РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

ИНСТИТУТ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ
имени Л. Д. ЛАНДАУ

На правах рукописи

ДЬЯЧЕНКО Александр Иванович

УДК 53:51

Турбулентность и сингулярности в нелинейных волновых системах

Специальность 01.01.03 - Математическая физика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Москва - 2005

Работа выполнена в Институте теоретической физики им. Л. Д. Ландау Российской Академии Наук.

Официальные оппоненты:
Доктор физико-математических наук Е. Н. Пелиновский,
Доктор физико-математических наук А. В. Колдоба
Доктор физико-математических наук Н. А. Иногамов

Ведущая организация:
Институт гидродинамики им. М. А Лаврентьева
Сибирского отделения Российской Академии Наук

Защита состоится 23 июня 2005 года в 11 часов 30 минут на заседании Диссертационного Совета Д 002.207.01 Института теоретической физики им. Л. Д. Ландау по адресу:
142432, г. Черноголовка, Ногинского района, Московской области,
проспект академика Семенова, 1а,
Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау РАН.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института теоретической физики им. Л. Д. Ландау РАН.

Автореферат разослан: "_____" __мая__ 2005 г.

Ученый секретарь
Диссертационного Совета,
Доктор физико-математических наук Л. А. Фальковский

Общая характеристика работы

Актуальность темы

Интерес к исследованию волн большой амплитуды, называемых обычно волны-убийцы, появляющихся на поверхности океана "из ниоткуда", и быстро исчезающих, вполне естественен. Они представляют угрозу для моряков, из-за них теряются человеческие жизни и суда. Они очень круты. В последней стадии их развития, крутизна становится бесконечной, образуя "стену воды". Кроме того, типичная волна-убийца - отдельное событие [3]. Изучение этих волн важно как для кораблестроения, так и для проектирования нефтяных и газовых платформ на морских шельфах. Также важным является разработка методов их прогноза. Нет никаких сомнений, что волны-убийцы являются нелинейными объектами. Естественно связать появление волн-убийц с модуляционной неустойчивостью волны Стокса. Линейная теория этой неустойчивости была разработана независимо в [19] и в [5]. В данной работе (в Главе 1) численно исследуется нелинейная стадия этой неустойчивости.

Хорошо известно, что уравнения описывающие идеальную жидкость со свободной поверхностью в поле силы тяжести вполне интегрируемы в нескольких важных случаях. Интегрируемость имеет место для длинных волн в на мелкой воде (KdV[24], для уравнения Кадомцева-Петвиашвили [9], для приближения Буссинеска[6], и для спектрально узкой волны в жидкости произвольной глубины (нелинейное уравнение Шредингера [8]). Слабо нелинейное движение жидкости в отсутствии поля силы тяжести также интегрируемо [29]. Очень естественно сформулировать гипотезу, что и произвольное одномерное движение идеальной жидкости в гравитационном поле интегрируемо. Во втрой главе исследуется этот вопрос, и хотя ответ, строго говоря, отрицательный, одномерная ситуация является почти интегрируемой.

Следующая важная проблема, затронутая в диссертации - проблема Колмогоровских спектров - является ключевой в теории слабой волновой турбулентности. Эти спектры являются точными решениями стационарного кинетического уравнения для среднеквадратичных амплитуд волн [49]. Несомненно, что слаботурбулентные Колмогоровские спектры должны теоретически объяснять степенные спектральные распределения энергии в ансамблях стохастических нелинейно взаимодействующих волн любой природы. Спектры такого типа наблюдаются систематически. Самый яркий пример такого спектра - спектр $\epsilon_\omega \simeq gv/\omega^4$, который обычно наблюдается в системах возбуждаемых ветром гравитационных волн в море. Однако, эта точка зрения разделяется не всеми. Кроме того, самая применимость кинетического уравнения для волн к реальной ситуации также дискутируется. (См., например [33].) Вывод кинетического уравнения из исходных динамических уравнений предполагает законность предположения о хаотичности фаз, которая может быть нарушена формированием некоторых когерентных структур, таких как волновые коллапсы, солитоны или Бозе-конденсат. Фактически, эта критика имеет серьезные основания. В реальных ситуациях когерентные структуры встречаются часто, но в то же время нет причин для полного отказа от теории слабой турбулентности. Действительность многообразна, и во многих конкретных ситуациях когерентные структуры сосуществуют со слаботурбулентной компонентой, участвуя в процессы переноса и диссипации энергии и других интегралов движения.

Следовательно, есть сильная мотивация, чтобы продолжить исследование теории слабой турбулентности, исследуя тот случай, где когеретные структуры важны, и случай, где такие структуры не важны.

Научная новизна

Основные результаты, включенные в диссертацию, являются новыми. Впервые получены *кубически* нелинейные, конформные уравнения, описывающие динамику потенциального течения двумерной идеальной несжимаемой жидкости со свободной границей в гравитационном поле и с учетом капиллярных сил. Проведен ряд численных экспериментов по изучению образования волн-убийц на поверхности жидкости, и их опрокидывания. Доказана *неинтегрируемость* двумерной идеальной гидродинамики со свободной границей. Впервые применены *конформные* канонические переменные для вычислений матричных элементов нелинейного резонансного взаимодействия волн. Впервые показана, аналитически и численно возможность коллапса двумерном обобщении уравнения Бенджамина-Оно. Впервые численно подтверждена справедливость теории слабой турбулентности в *одномерном* случае. Численно и аналитически исследовано влияние когерентных структур на слаботурбулентные спектры. В численном эксперименте впервые получен слаботурбулентный Колмогоровский спектр для флуктуаций поверхности жидкости в гравитационном поле. Построена численная схема для решения уравнений динамики поверхностных волн, сохраняющая Гамильтониан.

