

Солитонная турбулентность в RV уравнениях, суперкомпактном уравнении и НУШ

Постановка задачи. Начальные условия

Было проведено 18 численных экспериментов солитонной турбулентности в точных уравнениях, суперкомпактном уравнении и НУШ. В качестве начального условия в суперкомпактном уравнении и НУШ задавалась одна гармоника + две гармоники возмущения со случайными фазами (ϕ_0, ϕ_p):

$$c(x) = c_0 e^{ik_0 x + \phi_0} + \delta c_0 e^{i(k_0 \pm k_p)x + \phi_{\pm p}} \quad (1)$$

Расчеты проводились в размерном виде $g = 9.81$, $L = 10$ км – длина периодической области. Волновое число несущей $k_0 = \frac{2\pi}{100}$, т.е. характерная длина волны $\lambda_0 = 100$ м. Амплитуда возмущений была в 20 раз меньше амплитуды несущей волны $\delta c_0 = \frac{c_0}{20}$. Значение начальной амплитуды c_0 подбиралось таким, чтобы величина средней крутизны волн

$$\mu = \sqrt{\sum_k |\eta'_k|^2} \quad (2)$$

принимала значения (для разных серий экспериментов) $\mu = 0.04, 0.06, 0.08$. Здесь $|\eta'_k|$ – амплитуда спектральных гармоник крутизны свободной поверхности, вычисленной по начальному условию (1) с учетом линейной части преобразования $c \leftrightarrow \eta, \psi$. Возмущения несущей отстояли от k_0 на величину k_p . Для каждой серии экспериментов, отличающихся начальной средней крутизной μ в каждой модели проводилось расчеты для двух значений k_p .

1) $k_p = 1$

2) $k_p \approx$ совпадала с волновым числом, попадающей в область максимума инкремента модуляционной неустойчивости. Для $\mu = 0.04$ $k_p = 10$; $\mu = 0.06$ $k_p = 15$; $\mu = 0.08$ $k_p = 20$.

Случайные фазы несущей ϕ_0 и возмущений $\phi_{\pm p}$ задавались с помощью стандартного генератора случайных чисел.

Для задания начальных условий в точных уравнениях $R(u, t = 0), V(u, t = 0)$ по начальному условию (1) вычислялись поверхность $\eta(x, t = 0)$ и потенциал на границе $\psi(x, t = 0)$ с учетом второго порядка канонического преобразования. После этого итерационной процедурой находилось конформное преобразование и вычислялись $R(u, t = 0), V(u, t = 0)$.

В таблице 1 приведены параметры для 18 различных начальных условий. В ячейках таблицы приведены части названия файлов с результатами, соответствующих разным расчетам.

Table 1: Начальные условия и названия файлов с результатами

	точные уравнения	суперкомпактное уравнение	НУШ
$\mu = 0.04, k_p = 1$	_mu_0_04_dk_1_rveq	_mu_0_04_dk_1_sceq	_mu_0_04_dk_1_nlseq
$\mu = 0.04, k_p = 10$	_mu_0_04_dk_10_rveq	_mu_0_04_dk_10_sceq	_mu_0_04_dk_10_nlseq
$\mu = 0.06, k_p = 1$	_mu_0_06_dk_1_rveq	_mu_0_06_dk_1_sceq	_mu_0_06_dk_1_nlseq
$\mu = 0.06, k_p = 15$	_mu_0_06_dk_15_rveq	_mu_0_06_dk_15_sceq	_mu_0_06_dk_15_nlseq
$\mu = 0.08, k_p = 1$	_mu_0_08_dk_1_rveq	_mu_0_08_dk_1_sceq	_mu_0_08_dk_1_nlseq
$\mu = 0.08, k_p = 20$	_mu_0_08_dk_20_rveq	_mu_0_08_dk_20_sceq	_mu_0_08_dk_20_nlseq

В процессе расчета вычислялась полная энергия (название файлов с результатами содержит _energy_), средняя крутизна волн (_mu_), максимальная крутизна поверхности (_max_steepness_), максимальная амплитуда поверхности (_max_amplitude_). Кроме того накапливалась статистика волн различной амплитуды. Для этого 16 раз за период несущей волны вычислялся профиль поверхности в точных уравнениях, суперкомпактном уравнении и НУШ (с учетом первых двух порядков канонического преобразования в суперкомпактном уравнении и НУШ).

Параметры расчетной сетки в численных экспериментах. Диссипация при опрокидывании волн.

- Количество узлов расчетной сетки в точных уравнениях было переменным ($N_1 = 16384$ или $N_2 = 32798$). Изначально расчет проводился на сетке с $N_1 = 16384$ узлами (число положительных гармоник в спектре R и V – 8192). При уширении спектра, в случае, если средняя амплитуда 100 старших гармоник A_{N_1} превышала пороговое значение 10^{-15} , то сетка увеличивалась вдвое (до $N_2 = 32798$).

