle [s, s_x]). \end{aligned} \quad (7.18)$$

В изотропном случае это уравнение сводится к модифицированному уравнению Гайзенберга

$$s_t = [s, s_{xx}] + \langle s_x, s_x \rangle s_x. \quad (7.19)$$

Итак, уравнение Ландау-Лифшица (7.14) и его модификация (7.18) получаются при исключении сдвигов из высшей симметрии цепочки (7.4). Согласно утверждению 6.9, использование симметрии (7.5) приводит к системе из двух гиперболических уравнений для переменных $u = u_n, v = v_n$ ($x = x_+, y = x_-$):

$$\begin{aligned} u_{xy} &= \frac{1}{h}(h_u u_x u_y + g(u_x + u_y) + g_v h - g h_v), \\ v_{xy} &= \frac{1}{h}(h_v v_x v_y - g(v_x + v_y) + g_u h - g h_u), \end{aligned} \quad (7.20)$$

где $g = h h_{uv} - h_u h_v$.

Заметим, что система (7.20) лагранжева,

$$L = \int \int \frac{1}{h}(u_x v_y + h_u u_x - h_v v_y + g) dx dy.$$

Функция g , как и h , является симметричным биквадратичным многочленом: $g = g(u, v) = g(v, u)$, $g_{uuu} = 0$, причем $g g_{uv} - g_u g_v = \text{const } h$. В спиновых переменных система (7.20) имеет вид

$$\begin{aligned} s_{xy} &= p[s, s_x + s_y] + \frac{\langle s, K s \rangle}{2 \langle s, [s_x, s_y] \rangle} (p_y[s, s_x] - p_x[s, s_y]) \\ &+ \frac{\langle s_x, K s \rangle \langle s_y, s_y \rangle [s, s_x] - \langle s_y, K s \rangle \langle s_x, s_x \rangle [s, s_y]}{\langle s, K s \rangle \langle s, [s_x, s_y] \rangle} - \langle s_x, s_y \rangle s, \end{aligned} \quad (7.21)$$

где $p = ig/h = \frac{\langle K s, K s \rangle}{\langle s, K s \rangle} - \frac{1}{2} \text{tr } K$. Здесь, как и раньше, предполагается, что h задается формулой (7.8). В изотропном случае $K = -2I$ уравнения упрощаются:

$$\begin{aligned} u_{xy} &= \frac{2u_x u_y}{u - v} - i(u_x + u_y), \quad v_{xy} = \frac{2v_x v_y}{v - u} + i(v_x + v_y), \\ s_{xy} &= [s, s_x + s_y] - \langle s_x, s_y \rangle s. \end{aligned} \quad (7.22)$$

7.3 Представления нулевой кривизны

Представления нулевой кривизны для уравнения Ландау-Лифшица и модели Склянина хорошо известны. Поэтому мы ограничимся тем, что приведем их для цепочек (7.4), (7.5) и уравнения (7.20). Заметим, что установленная связь с преобразованиями Бэкклунда позволяет строить для дискретных уравнений представления нулевой кривизны с той же матрицей U , что и для непрерывных (естественно, зависящей от своих переменных в каждом узле решетки):

$$L_{n, x_{\pm}} = U_{n+1}^{\pm} L_n - L_n U_n^{\pm}, \quad U_{x_-}^+ - U_{x_+}^- = U^- U^+ - U^+ U^-. \quad (7.23)$$

Чтобы получить матрицы U^{\pm} , входящие во второе уравнение (7.23), следует отождествить u_n, v_n с u, v и заменить лишние переменные v_{n-1}, u_{n-1} через производные v_{x_+}, u_{x_-} в силу (7.4), (7.5).

Матрица L_n имеет вид

$$L_n = \langle K s_n, s_n \rangle^{-1/2} (1 + i M s_n),$$

а U_n^\pm имеют вид (напомним, что векторы $s(u_{n\pm 1}, v_n)$ можно выразить через $s_{n\pm 1}, s_n$ согласно (7.11))

$$U_n^+ = M^+ s(u_n, v_{n-1}), \quad U_n^- = M^- s(v_n, u_{n-1}).$$

Здесь мы пользуемся известным изоморфизмом $gl(2, \mathbb{C})$ и алгебры кватернионов над \mathbb{C} . Напомним, что умножение в этой алгебре задается формулой

$$(\alpha + a)(\beta + b) = \alpha\beta - \langle a, b \rangle + \alpha b + \beta a + [a, b],$$

где α, β обозначают скалярные, а a, b — векторные части кватернионов.

Оператор M удовлетворяет соотношению

$$M^2 = 1 - \frac{2}{\lambda} K, \quad (7.24)$$

а операторы M^\pm задаются формулами $4M^\pm = \lambda(M \pm \det M \cdot M^{-1})$ или, покомпонентно,

$$M_a^2 = 1 - \frac{2}{\lambda} K_a, \quad 4M_a^\pm = \lambda(M_a \pm M_b M_c).$$

Кривая

$$\frac{1}{K_1}(M_1^2 - 1) = \frac{1}{K_2}(M_2^2 - 1) = \frac{1}{K_3}(M_3^2 - 1)$$

может быть параметризована эллиптическими функциями Якоби:

$$\begin{aligned} M_1 &= \sqrt{\frac{K_2 - K_1}{K_2}} \operatorname{sn}(z, k), & M_2 &= \sqrt{\frac{K_1 - K_2}{K_1}} \operatorname{cn}(z, k), \\ M_3 &= \sqrt{\frac{K_1 - K_3}{K_1}} \operatorname{dn}(z, k), & k &= \sqrt{\frac{(K_1 - K_2)K_3}{K_2(K_1 - K_3)}} = \sqrt{\frac{J_1 - J_2}{J_1 - J_3}}. \end{aligned}$$

Отметим, что компоненты операторов M^\pm лежат на кривой в \mathbb{R}^3

$$4(M_1^\pm)^2 + J_1 = 4(M_2^\pm)^2 + J_2 = 4(M_3^\pm)^2 + J_3.$$

При $a = 0$ цепочка (7.12) допускает непосредственное обобщение на сферу \mathbb{S}^{d-1} :

$$s_t = \langle s, K s \rangle \left(\frac{s + s_1}{1 + \langle s, s_1 \rangle} - \frac{s + s_{-1}}{1 + \langle s, s_{-1} \rangle} \right), \quad |s| = 1, \quad s \in \mathbb{R}^d, \quad (7.25)$$

где $K = K^\top$ матрица размера $d \times d$ (диагональная, без потери общности). Это уравнение обладает представлением нулевой кривизны $L_t = U_1 L - L U$ с матрицами размера $(d+1) \times (d+1)$,

$$L = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} + \frac{\lambda}{\langle s, K s \rangle} \begin{pmatrix} 1 & s^\top M \\ M s & M s s^\top M \end{pmatrix},$$

$$U = \frac{\lambda}{1 + \langle s, s_{-1} \rangle} \begin{pmatrix} 0 & (s + s_{-1})^\top M \\ M(s + s_{-1}) & M(s_{-1}s^\top - ss_{-1}^\top M) \end{pmatrix}. \quad (7.26)$$

Здесь s_n обозначает вектор-столбец, а единичная матрица I и матрица $M = M^\top$ имеют размер $d \times d$, причем выполняется соотношение (7.24).

Вопрос о многополевых аналогах цепочек (7.4), (7.5) является открытым. В изотропном случае известно их обобщение вида

$$\begin{aligned} u_{n,x_\pm} &= \{(u_{n\pm 1} - u_n)(u_{n\pm 1} - v_n)^{-1}(u_n - v_n)\}, \\ v_{n,x_\pm} &= \{(u_n - v_n)(u_n - v_{n\mp 1})^{-1}(v_n - v_{n\mp 1})\}, \end{aligned} \quad (7.27)$$

где $\{abc\}$ обозначает умножение в йордановой тройной системе с обратимыми элементами. Наиболее важными примерами такой операции являются умножение матриц по правилу $\{abc\} = abc + cba$, причем a^{-1} совпадает с обратной матрицей, и умножение векторов по правилу $\{abc\} = \langle a, b \rangle c + \langle c, b \rangle a$, причем $a^{-1} = a/|a|^2$. Для цепочек (7.27) выполняется следующий аналог уравнений (7.22).

Утверждение 7.2. Векторные поля $\partial_x = \partial_{x_+}$ и $\partial_y = \partial_{x_-}$ коммутируют, и в силу цепочек (7.27) переменные $u = u_n$, $v = v_n$ удовлетворяют системе

$$u_{xy} = 2\{u_x(u - v)^{-1}u_y\} - u_x - u_y, \quad v_{xy} = 2\{v_x(v - u)^{-1}v_y\} + v_x + v_y.$$

7.4 Стационарная цепочка

Рассмотрим стационарную цепочку (7.12)

$$\frac{[s, s_1] + b(s + s_1)}{1 + \langle s, s_1 \rangle} + \frac{[s, s_{-1}] - b(s + s_{-1})}{1 + \langle s, s_{-1} \rangle} = 2 \frac{[s, Ks]}{\langle s, Ks \rangle}, \quad |s| = 1 \quad (7.28)$$

(случай $a = 0$ тривиален, поэтому можно положить $a = 1$, не теряя общности). Это уравнение можно явно разрешить относительно s_1 , что определяет отображение $(\mathbb{S}^2)^2 \rightarrow (\mathbb{S}^2)^2$. Покажем, что это отображение пуассоново и допускает два первых интеграла, то есть является интегрируемым в смысле дискретной теоремы Лиувилля.

Удобно перейти от фазового пространства $(\mathbb{S}^2)^2$, с координатами (s_{-1}, s) , к кокасательному расслоению сферы $T^*\mathbb{S}^2$, с координатами (s, m) , при помощи обратимой замены

$$m = \frac{[s_{-1}, s] + b(s_{-1} + s)}{1 + \langle s_{-1}, s \rangle}.$$

В новых переменных цепочка (7.28) принимает вид

$$m_1 = m + 2 \frac{[s, Ks]}{\langle s, Ks \rangle}, \quad s_1 = s + [m_1, s + s_1],$$

причем величина $b = \langle m, s \rangle$ постоянна в силу уравнений. Эту систему нетрудно разрешить относительно s_1 и получить явное отображение $\Phi : T^*\mathbb{S}^2 \rightarrow T^*\mathbb{S}^2$,

$$\Phi : \quad m_1 = m + 2 \frac{\langle s, Ks \rangle}{\langle s, Ks \rangle}, \quad s_1 = s + \frac{2[m_1, [m_1, s] + s]}{1 + |m_1|^2}.$$

Отображение Φ обладает двумя полиномиальными первыми интегралами:

$$I_1 = \langle Ks, s \rangle (1 - \langle m, m \rangle) + 2\langle s, m \rangle \langle Ks, m \rangle + 2\langle Ks, [s, m] \rangle, \\ I_2 = \langle K^{-1}([s, m] + s), [s, m] + s \rangle.$$

Их можно найти при помощи представления нулевой кривизны

$$U_{n+1}(1 + iMs_n) = (1 + iMs_n)U_n,$$

где матрица $U_n = iMm_n + \det M \cdot M^{-1}([s_n, m_n] + s_n)$ совпадает, с точностью до скалярного множителя, с линейной комбинацией $(1 + ib)U_n^+ + (1 - ib)U_n^-$ матриц из раздела 7.3. Очевидно, что $\text{tr } U_n^2$ (или $\langle U_n, U_n \rangle$, на языке кватернионов) является первым интегралом, и несложное вычисление (с учетом формулы (7.24)) показывает, что I_1, I_2 возникают отсюда, как коэффициенты в разложении по λ . Выражение для I_1 в старых переменных s_n, s_{n+1} имеет вид

$$I_1 = \text{const} \frac{\langle Ks, s_1 \rangle}{1 + \langle s, s_1 \rangle},$$

выражение для I_2 более громоздко.

Интегрируемость уравнения (7.28) вытекает из следующего утверждения.

Утверждение 7.3. Отображение Φ сохраняет скобку Ли-Пуассона для алгебры Ли движений 3-мерного пространства

$$\{m^i, m^j\} = \varepsilon_{ijk} m^k, \quad \{s^i, m^j\} = \varepsilon_{ijk} s^k.$$

Эта скобка невырождена на орбите $\langle s, s \rangle = 1$, $\langle s, m \rangle = b$, и первые интегралы I_1, I_2 находятся в инволюции относительно этой скобки.

7.5 Дискретное уравнение Ландау-Лифшица

Согласно общим результатам разделов 6.3.2, 6.3.3, решение цепочек (7.4), (7.5) можно продолжить на решётку \mathbb{Z}^2 с переменными $u_{m,n}$, так чтобы набор $(u_n, v_n) = (u_{m,n}, u_{m+1,n})$ был решением при любом m . При этом переменные $u_{m,n}$ удовлетворяют дискретному 5-точечному уравнению. Приведём здесь соответствующие формулы более подробно.

Утверждение 7.4. Каждая из переменных u и v удовлетворяет, в силу (7.4), (7.5), цепочке типа Рудженарса-Тоды

$$\frac{2u_{x_{\pm}x_{\pm}} - r'(u)}{u_{x_{\pm}}^2 - r(u)} = \frac{u_{\mp 1, x_{\pm}} + h_u(u_{\mp 1}, u)}{h(u_{\mp 1}, u)} - \frac{u_{\pm 1, x_{\pm}} - h_u(u, u_{\pm 1})}{h(u, u_{\pm 1})}, \quad (7.29)$$

где $r(u) = h_v^2 - 2hh_{vv}$, $h = h(u, v)$.

То обстоятельство, что u и v удовлетворяют одним и тем же уравнениям, позволяет построить автопреобразование для цепочек (7.4), (7.5). Отождествляя (u_n, v_n) с $(u_{m,n}, u_{m+1,n})$, получаем из каждой из цепочек по два выражения для производной $u_{m,n}$:

$$\begin{aligned} u_{m,n,x_{\pm}} &= \frac{2h(u_{m,n}, u_{m+1,n})}{u_{m,n\pm 1} - u_{m+1,n}} + h_{u_{m+1,n}}(u_{m,n}, u_{m+1,n}), \\ u_{m,n,x_{\pm}} &= \frac{2h(u_{m-1,n}, u_{m,n})}{u_{m-1,n} - u_{m,n\mp 1}} - h_{u_{m-1,n}}(u_{m-1,n}, u_{m,n}). \end{aligned} \quad (7.30)$$

Их равенство и даёт искомое дискретное уравнение. Чтобы записать его в симметричном виде, определим квадратичные многочлены a, b, c равенством $h(u, v) = a(v)u^2 + 2b(v)u + c(v)$ и воспользуемся тождеством

$$\frac{h(u, v)}{u - w} - \frac{1}{2}h_u(u, v) = \frac{a(v)uw + b(v)(u + w) + c(v)}{u - w}.$$

Теорема 7.5. Отображение $(u_{m-1,n}, u_{m,n}) \rightarrow (u_{m,n}, u_{m+1,n})$, задаваемое формулой

$$\begin{aligned} \frac{a(u)u_{0,1}u_{-1,0} + b(u)(u_{0,1} + u_{-1,0}) + c(u)}{u_{-1,0} - u_{0,1}} \\ = \frac{a(u)u_{0,-1}u_{1,0} + b(u)(u_{0,-1} + u_{1,0}) + c(u)}{u_{0,-1} - u_{1,0}}, \end{aligned} \quad (7.31)$$

переводит решения каждой из цепочек (7.4), (7.5) в решения.

Доказательство. Легко показать, что формула (7.31) эквивалентна

$$\tilde{u}_{x_+} = \frac{2h(\tilde{u}, \tilde{v})}{\tilde{u}_1 - \tilde{v}} + h_{\tilde{v}}(\tilde{u}, \tilde{v}),$$

то есть переменные \tilde{u}, \tilde{v} удовлетворяют первому из уравнений (7.4). Дифференцируя его по x_+ , мы однозначно находим \tilde{v}_{x_+} , и так как известно, что $\tilde{u} = v$ удовлетворяет цепочке (7.29), то отсюда следует, что \tilde{u}, \tilde{v} удовлетворяют и второму уравнению (7.4).

Чтобы доказать утверждение и для цепочки (7.5), достаточно заметить, что формула (7.31) инвариантна относительно замены $n \rightarrow -n$. \square

Заметим, что потоки (7.30) симметричны относительно отражения $m \leftrightarrow n$, $x_{\pm} \leftrightarrow \mp x_{\pm}$. Таким образом, роли индексов m и n оказываются совершенно равноправными. В частности, выбирая переменные вдоль оси m , мы вновь приходим к цепочкам типа Рудженарса-Тоды. Цепочки типа Тоды возникают при выборе динамических переменных вдоль диагоналей $m = \pm n$.

Утверждение 7.6. Переменные $w_n = u_{m_0 \mp n, n}$ удовлетворяют цепочке

$$w_{n,x_{\pm}x_{\pm}} = -(w_{n,x_{\pm}}^2 - r(w_n)) \left(\frac{1}{w_{n+1} - w_n} - \frac{1}{w_n - w_{n-1}} \right) + \frac{1}{2}r'(w_n). \quad (7.32)$$

В заключение, приведём обобщение системы (7.30) с переменным многочленом h . При этом приходится пожертвовать одним из времен x_{\pm} , так как получающееся дискретное уравнение уже не инвариантно относительно отражения $n \rightarrow -n$.

Утверждение 7.7. Пусть $h_n(u, v) = h_n(v, u)$, $h_{n,uuu} = 0$, а дискриминант $r(u) = h_{n,v}^2 - 2h_n h_{n,vv}$ один и тот же во всех узлах решетки. Тогда следующая система совместна:

$$\begin{aligned} u_{m,n,x} &= \left(\frac{2}{u_{m,n+1} - u_{m+1,n}} + \partial_{u_{m+1,n}} \right) h_{m+n}(u_{m,n}, u_{m+1,n}), \\ &= \left(\frac{2}{u_{m-1,n} - u_{m,n-1}} - \partial_{u_{m-1,n}} \right) h_{m+n-1}(u_{m-1,n}, u_{m,n}). \end{aligned}$$

Природу этого обобщения легко объяснить, если вспомнить, что сдвиги по m и n задают преобразование Бэклунда для системы (7.15), где $u = u_{m,n+1}$, $v = u_{m+1,n}$, которая зависит лишь от многочлена r , а не h . Так как r зависит от 5 коэффициентов, а h от 6, то преобразование Бэклунда содержит дополнительный произвольный параметр α_n . Сравнивая формулы (7.8) и (7.16) видим, что в качестве этого параметра можно принять, например, постоянную C в формуле (7.9), которую следует выбирать независимо на каждом шаге:

$$J = C_n I - \det K_n \cdot K_n^{-1}, \quad h_n(u) = \frac{i}{4}(u-v)^2 \langle s, K_n s \rangle.$$

Явное выражение для h_n , отвечающее многочлену r в канонической форме Якоби или Вейерштрасса, задаётся формулами (q4) или (2.22), с переменным параметром $\alpha = \alpha_n$.

Комментарии к главе 7

Глава основана на работе Адлера [10].

▷ Цепочка Складина введена в работе [157]. Эта дискретизация характеризуется тем, что фундаментальные скобки Пуассона для нее и уравнения Ландау-Лифшица (7.14) обслуживаются одной и той же r -матрицей, а матрица L_n из представления нулевой кривизны аппроксимирует, в пределе $x = \varepsilon n$, $\varepsilon \rightarrow 0$, матрицу монодромии для (7.14). Эти свойства можно принять в качестве определения «правильного» дискретного аналога данной непрерывной модели, см. обсуждение этой проблемы в книгах Тахтаджяна, Фаддеева [174] и Суриса [168]. Совпадение матриц U объясняет то, что возникающие при этом цепочки определяют также преобразования Бэклунда, в данном примере это цепочки (7.4), (7.5) введённые Шабатом и Ямиловым [156].

▷ Цепочка Гейзенберга (7.13) появилась, при произвольных a и b , у Рагниско и Сантини [145]. Отметим также работы Доливы, Сантини [60, 62], Бобенко [41] и Бобенко, Суриса [43], где рассматриваются приложения этой модели в

дискретной геометрии. В этих работах указывается также, что потоки, отвечающие различным значениям параметров a, b коммутируют.

▷ Модифицированное уравнение Гейзенберга (7.19) найдено Михайловым и Шабатом [124].

▷ Представления нулевой кривизны для уравнения Ландау-Лифшица и модели Склянина можно найти в учебнике [174]. Отметим также сходство формул (7.26) с представлением нулевой кривизны из работы Голубчика и Соколова [77], в которой рассматривается уравнение

$$s_{t_3} = \left(s_{xx} + \frac{3}{2} \langle s_x, s_x \rangle s \right)_x - \frac{3}{2} \langle s, Js \rangle s_x, \quad |s| = 1, \quad s \in \mathbb{R}^d$$

являющееся, при $d = 3$, симметрией третьего порядка уравнения Ландау-Лифшица (7.14). Представление нулевой кривизны для многополевых цепочек (7.27) может быть построено в терминах суперструктурной алгебры Ли соответствующей йордановой тройной системы (ср. со случаем йордановых уравнений НШ, введённых в работе Свинолупова [170] и цепочек Вольтерра из работы Адлера, Свинолупова, Ямилова [28]).

▷ В непрерывном пределе $s_n = s(\varepsilon n)$, $K = 1 - \frac{\varepsilon^2}{2} J$, $b = \varepsilon \beta$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ уравнение (7.28) переходит в уравнение

$$s'' + 2Js = \lambda s + 2\beta[s, s'], \quad \lambda = 2\langle s, Js \rangle - \langle s', s' \rangle,$$

где коэффициент λ определяется из условия нормировки $|s| = 1$. При $\beta = 0$ это известная задача Неймана о движении точки на сфере под действием линейных сил. Добавочный член $[s, s']$ отвечает движению заряженной частицы в поле магнитного монополя Дирака, см. статью Веселова [179], где устанавливается также связь со случаем Клебша движения твердого тела в идеальной жидкости.

▷ Понятие интегрируемости по Лиувиллю-Арнольду для конечномерных дискретных систем введено Веселовым [181, 182], см. также работу Бруски, Рагниско, Сантини и Жанга [52].

▷ Для задачи Неймана известно, наряду с цепочкой (7.28), ещё две интегрируемые дискретизации. Одной из них служит так называемая стационарная цепочка Гейзенберга (Грановский, Жеданов [79], Веселов [180], Мозер, Веселов [129])

$$s_1 + s_{-1} = 2 \frac{\langle s_{-1}, Ks \rangle}{\langle Ks, Ks \rangle} Ks, \quad |s| = 1.$$

Вторая имеет вид (Рагниско [144], Сурис [168])

$$\frac{s_1}{\langle s, s_1 \rangle} + \frac{s_{-1}}{\langle s, s_{-1} \rangle} = (2 - J)s + \langle s, Js \rangle s, \quad |s| = 1.$$

В обоих случаях можно считать, что векторы s имеют произвольную размерность.

▷ Следует отметить, что уравнение (7.28) при $b = 0$ можно переписать в виде

$$\frac{s_1 + s}{1 + \langle s, s_1 \rangle} + \frac{s + s_{-1}}{1 + \langle s, s_{-1} \rangle} = \frac{2Ks}{\langle s, Ks \rangle}, \quad |s| = 1,$$

также имеющем смысл в пространстве любой размерности. Интегрируемость такого обобщения доказана Сурисом [167].

▷ Близкими свойствами обладает также интегрируемая дискретизация волчка Лагранжа, предложенная в работах Бобенко [41] и Бобенко, Суриса [42].

▷ Цепочка (7.32) является основным уравнением в списке Ямилова [190] интегрируемых цепочек типа Тоды, см. также работу Кричевера [99].

Глава 8

Интегрируемые изотропные цепочки Вольтерра на сфере

В этой главе приводится классификация интегрируемых векторных цепочек Вольтерра с редукцией на сферу. Задача решается в рамках стандартного симметричного подхода. Его основы и вывод необходимых условий интегрируемости приведены в разделе 8.3. Результатом классификации является список, состоящий, в основном, из новых цепочек. Рассматриваются ассоциированные уравнения — двумерные векторные системы типа нелинейного Шрёдингера и трёхмерные типа Дэви-Стюартсона.

8.1 Постановка классификационной задачи

Рассмотрим векторные цепочки Вольтерра общего вида

$$V_{n,x} = f_n V_{n+1} + g_n V_n + h_n V_{n-1}, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (8.1)$$

где V_n векторы, а f_n, g_n, h_n скалярные функции от V_{n+1}, V_n, V_{n-1} . Интегрируемость понимается, как существование высших симметрий аналогичного вида, то есть цепочек, содержащих большее число соседних векторов с сохранением той же квазилинейной структуры. Нашей целью будет проклассифицировать интегрируемые случаи при следующих предположениях:

(i) цепочка и её симметрии изотропны и сдвигово-инвариантны, то есть их коэффициенты зависят лишь от скалярных произведений

$$v_{m,n} := \langle V_m, V_n \rangle = \langle V_n, V_m \rangle,$$

причём эта зависимость одна и та же в каждом узле цепочки;

(ii) симметрия должна существовать независимо от размерности векторного пространства и природы скалярного произведения;

(iii) все V_n имеют единичную длину, $v_{n,n} = 1$.

Трансляционная инвариантность позволяет использовать сокращённые обозначения, опуская в индексах дискретную переменную n , так что уравнение (8.1) принимает вид

$$V_x = fV_1 + gV + hV_{-1} \quad (8.2)$$

(индексы x, t будут зарезервированы для обозначения производных, а не сдвигов). В силу сделанных предположений, функции f, g, h связаны уравнением

$$v_{1,0}f + g + v_{0,-1}h = 0 \quad (8.3)$$

и зависят лишь от скалярных произведений $v_{1,0}, v_{0,-1}, v_{1,-1}$, которые можно рассматривать, как независимые переменные. Следовательно, задача классификации сводится к нахождению двух функций от трёх переменных. По сложности она сравнима со случаем скалярных цепочек типа Вольтерра

$$v_x = f(v_1, v, v_{-1}). \quad (8.4)$$

Метод решения в целом также весьма близок, поскольку необходимые условия интегрируемости в обоих случаях формально совпадают (различие заключается в наборах динамических переменных: $v_{m,n}$ вместо v_n).

В принципе, классификационную задачу для цепочек (8.2) можно решать и без условия (iii). Эта связь выделяет не независимый класс уравнений, а лишь специальную редукцию общей задачи. Действительно, она может быть разрешена при помощи стереографической проекции

$$V = \frac{1 - \langle U, U \rangle}{1 + \langle U, U \rangle} e_0 + \frac{2}{1 + \langle U, U \rangle} U,$$

где e_0 произвольный постоянный единичный вектор, а U лежит в его ортогональном дополнении. Вектор U удовлетворяет, в силу уравнения (8.2), некоторой изотропной цепочке $U_x = \tilde{f}U_1 + \tilde{g}U + \tilde{h}U_{-1}$. Так как размерность векторного пространства в наших рассмотрениях несущественна, то каждой цепочке на сфере отвечает, при таком отображении, некоторая цепочка в пространстве без связей. Однако, эта цепочка для U не произвольна: она должна допускать редукцию $\langle U, U \rangle = 1$, так как при этой связи $U = V$. Эта редукция приводит обратно к исходной цепочке.

Целью данной главы было решение конкретной классификационной задачи; такие важные вещи, как разностные подстановки, пары Лакса, преобразования Бэклунда, точные решения и т.д. не рассматривались. По-видимому, эти открытые задачи требуют индивидуального подхода для каждой цепочки из полученного списка. Наиболее интригующим вопросом, возникающим и для других векторных уравнений, является вопрос о гамильтоновой структуре.

Как отмечалось при постановке задачи, от предположения (iii) можно отказаться за счёт стереографической проекции. Ещё одна интересная постановка задачи связана с переменными на конусе $\langle V, V \rangle = 0$ вместо сферы. На первый взгляд, эта связь является предельным случаем предыдущей, но на

самом деле она выделяет независимый класс уравнений. В частности, в этом случае коэффициент g не выражается через f, h и отсутствует явная формула типа (8.14) для симметрии. Интересным примером служит цепочка

$$V_x = \frac{1}{v_{1,-1}}(v_{0,-1}V_1 - v_{1,0}V_{-1}) + b(v_{1,-1}, v_{1,0}, v_{0,-1})V, \quad v_{n,n} = 0.$$

По-видимому, она удовлетворяет бесконечной серии условий интегрируемости (8.9) при всех b , но (локальные) симметрии существуют только при $b_{v_{1,-1}} = 0$.

Возможны также обобщения условия (i). Простейшей анизотропной цепочкой является аналог (V_6)

$$V_x = \langle V, KV \rangle \left(\frac{V_1 + V}{1 + \langle V_1, V \rangle} - \frac{V + V_{-1}}{1 + \langle V, V_{-1} \rangle} \right), \quad \langle V, V \rangle = 1,$$

где K произвольный симметрический оператор. Как было показано в предыдущей главе, эта цепочка тесно связана с другими интегрируемыми уравнениями, такими как цепочка Складина и уравнение Ландау-Лифшица. Классификационная задача в анизотропном случае может быть в принципе решена аналогичным образом, но технически она гораздо сложнее, поскольку коэффициенты приобретают зависимость от дополнительных переменных $\tilde{v}_{m,n} = \langle V_m, KV_n \rangle$. Было бы интересно также рассмотреть случай асимметричного скалярного произведения ($v_{m,n} \neq v_{n,m}$). Такие примеры пока неизвестны.

8.2 Список интегрируемых цепочек

Цепочка (8.2) называется интегрируемой, если она обладает бесконечной иерархией симметрий вида

$$V_{t_k} = p^{(k,k)}V_k + p^{(k,k-1)}V_{k-1} + \dots + p^{(k,1-k)}V_{1-k} + p^{(k,-k)}V_{-k} \quad (8.5)$$

с коэффициентами, зависящими от скалярных произведений векторов V_k, \dots, V_{-k} . Следствия из этого определения анализируются в следующем разделе, результатом которого является вывод нескольких необходимых условий интегрируемости. Они представляют собой соотношения специального вида на правую часть цепочки. Разрешение этих соотношений в разделе 8.4 приводит к следующему основному результату данной главы.

Теорема 8.1. Если изотропная цепочка Вольтерра на сфере $\langle V, V \rangle = 1$ удовлетворяет необходимым условиям интегрируемости (8.9)–(8.12), то она совпадает с одной из цепочек списка 8.1, с точностью до растяжения x . Все цепочки из этого списка обладают высшей симметрией вида (8.14).

Отметим, что цепочки, отвечающие разным знакам ε или δ , сводятся друг к другу заменой $V_n \rightarrow (-1)^n V_n$. Цепочка (V_2) при $k = \pm 1$ совпадает с (V_5) при $k = 0$.

$$V_x = \frac{a(V_1 - v_{1,0}V) + a_1(v_{0,-1}V - V_{-1})}{v_{1,-1} - v_{1,0}v_{0,-1}}, \quad a = v_{0,-1} - \frac{1}{v_{0,-1}}; \quad (V_1)$$

$$V_x = \frac{a(V_1 - v_{1,0}V) + a_1(v_{0,-1}V - V_{-1})}{v_{1,-1} - v_{1,0}v_{0,-1} + aa_1}, \quad a^2 - 2kv_{0,-1}a + v_{0,-1}^2 - 1 = 0; \quad (V_2)$$

$$V_x = \frac{(v_{0,-1} + \varepsilon)(V_1 + \varepsilon V) - (v_{1,0} + \varepsilon)(V_{-1} + \varepsilon V)}{v_{1,-1} - 1}; \quad (V_3)$$

$$V_x = \frac{(v_{0,-1} + \varepsilon)(V_1 + \varepsilon V) - (v_{1,0} + \varepsilon)(V_{-1} + \varepsilon V)}{v_{1,-1} - v_{1,0}v_{0,-1} + (v_{1,0} + \varepsilon)(v_{0,-1} + \varepsilon)(k + pp_1)}, \quad p = \sqrt{\frac{v_{0,-1} - \varepsilon}{v_{0,-1} + \varepsilon}} - k; \quad (V_4)$$

$$V_x = \frac{(v_{0,-1} + \varepsilon)(V_1 + \varepsilon V) - (v_{1,0} + \varepsilon)(V_{-1} + \varepsilon V)}{v_{1,-1} + \varepsilon(v_{1,0} + v_{0,-1}) + 1 + k\sqrt{v_{1,0} + \varepsilon}\sqrt{v_{0,-1} + \varepsilon}}, \quad k = 0, \pm 2; \quad (V_5)$$

$$V_x = \frac{V_1 + \delta V}{v_{1,0} + \delta} - \frac{V_{-1} + \delta V}{v_{0,-1} + \delta}, \quad \delta = 0, \pm 1. \quad (V_6)$$

Список 8.1. Интегрируемые цепочки Вольтерра на сфере $\langle V, V \rangle = 1$
 $v_{m,n} = \langle V_m, V_n \rangle, \varepsilon = \pm 1.$

Отметим также следующую связь цепочки (V₆) с полиномиальной векторной цепочкой Вольтерра. Перепишем (V₆), при $\delta = 1$ и после растяжения x , как

$$V_x = \frac{V_1 + V}{|V_1 + V|^2} - \frac{V + V_{-1}}{|V + V_{-1}|^2}. \quad (8.6)$$

В такой форме, связь $\langle V, V \rangle = 1$ не обязательна для интегрируемости. Эту цепочку и её высшую симметрию (8.14) можно записать компактно, как

$$V_x = (T - 1)(W), \quad V_t = (T - 1)P_W(W_1 - W_{-1}), \quad W = (V + V_{-1})^{-1}$$

при помощи операций

$$A^{-1} = \frac{1}{\langle A, A \rangle} A, \quad P_A(B) = 2\langle A, B \rangle A - \langle A, A \rangle B.$$

Переменная W удовлетворяет полиномиальным цепочкам

$$W_x = -P_W(W_1 - W_{-1}), \quad W_t = -P_W(P_{W_1}(W_2 + W) - P_{W_{-1}}(W + W_{-2})). \quad (8.7)$$

Цепочка (V₃) связана с (V₆) композицией разностной подстановки и редукции. Именно, сначала можно разрешить связь $\langle V, V \rangle = 1$ при помощи стереографической проекции, как было объяснено в разделе 8.1. Это приводит (V₃)

при $\varepsilon = -1$ к виду

$$U_x = \frac{|U - U_{-1}|^2(U_1 - U) + |U_1 - U|^2(U - U_{-1})}{|U_1 - U_{-1}|^2}$$

и затем подстановка $\tilde{V} = U - U_{-1}$ приводит к цепочке

$$\tilde{V}_x = \frac{|\tilde{V}|^2\tilde{V}_1 + |\tilde{V}_1|^2\tilde{V}}{|\tilde{V}_1 + \tilde{V}|^2} - \frac{|\tilde{V}_{-1}|^2\tilde{V} + |\tilde{V}|^2\tilde{V}_{-1}}{|\tilde{V} + \tilde{V}_{-1}|^2}.$$

Это не та же цепочка, что (8.6), но очевидно, что обе цепочки допускают редукцию на сферу, приводящую к одной и той же цепочке (V₆). Вопрос о подстановках для других цепочек списка пока открыт.

8.3 Необходимые условия интегрируемости

Легко видеть, что условие совместности цепочек (8.2) и (8.5) расщепляется по векторным переменным V_n и сводится к коммутационному соотношению

$$D_x(P^{(k)}) - D_{t_k}(F) = [F, P] \quad (8.8)$$

для скалярных операторов

$$F = fT + g + hT^{-1}, \quad P^{(k)} = p^{(k,k)}T^k + \dots + p^{(k,-k)}T^{-k}$$

где T обозначает оператор сдвига $n \mapsto n+1$. Отсюда следует, что необходимые условия интегрируемости фактически совпадают с условиями для скалярного случая (8.4), с точностью до замены оператора F оператором линеаризации $f_* = f_{v_1}T + f_v + f_{v_{-1}}T^{-1}$. Для полноты изложения приведём краткий вывод этих условий.

Уравнение (8.8) эквивалентно набору уравнений на коэффициенты оператора $P^{(k)}$. Одна пара уравнений приводит к явным выражениям для ведущих коэффициентов

$$p^{(k,k)} = f_{k-1} \dots f_1 f, \quad p^{(k,-k)} = \alpha h_{-k+1} \dots h_{-1} h,$$

а разрешимость остальных уравнений порождает некоторую последовательность необходимых условий интегрируемости цепочки. От порядка k симметрии эти условия фактически не зависят. Более точно, пусть уравнение (8.8) разрешимо, при некоторых $k = K-1, K$, относительно $2l+2$ коэффициентов $p^{(k,\pm k)}, p^{(k,\pm(k-1))}, \dots, p^{(k,\pm(k-l))}$, где $k-l > 1$. Тогда они разрешимы относительно этих $2l+2$ коэффициентов при любом $k > K$. Более того, коэффициенты одной симметрии пересчитываются через коэффициенты другой по явным формулам. Чтобы доказать это, достаточно заметить, что член $D_{t_k}(F)$ в левой части (8.8) влияет на вычисление только коэффициентов $p^{(k,1)}, p^{(k,0)}, p^{(k,-1)}$, и что $P^{(k)}$ можно аппроксимировать формальным степенным рядом $(P^{(K)}(P^{(K-1)})^{-1})^k$. Это приводит к следующему утверждению.