Цель работы

Целью работы является развитие теоретических и численных методов исследования нелинейных явлений в гидродинамике идеальной жидкости со свободной границей. Особое внимание уделяется разработке эффективных численных алгоритмов, сохраняющих интегралы движения.

Также важным здесь являлся поиск интегрируемых приближений.

Кроме того, проведённое исследование слаботурбулентных режимов в различных моделях имело своей целью обосновать применимость кинетических уравнений, которые позволяют с гораздо большей эффективностью моделировать волновую турбулентность, чем исходные динамические уравнения.

Практическая и теоретическая ценность работы

Полученные кубически нелинейные уравнения безвихревой двумерной гидродинамики позволяют эффективное численное моделирование нелинейных процессов на поверхности жидкости, включая такие как обрушение волн, когда граница жидкости становится неоднозначной.

Новый подход к вычислению матричных элементов (с помощью конформных канонических переменных) позволяет эффективно вычислять резонансные взаимодействия волн в двумерной потенциальной гидродинамике.

Теоретическое и численное исследование коллапса в пограничном слое объясняет экперименты по генерации когерентных структур в пограничном слое.

Наблюдениие в численных экспериментах слаботурбулентных режимов, с Колмогоровскими спектрами флуктуаций, близких к экспериментальным, позволяет применять более простые, кинетические уравнения для предсказания океанского волнения в метеорологических приложениях.

Апробация работы

Результаты, изложенные в диссертации, докладывались заседаниях Ученого Совета и семинарах Института теоретической физики им. Л. Д. Ландау РАН, а также на международных научных конференциях:

- IV International Workshop "Nonlinear and Turbulent processes in physics", Kiev, 1989.
- International Conference on Space - Time Complexity in Nonlinear Optics, Univ. of Arizona, Tucson, USA, 1990.
- International Workshop on Dynamics Structures and Intermittencies in Turbulence, Arizona State University, Phoenix, USA, 1991.
- Nonlinear Optics Workshop, Univ. of Arizona, Tucson, USA, 1993.
- International School on Turbulence, Cargese, France, 1993
- Ocean Waves Workshop, Univ. of Arizona, Tucson, USA, 1994.
- New achievements in the Nonlinear Schrödinger Equation, Landau Institute for Theoretical Physics, Moscow, Russia, 1994.
- Nonlinear Optics Workshop, Univ. of Arizona, Tucson, USA, 1994.
- Workshop on Collapses and Patterns in Nonlinear Optics and Lasers, Cork, Ireland, 1994
- 30th Anniversary Landau Institute Conference, Landau Institute for Theoretical Physics, Moscow, Russia, 1995.
- Workshop on Ocean Dynamics, Los Alamos, USA, 1995
- Symposium on Applied Mathematics, 70 Anniversary of M.Kruskal, Boulder, Colorado, USA, 1995
- "Solitons, Collapses and Turbulence: Achievements, Developments and Perspectives", Институт теоретической физики им. Л.Д.Ландау Черноголовка, Россия, 3-10 августа, 1999г.
- Workshop on Singularities in Classical, Quantum and Magnetic Fluids Mathematcs Institute - University of Warwick Coventry, UK, 20 - 23 October, 2000.

- Theory and Application of Problems with Free Boundaries, Бийск, Россия, 2-6 июль, 2002.
- Solitons, Collapses and Turbulence: Achievements, Developments and Perspectives, Институт теоретической физики им. Л.Д.Ландау Черноголовка, Россия, 18-22 августа, 2002г.
- Международная симпозиум "Topical problems of Nonlinear wave Physics", Нижний Новгород, Россия, 6-12 сентября, 2003.
- Международная конференция "Free surface water waves", Торонто, Канада, 14-18 июня, 2004г.
- Международная конференция "Frontier of Nonlinear Physics", Нижний Новгород, Россия, 5-12 июля, 2004г.
- Международная конференция "Математическая гидродинамика: модели и методы", Ростов-на-Дону, 4-8 октября, 2004г.

По теме диссертации опубликовано 20 работ, список которых приведен в конце автореферата.

Объем и структура диссертации

Диссертация состоит из введения, четырёх глав, заключения, семи приложений и списка литературы.

Краткое содержание работы

Введение

Во введении обосновывается история и актуальность рассматриваемых вопросов, мотивирующих работу. Сформулированы цели и приведены основные результаты работы. Коротко описана структура диссертации.

Глава 1. Конформные преобразования и Гамильтонов формализм в гидродинамике несжимаемой идеальной жидкости со свободной границей

Во **введении 1.1** изложен краткий обзор известных результатов для уравнений двумерного течения идеальной несжимаемой жидкости со свободной границей. Это, в первую очередь, отностится к стационарным, установившимся гравитационным волнам. Применение теории функций комплексных переменных в этой области позволило получить важные результаты, первый из которых датирован серединой прошлого века и принадлежит Стоксу [42]. Им было показано, что с ростом амплитуды стационарных гравитационных волн происходит заострение гребней волн и образуется угол, равный 120^0. В двадцатые годы этого века в этом направлении были выполнены классические работы Некрасова [15] и Леви-Чивита [31], математические аспекты которых дали мощный импульс ряду направлений теории интегральных уравнений и функционального анализа.