$$A_{N_1} = \frac{1}{100} \sum_{|k|=8092}^{8192} |R_k| \quad (3)$$

Когда ширина спектра уменьшалась, так, что A_{N_1} становилось меньше значение 10^{-15} , сетка уменьшалась вдвое до $N_1 = 16384$. В точных уравнениях одновременно включался фильтр-затухание во избежание опрокидывания волн. Затухание включалось в случае, если усредненная амплитуда 100 старших гармоник в спектре R_k на сетке $N_2 = 32798$, т.е. A_{N_2} превышала пороговое значение 10^{-6}

$$A_{N_2} = \frac{1}{100} \sum_{|k|=16284}^{16384} |R_k| \quad (4)$$

В этом случае, расчет останавливался, функции $R(k)$ и $V(k)$ умножались на фильтр $f(k)$:

$$f(k) = \begin{cases} 1 & \text{if } k < k_0 \\ \exp(-D\sqrt{\log[\cosh[\alpha^2(k - k_0)^2]])} & \text{if } k \geq k_0 \end{cases}, \quad (5)$$

где параметры $D = 1000.0$, $\alpha = 0.5$. После чего расчет продолжался на меньшей сетке. На рисунках 1 (а) и (б) приведены графики спектра ($|R_k|$) и профиля поверхности перед включением фильтра и сразу после. К письму я также прикрепил файлы с эволюцией поверхности и спектра до опрокидывания и после включения затухания. Они называются

spectrum_wavebreaking_after_long.avi

surface_before_after_wb_long_zoom.avi

surface_wavebreaking_after_long.avi

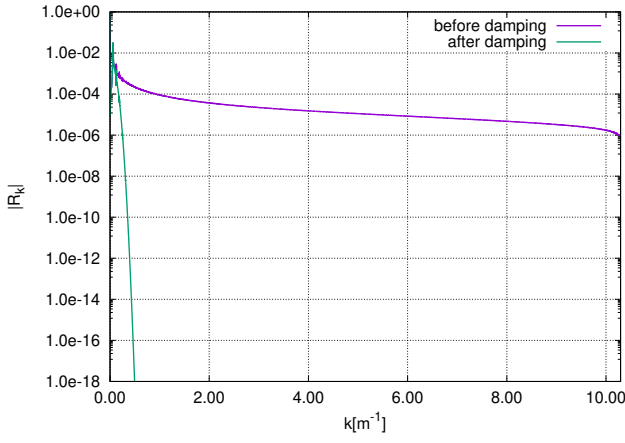
surface_wavebreaking_zoom.avi

- Количество узлов расчетной сетки в суперкомпактном уравнении $N = 8192$ (число положительных гармоник в спектре с 4096). В суперкомпактном уравнении одновременно включался фильтр-затухание во избежание опрокидывания волн. Затухание включалось, при превышении скорости переноса $U_{cr} = 3$.
- Количество узлов расчетной сетки в НУШ $N = 16384$ (полное число гармоник 8192 с учетом алиасинга);

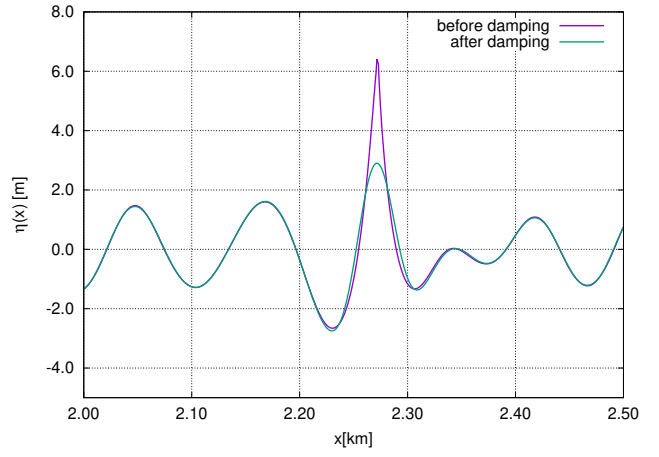
Сравнение зависимостей полной энергии, средней и максимальной крутизны поверхности, максимальной амплитуды поверхности от времени. Сравнение PDF амплитуды поверхности

На рисунках 2, 3, 4 приведены зависимости полной энергии от времени для разных начальных условий, полученных в трех моделях.

На рисунках 5, 6, 7 приведены зависимости средней крутизны волн от времени для разных начальных условий, полученных в трех моделях.

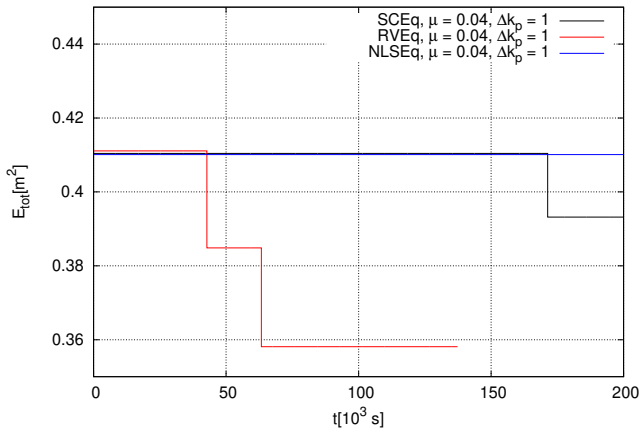


(a)