Утверждение 8.2. Если цепочка (8.2) обладает бесконечной иерархией высших симметрий, то уравнения

$$\begin{aligned} L_x &= [F, L], & L &= a^{(-1)}T + a^{(0)} + a^{(1)}T^{-1} + a^{(2)}T^{-2} \dots \\ \tilde{L}_x &= [F, \tilde{L}], & \tilde{L} &= \tilde{a}^{(-1)}T^{-1} + \tilde{a}^{(0)} + \tilde{a}^{(1)}T + \tilde{a}^{(2)}T^2 \dots \end{aligned}$$

разрешимы относительно коэффициентов $a^{(j)}$, $\tilde{a}^{(j)}$ зависящих от $v_{m,n}$.

Ряды L, \tilde{L} называются *формальными симметриями*. Оказывается, что уравнения для их коэффициентов могут быть переписаны в виде последовательности так называемых *канонических законов сохранения*

$$D_x(\rho^{(j)}) = (T-1)(\sigma^{(j)}), \quad D_x(\tilde{\rho}^{(j)}) = (T^{-1}-1)(\tilde{\sigma}^{(j)}), \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad (8.9)$$

Точнее, если цепочка (8.2) имеет симметрию порядка k , то уравнения (8.9) можно разрешить относительно $\sigma^{(j)}, \tilde{\sigma}^{(j)}$ при $j = 0, \dots, k-2$. Плотности $\rho^{(j)}, \tilde{\rho}^{(j)}$ выражаются явно, по определённому рекурсивному алгоритму, через коэффициенты цепочки и ранее найденные $\sigma^{(j)}, \tilde{\sigma}^{(j)}$. Этот алгоритм связывает $\rho^{(j)}$ с вычетом L^j , определяемым как свободный член ряда по степеням T (справедлива формула $\text{res}[A, B] \in \text{Im}(T-1)$). Однако, нам понадобятся лишь несколько первых законов сохранения, и формулы для них проще вывести непосредственно.

Утверждение 8.3. Пусть цепочка (8.2) интегрируема, тогда уравнения (8.9) разрешимы для следующей последовательности плотностей $\rho^{(j)}, \tilde{\rho}^{(j)}$:

$$\rho^{(0)} = \log f, \quad \tilde{\rho}^{(0)} = \log h, \quad (8.10)$$

$$\rho^{(1)} = g + \sigma^{(0)}, \quad \tilde{\rho}^{(1)} = g + \tilde{\sigma}^{(0)}, \quad (8.11)$$

$$\rho^{(2)} = hf_{-1} + \frac{1}{2}(\rho^{(1)})^2 + \sigma^{(1)}, \quad \tilde{\rho}^{(2)} = fh_1 + \frac{1}{2}(\tilde{\rho}^{(1)})^2 + \tilde{\sigma}^{(1)}. \quad (8.12)$$

Доказательство. Имеем уравнения для коэффициентов $a^{(-1)}, a^{(0)}, a^{(1)}, a^{(2)}$:

$$\begin{aligned} 0 &= fa_1^{(-1)} - f_1a^{(-1)}, \\ a_x^{(-1)} &= fa_1^{(0)} - fa^{(0)} + ga^{(-1)} - g_1a^{(-1)}, \\ a_x^{(0)} &= fa_1^{(1)} - f_{-1}a^{(1)} + ha_{-1}^{(-1)} - h_1a^{(-1)}, \\ a_x^{(1)} &= fa_1^{(2)} - f_{-2}a^{(2)} + ga^{(1)} - g_{-1}a^{(1)} + ha_{-1}^{(0)} - ha^{(0)}. \end{aligned}$$

Из первого уравнения следует $a^{(-1)} = f$, без потери общности. Тогда второе уравнение принимает вид $(\log f)_x = (T-1)(a^{(0)} - g)$, и мы получаем плотность $\rho^{(0)}$ и формулу для следующего коэффициента формальной симметрии: $a^{(0)} = g + \sigma^{(0)}$. Согласно третьему уравнению, этот коэффициент можно принять, в качестве плотности $\rho^{(1)}$ и тогда $a^{(1)} = h + \sigma^{(1)}/f_{-1}$. Последнее уравнение приводится к виду

$$\left(hf_{-1} + \frac{1}{2}(\rho^{(1)})^2 + \sigma^{(1)} \right)_x = (T-1)(f_{-1}f_{-2}a^{(2)} + \sigma^{(1)}\rho_{-1}^{(1)}),$$

после умножения на f_{-1} и с учётом предыдущих уравнений. Второй набор плотностей получается немедленно в силу симметрии $n \rightarrow -n$. \square

Замечание 8.4. В дополнение к высшим симметриям, характерной чертой интегрируемых уравнений является существование законов сохранения высших порядков. Из этого свойства также можно извлечь некоторые условия интегрируемости. Оно приводит к понятию *формального закона сохранения*

$$S_x + SF + F^T S = 0, \quad S = s^{(0)} + s^{(1)}T^{-1} + s^{(2)}T^{-2} + \dots$$

где $(aT^j)^T := T^{-j}a$ и коэффициенты $s^{(j)}$ зависят от $v_{m,n}$. Разрешимость этого уравнения эквивалентна последовательности условий вида

$$\hat{\rho}^{(j)} = (T - 1)(\hat{\sigma}^{(j)}), \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad (8.13)$$

В частности,

$$\hat{\rho}^{(0)} = \log(-f/h), \quad \hat{\rho}^{(1)} = 2g + D_x(\hat{\sigma}^{(0)}).$$

Можно показать, что законы сохранения (8.9) эквивалентны в силу условий (8.13), то есть $\rho^{(j)} + \text{const } \tilde{\rho}^{(j)} \in \mathbb{C} \oplus \text{Im}(T - 1)$. Известно, что в некоторых классификационных задачах использование этих дополнительных условий интегрируемости может привести к значительному упрощению рассуждений или даже более короткому списку уравнений. Оказывается, что в рассматриваемом случае польза от этих условий невелика, и удаётся без них обойтись (можно проверить, что для всех найденных цепочек они выполняются автоматически).

Возвращаясь к характеристическому уравнению (8.8), заметим, что разрешимость первой пары условий интегрируемости (8.9), (8.10) позволяет найти коэффициенты $p^{(k, \pm k)}$, $p^{(k, \pm(k-1))}$ симметрии. При $k = 2$ это определяет симметрию полностью, благодаря связи $\langle V, V \rangle = 1$, из которой следует

$$v_{2,0}p^{(2,2)} + v_{1,0}p^{(2,1)} + p^{(2,0)} + v_{0,-1}p^{(2,-1)} + v_{0,-2}p^{(2,-2)} = 0.$$

Прямое вычисление показывает, что если эта симметрия существует, что она должна иметь вид

$$\begin{aligned} V_t = & f f_1 (V_2 - v_{2,0}V) + f(\rho_1^{(1)} + \rho^{(1)})(V_1 - v_{1,0}V) \\ & + \kappa h(\tilde{\rho}_{-1}^{(1)} + \tilde{\rho}^{(1)} + \tilde{\kappa})(V_{-1} - v_{0,-1}V) + \kappa h h_{-1}(V_{-2} - v_{0,-2}V) \end{aligned} \quad (8.14)$$

с некоторыми неопределёнными постоянными интегрирования $\kappa, \tilde{\kappa}$. Хотя эта явная формула не даёт существенного преимущества при решении классификационной задачи, она полезна при окончательной проверке интегрируемости найденной цепочки.

8.4 Анализ условий интегрируемости

8.4.1 Первый шаг

Рассмотрим первую пару условий интегрируемости (8.9), (8.10)

$$D_x(\log f) \in \text{Im}(T - 1), \quad D_x(\log h) \in \text{Im}(T - 1). \quad (8.15)$$

Отсюда легко получить, в качестве следствия, соотношения

$$\frac{f_{v_{1,-1}}}{f^2} + \frac{h}{f} T \left(\frac{f_{v_{1,-1}}}{f^2} \right) = 0, \quad \frac{h_{v_{1,-1}}}{h^2} + \frac{f}{h} T^{-1} \left(\frac{h_{v_{1,-1}}}{h^2} \right) = 0. \quad (8.16)$$

Действительно, члены содержащие скалярные произведения $v_{k,k-3}$ появляются только при дифференцировании $v_{1,-1}$ по x :

$$\begin{aligned} D_x(\log f) &= \frac{f_{v_{1,-1}}}{f} D_x(v_{1,-1}) + \dots = \frac{f_{v_{1,-1}}}{f} (f_1 v_{2,-1} + h_{-1} v_{1,-2}) + \dots \\ &\stackrel{\text{Im}(T^{-1})}{\simeq} \left(\frac{f_{v_{1,-1}}}{f} f_1 + T \left(\frac{f_{v_{1,-1}}}{f} \right) h \right) v_{2,-1} + \dots, \end{aligned}$$

что даёт первое уравнение (8.16). Это вычисление фактически эквивалентно применению *вариационной производной* $\delta/\delta v_{3,0}$ определяемой по формуле

$$\frac{\delta a}{\delta v_{j,0}} = \frac{\partial}{\partial v_{j,0}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} T^k(a), \quad j = 1, 2, \dots$$

Применение этого понятия позволяет алгоритмизировать некоторые вычисления, благодаря свойству

$$\mathbb{C} \oplus \text{Im}(T - 1) = \bigcap_{j=1}^{\infty} \ker \frac{\delta}{\delta v_{j,0}} \quad (8.17)$$

доказательство которого не отличается от скалярного случая.

Утверждение 8.5. Зависимость коэффициентов цепочки от $v_{1,-1}$ определяется одним из следующих случаев:

$$\begin{aligned} \text{Случай 1.} \quad f &= \frac{a(v_{0,-1})}{v_{1,-1} + b(v_{1,0}, v_{0,-1})}, \quad h = -\frac{a(v_{1,0})}{v_{1,-1} + b(v_{1,0}, v_{0,-1})}, \\ \text{Случай 2.} \quad f &= f(v_{1,0}, v_{0,-1}), \quad h = h(v_{1,0}, v_{0,-1}). \end{aligned}$$

Доказательство. Из первого уравнения (8.16) следует, что $f_{v_{1,-1}}/f^2$ может зависеть лишь от $v_{0,-1}$. Если $f_{v_{1,-1}} \neq 0$, приходим к Случаю 1. Если $f_{v_{1,-1}} = 0$, то и $h_{v_{1,-1}} = 0$, в силу второго уравнения (8.16), и получаем Случай 2. \square

Условия (8.15) ещё далеко не исчерпаны этим утверждением. Как мы увидим, в Случае 1 они позволяют определить и функции a, b .

8.4.2 Случай 1: $f_{v_1, -1} \neq 0$

Заметим, что в этом случае соотношение (8.13) при $j = 0$ удовлетворено, причём $\hat{\sigma}^{(0)} = -\log a(v_{0, -1})$. Это значит, что условия (8.15) эквивалентны друг другу и имеет смысл рассматривать только одно из них. На данном этапе следует применить к нему оператор $\delta/\delta_{v_2, 0}$, что оказывается довольно трудоёмким вычислением. В результате получается уравнение, полиномиальное по переменным $v_{k+2, k}$, и равенство коэффициентов нулю даёт некоторую переопределённую систему на функции a и b . Для её записи удобно ввести вспомогательные функции

$$y(v) = \frac{1 - v^2}{a^2(v)}, \quad c(u, v) = \frac{b(u, v) + uv}{a(u)a(v)} \quad (8.18)$$

и обозначить $u = v_{1, 0}$, $v = v_{0, -1}$, $w = v_{-1, -2}$, тогда получаются следующие сравнительно компактные уравнения:

$$c(u, v)(a'(u) - a'(v)) = (a(u)y(u))_u - (a(v)y(v))_v, \quad (8.19)$$

$$a(u)(c + y(u))c_u - a(v)(c + y(v))c_v = \frac{u(c - y(v))}{a(u)} - \frac{v(c - y(u))}{a(v)}, \quad c = c(u, v), \quad (8.20)$$

$$(c(v, w) + y(v))(2c(u, v) + y(v))_v = (c(u, v) + y(v))(2c(v, w) + y(v))_v. \quad (8.21)$$

Для начала покажем, что все решения уравнения (8.21) имеют вид

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & 2c(u, v) = 2\alpha - y(u) - y(v), \\ \text{(ii)} \quad & c(u, v) = \alpha z(u)z(v) + \beta, \quad y(v) = \gamma z^2(v) - \beta, \quad z' \neq 0 \end{aligned}$$

где α, β, γ произвольные постоянные.

Если $c(v, w) + y(v) = 0$ или $c(u, v) + y(v) = 0$, то (8.21) сводится к уравнению

$$0 = (y(u) - y(v))y'(v),$$

откуда получаем $y(v) = -\beta$, $c(u, v) = \beta$, специальный случай решения (ii).

Если $(c(v, w) + y(v))(c(u, v) + y(v)) \neq 0$, то переменные в (8.21) разделяются:

$$\frac{(2c(u, v) + y(u))_u}{c(u, v) + y(u)} = 2k(u), \quad \frac{(2c(u, v) + y(v))_v}{c(u, v) + y(v)} = 2k(v) \quad (8.22)$$

откуда следует $c_{uv} = k(u)c_v = k(v)c_u$. Случай $k = 0$ отвечает решению (i). При $k \neq 0$ имеем $c = C(K(u) + K(v))$, $K' = k$, $C'' = C'$, откуда $c = \alpha z(u)z(v) + \beta$, где $z' = kz$. Кроме того, оба уравнения (8.22) сводятся к соотношению

$$y'(v) = \frac{2z'(v)}{z(v)}(y(v) + \beta)$$

и интегрированием получаем (ii). Рассматривая по отдельности оба типа решений, приходим к следующему утверждению.

Утверждение 8.6. Решения $a = a(v)$, $b = b(u, v)$ системы (8.18)–(8.21) исчерпываются, с точностью до растяжения $a \rightarrow \text{const } a$, следующими:

$$a = v - 1/v, \quad b = -uv; \quad (8.23)$$

$$a^2 - kva + v^2 - 1 = 0, \quad b = a(u)a(v) - uv; \quad (8.24)$$

$$a = v + \varepsilon, \quad b = -1; \quad (8.25)$$

$$a = v + \varepsilon, \quad b = (u + \varepsilon)(v + \varepsilon) \left(\sqrt{\left(\frac{u - \varepsilon}{u + \varepsilon} - k \right) \left(\frac{v - \varepsilon}{v + \varepsilon} - k \right)} + k \right) - uv; \quad (8.26)$$

$$a = v + \varepsilon, \quad b = 1 + \varepsilon(u + v) + k\sqrt{(u + \varepsilon)(v + \varepsilon)} \quad (8.27)$$

где $\varepsilon = \pm 1$ и k произвольная постоянная.

Доказательство. Решения типа (i). Применяя $\partial_u \partial_v$ к (8.19), получаем

$$y'(u)a''(v) = y'(v)a''(u).$$

Если $y' = 0$, то растяжение позволяет положить $y = 1$, $a^2(v) = 1 - v^2$ и тогда из (8.19) следует $c = 1$. Уравнение (8.20) в силу этих соотношений превращается в тождество и мы приходим к решению (8.24) при $k = 0$.

Если $y' \neq 0$, то $a' = \mu y + \nu$. При этом переменные в (8.19) разделяются и на функции $a = a(v)$, $y = y(v)$ получается переопределённая система ОДУ:

$$\begin{aligned} \alpha y' = R(y) &= -\frac{3}{2}\mu y^2 + (\alpha\mu - \nu)y + \lambda, \\ a' = S(y) &= \mu y + \nu, \quad ya^2 = 1 - v^2. \end{aligned} \quad (8.28)$$

Дифференцирование даёт (производные по y обозначены точкой)

$$a(2yS + R) = -2v, \quad S(2yS + R) + (2S + 2y\dot{S} + \dot{R})R + 2 = 0.$$

Полином по y в левой части последнего уравнения должен равняться нулю тождественно, поскольку $y' \neq 0$. Это даёт соотношения $\mu = 0$, $\lambda\nu = -1$ и, кроме того, растяжение позволяет положить $\nu = 1$. После этого система (8.28) сводится к уравнениям

$$ay' = -y - 1, \quad a = v + \varepsilon, \quad a^2y = 1 - v^2.$$

Легко проверить, что они совместны лишь при $\varepsilon^2 = 1$, а непосредственная подстановка в (8.20) доказывает, что $\alpha = 0$. В результате получается решение (8.25).

Решения типа (ii). Применяя $\partial_u \partial_v$ к (8.19), получаем

$$\alpha \left(a'(u) - a'(v) + \frac{z(u)a''(u)}{z'(u)} - \frac{z(v)a''(v)}{z'(v)} \right) = 0. \quad (8.29)$$

Если $\alpha = 0$, то $c = \beta$ и переменные в уравнении (8.20) разделяются:

$$\frac{(\beta - y(u))a(u)}{u} = \frac{(\beta - y(v))a(v)}{v} = \delta.$$

В силу этого соотношения уравнение (8.19), как и в предыдущем случае, обращается в тождество. Учитывая (8.18), получаем для $a(v)$ уравнение $\beta a^2 - \delta v a + v^2 - 1 = 0$. С точностью до растяжения, это даёт решения (8.23), (8.24).

Если $\alpha \neq 0$, то не теряя общности положим $\alpha = 1$. Из уравнения (8.29) следует $a' = \mu/q + \nu$, тогда переменные в (8.19) разделяются и мы получаем переопределённую систему ОДУ на функции $a = a(v)$, $z = z(v)$:

$$a' = \frac{\mu}{z} + \nu, \quad ((\gamma z^2 - \beta)a)' - \frac{\mu\beta}{z} + \mu z = \lambda, \quad (\gamma z^2 - \beta)a^2 = 1 - v^2. \quad (8.30)$$

Заметим, что $\gamma \neq 0$: иначе $-2\mu\beta/z + \mu z - \beta\nu = \lambda$ и так как $z' \neq 0$, то $\mu = 0$; но тогда уравнения $a' = \nu$, $\beta a^2 = v^2 - 1$ несовместны. Следовательно, второе уравнение (8.30) можно записать в виде

$$z' = \frac{1}{2\gamma a} \left(-\gamma\nu z - \mu(\gamma + 1) + \frac{\lambda + \beta\nu}{z} + \frac{2\mu\beta}{z^2} \right).$$

Далее, дифференцирование третьего уравнения (8.30) приводит, как в предыдущем случае, к уравнению, полиномиальному по z , коэффициенты которого должны обращать в ноль. Это даёт уравнения на параметры:

$$\begin{aligned} (\gamma - 1)\beta\mu &= 0, & (3\gamma - 1)(\lambda + \beta\nu)\mu &= 0, \\ (\gamma - 3)\mu\nu &= 0, & 4\gamma(\lambda\nu + 1) + (\gamma - 1)^2\mu^2 &= 0. \end{aligned}$$

Кроме того, подстановка в (8.20) даёт дополнительно уравнения

$$(\gamma + 1)(\gamma - 3)\beta\mu = 0, \quad (\gamma^2 - 1)(\lambda + \beta\nu) = 0, \quad (\gamma^2 - 1)\mu = 0.$$

Полная система имеет следующие решения:

$$\begin{aligned} (\mu^2 = 1, \beta = 0, \lambda = 0, \nu = 0, \gamma = -1), \\ (\mu = 0, \nu = -1/\lambda, \gamma^2 = 1), \quad (\mu = 0, \nu = -1/\lambda, \beta = \lambda^2). \end{aligned}$$

Первое не подходит, так как для него $z' = 0$. Для двух других положим $\nu = 1$, $\lambda = -1$, $a = v + \varepsilon$ без потери общности. Нетрудно проверить, что тогда (8.30) совместны при $\varepsilon^2 = 1$ и мы приходим к решениям (8.26) и (8.27). \square

Прямая проверка показывает, что условия (8.9) при $j = 0$ выполняются для каждого из решений (8.23)–(8.27), то есть, что в каждом случае существуют величины $\sigma^{(0)}$, $\tilde{\sigma}^{(0)}$ обращающие эти условия в тождество. Достаточно вычислить лишь $\sigma^{(0)}$, благодаря соотношению $\tilde{\sigma}_{-1}^{(0)} = D_x(\hat{\sigma}^{(0)}) - \sigma^{(0)}$ где $\hat{\sigma}^{(0)} = -\log a(v_{0,-1})$. Практически, это вычисление осуществляется по алгоритму “суммирования по частям”.

После нахождения $\sigma^{(0)}$ тест на интегрируемость продолжается со следующей парой плотностей (8.11). Оказывается, что во всех случаях, кроме (8.27), второе условие интегрируемости выполнено автоматически. В случае (8.27) на значения параметра возникает ограничение $k^3 = 4k$. Подробнее, плотность $\rho^{(1)}$ в этом случае равна

$$\rho^{(1)} = \frac{f_{-1}}{v_{-1,-2} + \varepsilon} (v_{0,-2} - 1) + \frac{ff_{-1}}{v_{-1,-2} + \varepsilon} \left(v_{1,-2} - v_{1,0} + v_{0,-1} - v_{-1,-2} \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \left(k\sqrt{v_{1,0} + \varepsilon} + 2\varepsilon\sqrt{v_{0,-1} + \varepsilon} \right) \left(k\sqrt{v_{-1,-2} + \varepsilon} + 2\varepsilon\sqrt{v_{0,-1} + \varepsilon} \right) \right)$$

и можно проверить, что $\delta D_x(\rho^{(1)})/\delta v_{2,0} = 0$, если и только если k удовлетворяет указанному уравнению.

Вычисление $\sigma^{(1)}$ и дальнейшая проверка условий интегрируемости требует значительных усилий. К счастью, этих вычислений можно избежать, заменив их проверкой того, что явная формула (8.14) действительно даёт высшую симметрию. Это оказывается верным для (8.23)–(8.26) и (8.27) при $k = 0, \pm 2$ (с постоянными $\kappa = -1, \tilde{\kappa} = 0$ во всех случаях) и мы приходим, соответственно, к цепочкам (V₁)–(V₅) в приведённом выше списке 8.1.

8.4.3 Случай 2: $f_{v_{1,-1}} = 0$

Вычисления в этом случае легче, но и длиннее, так как в некоторых подслучаях приходится доходить до проверки третьего условия интегрируемости (8.9). Результат этого анализа беден: ответ состоит из единственной цепочки (V₆). Поэтому, приведём лишь схематическое изложение этого случая.

Применение $\delta/\delta v_{2,0}$ к (8.15) даёт уравнения

$$\frac{h}{f} \left(T \left(\frac{fv_{0,-1}}{f} \right) + \frac{fv_{1,0}}{f} \right) + \frac{fv_{0,-1}}{f} + T^{-1} \left(\frac{fv_{1,0}}{f} \right) = 0, \\ \frac{h}{f} \left(T \left(\frac{hv_{0,-1}}{h} \right) + \frac{hv_{1,0}}{h} \right) + \frac{hv_{0,-1}}{h} + T^{-1} \left(\frac{hv_{1,0}}{h} \right) = 0. \quad (8.31)$$

Далее, дифференцируя их по $v_{2,1}$ получаем

$$(\log f)_{v_{1,0}, v_{0,-1}} = 0, \quad (\log h)_{v_{1,0}, v_{0,-1}} = 0 \quad \Rightarrow \quad f = T(a)b, \quad h = T(c)d$$

где a, b, c, d функции от $v_{0,-1}$. Переменные в уравнениях (8.31) разделяются и мы приходим к соотношениям

$$\frac{(ab)'}{ab} \cdot \frac{c}{a} = \mu, \quad \frac{(ab)'}{ab} \cdot \frac{b}{d} = -\mu, \quad \frac{(cd)'}{cd} \cdot \frac{b}{d} = \nu, \quad \frac{(cd)'}{cd} \cdot \frac{c}{a} = -\nu$$

с некоторыми постоянными μ, ν . Если $ab + cd \neq 0$, то $(ab)' = (cd)' = 0$, так что возможны два случая, с точностью до растяжения:

- (i) $b = p/a, \quad c = ap/p', \quad d = -p'/a, \quad p' \neq 0;$
- (ii) $a = \alpha/b, \quad d = 1/c.$

В случае (i), применение $\delta/\delta_{v_{1,0}}$ к (8.15) приводит к переопределённой системе на функции a, p . Кроме того, в качестве дополнительной информации можно получить уравнение $pp'' = \text{const}(p')^2$ (оно следует либо из дополнительного условия интегрируемости (8.13) при $j = 1$, либо из следующей пары законов сохранения (8.9), (8.11)). Это позволяет доказать, что пары функций $a(v), p(v)$ могут быть следующими:

$$a = p = \frac{1}{v + \delta}; \quad a = 1, \quad p = v + \delta; \quad a = v, \quad p = v^3.$$

Проверка законов сохранения (8.9), (8.11) для первого решения показывает, что δ может принимать значения $\pm 1, 0$, и приводит к цепочке (V_6). Оставшиеся два решения не проходят через тест.

В случае (ii) первая пара условий интегрируемости (8.9), (8.10) выполняется при любых α, b, c . Последующий анализ показывает, что условия (8.9), (8.11) выполняются, если $\alpha = 1$ и либо $b(v) = c(v) = \sqrt{v + \delta}$, либо $b = c = 1$. В обоих случаях следующие условия (8.9), (8.12) не выполняются, и случай (ii) оказывается пустым.

8.5 Ассоциированные уравнения в частных производных

Понятие ассоциированной системы уже неоднократно иллюстрировалось в предыдущих главах, см. разделы 2.4, 5.6, 6.3.1 и 7.2. Переход к такой системе состоит в том, что при исключении дискретной переменной высшая симметрия цепочки превращается в некоторое уравнение в частных производных, сама же цепочка при этом интерпретируется, как преобразование Бэклунда для этого уравнения. Здесь мы покажем, что интегрируемые цепочки Вольтерра (8.4) ассоциированы с некоторыми векторными системами типа НУШ.

Исключение дискретной переменной производится следующим образом. Из уравнений (8.2), (8.3) следует

$$\begin{aligned} \langle V_x, V_1 \rangle &= (1 - v_{1,0}^2)f + (v_{1,-1} - v_{1,0}v_{0,-1})h, \\ \langle V_x, V_x \rangle &= (1 - v_{1,0}^2)f^2 + 2(v_{1,-1} - v_{1,0}v_{0,-1})fh + (1 - v_{0,-1}^2)h^2. \end{aligned}$$

Допустим, что эти уравнения можно разрешить относительно скалярных произведений $v_{1,-1}, v_{0,-1}$ (это верно для всех цепочек списка 8.1). Тогда уравнение (8.2) можно переписать в виде

$$V_{-1} = \tilde{f}V_1 + \tilde{g}V + \tilde{h}V_x \quad (8.32)$$

с коэффициентами, зависящими от скалярных произведений векторов. Аналогично,

$$V_2 = \hat{f}V_{1,x} + \hat{g}V_1 + \hat{h}V.$$

Итерирование этих формул позволяет выразить все векторы V_n через векторы $U = V_1$, V и их производные. В результате, симметрия (8.14) порождает систему вида

$$\begin{cases} U_t = U_{xx} + \alpha U_x + \beta V_x + \gamma U + \delta V, \\ -V_t = V_{xx} + \tilde{\alpha} U_x + \tilde{\beta} V_x + \tilde{\gamma} U + \tilde{\delta} V, \end{cases} \quad \langle U, U \rangle = \langle V, V \rangle = 1 \quad (8.33)$$

с коэффициентами, зависящими от скалярных произведений U , U_x , V и V_x . Уравнение (8.32) превращается в явное автопреобразование Бэклунда

$$U_{-1} = V, \quad V_{-1} = \tilde{f}U + \tilde{g}V + \tilde{h}V_x$$

для этой системы. Обратное неверно: не всякая интегрируемая система (8.33) допускает авто-ПБ такого вида. Задача классификации уравнений типа (8.33), вероятно, весьма трудна, поскольку даже простейшие цепочки из нашего списка приводят к достаточно громоздким ответам. Приведём несколько примеров.

В случае (V₆) обозначим $w = (\langle U, V \rangle + \delta)^{-1}$, тогда при $\delta = \pm 1$ получаем систему

$$\begin{aligned} U_t &= U_{xx} - 2w(\langle U_x, V \rangle + 2\delta)U_x + 2wV_x + w(\langle U_x, U_x \rangle - 2w\langle U, V_x \rangle)(\delta U + V), \\ -V_t &= V_{xx} - 2w(\langle U, V_x \rangle - 2\delta)V_x - 2wU_x + w(\langle V_x, V_x \rangle + 2w\langle U_x, V \rangle)(U + \delta V), \end{aligned}$$

а при $\delta = 0$ систему

$$\begin{aligned} U_t &= U_{xx} - 2w(\langle U_x, V \rangle + w)U_x + (\langle U_x, U_x \rangle + 2w\langle U_x, V \rangle)U + 2(wV)_x, \\ -V_t &= V_{xx} - 2w(\langle U, V_x \rangle - w)V_x + (\langle V_x, V_x \rangle - 2w\langle U, V_x \rangle)V - 2(wU)_x. \end{aligned}$$

Цепочка (V₃) ассоциирована с системой

$$\begin{aligned} U_t &= U_{xx} - 2w(w\langle U, V_x \rangle\langle U_x, V \rangle - \langle U_x, V_x - V \rangle)U_x - w\langle U_x, U_x \rangle V_x \\ &\quad + w\langle U_x, U_x \rangle(1 + w\langle U, V_x \rangle)(\varepsilon U + V), \\ -V_t &= V_{xx} + 2w(w\langle U, V_x \rangle\langle U_x, V \rangle - \langle V_x, U_x + U \rangle)V_x + w\langle V_x, V_x \rangle U_x \\ &\quad + w\langle V_x, V_x \rangle(1 - w\langle U_x, V \rangle)(U + \varepsilon V), \end{aligned}$$

где $w = (\langle U, V \rangle + \varepsilon)^{-1}$, $\varepsilon = \pm 1$.

8.6 Предсимплектическая структура

Бигамильтонова структура скалярной цепочки Вольтерра хорошо известна. В векторном случае вопрос значительно труднее. Следующее утверждение показывает, что все рассматриваемые цепочки обладают по крайней мере единообразной предсимплектической структурой.

Утверждение 8.7. Любая цепочка (V_1) – (V_6) может быть записана в предсимплектической форме

$$SV_x = \frac{\delta H}{\delta V} + \lambda V, \quad H = \rho^{(0)} = \log f(v_{1,-1}, v_{1,0}, v_{0,-1}) \quad (8.34)$$

где S некоторый кососимметрический оператор вида

$$S = pT^{-1} - p_1T - qV_{-1}V^\top T^{-1} + q_1V_1V^\top T + r(V_1V_{-1}^\top - V_{-1}V_1^\top), \quad (8.35)$$

λ множитель Лагранжа, отвечающий связи $\langle V, V \rangle = 1$, и оператор UV^\top действует согласно формуле $UV^\top(W) = U\langle V, W \rangle$.

Доказательство. Уравнение (8.34) эквивалентно

$$\begin{aligned} & (pT^{-1} - p_1T)(fV_1 + gV + hV_{-1}) - V_{-1}(qT^{-1} + r)(f + v_{1,0}g + v_{1,-1}h) \\ & \quad + V_1(r + q_1T)(v_{1,-1}f + v_{0,-1}g + h) - \lambda V \\ = & T \left(\frac{fv_{1,-1}}{f}V_1 + \frac{fv_{0,-1}}{f}V \right) + \frac{fv_{1,0}}{f}V_1 + \frac{fv_{0,-1}}{f}V_{-1} + T^{-1} \left(\frac{fv_{1,0}}{f}V + \frac{fv_{1,-1}}{f}V_{-1} \right). \end{aligned}$$

Приравнявая коэффициенты при $V, V_{\pm 2}$, получаем

$$\lambda = pf_{-1} - p_1h_1, \quad p = -fv_{1,-1}/f^2, \quad pf + p_1h = 0.$$

Первые два уравнения служат просто определением λ и p , а последнее выполняется для цепочек из списка в силу (8.16). Уравнения для оставшихся коэффициентов дают систему для q и r вида

$$Ar + A_1q_1 = C, \quad Br + B_{-1}q = D \quad (8.36)$$

где

$$\begin{aligned} A &= v_{1,-1}f + v_{0,-1}g + h, & B &= f + v_{1,0}g + v_{1,-1}h, \\ C &= p_1g_1 + (\log f_1f)_{v_{1,0}}, & D &= pg_{-1} - (\log ff_{-1})_{v_{0,-1}}. \end{aligned}$$

Исключение одной из неизвестных функций, например r , приводит (8.36) к виду

$$(T - 1)(AB_{-1}q) = BC - AD.$$

Это означает, что система (8.36) разрешима, если и только если $BC - AD \in \text{Im}(T - 1)$. Замечательный факт (допускающий несложную непосредственную проверку) заключается в том, что это условие в точности эквивалентно условию $D_x(\log f) \in \text{Im}(T - 1)$ и следовательно выполняется для всех цепочек списка 8.1. \square

Конкретные выражения для коэффициентов q, r могут быть достаточно громоздкими (из доказательства ясно, что они как-то выражаются через величину $\sigma^{(0)}$). Для цепочки (V_3) ответ наиболее прост:

$$p = \frac{1}{v_{0,-1} + \varepsilon}, \quad q = \frac{1}{(v_{0,-1} + \varepsilon)^2}, \quad r = 0. \quad (8.37)$$

Формула $\langle U, SW \rangle = \Omega(U, W)$ связывает оператор S с 2-формой

$$\Omega = \sum_n (p_n \langle dV_n \wedge dV_{n-1} \rangle + q_n \langle V_n, dV_{n-1} \rangle \wedge \langle V_{n-1}, dV_n \rangle + r_n \langle V_{n+1}, dV_n \rangle \wedge \langle V_{n-1}, dV_n \rangle)$$

где $\langle \alpha \wedge \beta \rangle(U, W) := \langle \alpha(U), \beta(W) \rangle - \langle \alpha(W), \beta(U) \rangle$. Легко видеть, что в случае (8.37) эта форма точна, именно $\Omega = d \sum_n p_n \langle V_n, dV_{n-1} \rangle$. Следовательно, $d\Omega = 0$, то есть оператор S действительно симплектический. Это, однако, верно не для всех цепочек.

Следует отметить также, что представление (8.34) можно заменить линейным пучком, рассматривая гамильтониан вида $H = \rho^{(0)} + \kappa\rho$, где ρ дополнительная сохраняющаяся плотность, зависящая от $v_{1,0}$ (она не принадлежит последовательности (8.9), но можно показать, что такие плотности существуют для всех рассматриваемых цепочек). Оператор S также линейно зависит от κ , с сохранением общей структуры (8.35). Приведём явные формулы только для относительно простого случая цепочки (V_1):

$$\begin{aligned} \rho^{(0)} &= \log \frac{a}{v_{1,-1} - v_{1,0}v_{0,-1}}, \quad \rho = \log v_{1,0}, \quad p = \frac{1}{a}, \quad a = v_{0,-1} - \frac{1}{v_{0,-1}}, \\ q &= \frac{1}{a^2} + (\kappa - 1) \frac{(v_{1,-1} - v_{1,0}v_{0,-1})(v_{0,-2} - v_{0,-1}v_{-1,-2})}{av_{0,-1} \left(v_{1,-1} - \frac{v_{0,-1}}{v_{1,0}} \right) \left(v_{0,-2} - \frac{v_{0,-1}}{v_{-1,-2}} \right)}, \\ r &= \frac{1}{a_1 a} + (\kappa - 1) \frac{v_{1,-1} - v_{1,0}v_{0,-1}}{\left(v_{1,-1} - \frac{v_{0,-1}}{v_{1,0}} \right) \left(v_{1,-1} - \frac{v_{1,0}}{v_{0,-1}} \right)}. \end{aligned}$$

Оператор S здесь не является симплектическим. Как видим, его вид упрощается при $\kappa = 1$, что отвечает гамильтониану $\rho^{(0)} + \rho$, но это не так для других цепочек.

Комментарии к главе 8

Глава основана на работе Адлера [13].

▷ Симметричный подход к классификации интегрируемых уравнений был развит в 1980-х, см. в частности работы Фокаса [70], Соколова, Шабата [158], Михайлова, Шабата, Ямилова [126] и др.. Более современное изложение для дискретного случая имеется в обзорах Леви, Ямилова [110], Адлера, Шабата, Ямилова [25] и Ямилова [193].

▷ Задача классификации скалярных цепочек типа Вольтерра (8.4) решена Ямиловым [189], см. также [193]. Как уже отмечалось, необходимые условия интегрируемости для векторного случая (утверждение 8.3) формально совпадают с условиями для скалярного, полученными в [189]. В этой работе использовались также дополнительные условия вида (8.13), вытекающие из наличия законов сохранения (см. сноску на р. 567 и Теорему 22 в [193]).

▷ Обсуждение свойства (8.17) и алгоритма “суммирования по частям” имеется в [193].

▷ То, что необходимые условия интегрируемости для векторных и скалярных уравнений формально совпадают, является весьма общим явлением. В непрерывном случае подход, основанный на этом простом наблюдении был развит Соколовым и Мешковым в статьях [120, 121], посвящённых классификации векторных уравнений типа КдФ на сфере, включая анизотропные. Отметим также работу Мешкова и Балахнева [119], где для таких уравнений построены преобразования Бэклунда. Важные, хотя и не такие общие классификационные результаты для некоторых других типов векторных уравнений в частных производных получены также в работах Соколова, Вольфа [160], Тсучиды, Вольфа [178] и Анко, Вольфа [32]. В этих работах постулировалась полиномиальная или рациональная структура уравнений, что позволяет применять метод неопределённых коэффициентов.

