Дифференциальные подстановки для неабелевых уравнений типа КдФ

В.Э. Адлер

ИТФ им. Л.Д. Ландау

17 декабря 2021

Построены неабелевы аналоги для некоторых уравнений типа КдФ, включая экспоненциальное уравнение Калоджеро-Дегаспериса (в рациональной форме) и обобщения шварцианного уравнения КдФ.

Используемый метод связан со вспомогательной линейной задачей для КдФ, причем обычный спектральный параметр заменяется неабелевым.

Это позволяет ввести неабелевы параметры в уравнения и связывающие их дифференциальные подстановки.

Уфимский мат. журнал **13:2** (2021) 107–114

Скалярные интегрируемые уравнения типа КдФ

Известен полный список интегрируемых уравнений вида

$$u_t = u_{xxx} + F(x, u, u_x, u_{xx})$$

(Свинолупов, Соколов 1982). Он делится на три группы (Свинолупов, Соколов, Ямилов 1983):

- линеаризуемые
- связанные подстановками с KdV
- изолированное уравнение Кричевера–Новикова (1980)

$$z_t = z_{xxx} - \frac{3(z_{xx}^2 - R(z))}{2z_x} + \alpha z_x, \quad R^{(5)}(z) = 0, \qquad \text{(KN)}$$

где R не имеет кратных корней.

Точнее, KN — это 1-параметрическое семейство (модуль эллиптической кривой). Случаи R с кратными корнями сводятся к KdV. В частности, $R = 0$ — шварцианное уравнение (SKdV).

Основная последовательность преобразований типа Миуры (в скалярном случае):

$$u_t = u_{xxx} - 6uu_x, \qquad \text{(KdV)}$$

$$\Big\uparrow \quad u = f_x + f^2 + \alpha$$

$$f_t = f_{xxx} - 6(f^2+\alpha)f_x, \qquad \text{(mKdV)}$$

$$\Big\uparrow \quad 2f = (p_x + p^2 + \beta)/p$$

$$p_t = p_{xxx} - 3\frac{p_x p_{xx}}{p} + \frac{3p_x^3}{2p^2} - \frac{3}{2}\Big(p+\frac{\beta}{p}\Big)^2 p_x - 6\alpha p_x, \qquad \text{(exp-CD)}$$

$$\Big\uparrow \quad 2p = \big(\sqrt{w_x^2+4R(w)} - w_x\big)/(w-\gamma),$$

$$w_t = w_{xxx} - \frac{3w_x(w_{xx}+2R'(w))^2}{2(w_x^2+4R(w))} + 6(2w-\alpha)w_x, \qquad (\wp\text{-CD})$$

где $R(w) = (w-\gamma)(w+\gamma)(w+\gamma+\beta)$.

- exp-CD и $\wp$-CD — рациональная форма уравнений из (Fokas 1980), (Calogero, Degasperis 1981). При замене $p = e^P$, exp-CD принимает вид

$$P_t = P_{xxx} - \frac{1}{2}P_x^3 - \frac{3}{2}(e^P + \beta e^{-P})^2 P_x - 6\alpha P_x.$$

- Каждая модификация добавляет произвольный параметр.
- Это не все уравнения и подстановки связанные с KdV.
- Но, если добавить несколько более простых замен типа введения потенциала, это даст почти все (исключением является лишь KN с одной парой кратных корней; оно связано с KdV подстановкой третьего порядка, не раскладывающейся на более простые).

Неабелевы уравнения типа КдФ

- Хорошо изучены неабелевы аналоги KdV и mKdV_1, mKdV_2 (Wadati, Kamijo 1974, Calogero, Degasperis 1977, Alonso, Olmedilla 1982, Marchenko 1986, Khalilov, Khruslov 1990).
- Все уравнения и подстановки обобщить, по-видимому, нельзя.
- В частности, для KN и $\wp$-CD обобщения неизвестны.
- Некоторые параметры могут быть неабелевыми.
- Параметр a в mKdV_2 введен в (Adler, Sokolov 2021).
- Новые примеры: аналоги exp-CD и SKdV (точнее, вырождения KN с $R(z) = 0$, 1 или z^2).
- Как обычно, подстановки соединяются в преобразования Бэклунда.