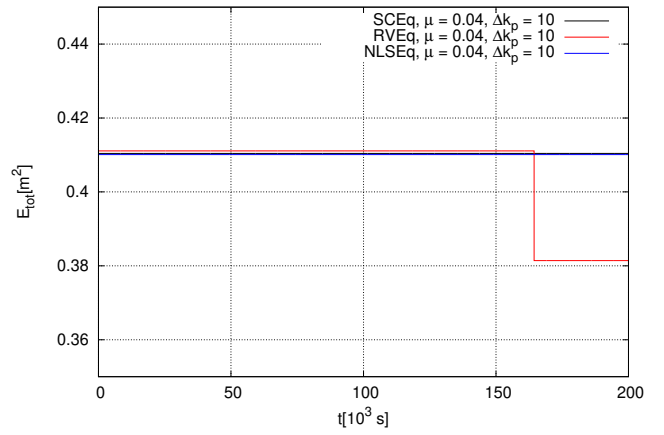


(б)

Figure 1: Рисунок (а) – спектр ($|R_k|$), (б) – профиль поверхности $\eta(x)$ непосредственно до и после включения затухания.



(a)



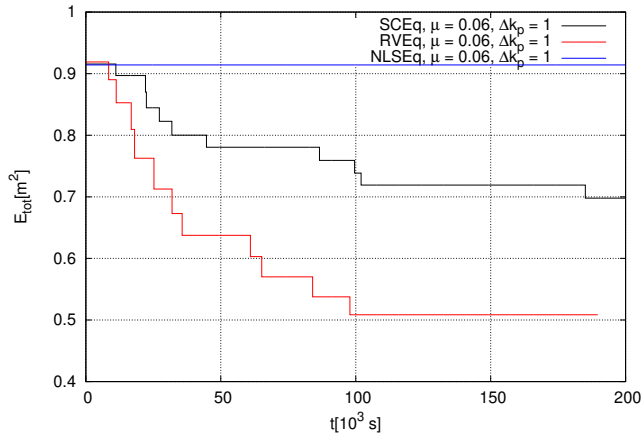
(б)

Figure 2: Зависимость полной энергии в разных моделях от времени для (а) $\mu = 0.04, k_p = 1$ (б) $\mu = 0.04, k_p = 10$

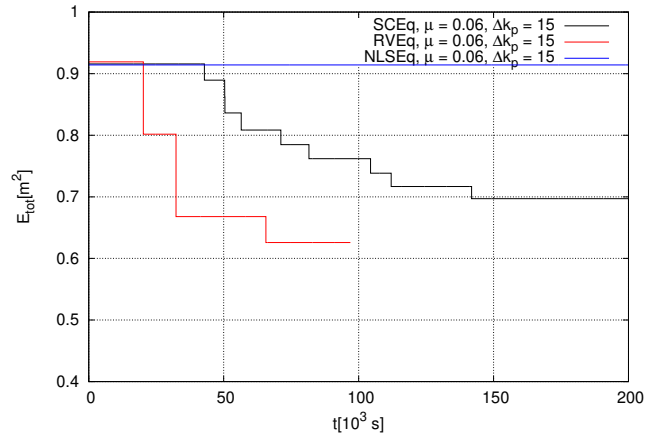
Сравнение максимальной крутизны поверхности от времени приведено на рисунках 8, 9, 10.

Сравнение максимальной амплитуды поверхности от времени приведено на рисунках 11, 12, 13.

На рисунках 14, 15, 16 приведены усредненные за все расчетное время плотности распределения вероятностей амплитуды свободной поверхности для разных начальных условий в трех моделях. Усредненные PDF нормированы на 1.

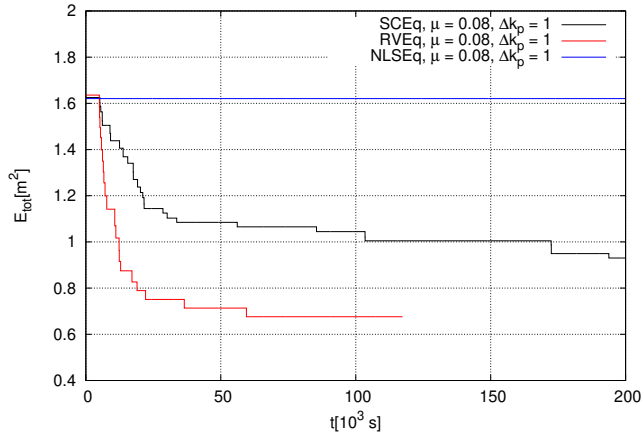


(a)

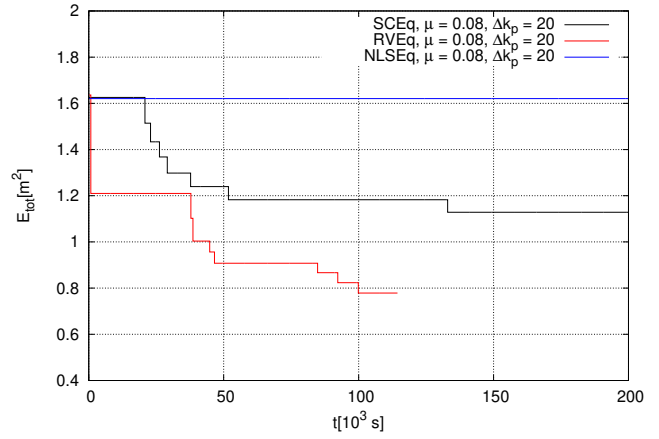


(б)