▷ Цепочки (V_1) – (V_5) , по-видимому, ранее не изучались. Цепочка (V_6) это дискретная спиновая цепочка Гейзенберга, введённая в работе Рагниско и Сантини [145]. Анизотропная версия этой цепочки (7.25) уже обсуждалась в предыдущей главе.

▷ Цепочки (8.7) интегрируемы не только в векторном случае, но и в более общей постановке, связанной с йордановыми тройными системами (Адлер, Свинолулов и Ямилов [28]). Близкие цепочки типа Тоды изучались в работе Свинолулова и Ямилова [173].

▷ Обсуждение понятия ассоциированной системы см. в [комментариях](#) к главе 6. Ассоциированные системы из раздела 8.5 дают лишь несколько примеров многополевых уравнений типа НШ. Для таких уравнений известно множество примеров и частных классификационных результатов. Первый многополевой пример появился в работе Манакова [113]. В работах Форди [72], Форди, Кулиша [73] и Аторна, Форди [33] была установлена связь интегрируемых систем этого типа с алгебрами Ли и эрмитовыми симметрическими пространствами, в работе Свинолулова [170] с йордановыми парами, см. также работы Соколова, Свинолулова [159] и Хабибуллина, Соколова, Ямилова [80].

▷ О роли симплектических структур в теории интегрируемых уравнений см. работу Фокаса и Фуксштайнера [71]. Бигамильтонова структура скалярной цепочки Вольтерра приведена, напр. в книгах Тахтаджян, Фаддеев [174] и Сурис [168].

Глава 9

Дискретное уравнение Кадомцева-Петвиашвили (Δ КР)

В этой главе приводятся некоторые хорошо известные факты о дискретном уравнении КР (известном также, как уравнение Хироты и Хироты-Мивы) и его модификациях: вывод из линейных задач, связь с двумеризованной цепочкой Тоды и уравнением КР. В разделе 9.3 на примере так называемой решётки Менелая поясняется, в чём должно состоять определение 4D-совместности для уравнений типа Δ КР. Это понятие иллюстрируется также новой геометрической конструкцией из раздела 9.4. В целом, данная глава служит мотивировкой для постановки классификационной задачи, рассматриваемой в главе 10.

9.1 Вывод Δ КР из линейных задач

Уравнение Δ КР и его модификации возникают из простейших дискретных линейных задач

$$\varphi_2 = a\varphi + \varphi_1, \quad \varphi_3 = b\varphi + \varphi_1 \quad (9.1)$$

со скалярными коэффициентами a, b . Условие совместности

$$a_3 + b_1 = a_1 + b_2, \quad a_3b = ab_2 \quad (9.2)$$

можно разрешить, например, как отображение $(a, a_1, b, b_1) \rightarrow (a_3, b_2)$, определяющее эволюцию переменных a и b на решётке \mathbb{Z}^3 . Эта динамическая система является трёхмерной: в качестве начальных данных можно принять значения a на плоскости (12) и b на плоскости (13). Кроме того, заметим, что все четыре грани тетраэдра с вершинами $\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ равноправны, так как в силу (9.1) выполняются также уравнения

$$\varphi_3 - \varphi_2 + p\varphi = 0, \quad \varphi_2 + (q-1)\varphi_1 - q\varphi_3 = 0, \quad (9.3)$$

где $p = a - b$, $q = a/b$. Вместо (9.1) можно рассмотреть любую пару из четырех уравнений (9.1), (9.3). Исключая a и b , при помощи (9.2), получаем уравнение

$$\frac{\hat{\varphi}_{13} - \hat{\varphi}_{12}}{\hat{\varphi}_1} + \frac{\hat{\varphi}_{12} - \hat{\varphi}_{23}}{\hat{\varphi}_2} + \frac{\hat{\varphi}_{23} - \hat{\varphi}_{13}}{\hat{\varphi}_3} = 0, \quad (9.4)$$

где $\hat{\varphi}$ обозначает произвольную линейную функцию от φ (ясно, что множество решений (9.1) образует линейное векторное пространство, природа которого сейчас не важна; для наглядности можно считать, что $\hat{\varphi}$ произвольная координата конечномерного вектора).

Уравнения с данной схемой, то есть связывающие шесть из восьми вершин в каждом элементарном кубе в \mathbb{Z}^3 , будут называться далее уравнениями типа Δ КР. Отметим, что можно сделать линейное преобразование решётки, так чтобы эти точки стали вершинами правильного октаэдра: $(1, 2, 3, 23, 13, 12) \mapsto (1, 2, 3, -1, -2, -3)$. Уравнения типа Δ КР часто записывают именно в такой форме, подчёркивающей *внутреннюю* симметрию уравнения. Однако, нас будет далее интересовать свойство 4D-совместности уравнений типа Δ КР, выражающее их *внешнюю* симметрию. Это свойство удобнее изучать именно в исходных координатах.

Каждое из уравнений (9.11) является законом сохранения и позволяет ввести потенциал. Из первого уравнения имеем

$$a = \rho_2 - \rho_1, \quad b = \rho_3 - \rho_1,$$

при этом второе уравнение превращается в

$$\frac{\rho_{23} - \rho_{13}}{\rho_{23} - \rho_{12}} = \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1 - \rho_3}. \quad (9.5)$$

Аналогично, если ввести, в силу второго уравнения,

$$a = q_2/q, \quad b = q_3/q,$$

то первое превратится в

$$\frac{q_{12} - q_{13}}{q_1} = q_{23} \left(\frac{1}{q_3} - \frac{1}{q_2} \right). \quad (9.6)$$

Это уравнение, в свою очередь, можно записать в виде закона сохранения

$$\begin{pmatrix} T_1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_2 - q_3 \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_3 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_2 \\ 1 \end{pmatrix} q,$$

откуда следует замена

$$q = \frac{\tau_1}{\tau}, \quad \frac{q_2 - q_3}{q} = \frac{\tau_{23}\tau}{\tau_2\tau_3},$$

приводящая к собственно уравнению Δ КР

$$\tau_1\tau_{23} + \tau_2\tau_{13} - \tau_3\tau_{12} = 0. \quad (9.7)$$

Возможна также подстановка

$$h = \frac{q_2}{q_3} = \frac{a}{b} = \frac{\tau_{12}\tau_3}{\tau_2\tau_{13}}, \quad (9.8)$$

приводящая к уравнению

$$(h_{12} - 1)(h_3 - 1) = h_1 h_{23} (1 - h_2^{-1})(1 - h_{13}^{-1}). \quad (9.9)$$

Наконец, ещё одна модификация возникает, если стартовать с линейных задач

$$\psi_2 = \psi + u(\psi_1 - \psi), \quad \psi_3 = \psi + v(\psi_1 - \psi). \quad (9.10)$$

Такие задачи принципиально не отличаются от (9.1): во первых, они калибровочно эквивалентны, во-вторых, они уже возникали в (9.3), то есть на решётке достаточно большой размерности сосуществуют оба типа задач. Условие совместности (9.10) приводит к уравнениям

$$(u_3 - 1)(v - 1) = (u - 1)(v_2 - 1), \quad u_3 v_1 = u_1 v_2, \quad (9.11)$$

которые, как и раньше, интерпретируются, как отображение $(u, u_1, v, v_1) \rightarrow (u_3, v_2)$. Уравнение на переменные ψ имеет вид

$$\frac{(\hat{\psi}_1 - \hat{\psi}_{12})(\hat{\psi}_2 - \hat{\psi}_{23})(\hat{\psi}_3 - \hat{\psi}_{13})}{(\hat{\psi}_{12} - \hat{\psi}_2)(\hat{\psi}_{23} - \hat{\psi}_3)(\hat{\psi}_{13} - \hat{\psi}_1)} = -1, \quad (9.12)$$

где, как и раньше, $\hat{\psi}$ обозначает произвольную линейную форму от ψ . В отличие от предыдущего примера, законы сохранения (9.11) симметричны, и введённые с их помощью потенциалы удовлетворяют одинаковым уравнениям. Например, после замены

$$u = \frac{\hat{\varphi}_1}{\hat{\varphi}_2}, \quad v = \frac{\hat{\varphi}_1}{\hat{\varphi}_3}$$

получаем опять (9.4). Таким образом, все уравнения очень просто связаны друг с другом:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & \rho \text{ (9.5)} & h \text{ (9.9)} & \\ & & & & \downarrow & \uparrow & \\ \psi & \rightarrow & u, v & \leftarrow & \varphi & \rightarrow & a, b & \leftarrow & q & \leftarrow & \tau \\ \text{(9.12)} & & \text{(9.11)} & & \text{(9.4)} & & \text{(9.2)} & & \text{(9.6)} & & \text{(9.7)} \end{array}$$

В следующей теореме доказывается, что рассмотренные линейные задачи исчерпывают все возможные уравнения общего вида

$$\phi_2 = a(u)\phi + b(u)\phi_1, \quad \phi_3 = c(v)\phi + d(v)\phi_1, \quad abcd \neq 0, \quad (9.13)$$

такие что условие совместности

$$a_3c = ac_2, \quad a_3d + b_3c_1 = a_1d_2 + bc_2, \quad b_3d_1 = b_1d_2 \quad (9.14)$$

определяет некоторое отображение $(u, u_1, v, v_1) \rightarrow (u_3, v_2)$ (то есть, требование заключается в том, чтобы для значений u, u_1, v, v_1 общего положения эти уравнения были разрешимы относительно u_3, v_2).

Понятно, что при сравнении таких задач следует учитывать замены $u \rightarrow \tilde{u}(u)$, $v \rightarrow \tilde{v}(v)$ и растяжения $\phi_i \rightarrow k_i\phi_i$, $i = 1, 2, 3$. Кроме того, как уже отмечалось, все грани тетраэдра с вершинами $\phi, \phi_1, \phi_2, \phi_3$ равноправны, так как в силу (9.13) выполняются также уравнения

$$(ad - bc)\phi - d\phi_2 + b\phi_3 = 0, \quad (ad - bc)\phi_1 + c\phi_2 - a\phi_3 = 0.$$

Поэтому нужно учитывать также преобразования решетки, сохраняющие базисный тетраэдр.

Теорема 9.1. С точностью до указанных замен, совместные задачи (9.13) исчерпываются уравнениями (9.1) и (9.10).

Доказательство. Легко видеть, что если коэффициент a постоянный, то постоянным должен быть и коэффициент c . Действительно, иначе можно считать, что $c = v$, тогда из первого уравнения (9.14) следует $v = v_2$, и далее

$$b_3v_1 = bv, \quad b_3d_1 = b_1d \quad \Rightarrow \quad d(v_1)v_1 = v_1d(v)b(u_1)$$

— противоречие, так как переменные u, u_1, v, v_1 должны быть свободными. Аналогичным свойством обладает пара b, d (замена $\phi \leftrightarrow \phi_1$). Поэтому, не теряя общности, будем считать, что $b = u$, $d = v$, тогда из последнего уравнения (9.14) имеем $u_3 = u_1v_2/v_1$, а два первых можно переписать в виде

$$a\left(\frac{u_1}{v_1}v_2\right)c(v) = a(u)c(v_2), \quad \left(\frac{a(u)}{c(v)}v - u\right)c(v_2) = \left(a(u_1) - \frac{u_1}{v_1}c(v_1)\right)v_2.$$

Если функции a и c постоянные, то приходим (после растяжений и замены $\phi \leftrightarrow \phi_1$) к случаю (9.1). Иначе, из первого уравнения следует $v_2 = \Phi(u_1/v_1, u, v)$; тогда, применяя ко второму уравнению оператор $u_1\partial_{u_1} + v_1\partial_{v_1}$, получаем $a'(u_1) = c'(v_1)$, то есть

$$a(u) = \varepsilon u + \alpha, \quad c(v) = \varepsilon v + \gamma,$$

где $\varepsilon \neq 0$. Кроме того, оба параметра α и γ не могут равняться нулю, так как это приводит к связи $u_1v = uv_1$. Легко видеть, что с точностью до растяжений и замены $\phi_2 \leftrightarrow \phi_3$, имеется лишь два случая: (9.10) и

$$\phi_2 = u(\phi_1 - \phi), \quad \phi_3 = \phi + v(\phi_1 - \phi),$$

что сводится к (9.1). □

9.2 Уравнения, связанные с ΔКР

Рассмотрим, очень коротко, непрерывную часть иерархии, связанной с задачей (9.1). Отметим, что она может быть выведена из дискретной части посредством непрерывного предела по некоторым направлениям в многомерной решётке, но мы не будем это прослеживать. Удобнее всего начать с пары дифференцирований

$$\varphi_x = \varphi_1 + f\varphi, \quad \varphi_y = \varphi_{11} + (f_1 + f)\varphi_1 + r\varphi, \quad (9.15)$$

условие совместности которых приводит к двумерной одевающей цепочке

$$(f_1 + f)_x = f^2 - f_1^2 + r_1 - r, \quad r_x = f_y \quad (9.16)$$

определяющей преобразование Дарбу для уравнения Шрёдингера

$$\varphi_y = \varphi_{11} + (f_1 + f)\varphi_1 + r\varphi = \varphi_{xx} - u\varphi, \quad u = f_x + f^2 - r.$$

Как и в одномерном случае, эта цепочка допускает ряд замен, например, введение потенциала по формуле $f = v_1 - v$ приводит к аналогу цепочки (1.14)

$$(v_1 + v)_x = r - (v_1 - v)^2, \quad (v_1 - v)_y = r_x.$$

Условие совместности с задачей третьего порядка $\varphi_t = \varphi_{111} + \dots$ удобнее выводить, заменяя сдвиги производными, то есть из пары

$$\varphi_y = \varphi_{xx} - u\varphi, \quad \varphi_t = \varphi_{xxx} + P\varphi_{xx} + Q\varphi_x + R\varphi.$$

Несложные вычисления приводят к уравнению Кадомцева-Петвиашвили

$$4u_{tx} = u_{xxxx} - 6uu_{xx} - 6u_x^2 + 3u_{yy}. \quad (9.17)$$

Цепочка (9.16) интерпретируется, как x, y -часть преобразования Бэклунда для этого уравнения, x, t -часть получается из условия совместности $[\partial_x, \partial_t] = 0$.

Можно рассматривать также операторы со сдвигами в обратную сторону, это приводит к “негативным” потокам иерархии. Например, условие совместности для пары

$$\varphi_x = \varphi_1 + f\varphi, \quad \varphi_z = c\varphi_{-1} \quad (9.18)$$

образует цепочку

$$f_z = c - c_1, \quad c_x = c(f - f_{-1}),$$

после введения потенциала $f = q_x$, $c = -\exp(q - q_{-1})$ совпадающую с двумеризованной цепочкой Тоды

$$q_{xz} = e^{q_1 - q} - e^{q - q_{-1}}. \quad (9.19)$$

Все дискретные переменные восстанавливаются как преобразования Дарбу, отвечающие разным функциям f :

$$\varphi_i = \varphi_x - f^i \varphi, \quad (9.20)$$

то есть первое уравнение (9.15) интерпретируется теперь не как дифференцирование, а как сдвиг. Очевидно, отсюда следует

$$\varphi_i = a^i \varphi + \varphi_1, \quad a^i = f^1 - f^i,$$

что возвращает нас к дискретной задаче (9.1). Условие совместности уравнений (9.20) имеет вид

$$f^j + f_j^i = f^i + f_i^j, \quad f_x^j - f_j^i f^j = f_x^i - f_i^j f^i.$$

Это можно интерпретировать как отображение $(f^i, f^j) \rightarrow (f_j^i, f_i^j)$,

$$f_j^i = f^i - \frac{f_x^i - f_x^j}{f^i - f^j},$$

либо ввести потенциал $f^i = v_i - v$, что приводит к полудискретной цепочке Тоды

$$(v_j - v_i)_x = (v_j - v_i)(v_{ij} - v_j - v_i + v). \quad (9.21)$$

9.3 Решётка Менелая

Важным свойством уравнений типа Δ КР из раздела 9.1 является их 4D-совместность. Это свойство аналогично 3D-совместности квад-уравнений (см. разделы 1.2, 2.1) но имеет более сложную комбинаторику. Она будет прояснена здесь при помощи геометрической интерпретации уравнения (9.4). В следующем разделе для этого же уравнения и его непрерывного аналога будет предложена другая, более простая трактовка свойства 4D-совместности, показывающая, что это понятие всё же можно, в определённом смысле, свести к 3D-совместности.

Сам факт 4D-совместности уравнений (9.4) является следствием того, что эти уравнения служат условием совместности для линейных задач (9.1). Формальное определение свойства 4D-совместности, не апеллирующее к линейным задачам, приведено в следующей главе, где оно положено в основу классификации уравнений типа Δ КР.

Геометрический смысл линейных уравнений (9.1) очевиден. Если считать φ точкой в проективном пространстве, то они означают просто коллинеарность точек $\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ (уравнения (9.10) выражают то же самое в аффинной калибровке). Совместность этих линейных уравнений означает, что коллинеарны также тройки точек $(\varphi_1, \varphi_{12}, \varphi_{13})$, $(\varphi_2, \varphi_{12}, \varphi_{23})$ и $(\varphi_3, \varphi_{13}, \varphi_{23})$. Следовательно, образом октаэдра, несущего уравнение (9.4) или (9.12), является полный четырёхсторонник, или конфигурация Менелая (при этом четыре грани октаэдра отображаются в треугольники, а оставшиеся четыре в прямые конфигурации). Итак, можно дать следующее определение.

Определение 9.2. Отображение $\varphi : \mathbb{Z}^3 \rightarrow \mathbb{RP}^d$ называется решёткой Менелая, если, для каждого элементарного куба, точки $\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ коллинеарны.

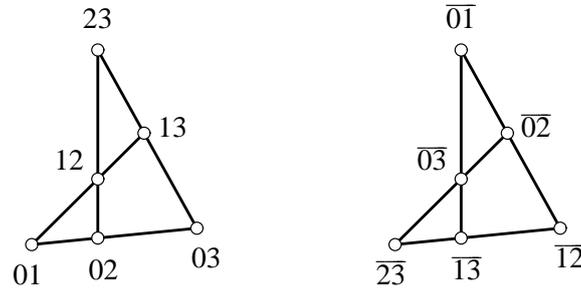


Рис. 9.1. Геометрическая интерпретация совместности линейных задач (9.10): конфигурация Менелая $(6_2 4_3)$. Два способа нумерации

Образ произвольного октаэдра решётки приведён на рис. 9.1 слева. Индекс 0 добавлен для единообразия, так чтобы все вершины имели двойной индекс (такие обозначения отвечают переходу от решётки \mathbb{Z}^3 к эквивалентной решётке $Q(A_3)$, см. раздел 10.2.2). При этом точки на каждой из прямых четырёхсторонника имеют один общий индекс. Поскольку в определении 9.2 положительные и отрицательные направления координатных осей неравноправны, сдвиг начала отсчёта в точку 0123 приводит к другому правилу расстановки индексов. Оно показано на рисунке справа, где для краткости принято обозначение $\varphi_{\bar{ij}} = \varphi_{-i,-j}$. Как видим, после этого сдвига на каждой из прямых четырёхсторонника один из индексов отсутствует.

Если мы теперь добавим ещё одно координатное направление, то из условия совместности линейных задач будет следовать, что на решётке \mathbb{Z}^4 должны сосуществовать четыре копии решётки Менелая. При этом условие 4D-совместности этих решёток формулируется так:

фигура, являющаяся образом трёх октаэдров, попарно смежных по граням, должна содержать образ ещё одного такого октаэдра.

На самом деле, из-за асимметрии координатных направлений приходится рассматривать две такие фигуры. Это две конфигурации, показанные на рис. 9.2 и отвечающие двум способам нумерации на рис. 9.1. При этом для левой конфигурации любые два четырёхсторонника имеют общий треугольник, а для правой общую сторону. Следует отметить, что левая конфигурация является тривиальной, в том смысле, что она не выражает никакой теоремы проективной геометрии, тогда как правая выражает знаменитую теорему Дезарга. Однако, это вовсе не означает, что свойство 4D-совместности эквивалентно именно теореме Дезарга. Важно лишь, что сформулированное выше условие выполняется для обеих конфигураций, а происходит ли это тривиальным образом или в силу какой-то теоремы инцидентности, неважно (в любом случае, это условие является следствием из теоремы Менелая, то есть, из условия совместности линейных задач). То, что мы имеем две фигуры с разной комбинаторикой, несколько обескураживает, но легко понять, что это обусловлено

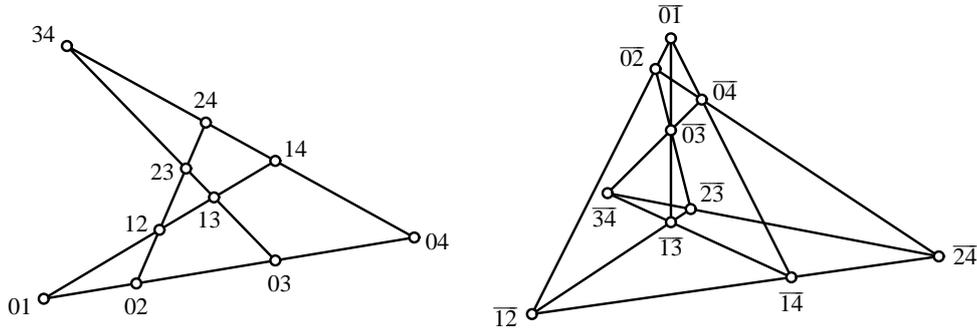


Рис. 9.2. Геометрическая интерпретация 4D-совместности уравнения (9.12): конфигурация $(10_2 \ 5_4)$ + конфигурация Дезарга $(10_3 \ 10_3)$

не асимметрией понятия 4D-совместности, а лишь асимметрией самой решётки Менелая. Более того, эта асимметрия проявляется лишь на уровне линейных задач, а отвечающие им нелинейные уравнения более симметричны. Например, уравнение (9.12) обладает полной симметрией октаэдра и выражает теорему Менелая при любом способе нумерации вершин четырёхсторонника.

Кроме того, легко заметить, что на самом деле обе конфигурации содержат по *пять* четырёхсторонников: добавляется четырёхсторонник с вершинами $(12, 13, 14, 23, 24, 34)$, хотя его существование и не было запланировано в свойстве 4D-совместности. В разделе 10.2.2 будет показано, что эта дополнительная внешняя симметрия является общим свойством 4D-совместных уравнений типа ΔKP , то есть применительно к ним имеет смысл говорить о совместных пятёрках уравнений.

9.4 Тангенциальное отображение

Понятие 4D-совместности (применительно к уравнениям типа ΔKP) можно сильно упростить и свести формально к 3D-совместности, если выделить одно из координатных направлений и рассматривать все отвечающие ему переменные как единый объект. Особенно наглядно это можно проделать в дифференциально-разностном варианте, когда выделенная координата отвечает параметру на кривой. При этом возникает отображение на множестве гладких плоских кривых, связанное с полудискретной цепочкой Тоды. В дискретном варианте возникает отображение на ломаных, связанное с уравнением (9.12) и представляющее собой некоторое альтернативное описание многомерной решётки Менелая.

9.4.1 Определение и 3D-совместность

Пусть даны гладкие плоские кривые C , C_1 и C_2 . Через произвольную точку r на кривой C проведём касательную, и пусть она пересекает C_1 в точке r_1 и C_2

в точке r_2 . Пусть касательные, проведённые через эти точки к соответствующим кривым пересекаются в точке r_{12} . При движении точки r по C точка r_{12} опишет новую кривую C_{12} . Тем самым определено локальное отображение

$$F : (C, C_1, C_2) \mapsto C_{12}$$

на множестве плоских кривых, которое и будет называться *тангенциальным отображением*. Слово “локальное” означает, что, во-первых, отображение определено не для всех троек кривых, поскольку касательная к C может не иметь пересечений с C_1 или C_2 , и следовательно, рассматриваются лишь такие кривые или части кривых, где данное построение осуществимо; во-вторых, отображение может быть многозначным, поскольку пересечений может быть несколько, в этом случае рассматривается какая-то отдельная ветвь отображения.

Ниже рассматриваются некоторые свойства тангенциального отображения. Оказывается, что оно достаточно просто связано с факторизацией дифференциальных операторов. В свою очередь, это позволяет установить связь с полудискретной $(\Delta\Delta D)$ цепочкой Тоды, и после редукции, уравнением Хироты $(\Delta\Delta)$. Одна из модификаций дискретного уравнения КР $(\Delta\Delta\Delta)$ возникает при рассмотрении дискретной версии тангенциального отображения.

Основным свойством тангенциального отображения является 3D-совместность. Это означает, что если стартовать с кривых C, C_1, C_2, C_3 и построить кривые $C_{ij} = F(C, C_i, C_j)$, то кривая C_{123} , построенная по тройке C_i, C_{ij}, C_{ik} будет одна и та же для любой перестановки i, j, k . Иными словами, верна следующая теорема (доказательство приводится в следующем подразделе).

Теорема 9.3. Тангенциальное отображение удовлетворяет (локальному) тождеству

$$\begin{aligned} C_{123} &= F(C_1, F(C, C_1, C_2), F(C, C_1, C_3)) \\ &= F(C_2, F(C, C_1, C_2), F(C, C_2, C_3)) \\ &= F(C_3, F(C, C_1, C_3), F(C, C_2, C_3)). \end{aligned} \tag{9.22}$$

Напомним, что комбинаторная структура тождества (9.22) представляется кубом, вершинам которого приписаны аргументы отображений (в данном случае ими служат кривые), тогда как сами отображения отвечают граням, см. рис. 1.4 слева. N -кратная итерация отображения ассоциируется с $(N+1)$ -мерным кубом. Понятие 3D-совместности подробно обсуждалось в главах 2, 4, в связи квад-уравнениями (поля в вершинах куба) и отображениями Янга-Бакстера (поля на рёбрах куба). Оба эти типа уравнений возникают как принцип нелинейной суперпозиции для преобразований Дарбу-Бэклунда и являются двумерными: две дискретные переменные отвечают сдвигам вдоль рёбер комбинаторного квадрата. В отличие от этого, тангенциальное отображение связано с трёхмерным уравнением: к двум дискретным переменным добавляется непрерывная, отвечающая параметру вдоль кривых. В дальнейшем мы увидим, что тангенциальное отображение можно описать и как отображение

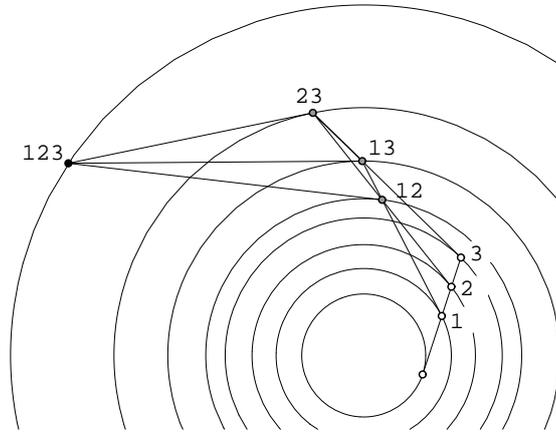


Рис. 9.3. 3D-совместность тангенциального отображения в простейшем случае концентрических окружностей

с полями в вершинах, и как отображение с полями на рёбрах, однако эти отображения являются не алгебраическими, а дифференциальными.

Ещё одно важное отличие связано с асимметрией тангенциального отображения: очевидно, что роли участвующих в нём кривых различны. В частности, если построение C_{ij} по C, C_i, C_j описывается дифференциальным рациональным отображением, то построение, например, C_j по C, C_i, C_{ij} требует квадратуры. Поэтому набор начальных данных C, C_i, C_j, C_k, \dots в данном случае удобнее, чем последовательность $C, C_i, C_{ij}, C_{ijk}, \dots$. Таким образом, на этом примере проявляется различие между 3D-совместностью и нелинейным представлением группы перестановок (1.20) или уравнением Янга-Бакстера (1.24). Приспосабливая к данному примеру терминологию из главы 4, можно сказать, что тангенциальное отображение не квадрационально.

Простейшими примерами, иллюстрирующими тангенциальное отображение и его 3D-совместность являются семейство концентрических окружностей (см. рис. 9.3) и семейство логарифмических спиралей с уравнениями $\rho_i = c_i e^{\gamma_i \varphi}$ в полярных координатах. То, что тангенциальное отображение не выводит за пределы данных семейств, ясно из инвариантности построения относительно поворотов и растяжений. Конкурентность трёх последних касательных сразу не очевидна. В этом примере можно дать и элементарное доказательство, но суть заключается в том, что эта конкурентность имеет место в гораздо более общей ситуации. В разделе 9.6 будет показано, что данный пример отвечает простейшему случаю факторизации дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами. Рис. 9.4 иллюстрирует красивое свойство логарифмической спирали (в отличие от предыдущего чертежа, этот содержит лишь точки из трёх поколений r, r_i, r_{ij} , то есть тройные пересечения прямых не показаны).

Теорема 9.4. Рассмотрим точки пересечения логарифмической спирали C и

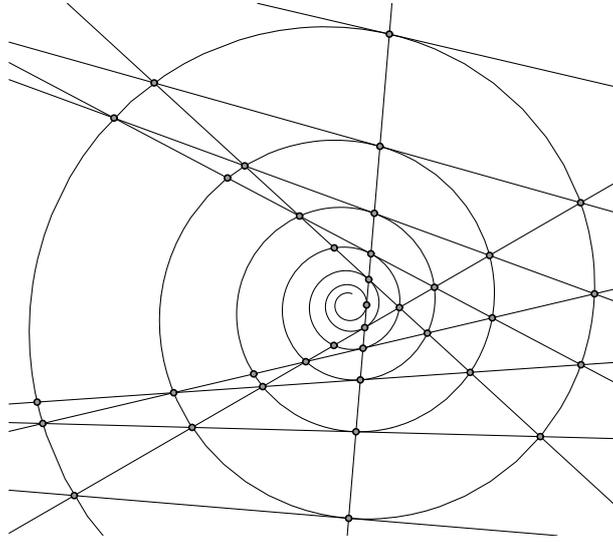


Рис. 9.4. Надгробная надпись Якоба I Бернулли “eadem mutata resurgo” означает, что логарифмическая спираль инвариантна по отношению к целому ряду геометрических преобразований. Тангенциальное отображение также сохраняет эту кривую.

её касательной. Касательные, проходящие через эти точки, пересекаются на этой же спирали. Иными словами, $F(C, C, C) = C$ для любой ветви отображения F .

9.4.2 Факторизация дифференциальных операторов

Пусть кривая C задана параметрически в виде $r = r(t)$, в аффинных координатах. Тогда точка пересечения её касательной с кривой C_i задаётся уравнением вида

$$r_i(t) = r(t) + a^i(t)\dot{r}(t), \quad \dot{r} := D(r) := \frac{dr}{dt} \quad (9.23)$$

с некоторым коэффициентом a^i (здесь и далее верхний индекс i помечает величины, ассоциированные с ребром CC_i комбинаторного куба). Это уравнение задаёт параметризацию кривой C_i . Оно играет роль вспомогательной линейной задачи для (одной ветви) тангенциального отображения. Кривая C_{ij} определяется из условия совместности

$$\begin{aligned} r_{ij} &= r_j + a_j^i \dot{r}_j = r + a^j \dot{r} + a_j^i D(r + a^j \dot{r}) \\ &= r_i + a_i^j \dot{r}_i = r + a^i \dot{r} + a_i^j D(r + a^i \dot{r}), \end{aligned}$$

где коэффициент a_j^i отвечает ребру $C_j C_{ij}$.

Приравнивая коэффициенты при линейно независимых векторах \dot{r}, \ddot{r} , получаем уравнения

$$a^j a_j^i = a^i a_i^j, \quad (1 + \dot{a}^j) a_j^i + a^j = (1 + \dot{a}^i) a_i^j + a^i, \quad (9.24)$$

которые можно разрешить в виде дифференциального отображения $(a^i, a^j) \mapsto (a_j^i, a_i^j)$

$$a_j^i = \frac{(a^i - a^j)a^i}{a^i - a^j + a^i \dot{a}^j - \dot{a}^i a^j}. \quad (9.25)$$

Эта формула определяет действие тангенциального отображения на коэффициентах a . Альтернативно, согласно первому из уравнений (9.24), можно ввести потенциал v по формуле $a^i = v/v_i$, тогда второе уравнение записывается, как дифференциальное отображение $f : (v, v_i, v_j) \mapsto v_{ij}$,

$$v_{ij} = \frac{v_i v_j}{v} + \frac{\dot{v}_i v_j - v_i \dot{v}_j}{v_j - v_i}. \quad (9.26)$$

Свойство 3D-совместности формулируется в терминах переменных a как коммутативность операторов $T_i : a^j \rightarrow a_j^i$, определяющих сдвиг вдоль рёбер CC_i :

$$T_i T_j (a^k) = T_j T_i (a^k), \quad (9.27)$$

а в терминах переменных v как тождество типа (9.22):

$$\begin{aligned} v_{123} &= f(v_1, f(v, v_1, v_2), f(v, v_1, v_3)) \\ &= f(v_2, f(v, v_1, v_2), f(v, v_2, v_3)) \\ &= f(v_3, f(v, v_1, v_3), f(v, v_2, v_3)). \end{aligned} \quad (9.28)$$

Оба тождества можно доказать прямым вычислением, хотя и достаточно трудоёмким. Его можно избежать следующим рассуждением.

Доказательство теоремы 9.3. Выписанное выше условие совместности эквивалентно равенству

$$(1 + a_j^i D)(1 + a^i D) = (1 + a_j^i D)(1 + a^j D), \quad (9.29)$$

то есть определение тангенциального отображения сводится к восстановлению обыкновенного дифференциального оператора второго порядка по его ядру, при условии единичности свободного члена, что эквивалентно аффинной нормировке. Рассмотрим дифференциальный оператор

$$A = (1 + T_i(a_j^k)D)(1 + a_j^i D)(1 + a^i D)$$

отвечающий одному из трёх способов вычисления r_{ijk} . Согласно (9.29), A делится справа не только на $1 + a^i D$, но также и на $1 + a^j D$. Кроме того, два левых множителя в A можно переписать, опять согласно (9.29), как $(1 + T_i(a_k^j)D)(1 + a_i^k D)$, то есть оператор A не меняется при перестановке j и k . Но тогда он делится справа также на $1 + a^k D$. Следовательно, ядро A инвариантно относительно любой перестановки индексов. Так как дифференциальный оператор однозначно определяется по ядру (с точностью до скалярного множителя, который в данном случае фиксируется аффинной нормировкой), то и сам оператор A инвариантен относительно перестановок. \square

Теперь ясно, что N -кратному тангенциальному отображению отвечает дифференциальный оператор порядка N , делящийся справа на операторы $1 + a^i D$, $i = 1, \dots, N$. Это немедленно приводит к вронскианной формуле (для каждой из двух декартовых компонент r)

$$r_{1,2,\dots,N} = \frac{\det \begin{pmatrix} r & \varphi_1 & \varphi_2 & \dots & \varphi_N \\ \dot{r} & \dot{\varphi}_1 & \dot{\varphi}_2 & \dots & \dot{\varphi}_N \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ D^N(r) & D^N(\varphi_1) & D^N(\varphi_2) & \dots & D^N(\varphi_N) \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} \dot{\varphi}_1 & \dot{\varphi}_2 & \dots & \dot{\varphi}_N \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ D^N(\varphi_1) & D^N(\varphi_2) & \dots & D^N(\varphi_N) \end{pmatrix}}$$

где $a^i = -\varphi_i/\dot{\varphi}_i$.

Ясно, что уравнения (9.25), (9.26) интерпретируются как 3-мерные уравнения на $\mathbb{Z}^2 \times \mathbb{R}$, с полями a отвечающими рёбрам решётки и v отвечающими вершинам.

Замечание 9.5. Более простые отображения такого типа получаются при факторизации операторов, нормированных условием единичности главного члена:

$$(D - f_i^j)(D - f_i) = (D - f_j^i)(D - f_j),$$

что эквивалентно

$$(T_i - 1)(f^j) = (T_j - 1)(f^i), \quad \dot{f}^i - \dot{f}^j = f_i f_i^j - f_j^i f_j$$

и приводит к отображениям

$$f_j^i = f^i + \frac{\dot{f}^i - \dot{f}^j}{f^i - f^j} \tag{9.30}$$

и (после подстановки $f^i = v_i - v$)

$$v_{ij} = v_i + v_j - v + \frac{\dot{v}_i - \dot{v}_j}{v_i - v_j}$$

Очевидно, это есть не что иное, как полудискретная цепочка Тоды (9.21).

В заключение, рассмотрим несколько простейших примеров тангенциального отображения.