Для исследования нестационарной динамики поверхности в шестидесятые годы и позже получил развитие подход, основанный на лагранжевом описании, предложенном Биркгоффом [20]. Ряд авторов (см. обзор [32] и ссылки в нем) пытался применить метод аналитического продолжения по лагранжевым переменным. Однако, эти координаты не допускают подходящего конформного преобразования, т.к. их аналитическое продолжение имеет особенности в обеих полуплоскостях комплексного переменного.

Удобный подход описания потенциальных течений жидкости со свободной поверхностью для произвольной размерности пространства основан на использовании канонического формализма, известного с 1968 г. (см. [4]). Для двумерной геометрии наиболее естественным является подход, сочетающий канонический формализм и конформные отображения.

Этот подход описан в **разделе 1.2** для случая воды произвольной глубины с учетом поля тяжести и поверхностного натяжения. Этот раздел начинается с классической постановки задачи о потенциале Φ скорости течения двумерной идеальной несжимаемой жидкости

$$\Delta\Phi = 0. \tag{1}$$

с граничными условиями

$$\frac{\partial\eta}{\partial t} + \frac{\partial\Phi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial x} = \left.\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right|_{y=\eta}, \tag{2}$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\frac{\partial\Phi}{\partial x})^2 + \frac{1}{2}(\frac{\partial\Phi}{\partial y})^2\bigg|_{y=\eta} + g\eta = 0\,, \tag{3}$$

на свободной границе. Далее, используя вариационный принцип и конформное преобразование области, занимаемой жидкостью, на нажнюю полуплоскость конформной переменной, выводятся новые уравнения для двух аналитических функций, комплексного потенциала скорости и собственно конформного преобразования. Подобные уравнения были получены Овсянниковым в [16], но другим путём.

В следующем **разделе 1.3** некоторые частные приближенные решения нестационарной динамики свободной границы в отсутствии гравитационного поля и сил поверхностного натяжения.

1. В первом и втором параграфах исследован случай динамики границы с большой кривизной. Показано, что в этом случае уравнения могут быть упрощены, и сведены к одному уравнению для конформного преобразования $z(u, t)$ только.

$$\mathrm{Im}(z_t z_u^*) = -\lambda\,. \tag{4}$$

   Это уравнение известно в литературе с 1945 г. [14]. Обычно его называют Laplacian Growth Equation (LGE) – уравнение лапласовского роста. Оно широко используется при описании динамики границы двух жидкостей с существенно различными вязкостями, движения границы раздела двух фаз (например, льда и воды) и роста дендритов в частности.

   Уравнение (4) является интегрируемым [34], и здесь исследован класс его решений, в которых поверхность имеет "N-пальцевый"вид. Однопальцевое же решение было найдено Саффманом и Тэйлором [40].

2. В третьем параграфе выодятся автомодельные уравнения движения поверхности. Уравнения являются нелокальными, имеют двухпараметрическое семейство решений. Некоторые из этих решений описывают образование особенности на границе за конечное время (особенности типа "угол", или излом). Другие же соответсвуют коллапсу за бесконечное время.

В **разделе 1.4** получены точные, *кубически нелинейные* уравнения, описывающие потенциальное течение двумерной несжимаемой жидкости в гравитационном поле. Переменными, в которых уравнения становятся кубическими, являются функция, обратная производной конформного преобразования области, занимаемой жидкостью, на нижнюю полуплоскость, и комплексная потенциальная скорость течения:

$$R = \frac{1}{z_w}, \qquad \Phi_w = -iVz_w. \tag{5}$$

Для этих функций уравнения приобретают весьма изящную форму:

$$\begin{aligned} R_t &= i(UR' - U'R), \\ V_t &= i(UV' - R\hat{P}'(V\bar{V})) + g(R-1). \end{aligned} \tag{6}$$

Здесь

$$U = \hat{P}(V\bar{R} + \bar{V}R).$$

$\hat{P}$ - линейный интегральный оператор, оператор проектирования. Они являются уравнениями гидродинамического типа, но действуют в комплексной плоскости. Важную роль в этих уравнениях играет комплексная скорость переноса U. Она переносит нули функции $R(w,t)$, которые являются особыми точками конформного отображения $z(w,t)$.

В уравнениях (6) легко учесть и поверхностное натяжение, следует лишь заменить второе уравнение на

$$V_t = i(UV' - R\hat{P}'(V\bar{V}) + g(R-1)) - 2\sigma R\hat{P}'(Q'\bar{Q} - \bar{Q}'Q),$$

где σ - это коэффициент поверхностного натяжения, а $Q = \sqrt{R}$.

Раздел 1.5 посвящен в основном численному моделированию образования волн-убийц.

В первом параграфе обсуждаются различные возможные механизмы образования гигантских волн, и в частности нелинейная стадия модуляционной неустойчивости волны Стокса Теория этой неустойчивости была разработана независимо в [19] и в [5]. Развитие этой неустойчивости приводит к появлению волн чрезвычайно большой амплитуды, так называемых **freak waves**, волн убийц или гигантских волн. Эти волны - хорошо известная опасность для моряков (см., например[30]).