Figure 3: Зависимость полной энергии в разных моделях от времени для (a) $\mu = 0.06, k_p = 1$ (б) $\mu = 0.06, k_p = 15$

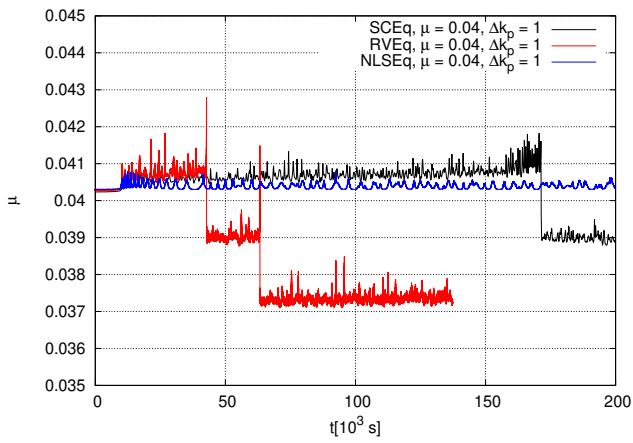


(a)

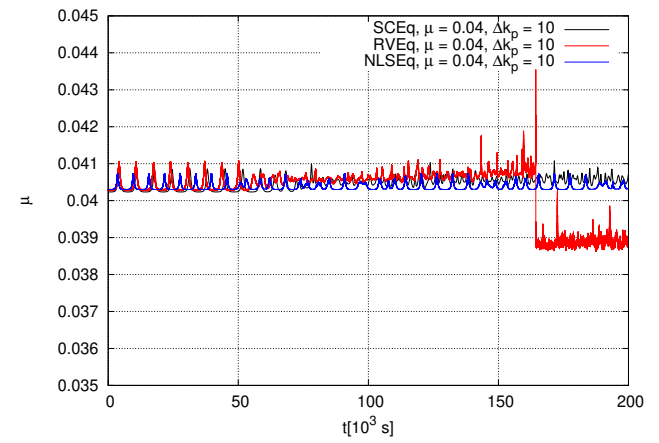


(б)

Figure 4: Зависимость полной энергии в разных моделях от времени для (a) $\mu = 0.08, k_p = 1$ (б) $\mu = 0.08, k_p = 20$

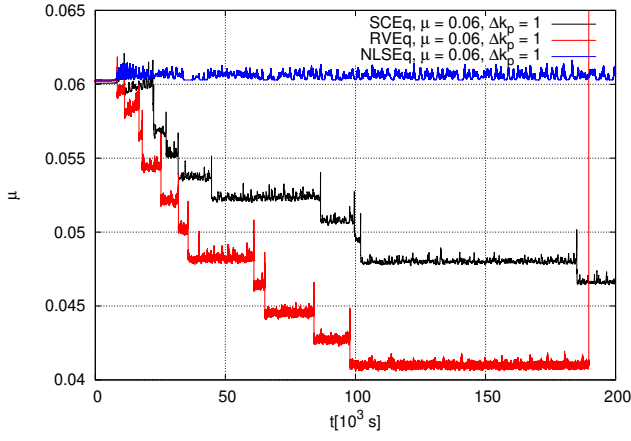


(a)

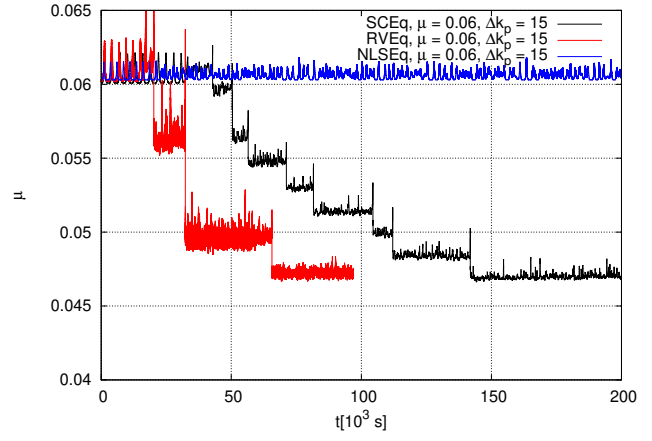


(б)

Figure 5: Зависимость средней крутизны μ в разных моделях от времени для (a) $\mu = 0.04, k_p = 1$ (б) $\mu = 0.04, k_p = 10$

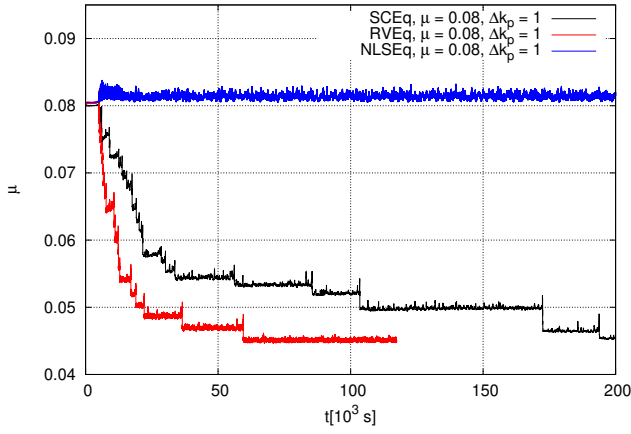


(a)