Пример 9.6 (логарифмические спирали). В этом примере удобно использовать комплексные обозначения, полагая $r = e^{(\gamma+i)t}$ (случай $\gamma = 0$ отвечает окружности). Тогда имеем $r_k = r + a^k \dot{r} = (1 + \gamma a^k + i a^k) e^{(\gamma+i)t}$ и эти кривые гомотетичны исходной, если и только если коэффициенты a^k постоянны. Отображение (9.25) на постоянные коэффициенты действует тождественно:

$a_j^k = a^k$, следовательно, тангенциальное отображение сводится к композиции поворота и растяжения

$$r_{jk} = (1 + \gamma a^j + i a^j)(1 + \gamma a^k + i a^k)r$$

что сохраняет семейство рассматриваемых кривых. N -кратное отображение задаётся аналогичной явной формулой, так что этот пример можно считать тривиальным. Уже здесь видно, что установленное соответствие между тангенциальным отображением и дифференциальными операторами не является взаимно-однозначным и зависит от выбора начальной кривой и её параметризации. Отображения, отвечающие одним и тем же операторам (то есть, с одинаковыми коэффициентами a) можно считать локально эквивалентными, но глобальная картина может быть весьма различной. Например, тангенциальное отображение имеет четыре ветви в случае концентрических окружностей (вещественных, если радиус C меньше радиусов C_1, C_2) и бесконечное число ветвей в случае логарифмических спиралей.

Чтобы получить авто-отображение, показанное на рис.9.4, следует наложить дополнительную связь $r_k(t) = r(t + \delta_k)$ (тогда $r_{jk}(t) = r(t + \delta_j + \delta_k)$, $r_{jkl}(t) = r(t + \delta_j + \delta_k + \delta_l)$ и т.д.), то есть

$$e^{(\gamma+i)(t+\delta_k)} = (1 + \gamma a^k + i a^k)e^{(\gamma+i)t}.$$

Отсюда следует, что δ_k есть корни трансцендентного уравнения

$$\cos \delta - \gamma \sin \delta = \exp(-\gamma \delta),$$

а коэффициенты a^k выражаются по формуле

$$a^k = \exp(\gamma \delta_k) \sin \delta_k.$$

Отсюда можно вывести, что граница области, свободной от прямых на рис. 9.4 аппроксимируется параболой. Численные значения для этого чертежа равны $\gamma = 0.1$, $\delta_1 = 5.24$, $\delta_2 = 7.25, \dots$

Пример 9.7 (периодические коэффициенты). Предыдущий пример подсказывает, что рисунок с хорошим глобальным поведением кривых можно получить, если начальной кривой по прежнему является окружность $r = e^{it}$, а коэффициенты $a^k(t)$ являются почти постоянными функциями с периодом, соизмеримым с π . Например, левый чертёж на рис. 9.5 отвечает

$$a^1 = 1 + \frac{1}{5} \cos \frac{3}{2}t, \quad a^2 = 2 + \frac{1}{10} \cos \left(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{4} \right).$$

Правый чертёж отвечает выбору

$$a^1 = 4 + \sin t, \quad a^2 = 4 + \cos t,$$

здесь тангенциальное отображение приводит к кривым с острями.

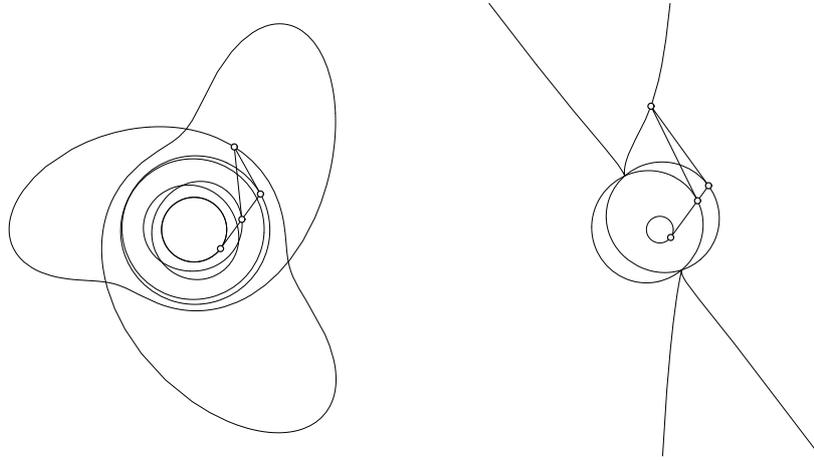


Рис. 9.5. Примеры тангенциального отображения

9.4.3 Локсодромическая редукция

Будем говорить, слегка расширяя общепринятую терминологию, что кривая \tilde{C} является *локсодромой* для заданной кривой C , если она пересекает касательные к C под постоянным углом γ (изогональная траектория для семейства касательных; в частности, если $\gamma = \pi/2$, то \tilde{C} является эвольвентой C).

Приведённая ниже теорема 9.8 демонстрирует, что тангенциальное отображения сохраняет этот тип соотношений между кривыми (см. рис. 9.6). Прежде чем переходить к доказательству, удобно ввести параметр на кривой C согласно уравнениям

$$\dot{r} = y(t)\tau, \quad \dot{t} = \nu, \quad \dot{\nu} = -\tau \tag{9.31}$$

где τ, ν единичные векторы касательной и нормали. Очевидно, функция y равна радиусу кривизны, и связь с натуральной параметризацией длиной дуги $r = r(s)$ задаётся формулами

$$y(t(s)) = 1/\kappa(s), \quad dt = \kappa(s)ds.$$

Такой выбор параметризации обусловлен тем, что её вид сохраняется и для кривой \tilde{C} . Действительно, рассмотрим уравнение точки на этой кривой $\tilde{r} = r + a\dot{r} = r + ay\tau$, тогда

$$\dot{\tilde{r}} = (y + D(ay))\tau + ay\nu$$

и так как \tilde{r} образует с τ постоянный угол γ (для определённости, отложенный в направлении нормали ν), то

$$y + D(ay) = ay \cot \gamma. \tag{9.32}$$

В силу этой связи выполняются равенства

$$\dot{\tilde{r}} = \tilde{y}\tilde{\tau}, \quad \dot{\tilde{t}} = \tilde{\nu}, \quad \dot{\tilde{\nu}} = -\tilde{\tau},$$

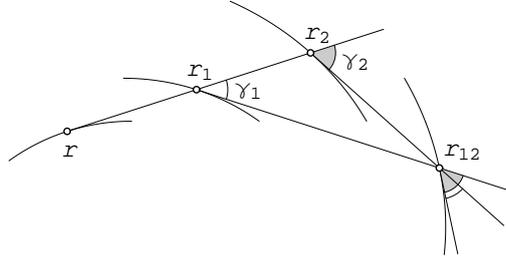


Рис. 9.6. Локсодромическая редукция тангенциального отображения

где

$$\tilde{y} = \frac{ay}{\sin \gamma}, \quad \tilde{\tau} = \tau \cos \gamma + \nu \sin \gamma, \quad \tilde{\nu} = \nu \cos \gamma - \tau \sin \gamma.$$

Итак, мы показали, что выбор t в качестве параметра приводит к уравнениям вида (9.31) также для локсодромы \tilde{C} . Если функция y задана, то связь (9.32) служит определяющим уравнением для коэффициента a , и по любому его решению строится локсодрома.

Теорема 9.8. Пусть кривые C_i и C_j пересекают касательные к кривой C под постоянными углами γ_i и γ_j соответственно, $\gamma_i \neq \gamma_j$. Тогда кривая $C_{ij} = F(C, C_i, C_j)$ пересекает касательные к C_i под углом γ_j и касательные к C_j под углом γ_i .

Доказательство. Примем для кривой C параметризацию (9.31). Тогда, как было показано, параметры a^k тангенциального отображения и отвечающие локсодромам функции y_k связаны соотношениями

$$y + D(a^k y) = a^k y \cot \gamma_k, \quad y_k = \frac{a^k y}{\sin \gamma_k}, \quad k = i, j.$$

Легко проверить, что в силу этих связей тангенциальное отображение (9.25) принимает вид

$$a_j^i = \frac{a^i/a^j - 1}{\cot \gamma_j - \cot \gamma_i}$$

и, кроме того, выполняется тождество

$$y_j + D(a_j^i y_j) = a_j^i y_j \cot \gamma_i,$$

то есть функции y_j и a_j^i подчиняются связи (9.32). Но это и означает, что кривая C_{ij} служит локсодромой для C_j , отвечающей углу γ_i . \square

Формулировка доказанной теоремы напоминает теорему 1.1 о перестановочности преобразований Дарбу. Однако, из доказательства ясно, что в нашем

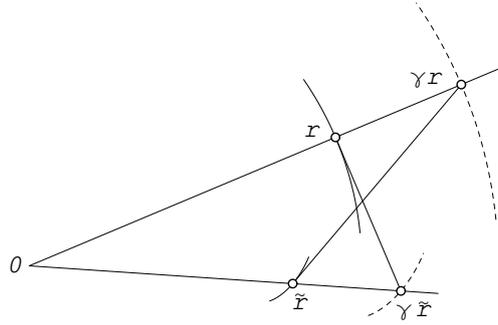


Рис. 9.7. Тангенциальное соответствие

случае ситуация более простая: действительно, преобразования Дарбу сводятся к решению уравнений Риккати, тогда как построение локсодромы требует, согласно (9.32), простой квадратуры. Принцип суперпозиции рассматриваемых преобразований оказывается линейным:

$$\sin(\gamma_i - \gamma_j)y_{ij} = \sin(\gamma_i)y_i - \sin(\gamma_j)y_j.$$

Настоящее преобразование Дарбу, приводящее к нелинейному принципу суперпозиции, возникает при редукции из следующего примера.

9.4.4 Редукция к преобразованию Дарбу

Пусть H_γ гомотетия с коэффициентом $\gamma \neq 1$ относительно фиксированной точки плоскости (начала координат). Будем говорить, что кривые C, \tilde{C} находятся в *тангенциальном соответствии* с параметром γ , если касательная к кривой C в любой точке r пересекает $H_\gamma(\tilde{C})$ в точке $H_\gamma(\tilde{r})$, такой что касательная к \tilde{C} в точке \tilde{r} пересекает $H_\gamma(C)$ в $H_\gamma(r)$ (см. рис. 9.7).

Как и в примере с локсодромами, это понятие определяет некоторую редукцию тангенциального отображения, которую удобнее изучать при некоторой специальной параметризации кривых. Точки на кривых C, \tilde{C} связаны уравнениями вида

$$\gamma \tilde{r}(t) = r(t) + a(t)\dot{r}(t), \quad \gamma r(t) = \tilde{r}(t) + b(t)\dot{\tilde{r}}(t),$$

откуда следует, что вектор-функции $r(t), \tilde{r}(t)$ удовлетворяют линейным ОДУ второго порядка

$$\begin{aligned} ab\ddot{r} + (\dot{a}b + a + b)\dot{r} + (1 - \gamma^2)r &= 0, \\ ab\ddot{\tilde{r}} + (a\dot{b} + a + b)\dot{\tilde{r}} + (1 - \gamma^2)\tilde{r} &= 0. \end{aligned}$$

Отношение первого и последнего коэффициентов в этих уравнениях одно и то же для r и \tilde{r} , то есть, оно является инвариантом тангенциального соответ-

ствия. Удобно использовать параметризацию, в которой это отношение постоянно. Пусть

$$\lambda ab = 1 - \gamma^2, \quad \lambda = (1 - \gamma^2)\mu,$$

тогда уравнения принимают вид

$$\ddot{r} + u\dot{r} + \lambda r = 0, \quad \ddot{\tilde{r}} + \tilde{u}\dot{\tilde{r}} + \lambda\tilde{r} = 0 \quad (9.33)$$

где функции u, \tilde{u} связаны с коэффициентом a посредством пары уравнений Риккати

$$\dot{a} + 1 - ua + \mu a^2 = 0, \quad -\dot{a} + 1 - \tilde{u}a + \mu a^2 = 0.$$

Первое из них линеаризуется подстановкой $a = -\phi/\dot{\phi}$, приводящей к уравнению $\ddot{\phi} + u\dot{\phi} + \mu\phi = 0$. Таким образом, кривая \tilde{C} строится при помощи частного скалярного решения дифференциального уравнения для исходной кривой C , при значении параметра $\lambda = \mu$. Это и означает, что тангенциальное соответствие есть не что иное, как пример преобразования Дарбу.

Теорема 9.9. Пусть кривая C находится в тангенциальном соответствии с кривыми C_i, C_j , с параметрами γ_i, γ_j соответственно, при $\gamma_i \neq \gamma_j$. Тогда существует единственная кривая C_{ij} , находящаяся в тангенциальном соответствии с кривыми C_i, C_j , с переставленными параметрами γ_j, γ_i . При этом

$$H_{\gamma_i\gamma_j}(C_{ij}) = F(C, H_{\gamma_i}(C_i), H_{\gamma_j}(C_j)).$$

Доказательство. Непосредственно из определений тангенциального отображения и тангенциального соответствия следует, что если кривая C_{ij} существует, то она единственна и определяется приведённой формулой. Таким образом, нужно только доказать, что эта кривая действительно находится в тангенциальном соответствии с C_i, C_j . Для этого используются соотношения

$$\dot{a}^k + 1 = ua^k - \mu_k(a^k)^2, \quad u_k = -u + 2\mu_k a^k + \frac{2}{a^k}, \quad k = i, j.$$

Легко проверить, что в силу этих связей формула (9.25) принимает алгебраическую форму

$$a_j^i = \frac{a^i - a^j}{a^j(\mu_i a^i - \mu_j a^j)}, \quad (9.34)$$

и, что коэффициент $A = a_j^i$ тождественно удовлетворяет уравнению Риккати

$$\dot{A} + 1 - u_j A + \mu_i A^2 = 0.$$

Это означает, что кривые C_{ij}, C_j находятся в тангенциальном соответствии с параметром γ_i . \square

Отметим, что уравнение (9.33) для r определяет спектральную задачу для уравнения sinh-Гордона, отображение (9.34) это отображение (\tilde{F}_{III}), а подстановка $a^i = v/v_i$, $u = 2\dot{v}/v$ приводит к уравнению

$$v_{ij}(v_j - v_i) = v(\mu_i v_j - \mu_j v_i)$$

эквивалентному уравнению Хироты (H_3^0).

Замечание 9.10. Аналогично, отображение (9.30) допускает редукцию

$$\dot{f}^k = u - \alpha_k - (f^k)^2, \quad u_k = -u + 2\alpha_k + 2(f^k)^2,$$

приводящую к отображению (\tilde{F}_V)

$$f_j^i = -f^j - \frac{\alpha_i - \alpha_j}{f^i - f^j},$$

определяющему принцип суперпозиции (1.27) преобразований Дарбу для оператора Шрёдингера.

9.4.5 Дискретное тангенциальное отображение

Для дискретных кривых $r = r(n)$ аналог уравнения (9.23) имеет вид

$$r_i = r + a^i(T - 1)(r), \quad T : n \mapsto n + 1 \quad (9.35)$$

(в отличие от непрерывного случая, где кривые C и C_i выбирались независимо, здесь точка $r_i(n)$ кривой C_i должна, по определению, лежать на прямой $r(n)r(n + 1)$, играющей роль дискретной касательной к кривой C). Условие совместности уравнений такого вида

$$\begin{aligned} r_{ij} &= (1 + a_j^i(T - 1))(1 + a^j(T - 1))(r) \\ &= (1 + a_i^j(T - 1))(1 + a^i(T - 1))(r) \end{aligned}$$

приводит к соотношениям

$$T(a^j)a_j^i = T(a^i)a_i^j, \quad (1 - a^j)a_j^i + a^j = (1 - a^i)a_i^j + a^i,$$

из которых следует дискретный аналог тангенциального отображения (9.25):

$$T_j(a^i) = a_j^i = \frac{(a^i - a^j)T(a^i)}{(1 - a^j)T(a^i) - (1 - a^i)T(a^j)}. \quad (9.36)$$

Подстановка $a^i = T(v)/v_i$ приводит к аналогу отображения (9.26):

$$f : (v, v_i, v_j) \mapsto v_{ij} = \frac{v_i v_j T(v_j - v_i)}{T(v)(v_j - v_i)} + \frac{T(v_i)v_j - v_i T(v_j)}{v_j - v_i}. \quad (9.37)$$

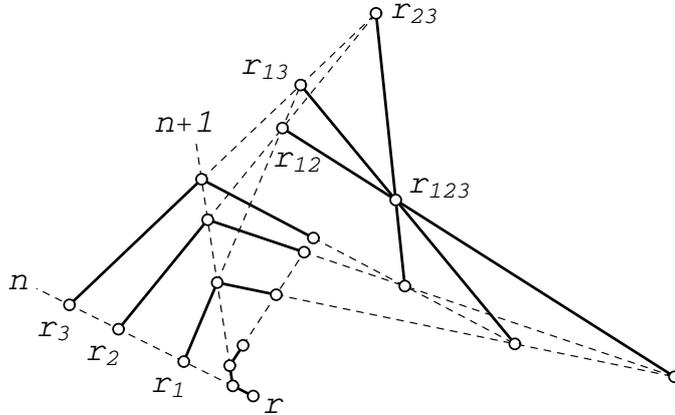


Рис. 9.8. 3D-совместность дискретного тангенциального отображения

Это уравнение можно переписать в симметричной форме

$$\frac{T(v_j - v_i)}{T(v)} + \frac{T(v_i) - v_{ij}}{v_i} + \frac{v_{ij} - T(v_j)}{v_j} = 0, \quad (9.38)$$

из которой видно, что сдвиг T фактически равноправен с T_i и T_j .

Нетрудно видеть, что по существу геометрия дискретного тангенциального отображения совпадает с геометрией решётки Менелая из раздела 9.3. Действительно, с точностью до обозначений уравнение (9.35) совпадает с линейной задачей (9.10), а уравнение (9.38) с уравнением (9.4). Точки

$$r_i, r_j, r_{ij}, T(r), T(r_i), T(r_j)$$

служат вершинами полного четырёхсторонника и подчиняются теореме Менелая, ср. рис. 9.8 и 9.1.

Свойство 3D-совместности отображений (9.36) и (9.37) формулируется при помощи общих тождеств (9.27), (9.28). Доказательство теоремы 9.3 переносится на дискретный случай почти дословно. Ясно, что 3D-совместность исходных тангенциальных отображений (9.25) и (9.26) может быть заново выведена отсюда при помощи естественного непрерывного предела.

Имеется также простое геометрическое доказательство свойства 3D-совместности¹: треугольники $r_{12}(n)r_{13}(n)r_{23}(n)$ и $r_{12}(n+1)r_{13}(n+1)r_{23}(n+1)$ перспективны относительно прямой $r(n+1)r(n+2)$ (помеченной $n+1$ на рис. 9.8), следовательно, согласно теореме Дезарга, прямые $r_{12}(n)r_{12}(n+1)$, $r_{13}(n)r_{13}(n+1)$ и $r_{23}(n)r_{23}(n+1)$ конкуррентны, что и требуется доказать.

Отметим, что рис. 9.8 показывает, как стыкуются обе конфигурации $(10_2 5_4)$ и $(10_3 10_3)$, изображённые на рис. 9.2.

¹принадлежащее Вольфгангу Шифу

9.4.6 Отображения высших порядков

Уравнение (9.23) позволяет распространить определение тангенциального отображения на кривые в пространстве произвольной размерности, при этом кривые C_i должны лежать на линейчатой поверхности, образованной касательными к базовой кривой C . Более общая возможность связана с рассмотрением соприкасающихся подпространств вместо касательных. Именно, уравнение (9.23) можно заменить на

$$r_i(t) = r(t) + a^{1,i}(t)\dot{r}(t) + \dots + a^{m,i}(t)D^m(r(t)),$$

для кривых в пространстве размерности большей или равной $2m$. В дискретном случае имеем аналогично

$$r_i(n) = r(n) + a^{1,i}(n)(r(n+1) - r(n)) + \dots + a^{m,i}(n)(r(n+m) - r(n)).$$

Нетрудно показать, что условие совместности $T_j T_i(r) = T_i T_j(r)$ эквивалентно системе из $2m$ уравнений, которая может быть разрешена в виде дифференциального либо разностного отображения

$$(a^{1,i}, \dots, a^{m,i}, a^{1,j}, \dots, a^{m,j}) \mapsto (a_j^{1,i}, \dots, a_j^{m,i}, a_i^{1,j}, \dots, a_i^{m,j}),$$

с производными либо сдвигами вплоть до m -го порядка. Эти отображения 3D-совместны, что доказывается рассуждениями, аналогичными рассмотренному выше случаю $m = 1$. К сожалению, уже при $m = 2$ эти отображения слишком громоздки, чтобы выписывать их в явном виде. Редукции, понижающие их порядок или число полей пока неизвестны.

Комментарии к главе 9

Раздел 9.4 основан на работе Адлера [14].

▷ Уравнение ΔКР (9.7) появилось в работе Хироты [88]. Его вывод из линейных задач, приведённый в разделе 9.1, очень хорошо известен, также как и все указанные там модификации и разностные подстановки, а также связь с непрерывными уравнениями из раздела 9.2, см. напр. книгу [117], работы Богданова, Конопельченко [46, 47, 48], Ниммо [134] и Конопельченко, Шифа [96].

▷ Уравнение КР (9.17) появилось в работе Кадомцева и Петвиашвили [92], его интегрируемость установлена в статьях Дрюмы [64] и Захарова, Шабата [195].

▷ Двумеризованная цепочка Тоды (9.19) была впервые введена Дарбу при развитии теории каскадного метода Лапласа. Её интегрируемость установлена в работе Михайлова [122], к которой восходит и приведённый здесь вывод из линейных задач (9.18). Заметим кстати, что исконно русский термин “двумеризованная” как нельзя лучше передаёт характер 3D-совместности протяжённых объектов (кривых или дискретных кривых) из раздела 9.4.

▷ Полудискретная цепочка Тоды (9.21) была введена в работе Леви, Пиллони и Сантини [109]. Цепочки для дискретных и полудискретных инвариантов Лапласа рассматривались также в работах Новикова, Дынникова [137] и Адлера, Старцева [26].

▷ В работе Кричевера, Липана, Вигмана и Забродина [100] установлены важные приложения Δ КР к квантовым интегрируемым моделям.

▷ Геометрии интегрируемых дискретных уравнений посвящена богатая литература, прекрасный обзор которой можно найти в книге Бобенко и Суриса [45]. Здесь мы отметим лишь немногие работы в этой области.

Решётка Менелая введена в статье [96], см. также работы Шифа [152] и Кинга, Шифа [95]. Она известна также как решётка Лапласа-Дарбу. Альтернативная геометрическая интерпретация уравнений имеется у Доливы [57]. Отметим, что свойство 4D-совместности решётки Менелая в этих работах ещё не обсуждается; понимание свойства совместности для уравнений типа (9.37) является сравнительно недавним достижением, ещё не отражённым в литературе. Поэтому, раздел 9.3, хотя и не содержит по существу никаких результатов, важен в качестве подготовительного этапа к определению совместности в следующей главе.

Для сравнения, следует упомянуть планарные решётки, связанные с линейными задачами на квадратах в \mathbb{Z}^2 , вместо треугольников, как в (9.1). Хотя такие решётки являются более общими, чем решётка Менелая, понятие 4D-совместности для них проще и нагляднее. Оно было введено в работе Доливы и Сантини [61], отметим также статью Конопельченко и Шифа [97]. Вклад автора в теорию планарных решёток ограничивается работой [12].

▷ Пятерная симметрия конфигурации Дезарга, отмеченная в разделе 9.3, является хорошо известным фактом, см. напр. книгу Гильберта и Кон-Фоссена [84].

Глава 10

Классификация интегрируемых уравнений типа Δ КР

В этой главе определение интегрируемости дискретных уравнений, основанное на понятии 4D-совместности, применяется для классификации уравнений типа дискретного уравнения Кадомцева-Петвиашвили. Доказывается, при весьма общих и естественных предположениях, что такие уравнения исчерпываются самим уравнением Δ КР и его модификациями.

10.1 4D-совместность

10.1.1 Классификационный результат

В главе 2 было показано, что свойство 3D-совместности для двумерных квад-уравнений, принятое в качестве определения интегрируемости, позволяет получить их классификацию (правда, при ряде дополнительных предположений). Здесь нашей целью будет получение аналогичного результата в трёх-мерном случае, а именно, для уравнений типа Δ КР

$$\Phi(u_1, u_2, u_3, u_{12}, u_{13}, u_{23}) = 0.$$

Прежде всего, следует придать точный смысл понятию 4D-совместности для таких уравнений, объяснив, как именно решётки, несущие трёхмерные уравнения, должны вкладываться в 4-мерную решётку. Примеры из предыдущей главы подводят к следующему определению.

Определение 10.1. Тройка трёхмерных дискретных уравнений в \mathbb{Z}^4 , вида

$$\begin{aligned} u_{12} &= f(u_1, u_2, u_4, u_{14}, u_{24}), \\ u_{13} &= g(u_1, u_3, u_4, u_{14}, u_{34}), \\ u_{23} &= h(u_2, u_3, u_4, u_{24}, u_{34}), \end{aligned} \tag{10.1}$$

называется 4D-совместной, если равенства

$$\begin{aligned} u_{123} &:= f(g, h, u_{34}, T(g), T(h)) \\ &= g(f, h, u_{24}, T(f), T(h)) \\ &= h(f, g, u_{14}, T(f), T(g)), \end{aligned} \quad (10.2)$$

где $T = T_4$, выполняются тождественно по независимым переменным вида $T^k(u)$, $T^k(u_1)$, $T^k(u_2)$, $T^k(u_3)$.

На первый взгляд, это определение кажется странным, поскольку 4-е координатное направление играет в нём выделенную роль, и рассматривается совместность не четырёх, а только трёх уравнений. Фактически, это определение по смыслу очень близко к определению 3D-совместности для квад-уравнений (ср. с формулой (2.4)) и отличается только тем, что в качестве поля для уравнений (10.1) принимается не одна переменная u , а сразу вся совокупность $T^k(u)$.

Наглядным примером, мотивирующим такое понимание совместности, служит тангенциальное отображение из раздела 9.4.1. Для него в качестве поля выступает гладкая кривая, то есть 4-я координата параметризует точки на кривой, тогда как остальные координаты нумеруют сами кривые. Несмотря на такое различие, в разделе 9.4.5 мы видели, что в дискретной версии тангенциального отображения 4-я координата на самом деле равноправна с остальными, см. формулу (9.38). Это означает, что в этом примере тройку (10.1) можно дополнить ещё одним уравнением, заданным на подрешётке \mathbb{Z}^3 с координатами $(1, 2, 3)$. Более того, анализ решётки Менелая из раздела 9.3 показывает, что при этом автоматически возникает ещё и пятое уравнение (на некоторой “наклонной” подрешётке в \mathbb{Z}^4).

В теореме 10.5 будет доказано, что эти свойства имеют общий характер: если уравнения (10.1) совместны, то автоматически выполняются также некоторые уравнения вида

$$K(u_1, u_2, u_3, u_{12}, u_{13}, u_{23}) = 0, \quad L(u_{12}, u_{13}, u_{14}, u_{23}, u_{24}, u_{34}) = 0. \quad (10.3)$$

Таким образом, определение 10.1 обладает высокой скрытой симметрией и можно говорить о совместных пятёрках уравнений типа $\Delta\text{КР}$.

Относительно всех рассматриваемых уравнений, как из исходной тройки (10.1), так и дополнительных (10.3), будет предполагаться лишь, что они представляются в виде $\Phi = 0$, где функция Φ локально-аналитична и выполняется условие невырожденности:

$$\Phi_u \neq 0 \text{ на любом решении общего положения уравнения } \Phi = 0, \text{ где } u \text{ любой аргумент функции } \Phi.$$

Эффективно, это условие означает, что уравнение можно локально разрешить относительно любой переменной, причём результат будет зависеть от каждой из остальных переменных.

Основным классификационным результатом является следующая теорема.

$$u_{ij}u_k - u_{ik}u_j + u_{jk}u_i = 0 \quad (\chi_1)$$

$$\frac{(u_i - u_{ij})(u_j - u_{jk})(u_k - u_{ik})}{(u_{ij} - u_j)(u_{jk} - u_k)(u_{ik} - u_i)} = -1 \quad (\chi_2)$$

$$(u_{ik} - u_{ij})u_i + (u_{ij} - u_{jk})u_j + (u_{jk} - u_{ik})u_k = 0 \quad (\chi_3)$$

$$\frac{u_{ik} - u_{ij}}{u_i} + \frac{u_{ij} - u_{jk}}{u_j} + \frac{u_{jk} - u_{ik}}{u_k} = 0 \quad (\chi_4)$$

$$\frac{u_{ik} - u_{jk}}{u_k} = u_{ij} \left(\frac{1}{u_j} - \frac{1}{u_i} \right) \quad (\chi_5)$$

Список 10.1. 4D-совместные уравнения типа Δ КР

Теорема 10.2. Любое уравнение из 4D-совместной пятёрки (10.1), (10.3) невырожденных нелинейных уравнений сводится, точечными заменами, к одному из уравнений списка 10.1.

В этой теореме не уточняется, какое уравнение с каким совместно. Более точная формулировка, в которой перечисляются все возможные наборы, приведена далее в теореме 10.24. Впрочем, вопрос о структуре иерархии легко решается, так как из списка видно, что он не выводит за пределы раздела 9.1 о линейных задачах на треугольниках. В каком-то смысле, это разочаровывает, поскольку довольно длинные, хотя и элементарные, рассуждения приводят в конце концов к списку, состоящему всего из нескольких простых и хорошо известных примеров (фактически, эквивалентных одному уравнению). Однако, отсутствие новых примеров не следует расценивать, как неудачу. Оно отражает тот общий факт, что трёхмерные уравнения являются фундаментальными, а условия интегрируемости для них жёстче, чем для двумерных.

Подчеркнём, что список 10.1 получен при гораздо более общих предположениях, чем список квад-уравнений 2.1: в трёхмерном случае отпадает необходимость в дополнительных условиях типа аффинно-линейности и симметрии (хотя в ответе эти свойства выполняются). Мы оставляем только наиболее естественные предположения о невырожденности и трансляционной инвариантности рассматриваемых уравнений. Последнее условие выражено тем, что в формуле (10.2) внешние функции те же, что и внутренние. На самом деле, этим свойством не так-то просто воспользоваться, и часть утверждений будет доказываться фактически в более общей постановке. Мы вспомним об этом условии лишь на последнем этапе классификации, в разделе 10.4.2.

Следует отметить ещё, что уравнение (9.9) выпадает из классификации. Это объясняется тем, что замена (9.8) портит вид совместных с ним урав-

нений в остальных трёхмерных подрешётках (они уже не являются октаэдрическими). Таким образом, определение 4D-совместности в данном случае не покрывает все интегрируемые уравнения. Однако, этот контрпример не очень показателен, так как он всё же сводится к уравнениям из списка, что, собственно, и означает его интегрируемость. Существуют ли уравнения типа $\Delta\text{КР}$, интегрируемые в каком-то принципиально ином смысле, остаётся открытым вопросом.

План данной главы следующий. Оставшаяся часть этого раздела посвящена разбору двух примеров, дающих дополнительную мотивировку определения 10.1.

В разделе 10.2 будут получены первые следствия из определения 10.1. Одно из них, как уже сказано, приводит к замене тройки уравнений (10.1) на пятёрку, то есть демонстрирует внешнюю симметрию совместных уравнений типа $\Delta\text{КР}$. Второй результат отражает их внутреннюю симметрию. Оказывается, что все такие уравнения должны обладать некоторой специфической структурой — трёхногой формой, несколько напоминающей трёхногую форму квад-уравнений из раздела 2.3.

Последний вывод очень важен, поскольку позволяет перейти от анализа условия совместности к анализу этой специальной структуры. Иными словами, оказывается возможным заняться одним уравнением вместо тройки (10.1), что и делается в разделе 10.3. Это довольно длинный и технический раздел, но его результатом является уже почти полное решение задачи: вид уравнений определяется с точностью до функций от одной переменной.

Завершение классификации происходит в разделе 10.4, где от одного уравнения мы снова переходим к анализу совместной пятёрки уравнений.

10.1.2 Предел из $\Delta\text{ВКР}$

Вспомним, что для двумерных уравнений, связывающих поля в вершинах квадрата, 3D-совместность определяется для тройки уравнений, отвечающих парам противоположных граней куба. Увеличивая размерности на единицу, мы приходим к уравнениям, связывающим поля в вершинах куба:

$$\Phi(u, u_1, u_2, u_3, u_{12}, u_{13}, u_{23}, u_{123}) = 0,$$

и к определению 4D-совместности для четвёрки уравнений, отвечающих противоположным граням гиперкуба.

Как и для других классов трёхмерных уравнений, известно очень мало интегрируемых уравнений такого типа. Из них самым простым и важным является уравнение $\Delta\text{ВКР}$, обобщающее уравнение (χ_1) , его мы сейчас рассмотрим более подробно. Для уравнения (χ_2) 8-точечным аналогом служит уравнение двух двойных отношений

$$\frac{(u - u_{ij})(u_{jk} - u_{ki})}{(u_{ij} - u_{jk})(u_{ki} - u)} = \frac{(u_{ijk} - u_k)(u_i - u_j)}{(u_k - u_i)(u_j - u_{ijk})}.$$

Кроме этих уравнений, следует упомянуть также уравнение Δ СКР. В отличие от уравнений на октаэдрах, которые, как видно из списка 10.1, все приводятся к аффинно-линейному виду, это уравнение имеет вторую степень по каждой переменной. Наличие такого ответа показывает, что классификация уравнений на кубе является, вероятно, довольно сложной задачей. Тем не менее, само свойство 4D-совместности для них формулируется проще и нагляднее, чем для уравнений на октаэдрах.

Простейшим примером служит четвёрка уравнений Δ ВКР,

$$\begin{aligned} u_1u_{23} - u_2u_{13} + u_3u_{12} - uu_{123} &= 0, \\ u_1u_{24} - u_2u_{14} + u_4u_{12} - uu_{124} &= 0, \\ u_1u_{34} - u_2u_{14} + u_4u_{13} - uu_{134} &= 0, \\ u_2u_{34} - u_3u_{24} + u_4u_{23} - uu_{234} &= 0, \end{aligned} \tag{10.4}$$

отвечающая четырём трёхмерным граням гиперкуба. Применив сдвиги в ортогональных направлениях, получим отсюда уравнения на противоположных гранях, из которых значение u_{1234} может быть вычислено четырьмя различными способами. Легко проверить, что для данной системы эти значения совпадают, независимо от выбора начальных данных u , u_i , u_{ij} . Замечательным образом, из этой четвёрки уравнений следует также, что на чётной и нечётной подрешётках в \mathbb{Z}^4 выполняется аналогичное уравнение

$$u_{14}u_{23} - u_{13}u_{24} + u_{12}u_{34} - uu_{1234} = 0 \tag{10.5}$$

(отметим, что для уравнения двух двойных отношений уравнение на подрешётке не возникает).

К уравнениям Δ КР (χ_1) можно прийти отсюда в результате предельного перехода, делая растяжение

$$u(i, j, k, m) \rightarrow \varepsilon^{ij+ik+im+jk+jm+km} u(i, j, k, m),$$

в результате которого последние члены в уравнениях (10.4), (10.5) умножаются на ε^2 и пропадают при $\varepsilon \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} u_1u_{23} - u_2u_{13} + u_3u_{12} &= 0, \\ u_1u_{24} - u_2u_{14} + u_4u_{12} &= 0, \\ u_1u_{34} - u_3u_{14} + u_4u_{13} &= 0, \\ u_2u_{34} - u_3u_{24} + u_4u_{23} &= 0, \\ u_{14}u_{23} - u_{13}u_{24} + u_{12}u_{34} &= 0. \end{aligned}$$

Понятно, что этот набор уравнений остаётся совместным, несмотря на то, что их комбинаторика изменилась и определение совместности на гиперкубе стало неприменимо. Действительно, совместность в широком смысле слова означает, что ограничение общего решения системы на каждую подрешётку задаёт

общее решение соответствующего уравнения; это свойство в данном случае не портится, так как предельный переход осуществляется согласованно на всей решётке \mathbb{Z}^4 .