Эволюция модулированной нелинейной волны Стокса описывается нелинейным уравнением Шредингера (NLSE), полученым в [4]. Это уравнение интегрируемо (см. [8]), и является первыйм членом в иерархии уравнений огибающих, описывающих пакеты гравитационных поверхностных волн. Второй член в этой иерархии был вычислен Дысте в[23], следующий был найден несколько лет назад в[43].

Начиная с первой работы [41], много авторов пробовали объяснить формирование волн-убийц в рамках NLSE и его обобщений, как уравнение Дысте. Обширная научная литература посвящена этому предмету. Список, представленный ниже длинен, но неполон: [18, 21, 35, 36, 37, 38, 43, 44, 45, 46]. Обзор различных возможных механизмов формирования волн-убийц дается в [27, 12].

Явление образования волны-убийцы можно было бы объяснить, если бы решения для уравнения огибающих с амплидудой, большей некоторой критической, были бы неустойчивы и коллапсировали. В то время как в рамках одномерного уравнения NLSE солитоны устойчивы, улучшенная модель должна иметь некоторый порог по амплитуде для устойчивости солитона. Неустойчивость солитона большой амплитуды и его дальнейший коллапс могли бы быть надлежащим теоретическим объяснением происхождения волн-убийц.

Этот сценарий наблюдался в численном эксперименте в эвристической одномерной модели Maida-McLaughlin-Tabak (MMT-модель) (см. [33]) для одномерной волновой турбулентности [48].

В наших экспериментах наблюдался другой сценарий. А именно, волна-убийца появляется в модулированном цуге волн. Образование волна-убийцы похожа на развитие некоторого дефекта на периодической сетке, являющееся периодической волной Стокса.

Самый прямой способ доказать справедливость вышеизложенных сценариев формирования волны-убийцы - прямое численное моделирование уравнения Эйлера, описывающего потенциальные течения идеальной жидкости со свободной поверхностью в поле тяготения.

Во втором параграфе, вначале обсуждается конретный выбор уравнений, которые будут численно интегрироваться, выбраны уравнения (6), а схема интегрирования - метод Рунге-Кутта 4-го порядка аппроксимации по времени, и спектральная по пространству [50].

Начальные данные выбирались как цуг точных волн Стокса в котором было от 10 до 50 гребней (с периодическими ганичными условиями в области 2π), и крутизной $\mu = 0.1 \simeq 0.15$. Этот цуг был промодулирован длинноволновым возмущением малой амплитуды. Для того, чтобы задать волну Стокса, необходимо было решить стационарное уравнение

$$-c^2 y_u + g y y_u + g\hat{H}(y(1+\tilde{x}_u)) = 0. \tag{7}$$

Для его решения был разработан специальный алгоритм. Далее приведены типичные картины профиля границы жидкости до появления волны-убийцы, Рисунок 1, и в момент времени непосредственно перед её опрокидыванием, Рисунок 2.

Амплитуды волн, бегущих впереди волны-убийцы - относительно малы (в три раза меньше). Можно видеть глубокую впадину перед волной-убийцей. Это - так называемая "дыра в воде"или "hole in the water"(морской

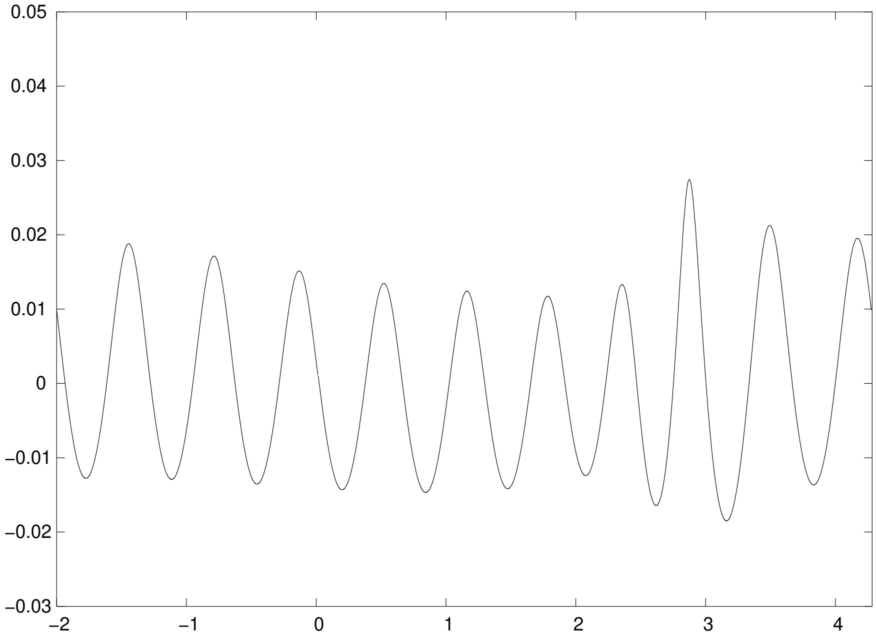


Рис. 1: Форма поверхности жидкости при $T = 422$

фольклор), которая предшествует волне-убийце. Можно видеть, что около гребня передний фронт волны очень крут. Это - действительно "стена воды". В некоторой области крутизна даже отрицательна (где поверхность неоднозначна). Начало опрокидывания представлено на Рисунке 3. Весьма важной характеристикой волны является также плотность импульса. Именно эта величина может представлять опасность для морских