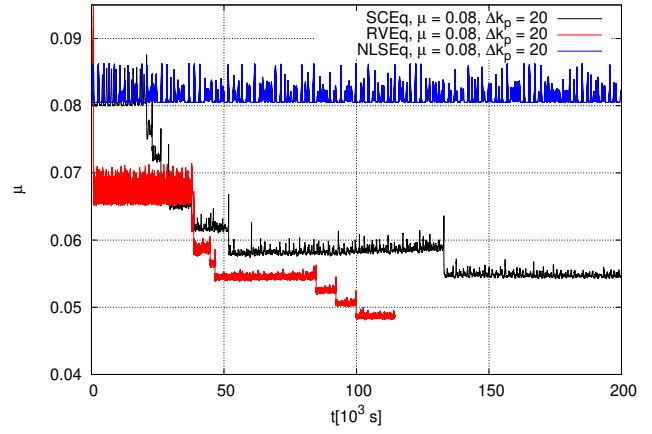


(б)

Figure 6: Зависимость средней крутизны μ в разных моделях от времени для (a) $\mu = 0.06, k_p = 1$ (б) $\mu = 0.06, k_p = 15$

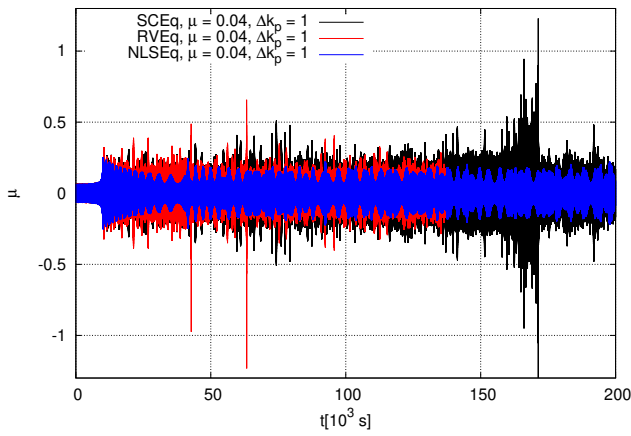


(a)

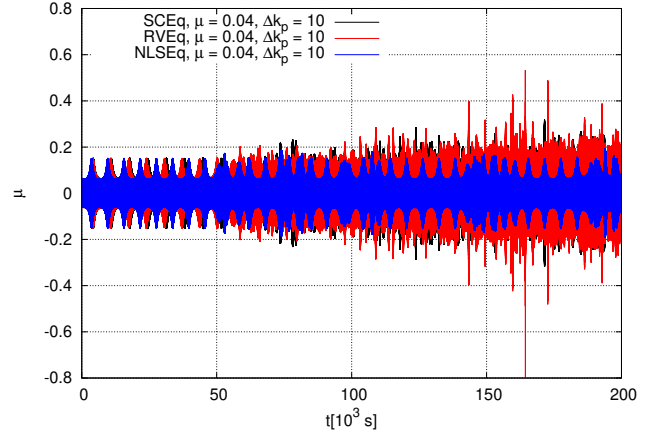


(б)

Figure 7: Зависимость средней крутизны μ в разных моделях от времени для (a) $\mu = 0.08, k_p = 1$ (б) $\mu = 0.08, k_p = 20$

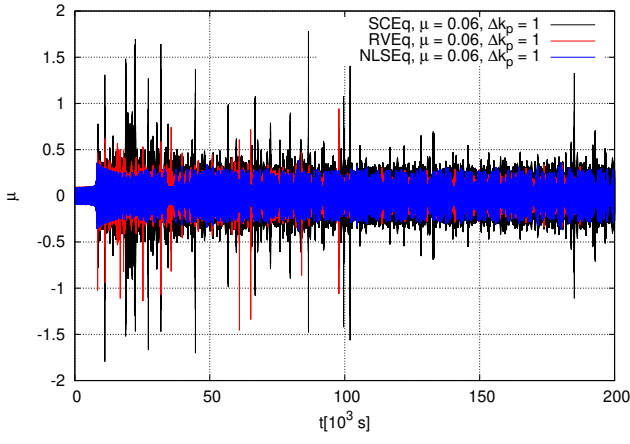


(a)

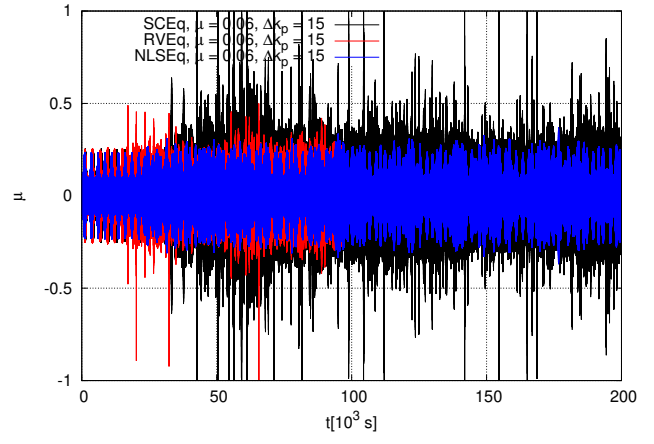


(б)