Таким образом, мы получили в данном примере пятёрку уравнений типа (10.1), (10.3). Оказывается, что при предельном переходе число независимых уравнений падает: теперь только три из них независимы, а два являются следствием, в результате чего мы и приходим к определению 10.1. Доказать это можно следующим вычислением (его стоит привести, поскольку из дальнейшего станет ясно, что оно выявляет важную общую структуру уравнений типа $\Delta K P$, так называемую трёхногую форму):

$$\begin{aligned}
& u_1 u_{23} - u_2 u_{13} + u_3 u_{12} = 0 \\
& \quad \uparrow \\
& \frac{u_{12}}{u_1 u_2} - \frac{u_{13}}{u_1 u_3} + \frac{u_{23}}{u_2 u_3} = 0 \\
& \quad \uparrow \\
& \frac{u_{14}}{u_1 u_4} - \frac{u_{24}}{u_2 u_4} = \frac{u_{12}}{u_1 u_2}, \quad \frac{u_{14}}{u_1 u_4} - \frac{u_{34}}{u_3 u_4} = \frac{u_{13}}{u_1 u_3}, \quad \frac{u_{24}}{u_2 u_4} - \frac{u_{34}}{u_3 u_4} = \frac{u_{23}}{u_2 u_3} \\
& \quad \uparrow \\
& u_2 u_{14} - u_1 u_{24} = u_4 u_{12}, \quad u_3 u_{14} - u_1 u_{34} = u_4 u_{13}, \quad u_3 u_{24} - u_2 u_{34} = u_4 u_{23} \\
& \quad \downarrow \\
& \frac{u_2}{u_4 u_{24}} - \frac{u_1}{u_4 u_{14}} = \frac{u_{12}}{u_{14} u_{24}}, \quad \frac{u_3}{u_4 u_{34}} - \frac{u_1}{u_4 u_{14}} = \frac{u_{13}}{u_{14} u_{34}}, \quad \frac{u_3}{u_4 u_{34}} - \frac{u_2}{u_4 u_{24}} = \frac{u_{23}}{u_{24} u_{34}} \\
& \quad \downarrow \\
& \frac{u_{12}}{u_{14} u_{24}} - \frac{u_{13}}{u_{14} u_{34}} + \frac{u_{23}}{u_{24} u_{34}} = 0 \\
& \quad \downarrow \\
& u_{14} u_{23} - u_{13} u_{24} + u_{12} u_{34} = 0.
\end{aligned}$$

10.1.3 Совместные тройки бездисперсионных уравнений

Ещё одним примером, оправдывающим определение 10.1, служат совместные тройки уравнений в частных производных, общего вида

$$\begin{aligned}
u_{xy} &= f(u, u_x, u_y, u_t, u_{tx}, u_{ty}), \\
u_{xz} &= g(u, u_x, u_z, u_t, u_{tx}, u_{tz}), \\
u_{yz} &= h(u, u_y, u_z, u_t, u_{ty}, u_{tz})
\end{aligned} \tag{10.6}$$

(индексы в этом разделе обозначают производные). В данном случае совместность означает совпадение перекрёстных производных:

$$u_{xyz} = D_z(f) = D_y(g) = D_x(h)$$

где D_x, D_y, D_z операторы полных производных в силу системы, например

$$D_x(h) = \frac{\partial h}{\partial u_y} f + \frac{\partial h}{\partial u_z} g + \frac{\partial h}{\partial u_t} u_{xt} + \frac{\partial h}{\partial u_{yt}} D_t(f) + \frac{\partial h}{\partial u_{zt}} D_t(g).$$

Очевидно, такие тройки служат непрерывным аналогом троек (10.1). Простейшим примером служит тройка

$$(\alpha_i - \alpha_j)u_{x_i x_j} = u_{x_i} u_{t x_j} - u_{x_j} u_{t x_i}.$$

Некоторые примеры почти буквально совпадают с дискретными, при формальной замене производной на сдвиги. Например, уравнения из совместной тройки

$$(\mu_j - \mu_i)u_t u_{x_i x_j} - \mu_j u_{x_i} u_{t x_j} + \mu_i u_{x_j} u_{t x_i} = 0, \quad i, j = 1, 2, 3$$

напоминают уравнение (χ_1). Отметим, что из этой системы следует уравнение

$$(\mu_2 - \mu_1)u_{x_3} u_{x_1 x_2} + (\mu_1 - \mu_3)u_{x_2} u_{x_1 x_3} + (\mu_3 - \mu_2)u_{x_1} u_{x_2 x_3} = 0,$$

которое показывает, что переменная t фактически равноправна с остальными, и на самом деле мы имеем четвёрку совместных уравнений (до пятёрки, как в дискретном случае, дело всё же не доходит).

Несмотря на внешнее сходство, аналогия между тройками (10.1) и (10.6), по-видимому, не очень глубока. Уравнения типа Δ КР связаны с преобразованиями Бэклунда для “солитонного” уравнения КР, тогда как уравнения типа (10.6) относятся к классу так называемых бездисперсионных уравнений. Такие уравнения также относятся к интегрируемым, но имеют совсем другую природу. Поэтому мы не будем подробно рассматривать эти примеры и ограничимся лишь следующим частным результатом. Его доказательство получается прямыми вычислениями.

Теорема 10.3. Пусть уравнения совместной тройки (10.6) квазилинейны и не содержат u явно. Тогда они имеют вид

$$\begin{aligned} c(u_x, u_y)u_{xy} &= p(u_x, u_t)u_{tx} - q(u_y, u_t)u_{ty}, \\ a(u_y, u_z)u_{yz} &= q(u_y, u_t)u_{ty} - r(u_z, u_t)u_{tz}, \\ b(u_z, u_x)u_{zx} &= r(u_z, u_t)u_{tz} - p(u_x, u_t)u_{tx}, \end{aligned}$$

где коэффициенты — неравные тождественно нулю функции, определяемые формулами

$$\begin{aligned} a(u, v) &= B(u)\tilde{C}(v) - \tilde{B}(u)C(v), & p(u, v) &= A(u)\tilde{X}(v) - \tilde{A}(u)X(v), \\ b(u, v) &= C(u)\tilde{A}(v) - \tilde{C}(u)A(v), & q(u, v) &= B(u)\tilde{X}(v) - \tilde{B}(u)X(v), \\ c(u, v) &= A(u)\tilde{B}(v) - \tilde{A}(u)B(v), & r(u, v) &= C(u)\tilde{X}(v) - \tilde{C}(u)X(v) \end{aligned}$$

по решениям $(X, \tilde{X}), (A, \tilde{A}), (B, \tilde{B}), (C, \tilde{C})$ системы ОДУ вида

$$X' = k_1 X^2 + k_2 X \tilde{X} + k_3 \tilde{X}^2, \quad \tilde{X}' = k_4 X^2 + k_5 X \tilde{X} + k_6 \tilde{X}^2,$$

с произвольными постоянными k_i (решение этой системы находится в квадратурах).

10.2 Анализ условий совместности

10.2.1 Следствия из условий совместности

Равенства (10.2) должны выполняться тождественно по 11 независимым переменным (играющим роль начальных данных), отвечающих вершинам

$$1, 2, 3, 4, 14, 24, 34, 44, 144, 244, 344.$$

Некоторые важные следствия получаются непосредственно при дифференцировании (10.2) по этим независимым переменным. Для краткости, будем обозначать производные нижним индексом:

$$f_1 = \frac{\partial f}{\partial u_1}, \quad \dots \quad h_{34} = \frac{\partial h}{\partial u_{34}}$$

(производные второго порядка нам не понадобятся, так что двойной индекс не вызовет недоразумений). Кроме того, чтобы не писать аргументы, будем обозначать внешние функции f, g, h в (10.2) заглавными буквами, отдавая производной приоритет перед сдвигом, например,

$$F = T_3(f) = f(g, h, u_{34}, T(g), T(h)), \quad F_1 = T_3(f_1).$$

Эти обозначения легко понять из следующих уравнений, получаемых при дифференцировании (10.2):

$$\begin{aligned} \partial_{u_1} : F_1 g_1 &= G_1 f_1 = H_2 f_1 + H_3 g_1, \\ \partial_{u_2} : F_2 h_2 &= G_1 f_2 + G_3 h_2 = H_2 f_2, \\ \partial_{u_3} : F_1 g_3 + F_2 h_3 &= G_3 h_3 = H_3 g_3, \\ \partial_{u_4} : F_1 g_4 + F_2 h_4 &= G_1 f_4 + G_3 h_4 = H_2 f_4 + H_3 g_4, \\ \partial_{u_{44}} : F_{14} T(g_4) + F_{24} T(h_4) & \\ &= G_{14} T(f_4) + G_{34} T(h_4) = H_{24} T(f_4) + H_{34} T(g_4), \\ \partial_{u_{144}} : F_{14} T(g_{14}) &= G_{14} T(f_{14}) = H_{24} T(f_{14}) + H_{34} T(g_{14}), \\ \partial_{u_{244}} : F_{24} T(h_{24}) &= G_{14} T(f_{24}) + G_{34} T(h_{24}) = H_{24} T(f_{24}), \\ \partial_{u_{344}} : F_{14} T(g_{34}) + F_{24} T(h_{34}) &= G_{34} T(h_{34}) = H_{34} T(g_{34}). \end{aligned} \tag{10.7}$$

Утверждение 10.4. Функции f, g, h из совместной тройки (10.1) удовлетворяют уравнениям

$$f_1 g_3 h_2 + f_2 g_1 h_3 = 0, \quad f_2 g_3 h_4 = f_4 g_3 h_2 + f_2 g_4 h_3, \tag{10.8}$$

$$f_{14} g_{34} h_{24} + f_{24} g_{14} h_{34} = 0, \quad f_{24} g_{34} h_4 = f_4 g_{34} h_{24} + f_{24} g_4 h_{34}. \tag{10.9}$$

Доказательство. Первые четыре строки системы (10.7) образуют однородную линейную систему относительно $F_1, F_2, G_1, G_3, H_2, H_3$. Разрешим часть этих уравнений:

$$G_1 = \frac{g_1}{f_1} F_1, \quad G_3 = F_2 + \frac{g_3}{h_3} F_1, \quad H_2 = \frac{h_2}{f_2} F_2, \quad H_3 = F_1 + \frac{h_3}{g_3} F_2,$$

тогда подстановка в оставшиеся даёт соотношения

$$\begin{aligned} \frac{F_1}{f_1 h_3} (f_1 g_3 h_2 + f_2 g_1 h_3) &= 0, & \frac{F_1}{f_1 h_3} (f_1 g_4 h_3 - f_4 g_1 h_3 - f_1 g_3 h_4) &= 0, \\ \frac{F_2}{f_2 g_3} (f_1 g_3 h_2 + f_2 g_1 h_3) &= 0, & \frac{F_2}{f_2 g_3} (f_2 g_3 h_4 - f_4 g_3 h_2 - f_2 g_4 h_3) &= 0, \end{aligned}$$

что равносильно (10.8). Аналогично, уравнения (10.9) получаются (с точностью до сдвига T) при исключении $G_{14}, G_{34}, H_{24}, H_{34}$ из последних четырёх строк (10.7). \square

Какую-либо дополнительную информацию из равенств (10.2) извлечь в явном виде трудно, и больше мы не будем обращаться к ним напрямую. Хотя доказанные формулы дают лишь необходимые условия совместности, они очень важны и имеют простой смысл, как сейчас будет показано.

10.2.2 От троек к пятёркам

Теперь мы можем доказать приведённое в разделе 10.1.1 утверждение о наличии пары дополнительных уравнений.

Теорема 10.5. Если тройка (10.1) совместна, то выполняются некоторые уравнения вида (10.3).

Доказательство. Покажем, что из соотношений (10.8) следует второе уравнение (10.3). Наличие этого уравнения эквивалентно свойству, что если мы рассмотрим (10.1) как систему на неизвестные u_1, u_2, u_3, u_4 и решим два уравнения этой системы относительно, скажем, u_1, u_2 , то при подстановке в третье уравнение произойдёт тождественное сокращение переменных u_1, u_4 . Это, в свою очередь, эквивалентно вырожденности матрицы Якоби:

$$\text{rank} \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & 0 & f_4 \\ g_1 & 0 & g_3 & g_4 \\ 0 & h_2 & h_3 & h_4 \end{pmatrix} \leq 2,$$

то есть, обращению в ноль определителей

$$\det \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & 0 \\ g_1 & 0 & g_3 \\ 0 & h_2 & h_3 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} f_2 & 0 & f_4 \\ 0 & g_3 & g_4 \\ h_2 & h_3 & h_4 \end{pmatrix} = 0,$$

а это и есть в точности (10.8).

Первое уравнение (10.3) доказывается точно так же, так как уравнения (10.8) и (10.9) отличаются только перестановками $1 \leftrightarrow 14, 2 \leftrightarrow 24, 3 \leftrightarrow 34$. \square

Замечание 10.6. Можно провести некоторую параллель между вторым уравнением в (10.3) и свойством тетраэдральности из теории квад-уравнений (см.

раздел 2.1), означающим наличие дополнительного уравнения на чётной и нечётной подрешётках в \mathbb{Z}^3 . При этом соотношения (10.8) служат аналогом соотношения (2.45). В отличие от двумерного случая, где свойство тетраэдральности постулировалось, доказанная теорема не требует дополнительных предположений.

Итак, из совместности тройки (10.1) следует, что на решётке \mathbb{Z}^4 выполнены ещё два уравнения (10.3). Легко видеть, что на самом деле все пять уравнений равноправны, в смысле комбинаторики участвующих в них вершин. Чтобы сделать это особенно наглядным, можно заменить одинарные индексы i на двойные $0i$, тогда уравнения (10.1) и (10.3) будут заданы на точках

$$(01, 02, 03, 12, 13, 14), \quad (01, 02, 04, 12, 14, 24), \quad (01, 03, 04, 13, 14, 34), \\ (02, 03, 04, 23, 24, 34), \quad (12, 13, 14, 23, 24, 34), \quad (10.10)$$

и роли всех координат уравниваются.

В дальнейшем мы будем время от времени использовать эти симметричные обозначения. Поясним, что они отвечают отождествлению \mathbb{Z}^d с корневой решёткой

$$Q(A_d) = \{(n_0, n_1, \dots, n_d) \in \mathbb{Z}^{d+1} : n_0 + n_1 + \dots + n_d = 0\}$$

(то есть, попросту, гиперплоскостью в \mathbb{Z}^{d+1}), при помощи отображения

$$(n_1, \dots, n_d) \leftrightarrow (-n_1 - \dots - n_d, n_1, \dots, n_d).$$

В нашей сокращённой записи с индексами, обозначающими сдвиги относительно произвольной точки отсчёта в \mathbb{Z}^d , переход к $Q(A_d)$ сводится к тому, что при одновременном рассмотрении нескольких переменных к индексу каждой из них дописывается столько значков 0 или -0 , чтобы суммарное число сдвигов, с учётом их знака, было одинаковым. Обратный переход к \mathbb{Z}^d заключается просто в отбрасывании нулей.

Напомним, что в разделе 9.3 данное свойство симметрии было проиллюстрировано при помощи конфигурации $(10_2 5_4)$ и конфигурации Дезарга $(10_3 10_3)$, каждая из которых включает в себя пять четырёхсторонников, вершины которых нумеруются наборами (10.10), то есть так, чтобы в нумерации каждого четырёхсторонника не участвовал один из индексов. Геометрически, эти конфигурации отвечают случаю уравнения (χ_2) , но, как видим, в комбинаторном смысле они выражают общее свойство всех 4D-совместных уравнений (10.1).

Таким образом, определение 4-мерной совместности, выраженное уравнениями (10.2), оказывается вполне симметричным. Правда, асимметрия заключается ещё в том, что в тройке (10.1) переменные u_{12} , u_{13} и u_{23} выделены тем, что относительно них уравнения разрешены. Роли всех переменных окончательно уравниваются при помощи сделанного в разделе 10.1.1 дополнительного предположения о невырожденности, в силу которого каждое рассматриваемое уравнение, включая уравнения (10.3), разрешимо относительно каждой входящей в него переменной.

10.2.3 Сведение к функциям от трёх переменных

Хотя теорема 10.5 проясняет комбинаторику 4-мерной совместности, она ничего не говорит о том, какими же должны быть рассматриваемые уравнения, чтобы эта комбинаторика могла реализоваться. Вид уравнений уточняется из анализа функциональных уравнений (10.8), (10.9).

Утверждение 10.7. Если система (10.1) совместна, то она приводится к виду

$$\begin{aligned} a(u_1, u_4, u_{14}) - b(u_2, u_4, u_{24}) &= p(u_{12}, u_{14}, u_{24}), \\ c(u_3, u_4, u_{34}) - a(u_1, u_4, u_{14}) &= q(u_{13}, u_{14}, u_{34}), \\ b(u_2, u_4, u_{24}) - c(u_3, u_4, u_{34}) &= r(u_{23}, u_{24}, u_{34}) \end{aligned} \quad (10.11)$$

и, одновременно, к виду

$$\begin{aligned} A(u_1, u_4, u_{14}) - B(u_2, u_4, u_{24}) &= P(u_1, u_2, u_{12}), \\ C(u_3, u_4, u_{34}) - A(u_1, u_4, u_{14}) &= Q(u_1, u_3, u_{13}), \\ B(u_2, u_4, u_{24}) - C(u_3, u_4, u_{34}) &= R(u_2, u_3, u_{23}). \end{aligned} \quad (10.12)$$

Доказательство. Покажем, что общее решение уравнений (10.8) имеет вид

$$\begin{aligned} f &= \phi(a(u_1, u_4, u_{14}) - b(u_2, u_4, u_{24}), u_{14}, u_{24}), \\ g &= \psi(c(u_3, u_4, u_{34}) - a(u_1, u_4, u_{14}), u_{14}, u_{34}), \\ h &= \chi(b(u_2, u_4, u_{24}) - c(u_3, u_4, u_{34}), u_{24}, u_{34}), \end{aligned}$$

что, очевидно, равносильно (10.11). Из первого уравнения (10.8) следует

$$\frac{f_1}{f_2} = -\frac{g_1/g_3}{h_2/h_3} = -\frac{\alpha(u_1, u_4, u_{14})}{\beta(u_2, u_4, u_{23})}$$

(достаточно положить $u_3 = \text{const}$ во втором выражении). Далее,

$$\frac{g_1}{\alpha g_3} = \frac{h_2}{\beta h_3} = -\gamma(u_3, u_4, u_{34}),$$

где γ обозначает общее значение обоих отношений. Следовательно,

$$\beta f_1 + \alpha f_2 = 0, \quad \alpha g_3 + \gamma g_1 = 0, \quad \gamma h_2 + \beta h_3 = 0,$$

и, обозначив $\alpha = a_1$, $\beta = b_2$, $\gamma = c_3$, мы получаем, что решение записывается в виде

$$\begin{aligned} f &= \phi(a(u_1, u_4, u_{14}) - b(u_2, u_4, u_{24}), u_4, u_{14}, u_{24}), \\ g &= \psi(c(u_3, u_4, u_{34}) - a(u_1, u_4, u_{14}), u_4, u_{14}, u_{34}), \\ h &= \chi(b(u_2, u_4, u_{24}) - c(u_3, u_4, u_{34}), u_4, u_{24}, u_{34}). \end{aligned}$$

Теперь легко проверить, что подстановка во второе уравнение (10.8) приводит к соотношению

$$\frac{\phi_4}{\phi'} + \frac{\psi_4}{\psi'} + \frac{\chi_4}{\chi'} = 0, \quad (10.13)$$

где штрихом обозначены производные по первым аргументам функций. Дифференцирование этого уравнения по u_1 и u_2 даёт

$$\left(\frac{\phi_4}{\phi'}\right)' = \left(\frac{\psi_4}{\psi'}\right)' = \left(\frac{\chi_4}{\chi'}\right)' = \delta(u_4),$$

где δ обозначает общее значение всех выражений. Интегрируя, получаем

$$\begin{aligned} \frac{\phi_4}{\phi'} &= \delta(a - b) + \lambda(u_4, u_{14}) - \mu(u_4, u_{24}), \\ \frac{\psi_4}{\phi'} &= \delta(c - a) + \nu(u_4, u_{34}) - \lambda(u_4, u_{14}), \\ \frac{\chi_4}{\chi'} &= \delta(b - c) + \mu(u_4, u_{24}) - \nu(u_4, u_{34}) \end{aligned}$$

(вид постоянных интегрирования следует из (10.13)). Заметим теперь, что функции a, b, c определены не однозначно: допускаются переобозначения

$$\begin{aligned} \tilde{a} &= k(u_4)a + \ell(u_4, u_{14}), & \tilde{b} &= k(u_4)b + m(u_4, u_{24}), & \tilde{c} &= k(u_4)c + n(u_4, u_{34}), \\ \phi(a - b, u_4, u_{14}, u_{24}) &= \tilde{\phi}(\tilde{a} - \tilde{b}, u_4, u_{14}, u_{24}), \\ \psi(c - a, u_4, u_{14}, u_{34}) &= \tilde{\psi}(\tilde{c} - \tilde{a}, u_4, u_{14}, u_{34}), \\ \chi(b - c, u_4, u_{24}, u_{34}) &= \tilde{\chi}(\tilde{b} - \tilde{c}, u_4, u_{24}, u_{34}) \end{aligned}$$

с произвольными k, ℓ, m, n . Легко видеть, что

$$\phi' = k\tilde{\phi}', \quad \phi_4 = \tilde{\phi}_4 + (k'(a - b) + \ell_4 - m_4)\tilde{\phi}',$$

так что

$$\frac{\phi_4}{\phi'} = \frac{\tilde{\phi}_4}{k\tilde{\phi}'} + \frac{k'}{k}(a - b) + \frac{\ell_4}{k} - \frac{m_4}{k}$$

и аналогично для ψ, χ . Выбор $k'/k = \delta$, $\ell_4 = k\lambda$, $m_4 = k\mu$, $n_4 = k\nu_4$ приводит к

$$\tilde{\phi}_4 = \tilde{\psi}_4 = \tilde{\chi}_4 = 0,$$

что и даёт требуемое представление. Формулы (10.12) доказываются при помощи второй пары уравнений (10.9), имеющей ту же структуру, что и (10.8). \square

Представления (10.11), (10.12) полностью объясняют механизм сокращения “лишних” переменных, приводящий к уравнениям из теоремы 10.5. Более того, благодаря симметрии всех координатных направлений существует ещё

несколько аналогичных представлений для уравнений (10.1) и (10.3). Например, перестановки $1 \leftrightarrow 4$ и $2 \leftrightarrow 4$ в первом уравнении (10.11) дают ещё две эквивалентные формы для этого уравнения:

$$\begin{aligned}\tilde{a}(u_1, u_4, u_{14}) - \tilde{b}(u_1, u_2, u_{12}) &= \tilde{p}(u_{12}, u_{14}, u_{24}), \\ \bar{a}(u_1, u_2, u_{12}) - \bar{b}(u_2, u_4, u_{24}) &= \bar{p}(u_{12}, u_{14}, u_{24}).\end{aligned}$$

Далее, мы можем разрешить уравнения (10.1) относительно u_4 и применить обратные сдвиги $(T_i T_j T_4)^{-1}$, $i, j = 1, 2, 3$. Это фактически сводится к смене направлений на решётке, например первое уравнение принимает вид

$$u_{-1, -2} = \tilde{f}(u_{-1}, u_{-2}, u_{-4}, u_{-1, -4}, u_{-2, -4}).$$

Применение утверждения 10.7 к этим уравнениям приводит к аналогичным представлениям с дополнительными индексами $(i, j, k) \leftrightarrow (jk, ik, ij)$.

Таким образом, каждое из рассматриваемых уравнений допускает восемь эквивалентных представлений типа (10.11), а для всех уравнений получаем 40 таких представлений. Чтобы записать их в единообразном виде, используем обозначения (10.10) на решётке $Q(A_4)$, а функции от трёх переменных будем обозначать квадратными скобками с соответствующими двойными индексами вместо аргументов. При этом примем соглашение, что это обозначение симметрично по крайним парам индексов, а средняя пара выделена тем, что встречается в уравнении только один раз. Сами двойные индексы, естественно, тоже считаются симметричными.

Следующая теорема подводит итог данного раздела. Достаточность следует из того, что второе представление обеспечивает коммутативность сдвигов T_i .

Теорема 10.8. Пятёрка невырожденных уравнений типа Δ КР 4D-совместна, если и только если каждая четвёрка допускает представления следующего вида:

$$\begin{aligned}\langle m \rangle : \\ \langle i \rangle : \quad [jn, jm, mn] - [kn, km, mn] &= [jn, jk, kn] \\ &+ \\ \langle j \rangle : \quad [kn, km, mn] - [in, im, mn] &= [kn, ki, in] \\ &+ \\ \langle k \rangle : \quad [in, im, mn] - [jn, jm, mn] &= [in, ij, jn] \\ &= 0\end{aligned}\tag{10.14}$$

$$\begin{aligned}T_m \langle m \rangle : \\ T_i \langle i \rangle : \quad T_i([km, kn, kj] - [jm, jn, jk]) &= [km, mn, jm] \\ &+ \\ T_j \langle j \rangle : \quad T_j([im, in, ik] - [km, kn, ki]) &= [im, mn, km] \\ &+ \\ T_k \langle k \rangle : \quad T_k([jm, jn, ji] - [im, in, ij]) &= [jm, mn, im] \\ &= 0\end{aligned}\tag{10.15}$$

10.3 Трёхногая форма уравнений

Мы показали, что каждое уравнение из совместной системы переписывается восемью способами как равенство нулю суммы трёх функций от трёх аргументов. Забудем временно о совместности и займёмся анализом отдельно взятого уравнения, удовлетворяющего этому замечательному свойству. Нумерация вершин октаэдра в этом разделе отличается от использованной ранее; она показана на рис. 10.1.

10.3.1 Определения и обозначения

Задача формулируется следующим образом: описать все уравнения

$$\Phi(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6) = 0, \quad (10.16)$$

локально эквивалентные уравнениям вида

$$a(u_i, u_{7-k}, u_j) + b(u_j, u_{7-i}, u_k) + c(u_k, u_{7-j}, u_i) = 0$$

для каждой из восьми троек i, j, k , отвечающих граням октаэдра. По аналогии с квад-уравнениями, будем называть представление такого вида *трёхногой формой* уравнения (10.16). Уравнение, допускающее все восемь форм, будем называть *трёхногим*.

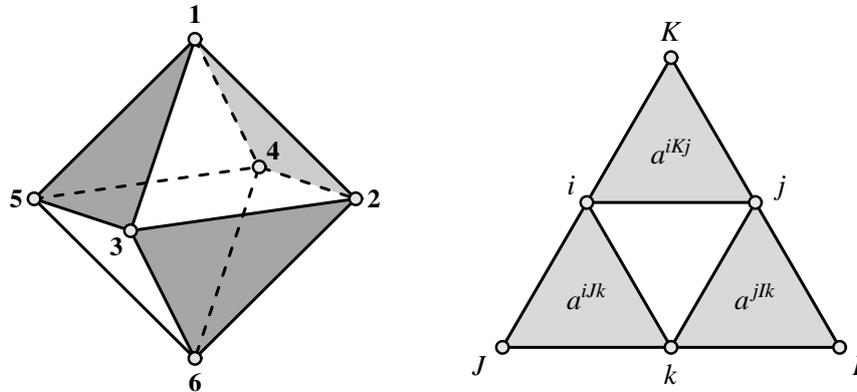


Рис. 10.1. Нумерация вершин октаэдра и одна из трёхногих форм

Предполагается, что уравнение (10.16) неприводимо, в частности, все частные производные Φ_i не равны тождественно нулю. Ответ определён с точностью до конформных преобразований

$$\tilde{u}_i = U_i(u_i), \quad U_i' \neq 0. \quad (10.17)$$

Функции a, b, c могут быть разными для разных граней. Для их обозначения удобнее всего использовать верхние индексы, непосредственно указывающие

на аргументы, например $a^{123} = a^{123}(u_1, u_2, u_3)$. Здесь средний индекс выделен, а относительно крайних индексов обозначение считается симметричным, то есть $a^{123} = a^{321}$. Естественно, это не означает симметрию относительно аргументов, то есть не предполагается, что $a^{123}(u_1, u_2, u_3) = a^{123}(u_3, u_2, u_1)$. Нижние индексы будут использоваться для обозначения производных. При буквенных обозначениях для краткости будем обозначать противоположные вершины разным регистром, например $I = 7 - i$. Таким образом, выписанное выше уравнение, отвечающее грани ijk , принимает вид

$$a^{iKj} + a^{jIk} + a^{kJi} = 0.$$

Все восемь трёхногих форм уравнения записываются в следующем виде:

<i>грани:</i>	<i>уравнения:</i>	
(123)	$a^{142} + a^{263} + a^{351} = 0,$	
(124)	$a^{132} + a^{264} + a^{451} = 0,$	
(135)	$a^{123} + a^{365} + a^{541} = 0,$	
(145)	$a^{124} + a^{465} + a^{531} = 0,$	(10.18)
(236)	$a^{213} + a^{356} + a^{642} = 0,$	
(246)	$a^{214} + a^{456} + a^{632} = 0,$	
(356)	$a^{315} + a^{546} + a^{623} = 0,$	
(456)	$a^{415} + a^{536} + a^{624} = 0.$	

Ясно, что эта структура накладывает на функции a^{ikj} весьма специальные ограничения. В следующем подразделе приведён полный список трёхногих уравнений. Оставшаяся часть раздела представляет собой доказательство того, что других трёхногих уравнений нет.

10.3.2 Классификация трёхногих уравнений

Теорема 10.9. Уравнения (10.16), локально эквивалентные уравнениям вида (10.18), с точностью до замен (10.17) и перестановок $i \leftrightarrow I$, $(i, j) \leftrightarrow (J, I)$, исчерпываются списком

$$u_1u_6 + u_2u_5 + u_3u_4 = 0, \quad (T_1)$$

$$(u_1 - u_2)u_4 + (u_2 - u_3)u_6 + (u_3 - u_1)u_5 = 0, \quad (T_2)$$

$$(u_1 - u_4)(u_2 - u_6)(u_3 - u_5) + (u_4 - u_2)(u_6 - u_3)(u_5 - u_1) = 0, \quad (T_3)$$

$$u_1u_6 = (u_2 + u_3)^{-\gamma}(u_4 + u_5), \quad (T_4)$$

$$u_1u_6 = u_2 + u_3 + u_4 + u_5, \quad (T_5)$$

$$u_1u_2u_3u_4 = u_5 + u_6, \quad (T_6)$$

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + u_6 = 0. \quad (T_7)$$

Нетрудно видеть, что первые три уравнения точно эквивалентны (χ_1) , (χ_2) , (χ_3) , после переобозначения $(u_{12}, u_{13}, u_{23}) \rightarrow (u_4, u_5, u_6)$. Доказательство

	НОГИ	ТИП
(T_1)	xyz	I
(T_2)	$y(x+z), \log\left(\frac{x+y}{y+z}\right), \log(x+y)$	III
(T_3)	$\log\left(\frac{x+y}{y+z}\right)$	III
(T_4)	$xy, y(x+z)^\gamma, y(x+z)^{1/\gamma}, \log(x+y), y$	I ($\gamma \neq 1$), III ($\gamma = 1$)
(T_5)	$y, (x+y)z$	II
(T_6)	$xyz, xy, y, y + \log(x+z), \log(x+y)$	I
(T_7)	y	III

Таблица 10.2. Формы ног

теоремы приводится в следующих подразделах, а здесь мы только проверим, что указанные уравнения действительно допускают все представления вида (10.18).

При проверке мы получим таблицу 10.2, в которой перечислены функции $a(x, y, z)$, определяющие возможный вид функций $a^{ijk} = a(u_i, u_j, u_k)$ для уравнений из списка. Напомним, что переменные x, z здесь равноправны, а y играет выделенную роль. В частности, функция a всегда зависит от y , а зависимости от x или z может и не быть. Вид функции a^{ijk} определён с точностью до замен (10.17). Кроме того, её можно умножать на произвольную постоянную, менять местами x, z и добавлять произвольные члены вида $\mu(x) + \nu(z)$ (пока речь идёт лишь об одной такой функции, а не всех трёх, входящих в трёхногую форму). На данном этапе мы не занимаемся согласованием всех этих преобразований для совместных уравнений, поэтому в таблице приводится произвольная, по возможности наиболее простая калибровка. Несмотря на такую неопределённость, мы увидим в разделе 10.4, что эта таблица весьма полезна при объединении отдельных трёхногих уравнений в совместные пятёрки. Тип уравнения, указанный в третьей колонке, будет определён позже, в конце раздела 10.3.3.

Уравнение (T_1) . Одна из трёхногих форм имеет вид

$$(123) : \quad \frac{u_4}{u_1 u_2} + \frac{u_6}{u_2 u_3} + \frac{u_5}{u_3 u_1} = 0,$$

остальные получаются в результате отражений $u_i \leftrightarrow u_I$ и $(u_i, u_j) \leftrightarrow (u_J, u_I)$, порождающих группу симметрий октаэдра и оставляющих уравнение инвариантным.

Уравнение (T_2) уже записано в трёхногой форме (123). Перегруппировка слагаемых даёт трёхногую форму, отвечающую противоположной грани

$$(456) : \quad u_1(u_4 - u_5) + u_3(u_5 - u_6) + u_2(u_6 - u_4) = 0.$$

Отсюда видим, что уравнение инвариантно относительно инволюции

$$P : \quad (u_1, u_2, u_3) \leftrightarrow (u_6, u_5, u_4).$$

Далее, имеем мультипликативную трёхногую форму

$$(124) : \quad \left(\frac{u_1 - u_3}{u_3 - u_2} \right) \left(1 - \frac{u_5}{u_4} \right) = \frac{u_6}{u_4} - 1$$

(для приведения к аддитивному виду достаточно применить логарифмирование). Оставшиеся формы получаются при помощи инволюции P и циклической перестановки

$$Z : \quad u_1 \rightarrow u_2 \rightarrow u_3 \rightarrow u_1, \quad u_6 \rightarrow u_6 \rightarrow u_4 \rightarrow u_6.$$

Уравнение (T_3) . Мультипликативная трёхногая форма (123) следует непосредственно из вида уравнения. Этого достаточно, так как можно проверить, что уравнение инвариантно относительно отражений $u_i \leftrightarrow u_I$ и $(u_i, u_j) \leftrightarrow (u_J, u_I)$, хотя это и не так очевидно, как в случае уравнения T_1 .

Уравнение (T_4) инвариантно относительно замен

$$u_1 \leftrightarrow u_6; \quad (u_2, u_5) \leftrightarrow (u_3, u_4); \quad (u_1, u_2, u_3, \gamma) \leftrightarrow (u_1^{-1/\gamma}, u_5, u_4, -1/\gamma),$$

что позволяет получить все формы из следующих двух:

$$(123) : \quad \frac{u_4}{u_1} - u_6(u_2 + u_3)^\gamma + \frac{u_5}{u_1} = 0,$$

$$(124) : \quad (\log u_1 + \gamma \log(u_2 + u_3)) + \log u_6 - \log(u_4 + u_5) = 0.$$

Уравнение (T_5) . В этом случае группа симметрий порождена заменами

$$u_i \leftrightarrow u_I; \quad (u_2, u_5) \leftrightarrow (u_3, u_4),$$

позволяющими получить все трёхногие формы из одной, например

$$(123) : \quad \frac{u_4 + u_2}{u_1} - u_6 + \frac{u_3 + u_5}{u_1} = 0.$$

Следует отметить, что хотя здесь первое и последнее слагаемое похожи на члены, встречающиеся в уравнениях (T_2) и (T_4) при $\gamma = 1$, на самом деле это разные типы функций, так как роль выделенной переменной u в них различна.

Уравнение (T_6) . Здесь имеются замены

$$(u_1, u_6) \leftrightarrow (u_2, u_5); \quad u_3 \leftrightarrow u_4,$$

учитывая которые достаточно рассмотреть трёхногие формы для следующих граней:

$$(123) : u_1 u_4 u_2 - \frac{u_6}{u_3} - \frac{u_5}{u_3} = 0,$$

$$(135) : \log(u_1 u_2 u_3) - \log(u_5 + u_6) + \log u_4 = 0,$$

$$(356) : (\log u_3 + \log u_1) + (\log u_4 - \log(u_5 + u_6)) + \log u_2 = 0.$$

Уравнение (T₇). Этот случай тривиален.

10.3.3 Сведение к функциям от двух переменных

Докажем некоторые полезные соотношения, вытекающие из локальной эквивалентности трёхногих форм

$$(ijK) : a^{ikj} + a^{jIK} + a^{KJi} = 0, \quad (ijk) : a^{iKj} + a^{jIk} + a^{kJi} = 0, \quad (10.19)$$

отвечающих граням с общим ребром ij . Каждое из этих соотношений выполняется тождественно, а не в силу уравнений (10.19), так как содержит лишь пять переменных.

Утверждение 10.10. Имеют место тождества

$$\frac{a_i^{ikj} + a_i^{KJi}}{a_J^{KJi}} = \frac{a_i^{iKj} + a_i^{kJi}}{a_J^{kJi}}, \quad \frac{a_j^{ikj} + a_j^{jIK}}{a_I^{jIK}} = \frac{a_j^{iKj} + a_j^{jIk}}{a_I^{jIk}}, \quad (10.20)$$

$$\left(\frac{1}{a_K^{iKj}}\right)_j \left(\frac{1}{a_J^{KJi}}\right)_K = \left(\frac{1}{a_k^{ikj}}\right)_j \left(\frac{1}{a_J^{kJi}}\right)_k, \quad \left(\frac{1}{a_K^{iKj}}\right)_i \left(\frac{1}{a_I^{jIK}}\right)_K = \left(\frac{1}{a_k^{ikj}}\right)_i \left(\frac{1}{a_I^{jIk}}\right)_k. \quad (10.21)$$

Доказательство. Числители не равны тождественно нулю в силу предположения о разрешимости уравнения относительно любой переменной. В каждой паре тождеств докажем только первое, второе получается перестановкой $(i, I) \leftrightarrow (i, J)$. Отметим также, что все тождества инвариантны относительно перестановки $k \leftrightarrow K$. Разрешая уравнения (10.19) относительно u_I , получаем равенство вида

$$f(u_j, u_K, a^{ikj} + a^{KJi}) = g(u_j, u_k, a^{iKj} + a^{kJi}),$$

и его дифференцирование даёт соотношения

$$f_K + f' a_K^{KJi} = g' a_K^{iKj}, \quad f'(a_i^{ikj} + a_i^{KJi}) = g'(a_i^{iKj} + a_i^{kJi}), \quad f' a_J^{KJi} = g' a_J^{kJi},$$

где штрих обозначает производные функций f, g по последним аргументам. Отношение второго и третьего равенств доказывает (10.20), а из первого и третьего имеем

$$\frac{f_K}{f'} = \frac{a_J^{KJi}}{a_k^{kJi}} a_K^{iKj} - a_K^{KJi} = \phi \quad \Rightarrow \quad \phi_J a_k^{ikj} = \phi_k a_J^{KJi},$$

что даёт

$$\left(\left(\frac{a_J^{KJi}}{a_J^{kJi}} \right)_J a_K^{iKj} - a_{KJ}^{KJi} \right) a_k^{ikj} = (a_J^{KJi})^2 a_K^{iKj} \left(\frac{1}{a_J^{kJi}} \right)_k.$$

Деля на $a_K^{iKj} a_k^{ikj} (a_J^{KJi})^2$ и дифференцируя по u_j , получаем (10.21). \square

Соотношения (10.20) играют основную роль в последующем анализе. Соотношения (10.21) нужны лишь, чтобы доказать следующее свойство, которое, в свою очередь, понадобится лишь при доказательстве утверждения 10.21. Тем не менее, его удобно привести сейчас, пока нужные формулы под рукой.