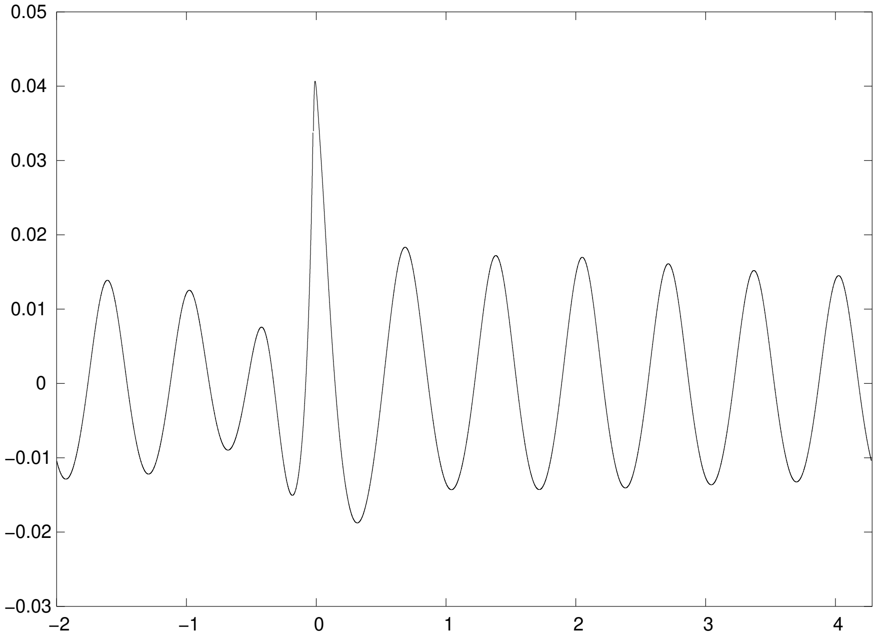


Рис. 2: Форма поверхности жидкости при $T = 458.56$

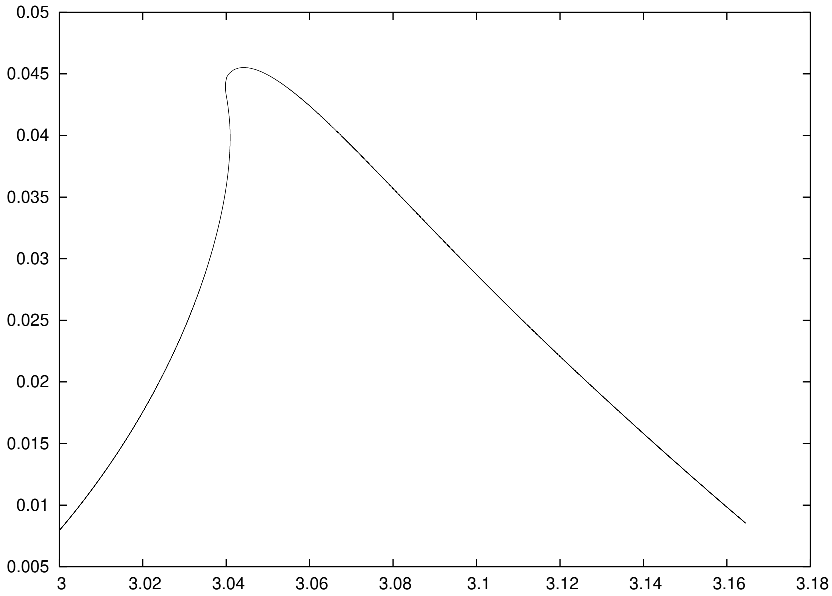


Рис. 3: Увеличенное изображение формы поверхности жидкости вблизи гребня волны при $T = 458.842$

судов и платформ. Рисунок 4 демонстрирует как происходит концентрация плотности горизонтального импульса к моменту образования волны-убийцы.

В **разделе 1.6** анализируются результаты численного моделирования, и делается вывод о том, что волна-убийца появляется в результате развития модуляционной неустойчивости (если порог неустойчивости не превышен, никакие волны-убийцы не появляются вообще), движется с групповой скоростью. Кроме того, имеется некоторый порог для крутизны начального условия, при превышении которого волна опрокидывается.

Глава 2. Интегрируема ли гидродинамика идеальной жидкости со свободной поверхностью ?

Эта глава построена следующим образом.

В **разделе 2.1** перечислены некоторые частные *интегрируемые* системы, получающиеся из точных уравнений потенциального течения идеальной несжимаемой глубокой жидкости со свободной границей.

В **разделе 2.2** получен эффективный четырёхволновой Гамильтониан (исключены нерезонансные трЁхволновые взаимодействия). В параграфе 2.2.1 сделана параметризация резонансного многообразия для одномерного случая. В параграфе 2.2.2 показано, что четырёхволновой матричный