Figure 8: Зависимость максимальной крутизны поверхности в разных моделях от времени для (a) $\mu = 0.04, k_p = 1$ (б) $\mu = 0.04, k_p = 10$

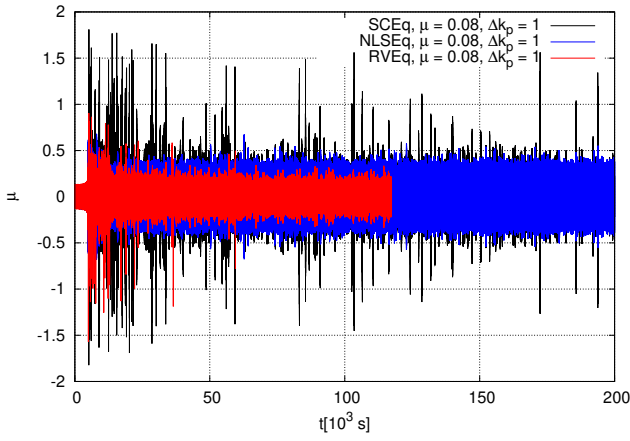


(a)

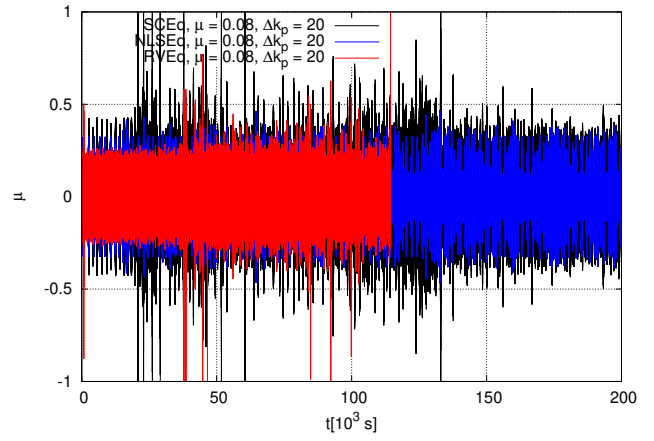


(б)

Figure 9: Зависимость максимальной крутизны поверхности в разных моделях от времени для (a) $\mu = 0.06, k_p = 1$ (б) $\mu = 0.06, k_p = 15$

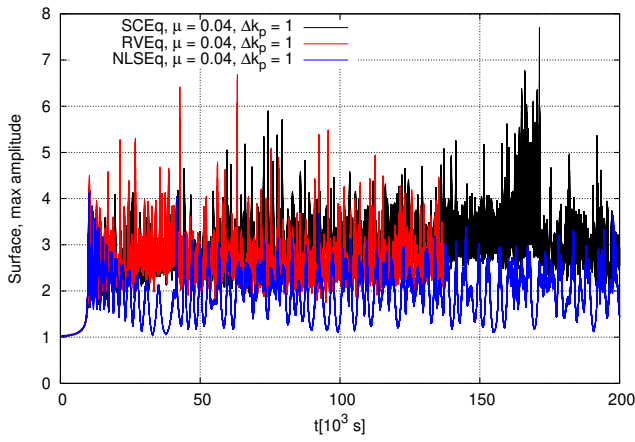


(a)

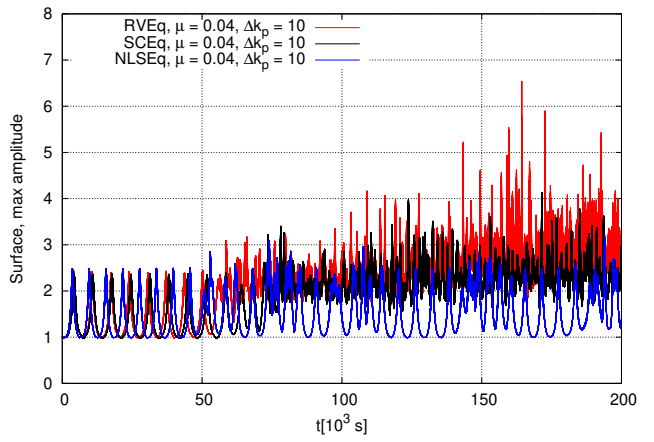


(б)

Figure 10: Зависимость максимальной крутизны поверхности в разных моделях от времени для (a) $\mu = 0.08, k_p = 1$ (б) $\mu = 0.08, k_p = 20$

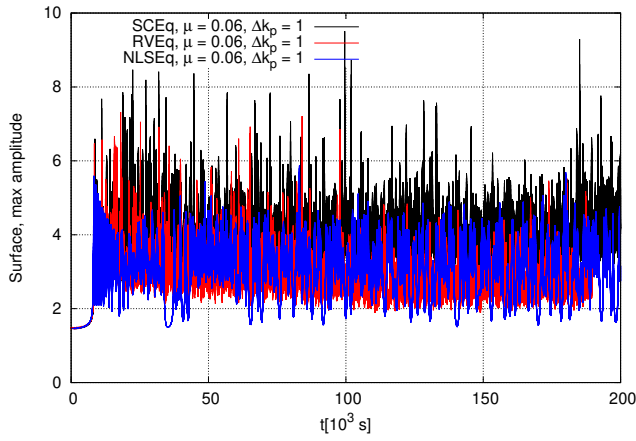


(a)