Утверждение 10.11. Если хотя бы одна из функций a_{IK}^{jIK} , a_{KJ}^{KJi} , a_{Ik}^{jIk} или a_{kJ}^{kJi} отлична от нуля, то

$$\frac{a_{ik}^{ikj} a_{kj}^{ikj}}{(a_k^{ikj})^2} = \frac{a_{iK}^{iKj} a_{Kj}^{iKj}}{(a_K^{iKj})^2}.$$

Доказательство. Дважды дифференцируя (10.20) по u^k и u^K , получаем уравнения

$$a_{ik}^{ikj} \left(\frac{1}{a_J^{KJi}} \right)_K = a_{iK}^{iKj} \left(\frac{1}{a_J^{kJi}} \right)_k, \quad a_{kj}^{ikj} \left(\frac{1}{a_I^{jIK}} \right)_K = a_{Kj}^{iKj} \left(\frac{1}{a_I^{jIk}} \right)_k,$$

образующие вместе с (10.21) пару однородных линейных систем, одну относительно $(1/a_J^{KJi})_K$, $(1/a_J^{kJi})_k$ и вторую относительно $(1/a_I^{jIK})_K$, $(1/a_I^{jIk})_k$. Определители этих систем совпадают. Утверждение означает в точности, что если хотя бы одна система имеет нетривиальное решение, то этот определитель равен нулю. \square

Непосредственным следствием тождеств (10.20) являются следующие формулы.

Утверждение 10.12. Функции a^{ikj} и a^{iKj} имеют вид

$$a^{ikj} = a^{ij} b^k + p^{ik} + p^{kj}, \quad a^{iKj} = a^{ij} b^K + p^{iK} + p^{Kj}, \quad b^k b^K \neq 0. \quad (10.22)$$

Доказательство. Дифференцируя уравнения (10.20), получаем

$$a_{ij}^{ikj} a_J^{kJi} = a_{ij}^{iKj} a_J^{KJi}, \quad a_{ij}^{ikj} a_I^{jIk} = a_{ij}^{iKj} a_I^{jIK}. \quad (10.23)$$

Полагая u_I, u_J, u_K произвольными постоянными, находим

$$a_{ij}^{ikj} = \alpha^{ij} \beta^{ik} = \alpha^{ij} \gamma^{jk} \quad \Rightarrow \quad a_{ij}^{iKj} = \alpha^{ij} b^k$$

и интегрирование ведёт к формуле (10.22). При этом функция a^{ij} определена с точностью до слагаемых $\mu^i + \nu^j$ и умножения на константу, что компенсируется переопределением b и p . Из (10.23) легко видеть, что эту функцию можно выбрать одной и той же обеих формулах, причём множители b можно считать ненулевыми без потери общности. \square

Замечание 10.13. Принимая во внимание все трёхногие формы (10.18), получаем, что представление типа (10.22) имеется для каждой функции a^{lmn} и, таким образом, вид уравнений уже уточнён до функций от двух аргументов. Однако, следует подчеркнуть, что обозначения в формулах (10.22) относятся к некоторой фиксированной паре трёхногих форм (10.19). Если бы мы захотели применять эти формулы для всевозможных наборов индексов сразу, то пришлось бы использовать более сложную нумерацию для функций b и p . В этом не возникнет необходимости, так как мы будем сравнивать трёхногие формы попарно, постепенно уточняя вид функций.

Утверждение 10.14. Если $a_{ij}^{ij} \neq 0$, то функции b^k и b^K либо обе непостоянные, либо обе постоянные, причём трёхногие формы (10.19) имеют соответственно вид

$$a^{ij}b_k + \frac{c^{jI}}{b_K} + \frac{c^{Ji}}{b_K} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a^{ij}b_K + \frac{c^{jI}}{b_k} + \frac{c^{Ji}}{b_k} = 0, \quad (10.24)$$

либо

$$\begin{aligned} (a^{ij} + p^{ik} + p^{kj}) + (c^{jI} + p^{Kj}) + (c^{Ji} + p^{iK}) &= 0 \\ \Leftrightarrow (a^{ij} + p^{iK} + p^{Kj}) + (c^{jI} + p^{kj}) + (c^{Ji} + p^{ik}) &= 0. \end{aligned} \quad (10.25)$$

Доказательство. Равенства (10.23) ещё не исчерпаны, и при $a_{ij}^{ij} \neq 0$ сводятся к соотношениям

$$b^k a_J^{kJi} - b^K a_J^{KJi} = 0, \quad b^k a_I^{jIk} - b^K a_I^{jIK} = 0, \quad (10.26)$$

интегрируя которые получаем

$$a^{kJi} = \frac{c^{Ji}}{b^k} + d^{ki}, \quad a^{jIk} = \frac{c^{jI}}{b^k} + d^{jk}, \quad (10.27)$$

$$a^{KJi} = \frac{c^{Ji}}{b^K} + d^{Ki}, \quad a^{jIK} = \frac{c^{jI}}{b^K} + d^{jK}. \quad (10.28)$$

Таким образом, трёхногие формы (10.19) принимают вид

$$\begin{aligned} (a^{ij}b^k + p^{ik} + p^{kj}) + \left(\frac{c^{jI}}{b^K} + d^{jK}\right) + \left(\frac{c^{Ji}}{b^K} + d^{Ki}\right) &= 0, \\ (a^{ij}b^K + p^{iK} + p^{Kj}) + \left(\frac{c^{jI}}{b^k} + d^{jk}\right) + \left(\frac{c^{Ji}}{b^k} + d^{ki}\right) &= 0. \end{aligned}$$

Легко видеть, что они эквивалентны, если и только если выполняется тождество

$$b^K(p^{ik} + p^{kj} + d^{jK} + d^{Ki}) = b^k(p^{iK} + p^{Kj} + d^{jk} + d^{ki}),$$

откуда следует $b_K^K(p_k^{ik} + p_k^{kj}) = b_k^k(p_K^{iK} + p_K^{Kj})$. Если $b_k^k = 0$, то $p_k^{ik} + p_k^{kj} \neq 0$, так как иначе первая трёхногая форма не содержит u_k , но тогда также $b_K^K = 0$ и, полагая $b^k = b^K = 1$, получаем формулы (10.25).

Если же $b_k^k \neq 0$, то имеем

$$p^{ik} + p^{kj} = b^k(p^i + p^j) + q^i + q^j, \quad p^{iK} + p^{Kj} = b^K(p^i + p^j) + \tilde{q}^i + \tilde{q}^j.$$

Нетрудно видеть, что эти слагаемые можно, не теряя общности, положить равными нулю, переопределяя остальные члены уравнений. Но тогда получаем

$$d^{jK} + d^{Ki} = \frac{d^j + d^i}{b^K}, \quad d^{jk} + d^{ki} = \frac{d^j + d^i}{b^k},$$

и опять-таки эти слагаемые адсорбируются в функциях c^{jI} , c^{Ji} . В результате, трёхногие формы (10.22) приводятся к виду (10.24). \square

Дальнейший анализ требует не столько сложных вычислений, сколько аккуратного перебора. Приняв во внимание развилки, указанные в утверждении 10.14, удобно организовать этот перебор, выделив следующие типы уравнений:

- I. $a_{ikj}^{ikj} \neq 0$ хотя бы для одной тройки i, k, j ;
- II. $a_{ikj}^{ikj} = 0$ для всех i, k, j , но $a_{ij}^{ikj} \neq 0$ хотя бы для одной тройки;
- III. $a_{ij}^{ikj} = 0$ для всех i, k, j .

Эти случаи исчерпывают все логические возможности и их полное описание даёт доказательство теоремы 10.9.

10.3.4 Случай I

Полагая, без потери общности, $b^k = u_k$, $b^K = u_K$, приведём формы (10.24) к виду

$$a^{ij}u_k + \frac{c^{jI}}{u_K} + \frac{c^{Ji}}{u_K} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a^{ij}u_K + \frac{c^{jI}}{u_k} + \frac{c^{Ji}}{u_k} = 0. \quad (10.29)$$

Теперь мы должны сравнивать их с другими трёхногими формами. Воспользуемся тем, что функции a^{jIk} , a^{kJi} также должны иметь вид (10.22). Отсюда немедленно следует, что

$$c^{jI} = c^j b^I + d^I, \quad c^{Ji} = c^i b^J + d^J.$$

Предположим сначала, что $c_J^{jI} \neq 0$ или $c_i^{Ji} \neq 0$. Для определённости, пусть $c_J^{jI} \neq 0$, тогда сравним (10.29) с трёхногой формой (Ijk) : $a^{IKj} + a^{jik} + a^{kJI} = 0$. Применимы формулы (10.27), из которых следует, что

$$a^{jik} = \frac{c^j}{u_k} b^i + q^{ji} + q^{jk},$$

а функция a^{iKj} должна иметь двойное представление

$$a^{iKj} = a^{ij}u_K = \frac{c^{Kj}}{b^i} + d^{ij} \quad \Rightarrow \quad a^{iKj} = \frac{u_K}{b^i b^j}.$$

Так как по условию $a_{ij}^{ij} \neq 0$, то отсюда следует $b_i^i \neq 0$, но тогда и $b_I^I \neq 0$, а уравнение приводится к виду

$$\frac{c^{Kj}}{b^i} + a^{jk}b^I + \frac{c^{kJ}}{b^i} = 0.$$

Вычитая из (10.29), получаем тождество

$$\frac{c^{jI}}{u_k} + \frac{c^{Ji}}{u_k} = a^{jk}b^I + \frac{c^{kJ}}{b^i}$$

при помощи которого несложно показать, что уравнение приводится, с точностью до замен (10.17), к уравнению (T_1) .

Пусть теперь $c_j^{jI} = c_i^{Ji} = 0$, тогда уравнение (10.29) принимает вид

$$\log a^{ij} + \log u_K - \log(c_I + c_J) + \log u_k = 0.$$

Этот случай (после очевидной перенумерации) покрывается следующим утверждением, в котором мы рассматриваем уравнения более общего вида. Это делается, чтобы избежать повторения рассуждений в случаях II и III, также приводящих к таким уравнениям. В данном утверждении не предполагается, что уравнение относится к какому-то из выделенных нами классов. (Анализ ответов, проведённый в разделе 10.3.2, показывает, что уравнение (T_6) действительно относится к классу I, уравнение (T_7) к классу III, а (T_4) к классу I при $\gamma \neq 1$ и классу III при $\gamma = 1$.)

Утверждение 10.15. Пусть одна из трёхногих форм уравнения (10.16) имеет вид

$$p^{IK} + p^{Ki} + p^{ik} + q^j + q^J = 0, \quad (10.30)$$

тогда оно сводится к уравнению (T_4) , (T_6) или (T_7) .

Доказательство. Положив, не теряя общности, $q^j = u_j$, $q^J = u_J$, приведём уравнение к виду

$$p^{IK} + p^{Ki} + p^{ik} + u_j + u_J = 0. \quad (10.31)$$

Докажем, что если $p_{Ki}^{Ki} \neq 0$, то $p_{IK}^{IK} = 0$ и $p_{ik}^{ik} = 0$.

Чтобы доказать первое равенство, сравним пару трёхногих форм (10.19),

$$(ijK) : a^{ikj} + a^{jIK} + a^{KJi} = 0, \quad (ijk) : a^{iKj} + a^{jIk} + a^{kJi} = 0,$$

рассматривая (10.31), как первую из них, с $a^{ikj} = p^{ik} + u_j$, $a^{jIK} = p^{IK}$ и $a^{KJi} = p^{Ki} + u_J$. Из первого тождества (10.20) получаем

$$p_i^{ik} + p_i^{Ki} = \frac{a_i^{iKj} + a_i^{kJi}}{a_J^{kJi}} \Rightarrow p_{Ki}^{Ki} = \frac{a_i^{iKj}}{a_J^{kJi}}. \quad (10.32)$$

Предположим, что $p_{Ki}^{Ki} \neq 0$. Тогда, дифференцируя последнее равенство по u_k, u_J получаем $a_{kJ}^{kJi} = a_{JJ}^{kJi}$, но тогда из первого равенства следует также $a_{Ji}^{kJi} = 0$. Следовательно, $a^{kJi} = \mu u_J + r^{ki}$, то есть форма (ijk) принимает вид

$$a^{iKj} + a^{jIk} + \mu u_J + r^{ki} = 0, \quad \mu \neq 0.$$

Избавляясь, при помощи (10.31), от u_J , получаем тождество

$$a^{iKj} + a^{jIk} - \mu(p^{IK} + p^{Ki} + p^{ik} + u_j) + r^{ki} = 0 \quad \Rightarrow \quad p^{IK} = 0.$$

Второе равенство получается аналогично, если сравнить (10.31) с трёхногой формой (IjK) (достаточно воспользоваться симметрией $i \leftrightarrow K, k \leftrightarrow I$).

Итак, мы показали, что (10.31) имеет вид

$$p^I + p^{Ki} + p^k + u_j + u_J = 0 \quad \text{или} \quad p^{IK} + p^{ik} + u_j + u_J = 0.$$

Но очевидно, что первый случай, после перенумерации $i \rightarrow k \rightarrow I \rightarrow K \rightarrow i$, есть просто частный случай второго. Таким образом, можно считать, что в уравнении (10.31) $p^{Ki} = 0$. Заметим, что при этом его вид становится инвариантным относительно переобозначения $i \leftrightarrow k, I \leftrightarrow K$, не меняющего также форму (ijk) . Теперь, возвращаясь к тождеству (10.32), получаем

$$p_i^{ik} = \frac{a_i^{iKj} + a_i^{kJi}}{a_J^{kJi}} \quad \Rightarrow \quad a_{iK}^{iKj} = a_{ij}^{iKj} = 0$$

и, пользуясь отмеченной симметрией,

$$p_k^{ik} = \frac{a_k^{jIk} + a_k^{kJi}}{a_J^{kJi}} \quad \Rightarrow \quad a_{Ik}^{jIk} = a_{jk}^{jIk} = 0.$$

В результате, мы приводим формы (ijK) и (ijk) к виду

$$p^{IK} + p^{ik} + u_j + u_J = 0, \quad a^{Kj} + a^{jI} + a^{kJi} = 0,$$

и, разрешая относительно u_J , получаем тождество вида

$$p^{IK} + u_j = \varphi(u_k, u_i, a^{Kj} + a^{jI}) \quad \Rightarrow \quad \frac{p_K^{IK}}{p_I^{IK}} = \frac{a_K^{Kj}}{a_I^{jI}} = \frac{\alpha^K}{\alpha^I},$$

где последнее равенство получается при подстановке $u_j = \text{const}$. Делая подходящие точечные замены u_I и u_K , приводим p^{IK} к виду $p^{IK} = P(u_I + u_K)$, при этом $a_K^{Kj} = a_I^{jI} = r^j$. Отсюда легко получить

$$\frac{1}{P'} = \frac{a_j^{Kj} + a_j^{jI}}{r^j}$$

и дважды дифференцируя по u_I или u_K получаем $(1/P')'' = 0$, то есть

$$P(y) = \alpha \log(y + \beta) + \gamma \quad \text{или} \quad P(y) = \alpha y + \beta.$$

Разумеется, для p^{ik} получаем аналогичные формулы (сравнивая с формой (IjK) и после подходящих замен u_i, u_k), то есть $p^{ik} = Q(u_i + u_k)$, где

$$Q(y) = \lambda \log(y + \mu) + \nu \quad \text{или} \quad Q(y) = \lambda y + \mu.$$

Различные комбинации приводят, после очевидных дополнительных замен, к случаям (T_4) , (T_6) , (T_7) . \square

10.3.5 Случай II

Пусть теперь $a_{ikj}^{ikj} = 0$ для всех i, k, j , но $a_{ij}^{ikj} \neq 0$ хотя бы для одной тройки. Для неё получаем пару эквивалентных трёхногих форм (10.25)

$$\begin{aligned} (a^{ij} + p^{ik} + p^{kj}) + (c^{jI} + p^{Kj}) + (c^{Ji} + p^{iK}) &= 0 \\ \Leftrightarrow (a^{ij} + p^{iK} + p^{Kj}) + (c^{jI} + p^{kj}) + (c^{Ji} + p^{ik}) &= 0, \end{aligned}$$

которые теперь нужно сравнивать с другими формами. Здесь удобно произвести выделение подслучаев в зависимости от того, какие из смешанных производных в парах функций p^{ik}, p^{kj} и p^{iK}, p^{Kj} обращаются в ноль.

Предположим сначала, что хотя бы в одной паре смешанные производные каждой функции не равны нулю. Для определённости, пусть $p_{ik}^{ik} \neq 0$, $p_{kj}^{kj} \neq 0$. Заметим, что из формулы (10.26) при постоянных b^k, b^K следует импликация

$$a_{ij}^{ikj} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad a_{IK}^{jIK} = a_{KJ}^{KJi} = a_{Ik}^{jIk} = a_{kJ}^{kJi} = 0.$$

Применяя её ко второй из приведённых выше форм, имеем

$$\begin{aligned} a_{jIk}^{jIk} = 0, \quad a_{jk}^{jIk} = p_{kj}^{kj} \neq 0 &\Rightarrow a_{Ji}^{kJi} = a_{iK}^{iKj} = 0 \Rightarrow c_{Ji}^{Ji} = p_{iK}^{iK} = 0; \\ a_{kji}^{kji} = 0, \quad a_{ki}^{kji} = p_{ik}^{ik} \neq 0 &\Rightarrow a_{jI}^{jIk} = a_{Kj}^{iKj} = 0 \Rightarrow c_{jI}^{jI} = p_{Kj}^{Kj} = 0, \end{aligned}$$

откуда следует, что уравнение имеет вид

$$a^{ij} + p^{ik} + p^{kj} + q^I + q^J + q^K = 0$$

и после замены $q^n \rightarrow u_n$ приходим к уравнению (10.33) ниже.

Далее, если предыдущий случай не выполнен, то предположим, что в одной из пар p^{ik}, p^{kj} или p^{iK}, p^{Kj} имеется ровно одна функция, для которой смешанные производные равны нулю. Для определённости, пусть $p_{ik}^{ik} \neq 0$ и $p_{kj}^{kj} = 0$. Тогда, как и раньше, $c_{jI}^{jI} = p_{Kj}^{Kj} = 0$, и в результате мы приходим к уравнению вида

$$a^{ij} + p^{ik} + q^I + c^{Ji} + p^{iK} = 0,$$

или, после переобозначений, уравнению (10.34) ниже.

Наконец, если равны нулю все смешанные производные $p_{ik}^{ik}, p_{kj}^{kj}, p_{iK}^{iK}, p_{Kj}^{Kj}$, то уравнение относится к специальному типу, уже разобранным в утверждении 10.15:

$$a^{ij} + q^k + c^{jI} + q^K + c^{Ji} = 0;$$

как мы видели, среди таких уравнений нет уравнений типа II.

Таким образом, случай II сведён к уравнениям двух специальных типов; их описание даётся в следующих двух утверждениях, которые приводят к уравнению (T₅) в качестве единственного ответа.

Утверждение 10.16. Не существует уравнений класса II, у которых одна из трёхногих форм имеет вид

$$p^{ij} + p^{jk} + p^{ki} + u_I + u_J + u_K = 0. \quad (10.33)$$

Доказательство. Будем сравнивать (10.33) с трёхногой формой

$$(IJK) : a^{IkJ} + a^{JiK} + a^{KjI} = 0.$$

Разрешив уравнения относительно u_k , получаем тождество вида

$$f(u_I, u_J, a^{JiK} + a^{KjI}) = g(u_i, u_j, u_I + u_J + u_K),$$

откуда имеем

$$\log a_i^{JiK} - \log a_j^{KjI} = \log g_i - \log g_j = h(u_i, u_j, u_I + u_J + u_K).$$

Дифференцируя по u_I , u_J и u_K , и используя симметрию вида уравнения относительно перестановок i, j, k , получаем отсюда соотношения

$$\begin{aligned} -\frac{a_j^{KjI}}{a_j^{KjI}} &= \frac{a_i^{JiK}}{a_i^{JiK}} = \frac{a_i^{JiK}}{a_i^{JiK}} - \frac{a_{Kj}^{KjI}}{a_j^{KjI}} = \nu^K, \\ -\frac{a_k^{IkJ}}{a_k^{IkJ}} &= \frac{a_j^{KjI}}{a_j^{KjI}} = \frac{a_j^{KjI}}{a_j^{KjI}} - \frac{a_{Ik}^{IkJ}}{a_k^{IkJ}} = \lambda^I, \\ -\frac{a_i^{JiK}}{a_i^{JiK}} &= \frac{a_k^{IkJ}}{a_k^{IkJ}} = \frac{a_k^{IkJ}}{a_k^{IkJ}} - \frac{a_{Ji}^{JiK}}{a_i^{JiK}} = \mu^J, \end{aligned}$$

где λ^I , μ^J и ν^K обозначают общие значения соответствующих выражений. Так как, по условию, уравнение относится ко второму классу, то $a_{JiK}^{JiK} = 0$ и дифференцируя по u_J последнее равенство в первом уравнении, получаем

$$\mu^J \nu^K = -\frac{a_{iK}^{JiK} a_{Ji}^{JiK}}{(a_i^{JiK})^2} = 0$$

и аналогично $\nu^K \lambda^I = \lambda^I \mu^J = 0$; так как, кроме того, $\lambda^I + \mu^J + \nu^K = 0$, то все три функции, на самом деле, равны нулю. Это означает, что форма (IJK), после точечной замены u_i, u_j, u_k , приводится к виду, аналогичному (10.33):

$$a^{IJ} + a^{JK} + a^{KI} + u_i + u_j + u_k = 0.$$

Опять разрешая обе трёхногие формы относительно u_k , получаем тождество вида

$$a^{IJ} + a^{JK} + a^{KI} + u_i + u_j = g(u_i, u_j, u_I + u_J + u_K),$$

откуда

$$a_I^{IJ} + a_I^{KI} = a_J^{IJ} + a_J^{JK} = a_K^{JK} + a_K^{KI}.$$

Эти уравнения легко решаются и мы приходим к трёхногой форме

$$\lambda(u_I + u_J + u_K)^2 + \mu(u_I + u_J + u_K) + \nu + u_i + u_j + u_k = 0.$$

Случай $\lambda = 0$ нас сейчас не интересует, так как приводит к уравнению (T_7) , которое не относится к классу II, а при $\lambda \neq 0$, как несложно доказать, данная форма не эквивалентна уравнению вида (10.33). \square

Утверждение 10.17. Уравнения класса II, у которых одна из трёхногих форм имеет вид

$$p^{ij} + p^{ik} + p^{iJ} + p^{iK} + u_I = 0, \quad (10.34)$$

сводятся к уравнению (T_5) .

Доказательство. Сравнивая с трёхногой формой

$$(IJK) : a^{Ikj} + a^{JiK} + a^{KjI} = 0,$$

получаем

$$\frac{p_J^{iJ}}{p_k^{ik}} = \frac{a_J^{JiK} + a_J^{Ikj}}{a_k^{Ikj}}, \quad \frac{p_K^{iK}}{p_j^{ij}} = \frac{a_K^{JiK} + a_K^{KjI}}{a_j^{KjI}}. \quad (10.35)$$

Отсюда следует $a_{JK}^{JiK} = 0$. Далее, предположим, что $a_{Ji}^{JiK} \neq 0$. Тогда при дифференцировании первого равенства по u_I и u_i получаем $a_{Ik}^{Ikj} = a_{IJ}^{Ikj} = 0$, то есть трёхногая форма имеет вид

$$a^{kJ} + a^{JiK} + a^{KjI} = 0.$$

Разрешая уравнения относительно u_I , получаем

$$p^{ij} + p^{ik} + p^{iJ} + p^{iK} = f(u_K, u_j, a^{kJ} + a^{JiK}) \quad (10.36)$$

и, применение $\partial_j \partial_k$ даёт $0 = f'_j$, где штрих обозначает производную f по третьему аргументу, но тогда также $p_{ij}^{ij} = 0$.

Меняя ролями j и k , приходим к импликациям

$$a_{Ji}^{JiK} \neq 0 \Rightarrow a_{Ik}^{Ikj} = a_{IJ}^{Ikj} = p_{ij}^{ij} = 0; \quad a_{iK}^{JiK} \neq 0 \Rightarrow a_{jI}^{KjI} = a_{KI}^{KjI} = p_{ik}^{ik} = 0.$$

Если одновременно $a_{Ji}^{JiK} \neq 0$ и $a_{iK}^{JiK} \neq 0$, то $p_{ij}^{ij} = p_{ik}^{ik} = 0$ и уравнение приводится к виду

$$p^j + p^k + p^{iJ} + p^{iK} + u_I = 0,$$

но это, с точностью до переобозначений, частный случай предыдущего специального уравнения (10.33). Пусть, например, $a_{J_i}^{J_i K} \neq 0$ и $a_{iK}^{J_i K} = 0$. Тогда выполняется (10.36) и, применяя $\partial_J \partial_K$, получаем $0 = f'_K$ (напомним, что $a_{JK}^{J_i K} = 0$), но тогда также $p_{iK}^{iK} = 0$. При этом опять приходим к уравнению типа (10.33):

$$p^j + p^{ik} + p^{iJ} + p^K + u_I = 0.$$

Таким образом, осталась единственная возможность $a_{J_i}^{J_i K} = a_{iK}^{J_i K} = 0$. В этом случае из (10.35) следует

$$\left(\begin{array}{c} p_J^{iJ} \\ p_k^{ik} \end{array} \right)_i = \left(\begin{array}{c} p_K^{iK} \\ p_j^{ij} \end{array} \right)_i = 0$$

и, используя симметрию вида уравнения относительно замены $k \leftrightarrow K$ (то есть, сравнивая (10.34) с формой (IJK) вместо (IJK)), получаем также

$$\left(\begin{array}{c} p_J^{iJ} \\ p_K^{iK} \end{array} \right)_i = \left(\begin{array}{c} p_k^{ik} \\ p_j^{ij} \end{array} \right)_i = 0.$$

Из всех этих равенств следует

$$p^{ij} + p^{ik} + p^{iJ} + p^{iK} = (q^j + q^k + q^J + q^K)r^i + s^i,$$

причём $r_i \neq \text{const}$, так как иначе приходим к уравнению (T₇), которое не относится к классу II. С точностью до замен переменных, уравнение (10.34) приводится к виду

$$u_j + u_k + u_J + u_K = u_I u_i + s^i.$$

Форма (IJK) при этом имеет вид $a^{IkJ} + a^i + a^{KjI} = 0$ и, разрешая уравнения относительно u_j , получаем

$$u_I u_i + s^i - u_k - u_J - u_K = f(u_K, u_I, a^{IkJ} + a^i) \Rightarrow u_I + s^i = -\frac{a^i}{a_k^{IkJ}}.$$

Дифференцируя последнее равенство по u_i и u_I , получаем $a_{ii}^i = 0$, но тогда $s_{ii}^i = 0$ и дополнительная линейная замена переменных приводит к уравнению (T₅). \square

10.3.6 Случай III

В этом случае удобно сменить обозначения и переписать трёхногие формы (10.18) в виде

<i>грани:</i>	<i>уравнения:</i>	
123, 456	$p^{14} + p^{42} + p^{26} + p^{63} + p^{35} + p^{51} = 0,$	(10.37)
124, 356	$q^{13} + q^{32} + q^{26} + q^{64} + q^{45} + q^{51} = 0,$	
135, 246	$r^{63} + r^{32} + r^{21} + r^{14} + r^{45} + r^{56} = 0,$	
145, 236	$s^{64} + s^{42} + s^{21} + s^{13} + s^{35} + s^{56} = 0$	

(за счёт перегруппировки слагаемых каждое равенство определяет сразу две трёхногие формы, отвечающие паре противоположных граней).

Утверждение 10.18. Каждый член в формах (10.37), как функция $f(x, y)$ от своих аргументов имеет вид

$$f = a(x)b(y) + c(x) + d(y) \quad \text{или} \quad f = \rho \log(a(x) + b(y)) + c(x) + d(y).$$

Доказательство. Сначала докажем, что выполняются уравнения вида

$$f_x = \frac{\alpha(x)}{\beta(x) + \delta(y)} + \gamma(x), \quad f_y = \frac{\lambda(y)}{\mu(y) + \varkappa(x)} + \nu(y). \quad (10.38)$$

В силу симметрии формул (10.37) достаточно сделать это для $f = p^{14}$, $x = u_1$, $y = u_4$. Воспользуемся первым тождеством (10.20), при $(i, j, k) = (1, 2, 3)$ и $(4, 5, 6)$:

$$\frac{a_1^{132} + a_1^{451}}{a_5^{451}} = \frac{a_1^{142} + a_1^{351}}{a_5^{351}}, \quad \frac{a_4^{465} + a_4^{124}}{a_2^{124}} = \frac{a_4^{415} + a_4^{624}}{a_2^{624}}.$$

Это даёт

$$\frac{q_1^{13} + q_1^{51}}{q_5^{45} + q_5^{51}} = \frac{p_1^{14} + p_1^{51}}{p_5^{35} + p_5^{51}}, \quad \frac{s_4^{64} + s_4^{42}}{s_2^{21} + s_2^{42}} = \frac{p_4^{14} + p_4^{42}}{p_2^{42} + p_2^{26}} \quad (10.39)$$

и, полагая постоянными все переменные, кроме u_1, u_4 , приходим к (10.38).

Далее, вычисляя перекрёстные производные, получаем

$$-f_{xy} = \frac{\alpha(x)\delta'(y)}{(\beta(x) + \delta(y))^2} = \frac{\lambda(y)\varkappa'(x)}{(\mu(y) + \varkappa(x))^2}.$$

Если хотя бы одна из функций $\alpha, \delta', \lambda, \varkappa'$ равна нулю, то получаем $f = c(x) + d(y)$. Если это не так, то логарифмируя и применяя $\partial_x \partial_y$, получаем

$$\frac{\beta'(x)\delta'(y)}{(\beta(x) + \delta(y))^2} = \frac{\mu'(y)\varkappa'(x)}{(\mu(y) + \varkappa(x))^2}.$$

Если $\beta' = \mu' = 0$, то уравнения (10.38) легко интегрируются и дают $f = a(x)b(y) + c(x) + d(y)$. Наконец, если β' и μ' не равны нулю, то отношение последних равенств даёт $\alpha/\beta' = \lambda/\mu' = \text{const}$ и интегрирование завершает доказательство. \square

Доказанное утверждение пока ещё не очень облегчает задачу, так как неизвестно, как связаны функции f , отвечающие разным членам форм (10.37). Для начала мы отсеем случай, когда эти формы содержат слишком много членов вида $c(x) + d(y)$.

Утверждение 10.19. Если члены с нулевыми перекрёстными производными имеются в каждой форме (10.37), то тогда в одной из форм таких членов не меньше четырёх и она является частным случаем уравнения вида (10.30).

Доказательство. Дифференцируя, получаем из (10.39)

$$s_{21}^{21} = 0 \Leftrightarrow p_{14}^{14} = 0 \Leftrightarrow q_{45}^{45} = 0,$$

то есть, наличие члена с нулевыми перекрёстными производными в одной форме ведёт к их наличию ещё в двух формах. Продолжая эту цепочку, нетрудно получить цикл из импликаций

$$\begin{aligned} p_{14}^{14} = 0 &\Rightarrow q_{45}^{45} = 0 \Rightarrow s_{56}^{56} = 0 \\ &\Rightarrow p_{63}^{63} = 0 \Rightarrow q_{32}^{32} = 0 \Rightarrow s_{21}^{21} = 0 \Rightarrow p_{14}^{14} = 0, \end{aligned}$$

не содержащий членов r^{ij} . Разумеется, все формы равноправны и, стартуя, например, с r^{14} , получаем цикл

$$\begin{aligned} r_{14}^{14} = 0 &\Rightarrow p_{42}^{42} = 0 \Rightarrow q_{26}^{26} = 0 \\ &\Rightarrow r_{63}^{63} = 0 \Rightarrow p_{35}^{35} = 0 \Rightarrow q_{51}^{51} = 0 \Rightarrow r_{14}^{14} = 0 \end{aligned}$$

не содержащий членов s^{ij} . Отсюда видно, что если члены с нулевыми перекрёстными производными есть в каждой форме, то в одной из них их накапливается по меньшей мере четыре. Например, если зануляются оба выписанных цикла, то $p_{14}^{14} = p_{63}^{63} = p_{42}^{42} = p_{35}^{35} = 0$, и тогда первое уравнение (10.37) принимает вид $p^4 + p^{26} + p^3 + p^{51} = 0$. \square

Для сравнения членов вида, указанного в утверждении 10.18, применим следующую лемму. Отметим, что в ней функция F определяет общее решение уравнения Лиувилля $(\log F)_{xy} = -2F$.

Лемма 10.20. Все решения функционального уравнения

$$\frac{g_x(x, z)h_y(y, z)}{(g(x, z) - h(y, z))^2} = F(x, y) \neq 0$$

описываются формулами

$$g = \frac{\delta(z)}{\gamma(z) - \alpha(x)} + \varepsilon(z), \quad h = \frac{\delta(z)}{\gamma(z) - \beta(y)} + \varepsilon(z), \quad F = \frac{\alpha'(x)\beta'(y)}{(\alpha(x) - \beta(y))^2}.$$

Доказательство. Интегрируя по x , получаем

$$\frac{h_y(y, z)}{g(x, z) - h(y, z)} = \tilde{h}(y, z) - \int F(x, y) dx.$$

Полагая $y = y_0 = \text{const}$, приходим к формуле вида

$$\frac{\delta(z)}{g(x, z) - \varepsilon(z)} = \gamma(z) - \alpha(x),$$

причём, так как $h_y \neq 0$, то y_0 можно выбрать так, чтобы числитель и знаменатель дроби не обращались тождественно в ноль. Отсюда находим выражение

для g . Далее, воспользуемся инвариантностью уравнения относительно невырожденных дробно-линейных замен

$$g \rightarrow \frac{p(z)g + q(z)}{r(z)g + s(z)}, \quad h \rightarrow \frac{p(z)h + q(z)}{r(z)h + s(z)}, \quad F \rightarrow F$$

и приведём g к виду $g = \alpha(x)$, $\alpha' \neq 0$. Тогда имеем

$$\begin{aligned} \frac{\alpha'(x)h_y(y, z)}{(\alpha(x) - h(y, z))^2} &= F(x, y) \\ \Rightarrow \frac{h_{yz}}{h_y} + \frac{2h_z}{h - \alpha(x)} &= 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{h_z \alpha'}{(h - \alpha(x))^2} = 0, \end{aligned}$$

откуда $h = \beta(y)$, и обратная дробно-линейная замена завершает доказательство. \square

Теперь мы можем разобрать случай, когда хотя бы в одной из форм (10.37) каждый член не представим в виде суммы функций одной переменной. Для определённости, пусть это будет первая форма (10.37).

Утверждение 10.21. Если $p_{ij}^{ij} \neq 0$ для всех i, j , то уравнение (10.16) эквивалентно (T_2) или (T_3) .