Обозначения:

$D = \partial/\partial_x$

$u, \dots, z \in \mathcal{A}$ — неабелевы полевые переменные

$a, b, c \in \mathcal{A}$ — неабелевы постоянные

$\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ — скалярные постоянные

$u + \alpha = u + \alpha 1$, $1 \in \mathcal{A}$

$$u_t = u_{xxx} - 3uu_x - 3u_xu \qquad \text{(KdV)}$$

$$w_t = w_{xxx} - 3w_x^2 \qquad \text{(pKdV)}$$

$$f_t = f_{xxx} - 3f^2f_x - 3f_xf^2 - 6\alpha f_x \qquad (\text{mKdV}_1(\alpha))$$

$$v_t = v_{xxx} + 3[v, v_{xx}] - 6vv_xv - 3(v_x + v^2)a - 3a(v_x - v^2) \qquad (\text{mKdV}_2(a))$$

$$y_t = y_{xxx} - 3y_{xx}y^{-1}y_x - 3y_xa - 3yay^{-1}y_x \qquad (\text{pmKdV}(a))$$

$$\begin{aligned} p_t = (D - \operatorname{ad} p)\Big(p_{xx} - \frac{3}{2}(p_x + p^2 - a)p^{-1}(p_x - p^2 + a) \\ + [p, p_x] - 2p^3 - 6\beta p\Big) \qquad (\text{CD}(a, \beta)) \end{aligned}$$

$$q_t = q_{xxx} - \frac{3}{2}D\big((q_x - c)q^{-1}(q_x + c)\big) \qquad (\text{CD}_0(c))$$

$$\begin{aligned} z_t = z_{xxx} - \frac{3}{2}(z_{xx} - az + zb - c)z_x^{-1}(z_{xx} + az - zb + c) \\ - 3az_x - 3z_xb \qquad (\text{SKdV}(a, b, c)) \end{aligned}$$

Вывод уравнений и подстановок из линейных задач

Неабелево KdV

$$u_t = u_{xxx} - 3uu_x - 3u_x u$$

есть условие совместности для

$$\psi_{xx} = (u - \lambda)\psi, \quad \psi_t = u_x\psi - (2u + 4\lambda)\psi_x. \tag{1}$$

Ключевое обобщение

Скалярный спектральный параметра λ можно заменить на неабелев справа:

$$\psi_{xx} = u\psi - \psi\Lambda, \quad \psi_t = u_x\psi - 2u\psi_x - 4\psi_x\Lambda, \qquad \psi, \Lambda \in \mathcal{A}. \tag{2}$$

Первое доказательство: В матричном случае, можно составить ψ из столбцов, каждый из которых удовлетворяет (1) со своим собственным λ. В результате, получится (2) с $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, что сопряжением приводится к Λ общего положения.

Второе доказательство: Λ действует на ψ как оператор правого умножения R_Λ, а коэффициенты u и u_x как операторы левого умножения L_u и L_{u_x}. Любые операторы левого и правого умножения коммутируют:

$$R_a L_b = L_b R_a, \quad a, b \in \mathcal{A},$$

поэтому при вычислении условия совместности R_Λ ведет себя точно так же, как скалярный коэффициент λ.

Отсюда следует, что замена спектрального параметра на неабелев возможна в любом представлении нулевой кривизны $A_t = B_x + [B, A]$, где A и B — матрицы с элементами из $\mathcal{A}$, зависящими от λ и неабелевых переменных.

(pmKdV) Рассмотрим частное решение $\psi = y$ при $\Lambda = a \in \mathcal{A}$:

$$y_{xx} = uy - ya, \quad y_t = u_x y - 2uy_x - 4y_x a.$$

Из первого уравнения можно выразить u, тогда второе дает pmKdV(a):

$$u = y_{xx}y^{-1} + yay^{-1}, \qquad y_t = y_{xxx} - 3y_{xx}y^{-1}y_x - 3y_x a - 3yay^{-1}y_x.$$

То есть, это уравнение для волновой функции, а подстановка эквивалентна уравнению Шредингера для нее.

(mKdV$_1$) и (mKdV$_2$) Преобразование Миуры — переход к $f = y_x/y$. В неабелевом случае есть два способа.

Замена $f = y_x y^{-1}$ проходит лишь при $a = \alpha \in \mathbb{C}$. При этом получаем mKdV$_1$

$$u = f_x + f^2 + \alpha, \qquad f_t = f_{xxx} - 3f^2 f_x - 3f_x f^2 - 6\alpha f_x.$$

Полагая $v = y^{-1}y_x$, получаем mKdV$_2$(a)

$$v_t = v_{xxx} + 3[v, v_{xx}] - 6vv_x v - 3(v_x + v^2)a - 3a(v_x - v^2),$$

подстановки в KdV нет (имеем $y^{-1}uy = v_x + v^2 + a$, переменная y лишняя).

(CD) и (SKdV) На следующем шаге преобразуем уравнения (2) во вспомогательные линейные задачи для mKdV_2, так, чтобы потенциал u заменился на v. Для этого достаточно сделать замену $\psi = y\varphi$, то есть, $\varphi =$ отношение общего и частного решений (2). Имеем

$$\begin{cases} \varphi_{xx} = a\varphi - \varphi\Lambda - 2v\varphi_x, \\ \varphi_t = 4v(a\varphi - \varphi\Lambda) - 2(v_x + v^2 + a)\varphi_x - 4\varphi_x\Lambda, \end{cases} \qquad \varphi, a, \Lambda \in \mathcal{A}. \qquad (3)$$

По построению, условие совместности эквивалентно $\mathrm{mKdV}_2(a)$.