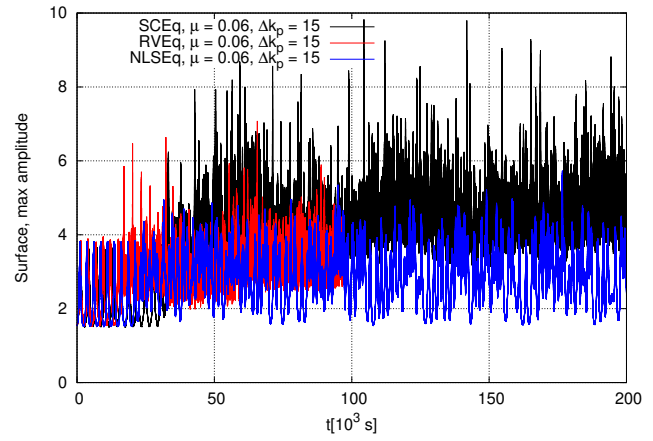


(б)

Figure 11: Зависимость максимальной амплитуды поверхности в разных моделях от времени для (a) $\mu = 0.04, k_p = 1$ (б) $\mu = 0.04, k_p = 10$

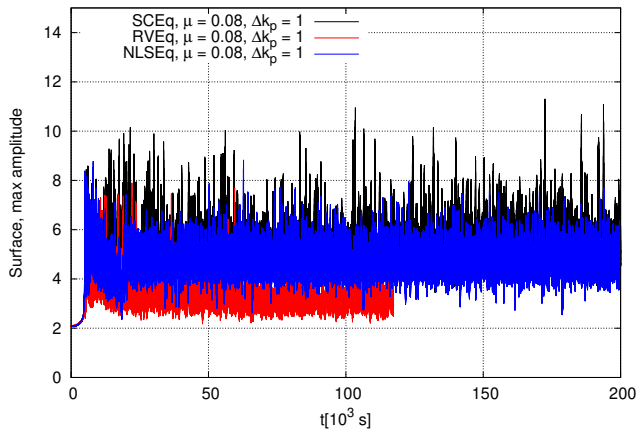


(a)

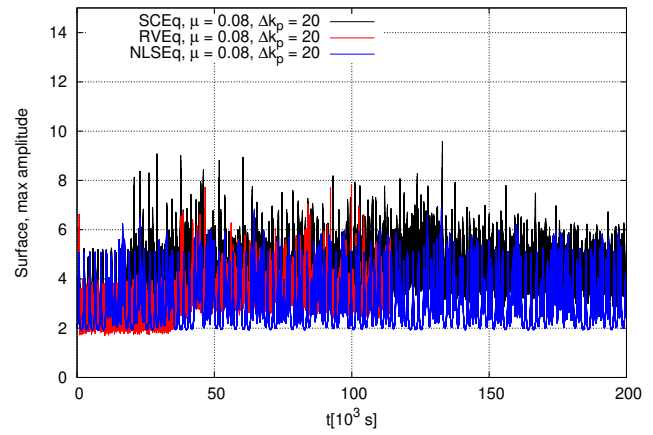


(б)

Figure 12: Зависимость максимальной амплитуды поверхности в разных моделях от времени для (a) $\mu = 0.06, k_p = 1$ (б) $\mu = 0.06, k_p = 15$

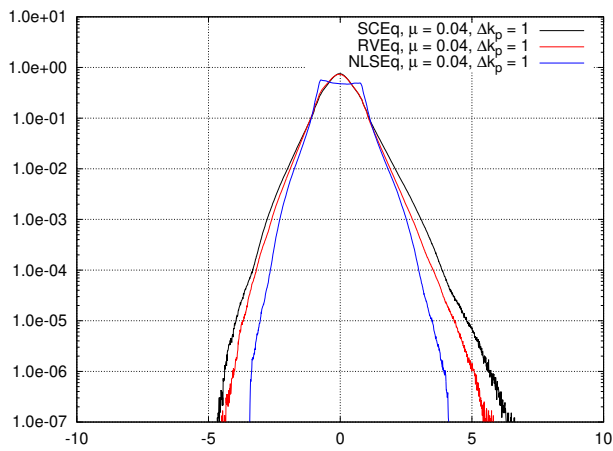


(a)

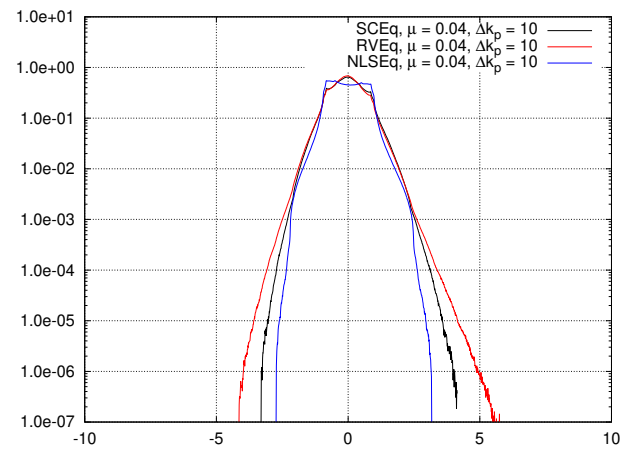


(б)