Доказательство. Применим утверждение 10.11. Имеем

$$a^{ikj} = p^{ik} + p^{kj}, \quad a^{jIK} = p^{jI} + p^{IK}, \quad a^{KJi} = p^{KJ} + p^{Ji}$$

и, так как, по предположению, $a_{IK}^{jIK} = p_{IK}^{IK} \neq 0$, то выполняется равенство

$$\frac{p_{ik}^{ik} p_{kj}^{kj}}{(p_k^{ik} + p_k^{kj})^2} = \frac{a_{iK}^{iKj} a_{Kj}^{iKj}}{(a_K^{iKj})^2} = A^{ij}.$$

Тогда, согласно лемме 10.20, имеем

$$p_k^{ik} + p_k^{kj} = \frac{\delta^k}{\gamma^k - \alpha^i} - \frac{\delta^k}{\gamma^k - \beta^j},$$

то есть, представления из утверждения 10.18 для p^{ik} и p^{kj} согласованы, а именно:

$$\text{если } p^{ik} = a^i b^k + c^i + d^k, \text{ то } p^{kj} = a^j b^k + c^j - d^k;$$

$$\text{если } p^{ik} = \rho \log(a^i + b^k) + c^i + d^k, \text{ то } p^{kj} = -\rho \log(a^j + b^k) + c^j - d^k.$$

Применяя доказанное к паре p^{kj} , p^{jI} и далее по циклу, получаем, соответственно, представления

$$\begin{aligned} p^{ik} &= a^i b^k + c^i + d^k, & p^{ik} &= \rho \log(a^i + b^k) + c^i + d^k, \\ p^{kj} &= a^j b^k + c^j - d^k, & p^{kj} &= -\rho \log(a^j + b^k) + c^j - d^k, \\ p^{jI} &= a^j b^I - c^j + d^I, & p^{jI} &= \rho \log(a^j + b^I) - c^j + d^I, \\ p^{IK} &= a^K b^I + c^K - d^I, & p^{IK} &= -\rho \log(a^K + b^I) + c^K - d^I, \\ p^{KJ} &= a^K b^J - c^K + d^J, & p^{KJ} &= \rho \log(a^K + b^J) - c^K + d^J, \\ p^{Ji} &= \hat{a}^i b^J + \hat{c}^i - d^J, & p^{Ji} &= -\rho \log(\hat{a}^i + b^J) + \hat{c}^i - d^J, \end{aligned} \quad \text{или}$$

причём из сравнения первого и последнего членов следует, что

$$\hat{a}^i = \varepsilon a^i, \quad \hat{c}^i = -c^i + \delta, \quad \text{или} \quad \tilde{a}^i = \varepsilon a^i + \delta, \quad \tilde{c}^i = -c^i + \sigma.$$

Складывая, получаем, после точечных замен и перенумерации, уравнения вида

$$\begin{aligned} u_1 u_4 + u_4 u_2 + u_2 u_6 + u_6 u_3 + u_3 u_5 + \varepsilon u_5 u_1 &= \delta, \\ (u_1 + u_4)(u_2 + u_6)(u_3 + u_5) &= \sigma(u_4 + u_2)(u_6 + u_3)(u_5 + \varepsilon u_1 + \delta). \end{aligned}$$

Чтобы уточнить постоянные, разрешим эти уравнения относительно одной из переменных, скажем $u_6 = f(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5)$, и сравним со второй формой (10.37), из которой следует, что для u_6 имеется выражение вида

$$u_6 = \varphi(u_2, u_4, q^{13} + q^{32} + q^{45} + q^{51}).$$

Отсюда легко получить, что должно удовлетворяться уравнение $(\log(f_3/f_5))_{24} = 0$, что для заданной функции f допускает прямую, хотя и несколько громоздкую проверку. В результате, оказывается, что константы определяются однозначно и мы приходим к уравнениям

$$\begin{aligned} u_1 u_4 + u_4 u_2 + u_2 u_6 + u_6 u_3 + u_3 u_5 - u_5 u_1 &= 0, \\ (u_1 + u_4)(u_2 + u_6)(u_3 + u_5) &= (u_4 + u_2)(u_6 + u_3)(u_5 + u_1). \end{aligned}$$

Первое сводится к (T_2) после дополнительной замены $u_2 \rightarrow -u_2$, $u_6 \rightarrow -u_6$, второе совпадает с (T_3) после смены знаков у u_4, u_5, u_6 . \square

Доказательство теоремы 10.9 завершено.

10.4 Классификация совместных пятёрок

10.4.1 Отделение несовместных уравнений

Теперь мы должны комбинировать трёхногие уравнения в совместные тройки/пятёрки, с учётом того, что ноги на общих гранях октаэдров совпадают, согласно утверждению 10.7. При этом таблица 10.2 позволяет сразу исключить некоторые заведомо несовместные комбинации. Например, уравнение типа (T_1) может сочетаться либо с уравнениями такого же типа, либо с уравнением типа (T_6) . Разумеется, в обоих случаях надо ещё разбираться, сочетается или нет, но то, что другие комбинации невозможны, вытекает из следующего предложения.

Утверждение 10.22. Функции

$$\begin{aligned} &xyz, \quad xy, \quad y, \quad (x+z)^k y, \quad (x+y)z, \\ &y + \log(x+z), \quad \log(x+y) - \log(y+z), \quad \log(x+y), \end{aligned}$$

где $k \neq 0$, попарно неэквиваленты по модулю преобразований

$$\tilde{a}(x, y, z) = \gamma a(f(x), g(y), h(z)) + \mu(x) + \nu(z),$$

с непостоянными f, g, h , а также замены $x \leftrightarrow z$. При этом функции $(x+z)^k y$ с разными k не эквивалентны друг другу.

Доказательство. Доказательства однотипны, рассмотрим несколько пар для примера. То, что не существует преобразований указанного вида, таких, что

$$\gamma g(y) + \gamma \log(f(x) + h(z)) + \mu(x) + \nu(z) = \log \frac{x+y}{y+z},$$

следует немедленно при дифференцировании по x и z .

Допустим, что

$$\gamma f(x)g(y)h(z) + \mu(x) + \nu(z) = (x+y)z,$$

тогда дифференцирование даёт $\gamma f'(x)g'(y)h'(z) = 0$.

Допустим, что

$$\gamma (f(x) + h(z))^k g(y) + \mu(x) + \nu(z) = (x+z)^m y.$$

Отсюда получаем, что $g(y) = \alpha y + \beta$ и далее $\alpha \gamma (f(x) + h(z))^k = (x+z)^m$, то есть $f(x) + h(z) = \text{const}(x+z)^{m/k}$. Дифференцируя по x, z получаем $m = k$. \square

Более аккуратный анализ показывает, что на самом деле спарить уравнения (T_1) и (T_6) нельзя, несмотря на общую ногу. Точнее, имеет место следующее утверждение.

Утверждение 10.23. Не существует совместных троек, у которых одно из уравнений относится к типу (T_4) при $\gamma \neq 1$, (T_5) или (T_6) .

Доказательство. Доказательство использует то, что каждое из перечисленных уравнений обладает уникальной ногой, не встречающейся в уравнениях других типов $(y(x+z)^\gamma, (x+y)z$ и $y + \log(x+z)$, соответственно). В силу утверждения 10.7, отсюда следует, что по крайней мере ещё одно уравнение, совместное с рассматриваемым, относится к тому же типу. Так как, согласно определению совместности все координаты в \mathbb{Z}^4 равноправны, то, не теряя общности, можно считать, что совместная тройка задаётся уравнениями (10.11), причём уникальной ноге отвечает функция $a(u_1, u_4, u_{14})$ в первом и втором уравнениях. Более того, в силу уникальности ноги сами эти уравнения тоже восстанавливаются с точностью до замен (10.17), то есть, определяются функции $b(u_2, u_4, u_{24})$ и $c(u_3, u_4, u_{34})$. Оказывается, что при этом в разности $b - c$ зависимость от u_4 сокращается, то есть третье уравнение (10.11) оказывается приводимым, что противоречит предположениям.

Далее U_i обозначает произвольную непостоянную функцию от u_i .

Уравнение (T_4) при $\gamma \neq 1$. Рассмотрим уравнение

$$U_1 U_{24} = (U_2 + U_{12})(U_4 + U_{14})^{-\gamma}.$$

Трёхногая форма относительно грани $(4, 14, 24)$ имеет вид

$$U_1(U_4 + U_{14})^\gamma - U_2/U_{24} = U_{12}/U_{24}$$

и, сравнивая с первым уравнением (10.11), получаем

$$\begin{aligned} a(u_1, u_4, u_{14}) &= U_1(U_4 + U_{14})^\gamma + \lambda(u_{14}) + \mu(u_4), \\ b(u_2, u_4, u_{24}) &= U_2/U_{24} + \mu(u_4) + \nu(u_{24}). \end{aligned}$$

При этом a в таблице 10.2 отвечает уникальная функция $y(x+z)^\gamma$, то есть второе уравнение (10.11) относится к тому же типу и имеет трёхногую форму

$$U_3/U_{34} - U_1(U_4 + U_{14})^\gamma = -U_{13}/U_{34}.$$

Отсюда $c(u_3, u_4, u_{34}) = U_3/U_{34} + \mu(u_4) + \kappa(u_{34})$, но тогда во третьем уравнении (10.11) члены $\mu(u_4)$ сокращаются.

Уравнение (T_5) . Рассмотрим уравнение

$$U_2 U_{14} = U_1 + U_4 + U_{24} + U_{12} \quad \Rightarrow \quad \frac{U_1 + U_4}{U_{14}} - U_2 = -\frac{U_{24} + U_{12}}{U_{14}}.$$

Отсюда имеем

$$a(u_1, u_4, u_{14}) = \frac{U_1 + U_4}{U_{14}} + \lambda(u_{14}) + \mu(u_4), \quad b(u_2, u_4, u_{24}) = U_2 + \mu(u_4) + \nu(u_{24}).$$

В силу уникальности a второе уравнение (10.11) должно также относиться к типу (T_5) и иметь трёхногую форму

$$U_3 - \frac{U_1 + U_4}{U_{14}} = \frac{U_{34} + U_{23}}{U_{14}},$$

откуда $c(u_3, u_4, u_{34}) = U_3 + \mu(u_4) + \kappa(u_{34})$, и третье уравнение (10.11) не содержит u_4 .

Уравнение (T_6) . Рассмотрим уравнение

$$U_1 U_2 U_{12} U_{24} = U_4 + U_{14} \quad \Rightarrow \quad (\log(U_4 + U_{14}) - \log U_1) - \log U_2 = \log(U_{12} U_{24}).$$

Отсюда имеем

$$\begin{aligned} a(u_1, u_4, u_{14}) &= \log(U_4 + U_{14}) - \log U_1 + \lambda(u_{14}) + \mu(u_4), \\ b(u_2, u_4, u_{24}) &= \log U_2 + \mu(u_4) + \nu(u_{24}). \end{aligned}$$

В силу уникальности a второе уравнение (10.11) также относится к типу (T_6) и имеет трёхногую форму

$$\log U_3 - (\log(U_4 + U_{14}) - \log U_1) = -\log(U_{13} U_{34}),$$

откуда $c(u_3, u_4, u_{34}) = \log U_3 + \mu(u_4) + \kappa(u_{34})$ и, как и в предыдущих случаях, третье уравнение (10.11) не содержит u_4 . \square

10.4.2 Завершение классификации

Заметим, что после исключения из таблицы 10.2 уравнений (T_5) и (T_6) уникальной становится нога xy , однако рассуждения по образцу утверждения 10.23 уже не проходят. Как видно из доказательства следующей теоремы, завершающей наше исследование, чтобы разобраться с оставшимися случаями, одних формул (10.11) недостаточно и приходится сравнивать все трёхногие представления (10.14) и (10.15). По этой причине мы используем здесь более симметричную индексацию (10.10).

Прежде чем формулировать результат, уточним, какие преобразования используются для приведения уравнений к стандартному виду. Прежде всего, это автономные точечные замены $u \rightarrow U(u)$, одни и те же в каждом узле решётки. Если пользоваться только ими, то ответ будет содержать довольно много произвольных постоянных параметров. Оказывается, что все эти параметры несущественны и уничтожаются при помощи неавтономных замен, отличающихся от узла к узлу решётки. Вообще говоря, при такой замене уравнение тоже становится неавтономным и следует допускать только такие специальные замены, когда этого не происходит. Их существование связано с наличием у уравнения какой-либо группы симметрий. Например, если уравнение инвариантно относительно однопараметрической группы сдвигов $u \rightarrow u + a$, то оно допускает неавтономные замены вида $u(i, j, k) \rightarrow u(i, j, k) + \alpha i + \beta j + \gamma k$, при этом параметры α, β, γ входят в преобразованное уравнение и могут быть использованы для его упрощения (или усложнения, что встречается в некоторых работах). Аналогичные замены имеются во всех рассматриваемых случаях, и как уже сказано, их учёт позволяет полностью исключить все параметры. Отметим, что это характерно и для непрерывных трёхмерных уравнений.

Теорема 10.24. Совместная пятёрка неприводимых нелинейных трансляционно-инвариантных уравнений типа ΔKP эквивалентна, с точностью до неавтономных точечных замен, одной из пятёрок, перечисленных в списке 10.3 (разные индексы отвечают сдвигам по разным координатным направлениям; при реализации решётки $Q(A_4)$ как \mathbb{Z}^4 индекс 0 просто опускается).

Доказательство. Общая схема заключается в том, что мы начинаем с одного трёхногого уравнения, заменяя переменные u_{ij} на неизвестные пока непостоянные функции $U_{ij} = U_{ij}(u_{ij})$. Сравнивая члены в трёхногих формах (10.14), удаётся определить вид всей совместной пятёрки, с точностью до десяти произвольных функций U_{01}, \dots, U_{34} . Чтобы уточнить вид этих функций, используется вторая группа трёхногих форм (10.15). Сравнение членов позволяет показать, что все функции U_{ij} связаны друг с другом теми или иными дробно-линейными преобразованиями, в зависимости от типов уравнений. Точечная замена позволяет просто считать, что функции U_{ij} дробно-линейны, при этом их коэффициенты связаны некоторыми соотношениями. Разрешив их, приходим к совместной системе, содержащей некоторое количество свободных параметров; используя неавтономные замены получаем окончательный ответ.

$$u_{ij}u_{km} - u_{ik}u_{jm} + u_{im}u_{jk} = 0, \quad 0 \leq i < j < k < m \leq 4; \quad (\chi_1^5)$$

$$\frac{(u_{ij} - u_{ik})(u_{jk} - u_{km})(u_{jm} - u_{im})}{(u_{ik} - u_{jk})(u_{km} - u_{jm})(u_{im} - u_{ij})} = -1, \quad i, j, k, m \in \{0, 1, 2, 3, 4\}; \quad (\chi_2^5)$$

$$(u_{ik} - u_{ij})u_{0i} + (u_{ij} - u_{jk})u_{0j} + (u_{jk} - u_{ik})u_{0k} = 0, \quad i, j, k \in \{1, 2, 3, 4\},$$

$$\frac{(u_{12} - u_{13})(u_{23} - u_{34})(u_{24} - u_{14})}{(u_{13} - u_{23})(u_{34} - u_{24})(u_{14} - u_{12})} = -1; \quad (\chi_3^4 \chi_2)$$

$$\frac{u_{ik} - u_{ij}}{u_{0i}} + \frac{u_{ij} - u_{jk}}{u_{0j}} + \frac{u_{jk} - u_{ik}}{u_{0k}} = 0, \quad i, j, k \in \{1, 2, 3, 4\},$$

$$\frac{(u_{12} - u_{13})(u_{23} - u_{34})(u_{24} - u_{14})}{(u_{13} - u_{23})(u_{34} - u_{24})(u_{14} - u_{12})} = -1; \quad (\chi_4^4 \chi_2)$$

$$\frac{u_{i4} - u_{j4}}{u_{04}} = u_{ij} \left(\frac{1}{u_{0j}} - \frac{1}{u_{0i}} \right), \quad i, j = 1, 2, 3,$$

$$\frac{u_{13} - u_{12}}{u_{01}} + \frac{u_{12} - u_{23}}{u_{02}} + \frac{u_{23} - u_{13}}{u_{03}} = 0,$$

$$\frac{u_{14} - u_{24}}{u_{12}} + \frac{u_{24} - u_{34}}{u_{23}} + \frac{u_{34} - u_{14}}{u_{13}} = 0. \quad (\chi_5^3 \chi_4^2)$$

Список 10.3. Совместные пятёрки уравнений типа Δ КР

Уравнение (T_1) , согласно таблице 10.2, может быть совместно лишь с уравнениями этого же типа. Уравнения (10.14) при $(i, j, k, m, n) = (1, 2, 3, 4, 0)$ принимают вид

$$\begin{aligned} \langle 1 \rangle : \quad & \frac{U_{24}}{U_{02}U_{04}} - \frac{U_{34}}{U_{03}U_{04}} = \frac{U_{23}}{U_{02}U_{03}}, \\ \langle 2 \rangle : \quad & \frac{U_{34}}{U_{03}U_{04}} - \frac{U_{14}}{U_{01}U_{04}} = \frac{U_{13}}{U_{01}U_{03}}, \\ \langle 3 \rangle : \quad & \frac{U_{14}}{U_{01}U_{04}} - \frac{U_{24}}{U_{02}U_{04}} = \frac{U_{12}}{U_{01}U_{02}}. \end{aligned} \quad (10.40)$$

Действительно, в первом уравнении функции U_{ij} можно выбрать без ограничений; тем самым во втором уравнении будет определено первое слагаемое. Но тогда во втором слагаемом $\langle 2 \rangle$ зависимость от u_{04} известна, а u_{14} и u_{01} , которых в первом уравнении не было, входят через новые произвольные функции. Продолжая аналогично, выражаем все члены в уравнениях через десять произвольных функций U_{ij} . При этом в качестве следствия получаем

$$\langle 4 \rangle : \quad U_{12}U_{03} + U_{13}U_{02} + U_{23}U_{01} = 0, \quad \langle 0 \rangle : \quad U_{12}U_{34} + U_{13}U_{24} + U_{14}U_{23} = 0.$$

Тем самым, уравнения (10.14) исчерпаны. Для определения функций U_{ij} следует сравнить уравнения (10.40) в форме (10.15). Переходя к новым трёхногим формам, имеем:

$$\begin{aligned} T_1 & \left(\frac{U_{03}}{U_{23}U_{34}} - \frac{U_{02}}{U_{23}U_{24}} = \frac{U_{04}}{U_{24}U_{34}} \right), \\ T_2 & \left(\frac{U_{01}}{U_{13}U_{14}} - \frac{U_{03}}{U_{13}U_{34}} = \frac{U_{04}}{U_{14}U_{34}} \right), \\ T_3 & \left(\frac{U_{02}}{U_{12}U_{24}} - \frac{U_{01}}{U_{12}U_{14}} = \frac{U_{04}}{U_{14}U_{24}} \right) \end{aligned}$$

и сопоставление ног в левой части равенств даёт соотношения типа

$$\frac{\alpha U_{03}(u_0)}{U_{23}(u_2)U_{34}(u_4)} = \frac{U_{01}(u_0)}{U_{12}(u_2)U_{14}(u_4)} + \mu(u_2) + \nu(u_4).$$

Легко видеть, что членами $\mu + \nu$ в данном случае можно пренебречь и функции U_{12} , U_{13} , U_{23} отличаются лишь множителями, также как U_{01} , U_{02} , U_{03} . В силу симметрии исходных уравнений относительно всех индексов (или рассмотрев уравнения (10.15) для некоторой другой перестановки) получаем, что вообще все десять функций пропорциональны. Не теряя общности, можно положить $U_{ij} = \alpha_{ij}u_{ij}$ и непосредственная проверка показывает, что уравнения совместны при любых α_{ij} . Эти параметры можно положить равными 1, не теряя общности, если воспользоваться неавтономной заменой

$$\tilde{u}(n_0, n_1, n_2, n_3, n_4) = \prod_{i,j} \alpha_{ij}^{n_i n_j} u(n_0, n_1, n_2, n_3, n_4)$$

и ответ можно записать в виде пятёрки (χ_1^5).

Уравнение (T_4) при $\gamma = 1$. Рассмотрим это уравнение в виде

$$U_{04}(U_{24} - U_{34}) = U_{23}(U_{02} - U_{03}).$$

Отождествляя его с первым уравнением (10.14) при $(i, j, k, m, n) = (1, 2, 3, 4, 0)$, имеем

$$[02, 24, 04] = U_{24}U_{04}, \quad [03, 34, 04] = U_{34}U_{04}, \quad [02, 23, 03] = U_{23}(U_{03} - U_{02}),$$

и следующие два уравнения (10.14) должны иметь вид

$$\begin{aligned} \langle 2 \rangle : \quad & U_{34}U_{04} - [01, 14, 04] = [03, 13, 01], \\ \langle 3 \rangle : \quad & [01, 14, 04] - U_{24}U_{04} = [01, 12, 02]. \end{aligned}$$

Так как нога вида xy уникальна, то оба уравнения также относятся к типу (T_4). Нетрудно показать, что это определяет их в следующем виде:

$$U_{34}U_{04} - U_{14}U_{04} = U_{13}(U_{01} - V_{03}), \quad U_{14}U_{04} - U_{24}U_{04} = U_{12}(V_{02} - V_{01}),$$

где V , как и U , обозначает некоторые непостоянные функции $V_{ij} = V_{ij}(u_{ij})$. Складывая, получаем четвёртое уравнение

$$\langle 4 \rangle : U_{12}(V_{02} - V_{01}) + U_{13}(U_{01} - V_{03}) + U_{23}(U_{03} - U_{02}) = 0,$$

которое может относиться только к типу (T_2) . Но тогда соответствующие функции U и V связаны линейно, и нетрудно видеть, что их можно считать просто совпадающими, за счёт переобозначения U_{12}, U_{13} и U_{01} . В результате, приходим к следующей пятёрке уравнений:

$$\begin{aligned} \langle 1 \rangle : (U_{24} - U_{34})U_{04} &= U_{23}(U_{03} - U_{02}), \\ \langle 2 \rangle : (U_{34} - U_{14})U_{04} &= U_{13}(U_{01} - U_{03}), \\ \langle 3 \rangle : (U_{14} - U_{24})U_{04} &= U_{12}(U_{02} - U_{01}), \\ \langle 4 \rangle : U_{12}(U_{02} - U_{01}) + U_{13}(U_{01} - U_{03}) + U_{23}(U_{03} - U_{02}) &= 0, \\ \langle 0 \rangle : \frac{U_{14} - U_{24}}{U_{12}} + \frac{U_{24} - U_{34}}{U_{23}} + \frac{U_{34} - U_{14}}{U_{13}} &= 0. \end{aligned} \tag{10.41}$$

При этом уравнения (10.14) исчерпаны, а оставшийся функциональный произвол надо уточнять их (10.15). Первые три уравнения переписываются в виде

$$\begin{aligned} T_1(U_{23}U_{03} - U_{23}U_{02} &= U_{04}(U_{24} - U_{34})), \\ T_2(U_{13}U_{01} - U_{13}U_{03} &= U_{04}(U_{34} - U_{14})), \\ T_3(U_{12}U_{02} - U_{12}U_{01} &= U_{04}(U_{14} - U_{24})), \end{aligned}$$

и сопоставление ног в левой части даёт соотношения типа

$$\alpha U_{23}(u_2)U_{03}(u_0) = U_{12}(u_2)U_{01}(u_0) + \mu(u_2) + \nu(u_4),$$

где члены $\mu + \nu$ добавлены, чтобы учесть произвол в определении ног. Отсюда нетрудно получить, что U_{12}, U_{13}, U_{23} отличаются множителями, а функции U_{01}, U_{02} и U_{03} связаны аффинно-линейно. Кроме того, уравнение $\langle 4 \rangle$ принимает вид

$$\begin{aligned} \alpha U_{04}(u_{01})(U_{24}(u_{12}) - U_{34}(u_{13})) + \beta U_{04}(u_{02})(U_{34}(u_{23}) - U_{14}(u_{12})) \\ + U_{04}(u_{03})(U_{14}(u_{13}) - U_{24}(u_{23})) = 0 \end{aligned}$$

и сравнивая с предыдущим представлением, получаем, что U_{14}, U_{24} и U_{34} аффинно-линейно связаны с U_{12} , а U_{04} с U_{01} . Наконец, для $\langle 0 \rangle$ получаем представление в виде

$$\frac{U_{02}(u_{12}) - U_{03}(u_{13})}{U_{04}(u_{14})} + \gamma \frac{U_{03}(u_{23}) - U_{01}(u_{12})}{U_{04}(u_{24})} + \delta \frac{U_{01}(u_{13}) - U_{02}(u_{23})}{U_{04}(u_{34})} = 0$$

(достаточно, заметить, что уравнения (10.41) инвариантны относительно перестановки $4 \leftrightarrow 0$ и замены $U_{04}, U_{12}, U_{13}, U_{23}$ на обратные) и сравнивая предыдущим представлением получаем, что $1/U_{04}$ аффинно-линейно связана с U_{14} .

Нетрудно видеть, что тем самым все функции выразились через одну с точностью до констант, и не теряя общности можно принять, что как функции от u они имеют вид

$$\begin{aligned} U_{12} &= u, & U_{13} &= pu, & U_{23} &= qu, & U_{04} &= 1/u, \\ U_{i4} &= a_i u + b_i, & U_{0i} &= c_i/u + d_i, & i &= 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Подстановка в (10.15) позволяет доказать, что $b_i = d_i = 0$ и приводит к уравнениям

$$\frac{a_i x_{i4} - a_j u_{j4}}{u_{04}} = Au_{ij} \left(\frac{a_i}{u_{0j}} - \frac{a_j}{u_{0i}} \right), \quad i, j = 1, 2, 3$$

совместным при любых параметрах. Легко проверить, что замена

$$\tilde{u}(i, j, k, m, n) = a_1^i a_2^j a_3^k A^{mn} u(i, j, k, m, n)$$

позволяет положить все параметры равными 1, и мы приходим к совместной пятёрке $(\chi_5^3 \chi_4^2)$.

Уравнение (T_2) . Теперь мы исключаем из рассмотрения уравнения типа (T_4) , и ноги вида $y(u+z)$ становятся уникальными для уравнения типа (T_2) . Легко видеть, что в совместной с ним пятёрке по крайней мере четыре уравнения имеют этот же тип. Действительно, трёхногая форма либо не содержит ног вида $y(x+z)$, либо содержит сразу три, следовательно, если начать с такой ноги для одного уравнения четвёрки (10.14), то и ноги всех оставшихся будут такого же типа. Несложный анализ приводит к системе

$$\begin{aligned} \langle 1 \rangle : & U_{24}(U_{02} - U_{04}) + U_{34}(U_{04} - U_{03}) + U_{23}(U_{03} - U_{02}) = 0, \\ \langle 2 \rangle : & U_{34}(U_{03} - U_{04}) + U_{14}(U_{04} - U_{01}) + U_{13}(U_{01} - U_{03}) = 0, \\ \langle 3 \rangle : & U_{14}(U_{01} - U_{04}) + U_{24}(U_{04} - U_{02}) + U_{12}(U_{02} - U_{01}) = 0, \\ \langle 4 \rangle : & U_{12}(U_{02} - U_{01}) + U_{13}(U_{01} - U_{03}) + U_{23}(U_{03} - U_{02}) = 0, \\ \langle 0 \rangle : & \frac{(U_{14} - U_{12})(U_{24} - U_{23})(U_{34} - U_{13})}{(U_{12} - U_{24})(U_{23} - U_{34})(U_{13} - U_{14})} = -1. \end{aligned} \tag{10.42}$$

Здесь то, что $\langle 4 \rangle$ следует из первых трёх уравнений очевидно, а $\langle 0 \rangle$ легко выводится из их мультипликативного представления

$$\frac{U_{i4} - U_{ij}}{U_{ij} - U_{j4}} = \frac{U_{04} - U_{0j}}{U_{0i} - U_{04}}.$$

Чтобы определить функции U , сравниваем ноги в представлениях (10.15). Первые три уравнения переписываются в виде

$$\begin{aligned} T_1 &(U_{03}(U_{23} - U_{34}) - U_{02}(U_{23} - U_{24}) = U_{04}(U_{24} - U_{34})), \\ T_2 &(U_{01}(U_{13} - U_{14}) - U_{03}(U_{13} - U_{34}) = U_{04}(U_{34} - U_{14})), \\ T_3 &(U_{02}(U_{12} - U_{24}) - U_{01}(U_{12} - U_{14}) = U_{04}(U_{14} - U_{24})), \end{aligned}$$

и сопоставление ног даёт равенства типа

$$\alpha U_{03}(u_0)(U_{23}(u_2) - U_{34}(u_4)) = U_{01}(u_0)(U_{12}(u_2) - U_{14}(u_4)) + \mu(u_2) + \nu(u_4).$$

Учитывая симметрию между индексами 1, 2, 3, 4, получаем, что функции U_{12} , U_{13} , U_{23} , U_{14} , U_{24} , U_{34} связаны аффинно-линейно, также как и функции U_{01} , U_{02} , U_{03} , U_{04} . Чтобы установить связь между этими двумя наборами, достаточно сравнить ноги $T_1([03, 04, 02])$ от уравнения $\langle 1 \rangle$ и $T_0([13, 14, 12])$ от уравнения $\langle 0 \rangle$, что даёт

$$\log \frac{U_{02}(u_2) - U_{04}(u_4)}{U_{04}(u_4) - U_{03}(u_3)} = \lambda \log \frac{U_{12}(u_2) - U_{14}(u_4)}{U_{14}(u_4) - U_{13}(u_3)} + \mu(u_2) + \nu(u_3). \quad (10.43)$$

Дифференцируя по u_2 , получаем

$$\frac{U'_{02}(u_2)}{U_{02}(u_2) - U_{04}(u_4)} = \frac{\lambda U'_{12}(u_2)}{U_{12}(u_2) - U_{14}(u_4)} + \mu'(u_2),$$

откуда следует, что U_{04} и U_{14} связаны дробно-линейным преобразованием. Нетрудно видеть, что можно, не теряя общности, свести рассмотрение к двум случаям:

- 1) $U_{ij}(u) = a_{ij}u + b_{ij}$, $i, j = 0, 1, 2, 3, 4$;
- 2) $U_{ij}(u) = a_{ij}u + b_{ij}$, $i, j = 1, 2, 3, 4$,
 $U_{0i}(u) = c_i/u + d_i$, $i = 1, 2, 3, 4$.

Анализ уравнений (10.15) показывает, что в случае 1) имеется две возможности: $a_{ij} = \alpha_i \alpha_j$, $b_{ij} = b_{12}$ или же $a_{ij} = 1$, $b_{ij} = \beta_i + \beta_j$, а в случае 2) $a_{ij} = c_i c_j$, $b_{ij} = b_{12}$, $d_i = d_1$. Неавтономные растяжения или сдвиги позволяют свести дело к пятёркам $(\chi_3^4 \chi_2)$ и $(\chi_4^4 \chi_2)$.

Уравнение (T₃). Если теперь исключить из рассмотрения уравнения типа (T₂), то уравнение (T₃) может входить в пятёрку лишь с уравнениями того же типа. Как и раньше, трёхногие формы (10.14) позволяют доказать, начав с одного уравнения, что совместная система имеет вид

$$\frac{(U_{ij} - U_{ik})(U_{jk} - U_{km})(U_{jm} - U_{im})}{(U_{ik} - U_{jk})(U_{km} - U_{jm})(U_{im} - U_{ij})} = -1.$$

Сравнение же трёхногих форм (10.15) приводит к соотношениям типа (10.43) для всевозможных перестановок индексов, откуда следует, что все U_{ij} связаны друг с другом дробно-линейно. Раньше в аналогичной ситуации мы использовали метод неопределённых коэффициентов, но в данном случае он, к счастью, не нужен, как показывает более аккуратный анализ соотношения (10.43). Действительно, повторяя рассуждения леммы 10.20, можно вывести из него, что дробно-линейное соотношение между функциями U_{02} и U_{12} то же самое, что

между U_{04} и U_{14} или между U_{03} и U_{13} (при этом $\lambda = 1$ и $\mu + \nu = 0$). Это верно и для других наборов индексов, то есть

$$U_{ik} = M_{ij}U_{jk}, \quad i \neq j \neq k \neq i,$$

где M_{ij} некоторое дробно-линейное отображение. Отсюда следует $M_{ij}M_{jk} = M_{ik}$ и полагая $L_i = M_{0i}$, $L_0 = \text{id}$, получаем $M_{ij} = L_iL_j^{-1}$. Но тогда имеем $L_i^{-1}X_{ik} = L_j^{-1}X_{jk}$, в частности $L_i^{-1}X_{0i} = L_j^{-1}X_{0j}$, а с другой стороны $U_{ij} = L_iX_{0j} = L_jX_{0i}$, откуда следует $L_iL_j = L_jL_i$. Таким образом, мы доказали, что $U_{ij}(u) = L_iL_jX(u)$, где все L_i коммутируют, а $U(u)$ произвольная функция. Полагая $U(u) = u$ без потери общности, и делая замену $\tilde{u}(n_0, n_1, n_2, n_3, n_4) = L_1^{n_1}L_2^{n_2}L_3^{n_3}L_4^{n_4}(u(n_0, n_1, n_2, n_3, n_4))$ сводим дело к случаю, когда все $L_i = \text{id}$.

Уравнение (T₇). Несложный анализ трёхногих форм (10.14), (10.15) показывает, что совместные уравнения этого типа сводятся к линейным с постоянными коэффициентами, что не представляет большого интереса. (В данном случае имеет смысл отказаться от условия трансляционной инвариантности, что может, в принципе, привести к вспомогательным линейным задачам для гипотетических четырёхмерных уравнений. Такие примеры в настоящее время неизвестны.) \square

Комментарии к главе 10

Глава основана на работах Адлера, Бобенко, Суриса [18] и Адлера, Шабата [24].

▷ Определение 4D-совместности уравнений типа Δ КР является новым. Как объяснялось в разделах 10.1.1, 10.1.2, оно логически несколько сложнее, чем в случае уравнений типа Δ ВКР, несмотря на то, что последние являются более общими.

▷ Уравнение Δ ВКР, введённое в работе Мивы [128], известно также как уравнение Хироты-Мивы, Мивы, и дискретное уравнение Нижника-Веселова-Новикова. Его 4D-совместность установлена в работе Адлера, Бобенко и Суриса [15]. Это уравнение связано с линейным уравнением Мутара описывает трёхмерный принцип нелинейной суперпозиции преобразований Бэклунда для уравнения ВКР, или Нижника-Веселова-Новикова, и $2 + 1$ -мерного уравнения sin -Гордон. При этом диаграмма Бьянки заменяется на куб Эйзенхарта. Этим вопросам посвящены, в частности, статьи Аторна, Ниммо [34], Ганжи, Царёва [75] и Ниммо, Шифа [135, 136]. Относительно уравнения Δ СКР см. напр. статью Шифа [152].

▷ В качестве альтернативных подходов к понятию 4-мерной совместности следует отметить так называемые локальное уравнение Янга-Бакстера (Майе, Найхоф [112], Кашаев [93]) и функциональное уравнение тетраэдра (Кашаев, Корепанов, Сергеев [94]). Различие здесь примерно то же, что и между 3D-совместностью и уравнением Янга-Бакстера в двумерном случае. Отметим

также работы Корепанова [98] и Бажанова, Сергеева [38], посвящённые этой проблеме.

▷ Результаты раздела 10.1.3 получены в работе [24]. Бездисперсионным уравнениям посвящена богатая литература, имеется ряд классификационных результатов для бездисперсионных уравнений более общего вида, в том числе и с бóльшим числом независимых переменных, см. напр. работу Ферапонтова, Хуснутдиновой и Царёва [69].

▷ Для трёхмерных интегрируемых уравнений известно не так много классификационных результатов даже в непрерывном случае, поскольку выработка достаточно общего, и в то же время работоспособного теста представляет собой весьма непростую задачу. Симметричный подход к классификации обсуждался в работе Михайлова и Ямилова [127], (см. также Адлер, Шабат, Ямилов [25]), пертурбативный в работах Михайлова, Новикова [123] и Ванг [188]. Переход на полностью дискретный уровень, предпринятый в данной главе, оказался достаточно эффективным, но следует признать, что универсальность этого приёма не очень высока. Действительно, определение 10.1 годится только для уравнения вполне определённого типа, и к тому же основано на постулате, что совместные с ним уравнения также относятся к этому типу, что уже приводит к потере примера (9.9). Несомненно, что идея многомерной совместности адекватно отражает основные свойства дискретных уравнений, и, в то же время, хотелось бы сделать это понятие более алгоритмическим.