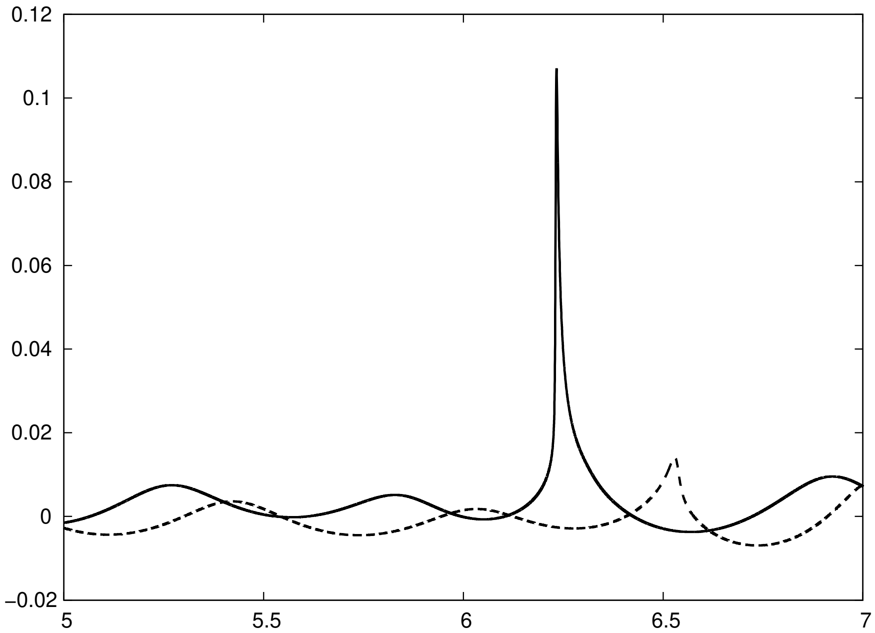


Рис. 4: пространственная плотность горизонтального импульса перед опрокидыванием при $T = 456$ (пунктирная линия), и в момент опрокидывания при $T = 458.5$ (сплошная линия)

элемент взаимодействия

$$T^{kk_1}_{k_2k_3} = 0$$

тождественно равен нулю на резонансной поверхности.

В следующем параграфе, 2.2.3, исследованы четырёхволновые матричные элементы, первый, полученный Хассельманном в 1962 г. [25], и второй, полученный Захаровым в 1968 г. [4]. В 1980 г. в работе Crawford,D.E., Yuen,H.G. и Saffman,P.G.[22] был сформулирован вопрос об идентичности результатов Хассельманна и Захарова, однако ответа на него не было. Здесь, же, используя результат предыдущего параграфа, показано, что оба матричных элемента совпадают на резонансной поверхности. И это справедливо как в одномерном, так и в двумерном случае.

Следующий **разделе 2.3** является подготовительным для вывода 5-ти волнового кинетического уравнения.

В параграфе 2.3.1 обсуждается структура кинетического уравнения в одномерной ситуации, и показывается, что четырёх волновое рассеяние не вмосит никакого вклада в кинетическое уравнение. Далее начинается вывод 5-ти волнового матричного элемента.

В параграфе 2.3.2 вводятся *конформные канонические* переменные, позволяющие сравнительно легко (хотя и громоздко) получить разложение

Гамильтониана до 5-го порядка включительно. В параграфе 2.3.3, с помощью конформных канонических переменных получены все необходимые матричные элементы для процессов

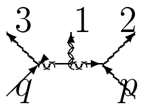
$$
\begin{array}{rl}
V^{k_1}_{k_2 k_3} & \text{для } 2 \Leftrightarrow 1 \\
U_{k_1 k_2 k_3} & \text{для } 3 \Leftrightarrow 0 \\
R_{k_1 k_2 k_3 k_4} & \text{для } 4 \Leftrightarrow 0 \\
G^{k_1}_{k_2 k_3 k_4} & \text{для } 3 \Leftrightarrow 1 \\
W^{k_1 k_2}_{k_3 k_4} & \text{для } 2 \Leftrightarrow 2 \\
Q^{k_1 k_2 k_3}_{k_4 k_5} & \text{для } 3 \Leftrightarrow 2.
\end{array}
$$

Далее, в параграфе 2.3.4, вводится каноническое преобразование, которое позволяет избавиться от нерезонансных членов в Гамильтониане, в духе работ [7, 10], но с тем отличием, что теперь каноническое преобразование делается в конформных переменных. Кроме того в параграфе рассматривается случай периодических граничных условий, и для него получен четырехволновой Гамильтониан в нормальной форме Биркгоффа

$$
\mathcal{H} \;=\; \sum_{n=-\infty}^{\infty} \omega_n |b_n|^2 + \frac{1}{2} \sum_{n \neq n_1}^{\infty} T_{n n_1} |b_n|^2 |b_{n_1}|^2 + \frac{1}{4} \sum_{n=-\infty}^{\infty} T_{nn} |b_n|^4 .
$$

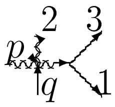
А это Гамильтониан интегрируемой системы.

В последнем параграфе **раздела 2.3** представлена процедура вычисления матричного элемента, соответствующего процессу $3 \Leftrightarrow 2$ с учётом исключения нерезонансных процессов. Это сделано с помощью диаграммной техники. Число диаграмм - велико. 60 - сконструированных из трехволновых процессов $V^{k_1}_{k_2 k_3}$ и $U_{k_1 k_2 k_3}$, как например, таких



$$
\frac{U(k1, k3-q, k2-p)\, V(k2, p, k2-p)\, V(k3, q, k3-q)}{(\omega(k2) - \omega(k2-p) - \omega(p))\; (\omega(k3) - \omega(k3-q) - \omega(q))}
$$

Кроме того, к ним нужно ещё добавить 20 диаграмм, сконструированных из 4-х плюс 3-х волновых процессов, как например такой



$$
\frac{V(k1+k3, k1, k3)\, W(p, q, k2, k1+k3)}{\omega(k1) + \omega(k3) - \omega(k1+k3)}
$$