Figure 13: Зависимость максимальной амплитуды поверхности в разных моделях от времени для (a) $\mu = 0.08, k_p = 1$ (б) $\mu = 0.08, k_p = 20$



(a)



(б)

Figure 14: Сравнение PDF от амплитуды поверхности, усредненных за время расчета в разных моделях для (a) $\mu = 0.04, k_p = 1$ (б) $\mu = 0.04, k_p = 10$

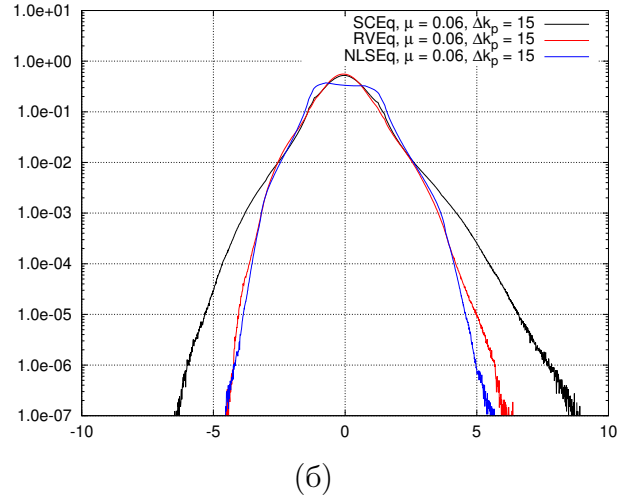
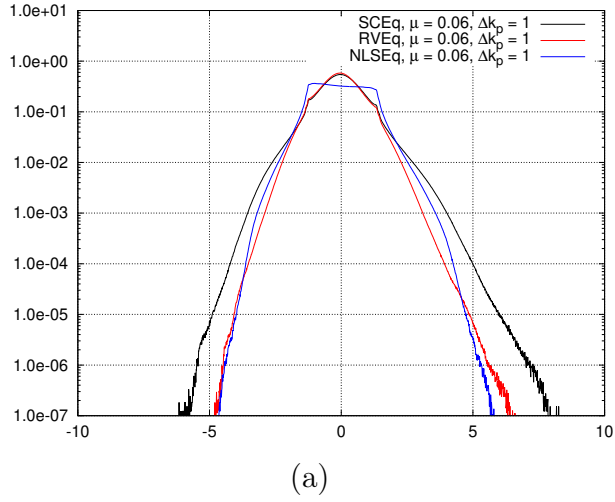


Figure 15: Сравнение PDF от амплитуды поверхности, усредненных за время расчета в разных моделях для (a) $\mu = 0.06, k_p = 1$ (б) $\mu = 0.06, k_p = 15$

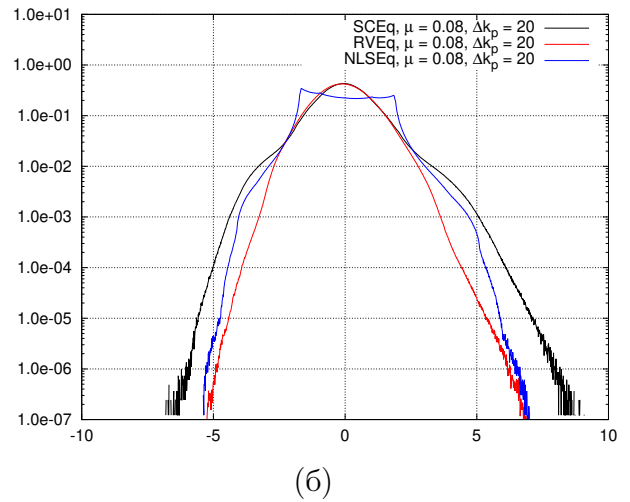
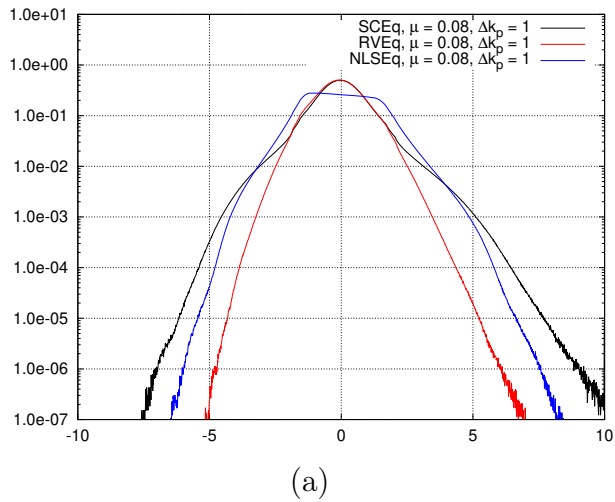


Figure 16: Сравнение PDF от амплитуды поверхности, усредненных за время расчета в разных моделях для (a) $\mu = 0.08, k_p = 1$ (б) $\mu = 0.08, k_p = 20$