Литература

- [1] M.J. Ablowitz, D.J. Kaup, A.C. Newell, H. Segur. Method for solving the sine-Gordon equation. *Phys. Rev. Lett.* **30:25** (1973) 1262–1264. 47
- [2] M.J. Ablowitz, J.F. Ladik. Nonlinear differential-difference equations. *J. Math. Phys.* **16:3** (1975) 598–603. 7, 177
- [3] В.Э. Адлер. Перекройка многоугольников. *Функц. анализ* **27:2** (1993) 79–82. 8, 11, 18, 47, 48, 129
- [4] V.E. Adler. Nonlinear superposition formula for Jordan NLS equations. *Phys. Lett. A* **190** (1994) 53–58. 48
- [5] V.E. Adler. Nonlinear chains and Painlevé equations. *Physica D* **73:4** (1994) 335–351. 8, 47, 48
- [6] V.E. Adler. Integrable deformations of a polygon. *Physica D* **87:1–4** (1995) 52–57. 8, 11, 48
- [7] V.E. Adler. Bäcklund transformation for the Krichever-Novikov equation. *Int. Math. Res. Notices* (1998) 1–4. 11, 12, 84
- [8] В.Э. Адлер. Преобразования Лежандра на треугольной решетке. *Функц. анализ* **34:1** (2000) 1–11. 14, 156, 157, 177
- [9] V.E. Adler. On the structure of the Bäcklund transformations for the relativistic lattices. *J. Nonl. Math. Phys.* **7:1** (2000) 34–56. 14, 156, 157
- [10] В.Э. Адлер. О дискретизациях уравнения Ландау-Лифшица. *Теор. Мат. Физ.* **124:1** (2000) 48–61. 15, 188
- [11] V.E. Adler. Discrete equations on planar graphs. *J. Phys. A* **34** (2001) 10453–10460. 14, 108, 156
- [12] V.E. Adler. Some incidence theorems and integrable discrete equations. *Discrete Comput. Geom.* **36** (2006) 489–498. 83, 230
- [13] V.E. Adler. Classification of integrable Volterra type lattices on the sphere. Isotropic case. *J. Phys. A* **41** (2008) 145201. 16, 206

- [14] V.E. Adler. The tangential map and associated integrable equations. *J. Phys. A* **42** (2009) 332004. 17, 229
- [15] V.E. Adler, A.I. Bobenko, Yu.B. Suris. Classification of integrable equations on quad-graphs. The consistency approach. *Comm. Math. Phys.* **233** (2003) 513–543. 12, 17, 83, 84, 85, 270
- [16] V.E. Adler, A.I. Bobenko, Yu.B. Suris. Geometry of Yang-Baxter maps: pencils of conics and quadrirational mappings. *Comm. Anal. and Geom.* **12:5** (2004) 967–1007. 14, 128, 129
- [17] В.Э. Адлер, А.И. Бобенко, Ю.Б. Сурис. Дискретные нелинейные гиперболические уравнения. Классификация интегрируемых случаев. *Функци. анализ* **43:1** (2009) 3–21. 12, 83
- [18] V.E. Adler, A.I. Bobenko, Yu.B. Suris. The classification of integrable discrete equations of octahedron type. *Подано в печать.* 17, 270
- [19] В.Э. Адлер, В.Г. Марихин, А.Б. Шабат. Лагранжевы цепочки и канонические преобразования Бэклунда. *Теор. Мат. Физ.* **129:2** (2001) 163–183. 177
- [20] В.Э. Адлер, А.Б. Шабат. Об одном классе цепочек Тоды. *Теор. Мат. Физ.* **111:3** (1997) 323–334. 14, 84, 156, 157, 177
- [21] В.Э. Адлер, А.Б. Шабат. Обобщенные преобразования Лежандра. *Теор. Мат. Физ.* **112:2** (1997) 179–194. 14, 156, 157, 177
- [22] В.Э. Адлер, А.Б. Шабат. Первые интегралы обобщенных цепочек Тоды. *Теор. Мат. Физ.* **115:3** (1998) 349–357. 177, 178
- [23] V.E. Adler, A.B. Shabat. On the one class of hyperbolic systems. *SIGMA* **2** (2006) 093. 15, 177
- [24] В.Э. Адлер, А.Б. Шабат. Модельное уравнение теории солитонов. *Теор. Мат. Физ.* **153:1** (2007) 29–45. 18, 270, 271
- [25] В.Э. Адлер, А.Б. Шабат, Р.И. Ямилов. Симметричный подход к проблеме интегрируемости. *Теор. Мат. Физ.* **125:3** (2000) 355–424. 17, 177, 178, 206, 271
- [26] В.Э. Адлер, С.Я. Старцев. О дискретных аналогах уравнения Лиувилля. *Теор. Мат. Физ.* **121:2** (1999) 271–284. 17, 230
- [27] V.E. Adler, Yu.B. Suris. Q4: Integrable master equation related to an elliptic curve. *Int. Math. Res. Notices* (2004) 2523–2553. 12, 13, 156
- [28] V.E. Adler, S.I. Svinolupov, R.I. Yamilov. Multi-component Volterra and Toda type equations. *Phys. Lett. A* **254** (1999) 24–36. 189, 207

- [29] V.E. Adler, A.P. Veselov. Cauchy problem for integrable discrete equations on quad-graphs. *Acta Appl. Math.* **84:2** (2004) 237–262. 13, 108
- [30] V.E. Adler, R.I. Yamilov. Auto-transformations of integrable chains. *J. Phys. A* **27** (1994) 477–492. 8, 18, 48, 177, 178
- [31] Н.И. Ахиезер. Элементы теории эллиптических функций. М., Наука, 1970. 73
- [32] S.C. Anco, T. Wolf. Some symmetry classifications of hyperbolic vector evolution equations. *J. Nonl. Math. Phys.* **12:1** (2005) 1–19. 207
- [33] C. Athorne, A.P. Fordy. Generalized KdV and MKdV equations associated with symmetric spaces. *J. Phys. A* **20:6** (1987) 1377–1386. 207
- [34] C. Athorne, J.J.C. Nimmo. On the Moutard transformation for integrable partial differential equations. *Inverse Problems* **7:6** (1991) 809–826. 270
- [35] J. Atkinson. Bäcklund transformations for integrable lattice equations. *J. Phys. A* **41** (2008) 135202. 12
- [36] A.V. Bäcklund. Om ytor med konstant negativ krökning. *Lunds Universitets Årsskrift* **19** (1883) 1–48. 8, 47
- [37] V. Bazhanov, V. Mangazeev, S. Sergeev. Faddeev-Volkov solution of the Yang-Baxter equation and discrete conformal symmetry. *Nucl. Phys. B* **3** (2007) 234–258. 85
- [38] V. Bazhanov, S. Sergeev. Zamolodchikov’s tetrahedron equation and hidden structure of quantum groups. *J. Phys. A* **39:13** (2006) 3295–3310. 85, 271
- [39] M. Berger. *Geometry*. Springer-Verlag, Berlin 1987. 128
- [40] L. Bianchi. Sulla trasformazione di Bäcklund per le superficie pseudosferiche. *Rend. Ac. Naz. dei Lincei* **5** (1892) 3–12. 8, 47
- [41] A.I. Bobenko. Discrete integrable systems and geometry. In: *XIIIth Int. Congress of Math. Phys.* (ICMP’97, Brisbane), pp. 219–226. Cambridge: Internat. Press, 1999. 188, 190
- [42] A.I. Bobenko, Yu.B. Suris. Discrete time Lagrangian mechanics on Lie groups, with an application to the Lagrange top. *Comm. Math. Phys.* **204:1** (1999) 147–188. 190
- [43] A.I. Bobenko, Yu.B. Suris. Integrable systems on quad-graphs. *Int. Math. Res. Notes* (2002) 573–611. 9, 14, 47, 84, 108, 156, 188
- [44] A.I. Bobenko, Yu.B. Suris. Integrable non-commutative equations on quad-graphs. The consistency approach. *Lett. Math. Phys.* **61** (2002) 241–254. 85

- [45] A.I. Bobenko, Yu.B. Suris. Discrete differential geometry: integrable structure. AMS, Providence, 2009. 8, 47, 230
- [46] L.V. Bogdanov, B.G. Konopelchenko. Lattice and q -difference Darboux-Zakharov-Manakov systems via $\bar{\partial}$ -dressing method. *J. Phys. A* **28:5** (1995) L173–178. 17, 229
- [47] L.V. Bogdanov, B.G. Konopelchenko. Analytic-bilinear approach to integrable hierarchies. I. Generalized KP hierarchy; II. Multicomponent KP and 2D Toda lattice equations. *J. Math. Phys.* **39:9** (1998) 4683–4700; 4701–4728. 17, 229
- [48] L.V. Bogdanov, B.G. Konopelchenko. Möbius invariant integrable lattice equations associated with KP and 2DTL hierarchies. *Phys. Lett. A* **256:1** (1999) 39–46. 17, 229
- [49] R. Boll, Yu.B. Suris. Non-symmetric discrete Toda systems from quad-graphs. [arXiv:0908.2822v1](https://arxiv.org/abs/0908.2822v1). 14, 157
- [50] E. Bour. Théorie de la déformation des surfaces. *J. l'École Imp. Polytech.* **19:39** (1862) 1–48. 8
- [51] M. Bruschi, O. Ragnisco. On a new integrable Hamiltonian system with nearest-neighbour interaction. *Inverse Problems* **5:6** (1989) 983–998. 177
- [52] M. Bruschi, O. Ragnisco, P.M. Santini, T.G. Zhang. Integrable symplectic maps. *Physica D* **49:3** (1991) 273–294. 189
- [53] В.М. Бухштабер. Отображения Янга-Бакстера. *Успехи Мат. Наук* **53:6** (1998) 241–242. 9
- [54] H.W. Capel, F.W. Nijhoff, V.G. Papageorgiou. Complete integrability of Lagrangian mappings and lattices of KdV type. *Phys. Lett. A* **155:6–7** (1991) 377–387. 108
- [55] H.H. Chen, C.S. Liu. Bäcklund transformation solutions of the Toda lattice equation. *J. Math. Phys.* **16:7** (1975) 1428–1430. 48
- [56] N.P. Dolbilin, A.G. Sedrakyan, M.A. Shtan'ko, M.I. Shtogrin. Topology of a family of parametrizations of two-dimensional cycles arising in the three-dimensional Ising model. *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **295:1** (1987) 19–23. 108
- [57] A. Doliwa. Geometric discretization of the Toda system. *Phys. Lett. A* **234** (1997) 187–192. 230
- [58] A. Doliwa, P. Grinevich, M. Nieszporski, P.M. Santini. Integrable lattices and their sublattices: From the discrete Moutard (discrete Cauchy-Riemann) 4-point equation to the self-adjoint 5-point scheme. *J. Math. Phys.* **48** (2007) 013513. 157

- [59] A. Doliwa, M. Nieszporski, P.M. Santini. Integrable lattices and their sublattices. II. From the B-quadrilateral lattice to the self-adjoint schemes on the triangular and the honeycomb lattices. *J. Math. Phys.* **48** (2007) 113506. 157
- [60] A. Doliwa, P.M. Santini. An elementary geometric characterization of the integrable motions of a curve. *Phys. Lett. A* **185:4** (1994) 373–384. 48, 188
- [61] A. Doliwa, P.M. Santini. Multidimensional quadrilateral lattices are integrable. *Phys. Lett. A* **233:4–6** (1997) 365–372. 17, 230
- [62] A. Doliwa, P.M. Santini. Geometry of discrete curves and lattices and integrable difference equations. In: Discrete Integrable Geometry and Physics (eds A. Bobenko, R. Seiler, Vienna, 1996) *Oxford Lecture Ser. Math. Appl.* **16**, pp. 139–154, Oxford UP, New York, 1999. 188
- [63] V.G. Drinfeld. On some unsolved problems in quantum group theory. In “Quantum groups” (Leningrad, 1990), *Lecture Notes in Math.*, 1510, Springer, 1992, p. 1–8. 9, 128
- [64] В.С. Дрюма. Об аналитическом решении двумерного уравнения Кортевега-де Вриза (КДВ). *Письма в ЖЭТФ* **19:12** (1973) 753–755. 229
- [65] И.А. Дынников, С.П. Новиков. Преобразования Лапласа и симплицальные связности. *Успехи Мат. Наук* **52:6** (1997) 157–158. 108
- [66] P. Etingof. Geometric crystals and set-theoretical solutions to the quantum Yang-Baxter equation. *Comm. in Algebra* **31:4** (2003) 1961–1973. 128, 129
- [67] P. Etingof, T. Schedler, A. Soloviev. Set-theoretical solutions to the quantum Yang-Baxter equation. *Duke Math. J.* **100:2** (1999) 169–209. 128
- [68] H. Flaschka. On the Toda lattice. I. Existence of integrals. II. Inverse scattering solution. *Phys. Rev. B* **9:4** (1974) 1924–1925; *Progr. Theor. Phys.* **51:3** (1974) 703–716. 7
- [69] E.V. Ferapontov, K.R. Khusnutdinova, S.P. Tsarev. On a class of three-dimensional integrable Lagrangians. *Comm. Math. Phys.* **261:1** (2006) 225–243. 18, 271
- [70] A.S. Fokas. A symmetry approach to exactly solvable evolution equations. *J. Math. Phys.* **21:6** (1980) 1318–1325. 206
- [71] A.S. Fokas, B. Fuchssteiner. Symplectic structures, their Bäcklund transformations, and hereditary symmetries. *Physica D* **4:1** (1981) 47–66. 207
- [72] A.P. Fordy. Derivative nonlinear Schrödinger equations and Hermitian symmetric spaces. *J. Phys. A* **17:6** (1984) 1235–1245. 207

- [73] A.P. Fordy, P.P. Kulish. Nonlinear Schrödinger equations and simple Lie algebras. *Comm. Math. Phys.* **89:3** (1983) 427–443. 207
- [74] B. Fuchssteiner. Master symmetries, higher order time-dependent symmetries and conserved densities of nonlinear evolution equations. *Progr. Theor. Phys.* **70:6** (1983) 1508–1522. 178
- [75] Е.И. Ганжа, С.П. Царёв. Алгебраическая формула суперпозиции и полнота преобразований Бэклунда $(2 + 1)$ -мерных интегрируемых систем. *Успехи Мат. Наук* **51:6** (1996) 197–198. 17, 270
- [76] R.E. Goldstein, D.M. Petrich. The Korteweg-de Vries hierarchy as dynamics of closed curves in the plane. *Phys. Rev. Lett.* **67:23** (1991) 3203–3206. 48
- [77] И.З. Голубчик, В.В. Соколов. Многокомпонентное обобщение иерархии уравнения Ландау-Лифшица. *Теор. Мат. Физ.* **124:1** (2000) 62–71. 189
- [78] V.M. Goncharenko, A.P. Veselov. Yang-Baxter maps and matrix solitons. *In: New trends in integrability and partial solvability. NATO Sci. Ser. II Math. Phys. Chem.* **132**, pp. 191–197. Kluwer, Dordrecht, 2004. arXiv:math-ph/0303032v1. 129
- [79] Я.И. Грановский, А.С. Жеданов. Решения доменного типа в анизотропных доменных цепочках. *Теор. Мат. Физ.* **71:1** (1987) 143–153. 189
- [80] I.T. Habibullin, V.V. Sokolov, R.I. Yamilov. Multi-component integrable systems and nonassociative structures. *In: Nonlinear Physics: Theory and Experiment, Lecce'95* (eds E. Alfinito, M. Boiti, L. Martina, F. Pempinelli). pp. 139–168. Singapore: World Scientific, 1996. 8, 207
- [81] J. Hietarinta. Permutation-type solutions to the Yang-Baxter and other n -simplex equations. *J. Phys. A* **30:13** (1997) 4757–4771. 128
- [82] J. Hietarinta. A new two-dimensional lattice model that is “consistent around a cube”. *J. Phys. A* **37:6** (2004) L67–73. 83
- [83] J. Hietarinta. Searching for CAC-maps. *J. Nonl. Math. Phys.* **12:2 suppl.** (2005) 223–230. 84
- [84] Д. Гильберт, С. Кон-Фоссен. Наглядная геометрия. ОНТИ 1936. 230
- [85] R. Hirota. Nonlinear partial difference equations. I. A difference analog of the Korteweg-de Vries equation. *J. Phys. Soc. Japan* **43** (1977) 1424–1433. 7, 84
- [86] R. Hirota. Nonlinear partial difference equations. II. Discrete-time Toda equation. *J. Phys. Soc. Japan* **43** (1977) 2074–2078. 7, 156

- [87] R. Hirota. Nonlinear partial difference equations. III. Discrete sine-Gordon equation. *J. Phys. Soc. Japan* **43** (1977) 2079–2086. 7, 84
- [88] R. Hirota. Discrete analog of a generalized Toda equation. *J. Phys. Soc. Japan* **50:11** (1981) 3785–3791. 7, 17, 229
- [89] А. Гурвиц, Р. Курант. Теория функций. М.: Наука, 1968. 84
- [90] L. Infeld, Т.Е. Hull. The factorization method. *Rev. Mod. Phys.* **23:1** (1951) 21–68. 7, 47
- [91] М. Кас, Р. van Moerbeke. On an explicitly soluble system of nonlinear differential equations related to certain Toda lattices. *Adv. in Math.* **16:2** (1975) 160–169. 7, 16, 47
- [92] В.В. Кадомтсев, V.I. Petviashvili. On the stability of the solitary waves in the weak-dispersive media. *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **192** (1970) 753–756. 229
- [93] R.M. Kashaev. On discrete three-dimensional equation associated with the local Yang-Baxter relation. *Lett. Math. Phys.* **38** (1996) 389–397. 270
- [94] Р.М. Кашаев, И.Г. Корепанов, С.М. Сергеев. Функциональное уравнение тетраэдров. *Теор. Мат. Физ.* **117:3** (1998) 370–384. 270
- [95] A. King, W. Schief. Tetrahedra, octahedra and cubo-octahedra: integrable geometry of multi-ratios. *J. Phys. A* **36:3** (2003) 785–802. 230
- [96] В.Г. Konopelchenko, W.K. Schief. Menelaus' theorem, Clifford configurations and inversive geometry of the Schwarzian KP hierarchy. *J. Phys. A* **35:29** (2002) 6125–6144. 17, 229, 230
- [97] В.Г. Konopelchenko, W.K. Schief. Reciprocal figures, graphical statics and inversive geometry of the Schwarzian BKP hierarchy. *Stud. Appl. Math.* **109:2** (2002) 89–124. 230
- [98] I.G. Korepanov. Algebraic integrable dynamical systems, 2 + 1-dimensional models in wholly discrete space-time, and inhomogeneous models in 2-dimensional statistical physics. [arXiv:solv-int/9506003v1](https://arxiv.org/abs/solv-int/9506003v1). 271
- [99] I.M. Krichever. Elliptic analog of the Toda lattice. *Int. Math. Res. Notices* **2000:8** 383–412. 16, 190
- [100] I. Krichever, O. Lipan, P. Wiegmann, A. Zabrodin. Quantum integrable models and discrete classical Hirota equations. *Comm. Math. Phys.* **188:2** (1997) 267–304. 230
- [101] И.М. Кричевер, С.П. Новиков. Голоморфные расслоения над алгебраическими кривыми и нелинейные уравнения. *Успехи Мат. Наук* **35:6** (1980) 47–68. 12, 84

- [102] B.A. Kupershmidt. Discrete Lax equations and differential-difference calculus. Paris: Asterisque, 1985. 47
- [103] G.L. Lamb, jr. Analytical descriptions of ultrashort optical pulse propagation in a resonant medium. *Rev. Mod. Phys.* **43:2** (1971) 99–124. 47
- [104] G.L. Lamb, jr. Bäcklund transformations for certain nonlinear evolution equations. *J. Math. Phys.* **15:12** (1974) 2157–2165. 47
- [105] G.L. Lamb, jr. Bäcklund transformations at the turn of the century. In: Bäcklund transformations, the Inverse Scattering Method, solitons, and their applications. *Lect. Notes in Math.* **515**, pp. 69–79. Springer-Verlag, 1976. 47
- [106] G.L. Lamb, jr. Elements of soliton theory. New York: J. Wiley, 1980. 47
- [107] P.D. Lax. Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves. *Comm. Pure Appl. Math.* **21** (1968) 467–490. 47
- [108] D. Levi. Nonlinear differential difference equations as Bäcklund transformations. *J. Phys. A* **14:5** (1981) 1083–1098. 7, 177
- [109] D. Levi, L. Piloni, P.M. Santini. Integrable three-dimensional lattices. *J. Phys. A* **14:7** (1981) 1567–1575. 230
- [110] D. Levi, R.I. Yamilov. Conditions for the existence of higher symmetries of evolutionary equations on the lattice. *J. Math. Phys.* **38:12** (1997) 6648–6674. 206
- [111] J.-H. Lu, M. Yan, Y.-Ch. Zhu. On the set-theoretical Yang-Baxter equation. *Duke Math. J.* **104:1** (2000) 1–18. 128
- [112] J.M. Maillet, F.W. Nijhoff. Integrability for multidimensional lattice models. *Phys. Lett. B* **224:4** (1989) 389–396. 270
- [113] S.V. Manakov. On the theory of two-dimensional stationary self-focusing of electromagnetic waves. *Sov. Phys. JETP* **38:2** (1974) 248–253. 207
- [114] С.В. Манаков. О полной интегрируемости и стохастизации в дискретных динамических системах. *ЖЭТФ* **67:2** (1974) 543–555. 7, 16, 47
- [115] В.Г. Марихин, А.Б. Шабат. Интегрируемые решетки. *Теор. Мат. Физ.* **118:2** (1999) 217–228. 177
- [116] V.B. Matveev. Darboux transformation and the explicit solutions of differential-difference and difference-difference evolution equations. I. *Lett. Math. Phys.* **3:3** (1979) 217–222. 7
- [117] V. Matveev, M. Salle. Darboux transformations and solitons. Springer, 1991. 47, 229

- [118] I. Merola, O. Ragnisco, T. Gui-Zhang. A novel hierarchy of integrable lattices. *Inverse Problems* **10:6** (1994) 1315–1334. 178
- [119] A.G. Meshkov, M.Ju. Balakhnev. Integrable anisotropic evolution equations on a sphere. *SIGMA* **1** (2005) 027. 48, 207
- [120] A.G. Meshkov, V.V. Sokolov. Integrable evolution equations on the N -dimensional sphere. *Comm. Math. Phys.* **232:1** (2002) 1–18. 16, 207
- [121] А.Г. Мешков, В.В. Соколов. Классификация интегрируемых дивергентных N -компонентных эволюционных систем. *Теор. Мат. Физ.* **139:2** (2004) 192–208. 207
- [122] А.В. Михайлов. Об интегрируемости двумерного обобщения цепочки Toda. *Письма в ЖЭТФ* **30:7** (1979) 443–448. 229
- [123] A.V. Mikhailov, V.S. Novikov. Perturbative symmetry approach. *J. Phys. A* **35:22** (2002) 4775–4790. 271
- [124] A.V. Mikhailov, A.B. Shabat. Integrable deformations of the Heisenberg model. *Phys. Lett. A* **116:4** (1986) 191–194. 189
- [125] A.V. Mikhailov, A.B. Shabat, V.V. Sokolov. The symmetry approach to classification of integrable equations. In *What is integrability?*, ed. V.E. Zakharov, Berlin: Springer-Verlag, 1991. 8
- [126] А.В. Михайлов, А.Б. Шабат, Р.И. Ямилов. Симметричный подход к классификации нелинейных уравнений. Полные списки интегрируемых систем. *Успехи Мат. Наук* **42:4** (1987) 3–53. 7, 206
- [127] A.V. Mikhailov, R.I. Yamilov. Towards classification of (2+1)-dimensional integrable equations. Integrability conditions I. *J. Phys. A* **31:31** (1998) 6707–6715. 271
- [128] T. Miwa. On Hirota's difference equations. *Proc. Japan Acad., Ser. A: Math. Sci.* **58:1** (1982) 9–12. 7, 17, 270
- [129] J. Moser, A.P. Veselov. Discrete versions of some classical integrable systems and factorization of matrix polynomials. *Comm. Math. Phys.* **139** (1991) 217–243. 189
- [130] F.W. Nijhoff. Theory of integrable three-dimensional nonlinear lattice equations. *Lett. Math. Phys.* **9:3** (1985) 235–241. 7
- [131] F.W. Nijhoff. Lax pair for the Adler (lattice Krichever-Novikov) system. *Phys. Lett. A* **297:1–2** (2002) 49–58. 47, 84
- [132] F.W. Nijhoff, H.W. Capel. The discrete Korteweg-de Vries equation. *Acta Appl. Math.* **39:1–3** (1995) 133–158. 84

- [133] F.W. Nijhoff, A.J. Walker. The discrete and continuous Painlevé hierarchy and the Garnier system. *Glasgow Math. J.* **43A** (2001) 109–123. 9, 47
- [134] J.J.C. Nimmo. Darboux transformations and the discrete KP equation. *J. Phys. A* **30** (1997) 8693–8704. 229
- [135] J.J.C. Nimmo, W.K. Schief. Superposition principles associated with the Moutard transformation: an integrable discretization of a (2+1)-dimensional sine-Gordon system, *Proc. Roy. Soc. London A* **453** (1997) 255–279. 270
- [136] J.J.C. Nimmo, W.K. Schief. An integrable discretization of a 2 + 1-dimensional sine-Gordon equation. *Stud. Appl. Math.* **100:3** (1998) 295–309. 270
- [137] С.П. Новиков, И.А. Дынников. Дискретные спектральные симметрии маломерных дифференциальных операторов и разностных операторов на правильных решетках и двумерных многообразиях. *Успехи Мат. Наук* **52:5** (1997) 175–234. 108, 230
- [138] С.П. Новиков. Оператор Шрёдингера на графах и топология. *Успехи Мат. Наук* **52:6** (1997) 177–178. 108
- [139] W. Oevel, B. Fuchssteiner, H. Zhang, O. Ragnisco. Mastersymmetries, angle variables and recursion operator of the relativistic Toda lattice. *J. Math. Phys.* **30:11** (1989) 2664–2670. 157, 178
- [140] V.G. Papageorgiou, F.W. Nijhoff, H.W. Capel. Integrable mappings and nonlinear integrable lattice equations. *Phys. Lett. A* **147:2–3** (1990) 106–114. 108
- [141] V. Papageorgiou, A. Tongas, A. Veselov. Yang-Baxter maps and symmetries of integrable equations on quad-graphs. *J. Math. Phys.* **47:8** (2006) 083502. 128, 129
- [142] V.G. Papageorgiou, A.G. Tongas. Yang-Baxter maps and multi-field integrable lattice equations. *J. Phys. A* **40** (2007) 12677–12690. 48, 129
- [143] G.R.W. Quispel, F.W. Nijhoff, H.W. Capel, J. van der Linden. Linear integral equations and nonlinear difference-difference equations. *Physica A* **125:2–3** (1984) 344–380. 7, 84
- [144] O. Ragnisco. A discrete Neumann system. *Phys. Lett. A* **167:2** (1992) 165–171. 189
- [145] O. Ragnisco, P.M. Santini. A unified algebraic approach to integral and discrete evolution equations. *Inverse Problems* **6:3** (1990) 441–452. 177, 188, 207
- [146] A. Ramani, N. Joshi, B. Grammaticos, T. Tamizhmani. Deconstructing an integrable lattice equation. *J. Phys. A* **39:8** (2006) L145–L149. 83

- [147] C. Rogers, W.K. Schief. Bäcklund and Darboux transformations. Geometry and modern applications in soliton theory. Cambridge University Press, Cambridge, 2002. 8, 47
- [148] C. Rogers, W.F. Shadwick. Bäcklund transformations and their applications. New York: Academic Press, 1982. 47
- [149] S.N.M. Ruijsenaars. Relativistic Toda system. Preprint Stichting Centre for Math. and Comp. Sciences, Amsterdam, 1986. 156, 177
- [150] S.N.M. Ruijsenaars. Relativistic Toda systems. *Comm. Math. Phys.* **133:2** (1990) 217–247. 156, 177
- [151] W.K. Schief. Isothermic surfaces in spaces of arbitrary dimension: integrability, discretization and Bäcklund transformations. A discrete Calapso equation. *Stud. Appl. Math.* **106:1** (2001) 85–137. 48
- [152] W.K. Schief. Lattice geometry of the discrete Darboux, KP, BKP and CKP equations. Menelaus' and Carnot's theorems. *J. Nonl. Math. Phys.* **10:2 suppl.** (2003) 194–208. 230, 270
- [153] E. Schrödinger. A method of determining quantum-mechanical eigenvalues and eigenfunctions. *Proc. Roy. Irish Acad.* **A 46** (1940/1941) 9–16. 7
- [154] M. Senechal. Quasicrystals and geometry. Cambridge University Press, Cambridge, 1995. 107
- [155] A.B. Shabat, R.I. Yamilov. Lattice representations of integrable systems. *Phys. Lett. A* **130:4,5** (1988) 271–275. 177
- [156] А.Б. Шабат, Р.И. Ямилов. Симметрии нелинейных цепочек. *Алгебра и анализ* **2:2** (1990) 183–208. 7, 16, 177, 188
- [157] Е.К. Склянин. О некоторых алгебраических структурах, связанных с уравнением Янга-Бакстера. *Функци. анализ* **16:4** (1982) 27–34. 15, 188
- [158] V.V. Sokolov, A.B. Shabat. Classification of integrable evolution equations. *Sov. Sci. Rev. C / Math. Phys. Rev.* **4** (1984) 221–280. 7, 206
- [159] С.И. Свинолулов, В.В. Соколов. Векторно-матричные обобщения классических интегрируемых уравнений. *Теор. Мат. Физ.* **100:2** (1994) 214–218. 48, 207
- [160] V.V. Sokolov, T. Wolf. Classification of integrable polynomial vector evolution equations. *J. Phys. A* **34:49** (2001) 11139–11148. 207
- [161] V.V. Sokolov, A.V. Zhiber. On the Darboux integrable hyperbolic equations. *Phys. Lett. A* **208:4–6** (1995) 303–308. 177

- [162] Ю.Б. Сурис. Обобщенные цепочки Тоды в дискретном времени. *Алгебра и анализ* **2:2** (1990) 141–157. [156](#)
- [163] Yu.B. Suris. Discrete time generalized Toda lattices: complete integrability and relation with relativistic Toda lattices. *Phys. Lett. A* **145:2–3** (1990) 113–119. [156, 177](#)
- [164] Yu.B. Suris. Bi-Hamiltonian structure of the qd algorithm and new discretizations of the Toda lattice. *Phys. Lett. A* **206:3–4** (1995) 153–161. [156](#)
- [165] Yu.B. Suris. A discrete-time relativistic Toda lattice. *J. Phys. A* **29:2** (1996) 451–465. [156](#)
- [166] Yu.B. Suris. On some integrable systems related to the Toda lattice. *J. Phys. A* **30:6** (1997) 2235–2249. [156](#)
- [167] Yu.B. Suris. Integrability of V. Adler’s discretization of the Neumann system. *Phys. Lett. A* **279:5–6** (2001) 327–332. [190](#)
- [168] Yu.B. Suris. The problem of integrable discretization: Hamiltonian approach. Basel: Birkhäuser, 2003. [16, 177, 188, 189, 207](#)
- [169] Yu.B. Suris, A.P. Veselov. Lax matrices for Yang-Baxter maps. *J. Nonl. Math. Phys.* **10:2 suppl.** (2003) 223–230. [128](#)
- [170] S.I. Svinolupov. Generalized Schrödinger equations and Jordan pairs. *Comm. Math. Phys.* **143:3** (1992) 559–575. [189, 207](#)
- [171] S.I. Svinolupov, V.V. Sokolov, R.I. Yamilov. Bäcklund transformations for integrable evolution equations. *Sov. Math. Dokl.* **28** (1983) 165–168. [84](#)
- [172] S.I. Svinolupov, R.I. Yamilov. The multi-field Schrödinger lattices. *Phys. Lett. A* **160:6** (1991) 548–552. [178](#)
- [173] С.И. Свинолулов, Р.И. Ямилов. Явные автопреобразования для многополевых уравнений Шредингера и йордановы обобщения цепочки Тоды. *Теор. Мат. Физ.* **98:2** (1994) 207–219. [207](#)
- [174] Л.А. Тахтаджян, Л.Д. Фаддеев. Гамильтонов подход в теории солитонов. М.: Наука, 1986. [15, 47, 188, 189, 207](#)
- [175] M. Toda. One dimensional dual transformation. *J. Phys. Soc. Japan* **20** (1965) 2095A. [157](#)
- [176] M. Toda. Vibration of a chain with nonlinear interaction. *J. Phys. Soc. Japan* **22** (1967) 431–436. [7, 156](#)
- [177] M. Toda. Theory of nonlinear lattices. Springer-Verlag, 1981. [48, 157](#)

- [178] T. Tsuchida, T. Wolf. Classification of polynomial integrable systems of mixed scalar and vector evolution equations. I. *J. Phys. A* **38:35** (2005) 7691–7733. 207
- [179] А.П. Веселов. Уравнение Ландау-Лифшица и интегрируемые системы классической механики. *Докл. Акад. Наук СССР* **270:5** (1983) 1094–1096. 189
- [180] А.П. Веселов. Интегрирование стационарной задачи для классической спиновой цепочки. *Теор. Мат. Физ.* **71:1** (1987) 154–159. 189
- [181] А.П. Веселов. Интегрируемые системы с дискретным временем и разностные операторы. *Функц. анализ* **22:2** (1988) 1–13. 189
- [182] А.П. Веселов. Интегрируемые отображения. *Успехи Мат. Наук* **46:5** (1991) 3–45. 189
- [183] A.P. Veselov. Yang-Baxter maps and integrable dynamics. *Phys. Lett. A* **314:3** (2003) 214–221. 9, 128, 129
- [184] A.P. Veselov. Yang-Baxter maps: dynamical point of view. [arXiv:math/0612814v1](https://arxiv.org/abs/math/0612814v1). 128
- [185] А.П. Веселов, А.Б. Шабат. Одевающая цепочка и спектральная теория оператора Шрёдингера. *Функц. анализ* **27:2** (1993) 1–21. 7, 47
- [186] C.M. Viallet. Integrable lattice maps: Q_5 , a rational version of Q_4 . [arXiv:0802.0294v1](https://arxiv.org/abs/0802.0294v1). 83
- [187] H.D. Wahlquist, F.B. Estabrook. Bäcklund transformations for solutions of the Korteweg-de Vries equation. *Phys. Rev. Lett.* **31:23** (1973) 1386–1390. 47
- [188] J.P. Wang. On the structure of $(2 + 1)$ -dimensional commutative and noncommutative integrable equations. *J. Math. Phys.* **47:11** (2006) 113508. 271
- [189] Р.И. Ямилов. О классификации дискретных эволюционных уравнений. *Успехи Мат. Наук* **38:6** (1983) 155–156. 16, 206
- [190] R.I. Yamilov. Classification of Toda type scalar lattices. Proc. NEEDS'93, World Scientific Publ., Singapore, 1993, 423–431. 157, 190
- [191] R.I. Yamilov. On the construction of Miura type transformations by others of this kind. *Phys. Lett. A* **173:1** (1993) 53–57. 129
- [192] Р.И. Ямилов. Симметричный подход к классификации с точки зрения интегрируемых дифференциально-разностных уравнений. Теория преобразований. *Диссертация д.ф.-м.н.*. Уфа, 2000. 15, 172, 177

- [193] R.I. Yamilov. Symmetries as integrability criteria for differential-difference equations. *J. Phys. A* **39** (2006) R541–623. 8, 16, 206, 207
- [194] В.Е. Захаров, А.Б. Шабат. Точная теория двумерной самофокусировки и одномерной автомодуляции волн в нелинейных средах. *ЖЭТФ* **61:1** (1971) 118–134. 47
- [195] В.Е. Захаров, А.Б. Шабат. Схема интегрирования нелинейных уравнений математической физики методом обратной задачи рассеяния. I. *Функц. анализ* **8:3** (1974) 43–53. 47, 229
- [196] А.В. Жибер, Н.Х. Ибрагимов, А.Б. Шабат. Уравнения типа Лиувилля. *Докл. Акад. Наук СССР* **249:1** (1979) 26–29. 177

Предметный указатель

- 3D-совместность, 8, 50, 112, 214
4D-совместность
уравнений типа Δ ВКР, 234
уравнений типа Δ КР, 214, 232
- двудольный граф, 135
дефект на квадратной решётке, 101
прозрачный, 94, 102
диаграмма Бьянки, 9, 20, 66, 270
дробно-линейное преобразование, 32, 51, 55, 115, 137
инварианты, 73
дуальный граф, 88, 131
дубль графа, 100, 135
- задача Коши на квад-графе, 92
задача Неймана, 189
- иерархия интегрируемых уравнений, 35
- йорданова тройная система, 207
- канонический закон сохранения, 196
квад-граф, 87
квад-уравнение, 9, 12, 25, 49
аффинно-линейное, 26
невырожденное, 69
- конфигурация
Дезарга, 215, 228, 240
Менелая, 214
- линейный пучок коник, 117
логарифмическая спираль, 218, 221
локсодрома, 223
- оператор рекурсии, 34, 37
отображение
Янга-Бакстера, 112
- дважды дробно-линейное, 122
квадрирациональное, 14, 114
сопутствующее, 113
тангенциальное, 217
тангенциальное дискретное, 227
- полоса квад-графа, 13, 88
потенцирование, 22
представление нулевой кривизны, 30
преобразование Бэклунда, 34, 66
 x -часть, 34
на квад-графе, 90
преобразование Дарбу, 11
для дискретного уравнения Шрёдингера, 39
для уравнения Дирака, 35
для уравнения Шрёдингера, 19, 213
преобразование Миуры, 20, 67
дискретное, 39
преобразование дуальности, 15, 142, 149
принцип нелинейной суперпозиции, 20, 22
- разметка графа, 133
разметка квад-графа, 13, 88, 119
неособая, 90
решётка Менелая, 214, 228
решение
неособое, 89
сингулярное, 69
- свойство тетраэдральности, 52
сингулярная кривая, 69
- тангенциальное соответствие, 225
трёхногая форма
квад-уравнения, 12, 62

уравнения типа $\Delta\text{КР}$, 236, 244

уравнение

$\Delta\text{ВКР}$, 234

$\Delta\text{КР}$, 210, 231

\sin -Гордона, 8, 37, 43

\sinh -Гордона, 37, 66

Кадомцева-Петвиашвили, 213

КдФ, 34, 37

КдФ дискретное, 25, 43

КдФ модифицированное, 34, 37

КдФ потенциальное, 34, 66

КдФ потенциальное модифициро-
ванное, 66

Кричевера-Новикова, 68

Ландау-Лифшица, 183

Тоды дискретное, 14

5-точечное, 38, 139

7-точечное, 139

Шрёдингера, 213

Шрёдингера нелинейное, 37

Шрёдингера стационарное, 19
двойного отношения, 93

формальная симметрия, 196

цепочка

Абловица-Ладика, 161

Вольтерра, 39, 192

Вольтерра векторная, 191

Вольтерра модифицированная, 39

Гейзенберга, 181, 189

Рудженарса-Тоды, 148, 155, 159, 174,
175, 186

Склянина, 161, 179

Тоды, 38

Тоды двумеризованная, 213

одевающая, 24

одевающая двумерная, 213

одевающая дискретная, 39