И наконец, к ним нужно добавить собственно одну 5-ти волновую диаграмму с матричным элементом $Q^{k_1 k_2 k_3}_{k_4 k_5}$, всего 81 диаграмма. Резонансное многообразие, на котором необходимо вычислить всю эту сумму допускает полиномиальную трёхпараметрическую параметризацию. Результат суммирования был получен с помощью программы "Mathematica"[47], и несмотря на всю громоздкость диаграмм, он оказался чрезвычайно простым:

$$T^{k_1 k_2 k_3}_{k_4 k_5} = \frac{2}{g^{1/2}\pi^{3/2}}\sqrt{\frac{\omega_{k_1}\omega_{k_2}\omega_{k_3}}{\omega_{k_4}\omega_{k_5}}}\frac{k_1 k_2 k_3 k_4 k_5}{max(k_1, k_2, k_3)}. \tag{8}$$

Тот факт, что $T^{k_1 k_2 k_3}_{k_4 k_5} \neq 0$ на резонансном многообразии, означает, что *система уравнений, описывающая двумерное потенциальное, бесконечно глубокое течение несжимаемой идеальной жидкости в гравитационном поле является неинтегрируемой.*

В **разделе 2.4** выводится 5-ти волновое кинетическое уравнение, включающее в себя формально и 4-х волновые процессы. Для гравитационных волн 4-х волновые процессы не важны, и в нем остаётся только 5-ти волновой столкновительный член

$$\frac{\partial n_k}{\partial t} = st(n, n, n, n). \tag{9}$$

Кинетическое уравнение (9) сохраняет два интеграла движения, энергию и импульс, и описывает прямой и обратный каскады (импульса и энергии соответственно). Для их потоков, зная степень однородности матричного элемета, закона дисперсии и учитывая одномерность системы, следуя [49] получены степенные стационарные решения, Колмогоровские спектры.

Глава 3. Волновая турбулентность в нелинейном уравнении Шредингера

В **разделе 3.1** изучается влияние когерентных структур на слаботурбулентные спектры в рамках модели MMT-модели (A.Maida, D.McLaughlin и E.Tabak [33]).

В параграфе 3.1.1 приводится пример слаботурбулентного спектра $\epsilon_\omega \simeq gv/\omega^4$, который обычно наблюдается в системах возбуждаемых ветром гравитационных волн в море. С другой стороны, вывод кинетического уравнения (решением которого являются слаботурбулентные спектры) из исходных динамических уравнений предполагает законность предположения о хаотичности фаз, которая может быть нарушена формированием некоторых когерентных структур, таких как волновые коллапсы или солитоны. Во многих конкретных ситуациях когерентные структуры сосуществуют со слаботурбулентной компонентой, участвуя в процессы переноса и диссипации энергии и других интегралов движения. В параграфе 3.1.2 приводится модель нелинейной волновой системы, MMT-модель, являющейся обобщеннием нелинейного уравнения Шредингера, сохраняющего не только энергия и импульс, но также и волновое действие (число частиц). MMT-модель демонстрирует сложное много-вариантное поведение, которое нельзя рассматривать как простое подтверждение слаботурбулентной теории теории. Отсутствие простого, явного подтверждения происходит из-за наличия когерентных структур, которые постоянно присутствуют во всех версиях MMT-модели. В следующем параграфе 3.1.3, приводится постановка задачи и результата численного моделирования модифицированной MMT-модели, которая включает в себя не только стандартные процессы рассеяния "два в два", но и процессы распада "один в три", которые не сохраняют волновое действие.

$$
\begin{aligned}
&i\Big(\frac{\partial\psi}{\partial t} + \gamma_k\,\psi_k\Big) = \\
&k^\alpha\,\psi + a\int(|k||k_1||k_2||k_3|)^{\beta/4}\,\psi^*_{k_1}\,\psi_{k_2}\,\psi_{k_3}\,\delta_{k+k_1-k_2-k_3}\,dk_1\,dk_2\,dk_3 + \\
&g\int(|k||k_1||k_2||k_3|)^{\beta/2}\mathrm{x} \\
&\qquad\qquad \mathrm{x}(\psi_{k_1}\,\psi_{k_2}\,\psi_{k_3}\,\delta_{k-k_1-k_2-k_3} + 3\,\psi_{k_1}\,\psi^*_{k_2}\,\psi^*_{k_3}\,\delta_{k-k_1+k_2+k_3})dk_1\,dk_2\,dk_3
\end{aligned}
$$

Оказывается, что такая модель, при надлежащем выборе параметров, ведет себя в соответствии со слаботурбулентной теорией. В частности, она демонстрирует существование степенного решения (Колмогоровского спектра) в широком инерционном интервале (больше двух декад).

Наличие в Гамильтониане "распадного"члена обеспечивает отсутствие локализованных структур, и создаёт условия для "наблюдения"слаботурбулентного режима.

На Рисунке 5 изображён типичный стационарный, усреднённый по времени, спектр для варианта с $g = 0.15$. Из Рисунка 5 хорошо видно, что в инерционном интервале $30 < k < 300$ этот спектр аппроксимируется степенным Колмогоровским спектром с показателем $\lambda = \frac{5}{2}$. Следует отметить, что представленные в этом параграфе результаты являются первыми, подтверждающими справедливость теории слабой турбулентности именно в одномерном случае.