Теперь можно проделать то же, что раньше делали с парой (2). Уравнение для частного решения $\varphi = z$ при $\Lambda = b \in \mathcal{A}$ даёт SKdV.

Переход к логарифмической производной $p = z_x z^{-1}$ приводит к CD (в данном случае для $z^{-1}z_x$ получается идентичное уравнение).

Окончательно, получаем такой граф замен:

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{KdV} & \mathrm{pKdV} \arrow[l] & & & & \\
\mathrm{mKdV}_1(\alpha) \arrow[u] & \mathrm{pmKdV}(a) \arrow[l, "a=\alpha"'] \arrow[ul] \arrow[rr] & & \mathrm{mKdV}_2(a) & \mathrm{mKdV}_2(0) & \\
& & \mathrm{SKdV}(a,b,c) \arrow[ur] \arrow[r, "c=0", "b=\beta"'] & \mathrm{CD}(a-\beta,\beta) \arrow[u] & \mathrm{CD}_0(c) \arrow[u] & \mathrm{SKdV}(0,0,c) \arrow[l] \arrow[ul]
\end{tikzcd}
$$

- Подстановка $\mathrm{pmKdV}(a) \to \mathrm{mKdV}_1(\alpha)$ проходит только при скалярном параметре $a = \alpha$.
- Аналогично, подстановка $\mathrm{SKdV}(a,b,c) \to \mathrm{CD}(a-\beta,\beta)$ проходит лишь при $b = \beta$, $c = 0$.
- В скалярном случае все пути ведут в KdV (единственное уравнение, из которого не выходит стрелок). В неабелевом случае тупиковой вершиной является также mKdV_2.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{pKdV} \to \mathrm{KdV}: &\qquad u = w_x\\
\mathrm{pmKdV}(\alpha) \to \mathrm{mKdV}_1(\alpha): &\qquad f = y_x y^{-1}\\
\mathrm{mKdV}_1(\alpha) \to \mathrm{KdV}: &\qquad u = f_x + f^2 + \alpha\\
\mathrm{pmKdV}(a) \to \mathrm{KdV}: &\qquad u = y_{xx} y^{-1} + yay^{-1}\\
\mathrm{pmKdV}(a) \to \mathrm{mKdV}_2(a): &\qquad v = y^{-1} y_x\\
\mathrm{SKdV}(a,\beta,0) \to \mathrm{CD}(a-\beta,\beta): &\qquad p = z_x z^{-1}\\
\mathrm{CD}(a-\beta,\beta) \to \mathrm{mKdV}_2(a): &\qquad v = -\tfrac{1}{2}(p_x + p^2 - a + \beta)p^{-1}\\
\mathrm{SKdV}(0,0,c) \to \mathrm{CD}_0(c): &\qquad q = z_x\\
\mathrm{CD}_0(c) \to \mathrm{mKdV}_2(0): &\qquad v = -\tfrac{1}{2}(q_x - c)q^{-1}\\
\mathrm{SKdV}(a,b,c) \to \mathrm{mKdV}_2(a): &\qquad v = -\tfrac{1}{2}(z_{xx} - az + zb - c)z_x^{-1}
\end{aligned}
$$

Преобразования Бэклунда

Все полученные уравнения инвариантны относительно транспонирования, возможно, с точностью до смены знака (в pmKdV — замена $y \to y^{-1}$) и переобозначения параметров. Это даёт ещё одну подстановку между парой уравнений. Композиция двух подстановок даёт преобразование Бэклунда.

Пример. Уравнения mKdV_2 и $\mathrm{CD}(a,\beta)$ инвариантны относительно замен $v \to -v^t$, $p \to -p^t$. Отсюда следует, что $\mathrm{CD}(a-\beta,\beta)$ и $\mathrm{mKdV}_2(a)$ связаны подстановками

$$-2v = p^{-1}(-p_x + p^2 - a + \beta) \qquad \text{и} \qquad -2v = (p_x + p^2 - a + \beta)p^{-1}.$$

Параметр β можно менять, но параметр a фиксирован, так как входит в целевое уравнение $\mathrm{mKdV}_2(a)$. Это приводит к последовательности замен

$$-2v_n = p_n^{-1}(-p_{n,x} + p_n^2 - a + \beta_n) = (p_{n+1,x} + p_{n+1}^2 - a + \beta_{n+1})p_{n+1}^{-1},$$

что даёт одевающую цепочку для CD:

$$(p_n p_{n+1})_x = p_n(p_n - p_{n+1})p_{n+1} - (a - \beta_n)p_{n+1} + p_n(a - \beta_{n+1}).$$