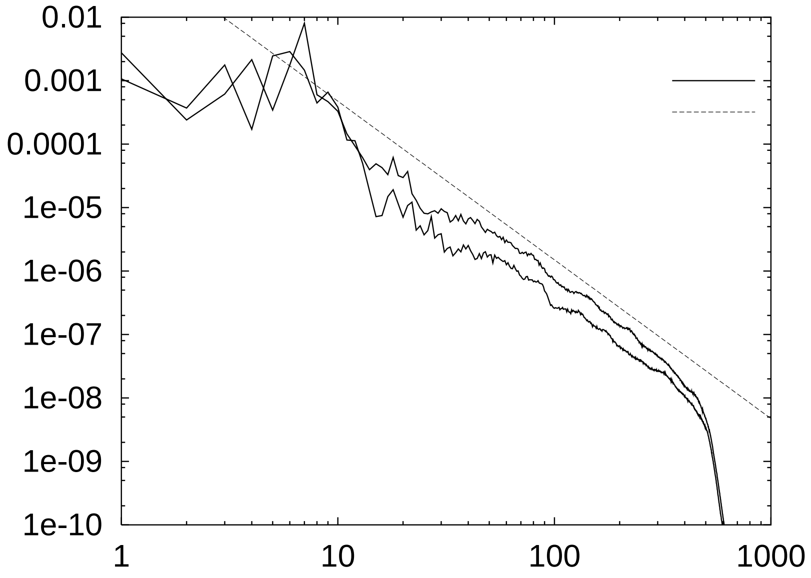


Рис. 5: $|\psi_k|^2$, усреднённый проинтервалу времени 100. Прямая линия соответствует степенному спектру $0.15|k|^{-\frac{5}{2}}$

В **разделе 3.2** рассматривается турбулентность в нелинейной волновой среде, сопрововождающаяся возникновением локализованных существенно нелинейных структур, солитонов. Даётся обоснование утверждения о центральной роли солитонов в асимптотическом состоянии турбулентности данного типа и показывается, тем самым, что солитонный газ является своеобразным статистическим аттрактором уменьшающейся со временем размерности в неинтегрируемой гамильтоновской системе с бесконечным числом степеней свободы.

В параграфе 3.2.1 дается качественная картина солитонной турбулентности в рамках неинтегрируемого нелинейного уравнения Шредингера в условиях отсутствия волновых коллапсов. Впервые солитонная турбулентность рассматривалась, по-видимому, в 1973 г. в работе [28].

В параграфе 3.2.1 предлагается модель волновой турбулентности, модифицированное нелинейное уравнение Шредингера (см., например, [13])

$$i\psi_t + \Delta\psi + f(|\psi|^2)\psi = 0, \tag{10}$$

Нелинейность $f(|\psi|^2)$ выбиралась такой, чтобы уравнение было неинтегрируемым и имело решение в виде устойчивого (неколлапсирующего) солитона. В этом случае турбулентность является солитонной. Фундаментальный общефизический интерес представляет вопрос о характере эволюции этой турбулентности. В неинтегрируемом случае качественное термодинамическое рассмотрение взаимодействия солитонов со свободными волнами [13] показывает, что поведение системы определяется накоплением слабых эффектов, которые обусловлены нескомпенсированностью процессов, протекающих в противоположных направлениях. При взаимодействии солитонов со слаботурбулентным спектром термодинамически выгодными являются процессы, приводящие к увеличению амплитуд солитонов при уменьшении их числа. Рассмотрены элементарные процессы взаимодействия солитонов друг с другом и со слабонелинейными свободными волнами. Показано,что происходит перекачка энергии из волны в солитон и происходит торможение солитона и увеличение волнового вектора волны. При взаимодействии же двух солитонов происходит усиление более интенсивного и ослабление менее интенсивного солитона.

В параграфе 3.2.3 представлены результаты численного моделирования одно- и двумерной турбулентности для уравнения (10). Результаты расчетов продемонстрировали полное соответствие наблюдаемой пространственно-временной динамики системы предсказанной качественной картине солитонной турбулентности. Взаимодействие солитонов друг с другом и со свободными волнами приводит к постепенной перекачке числа волн из солитонов в более интенсивные, амплитуды солитонов растут с уменьшением их числа. На больших временах система приходит к единственному солитону малого размера и большой амплитуды. Измеренная скорость солитона много меньше групповой скорости, что вполне естественно: неподвижный солитон реализует минимум энергии.

В параграфе 3.2.4 делается вывод о том, что в процессе эволюции долгоживущей солитонной турбулентности неинтегрируемая система приближается к состоянию солитонного газа, что позволяет считать это состояние статистическим аттрактором. В реальных физических системах всегда имеется затухание волн с большими волновыми числами, а также различные нелинейные механизмы затухания. Эти эффекты приведут к тому, что солитоны достаточно малого размера и большой интенсивности будут быстро диссипировать. Тем самым концентрация энергии в солитонах малых размеров оказывается сильно нелинейным механизмом поглощения энергии, который можно сравнить с "коллапсным"механизмом диссипации за счет катастрофического развития особенностей волнового поля. Итак, оказывается, что "солитонный"и "коллапсный"варианты волновой турбулентности качественно отличаются друг от друга не слишком сильно.

В **разделе 3.3** рассматривается турбулентность в двумерном уравнении Шредингера с отталкиванием (уравнение Гросса-Питаевского [2])

$$i\psi_t + \Delta\psi - |\psi|^2\psi = 0. \qquad (11)$$

В параграфе 3.3.1 обсуждаются особенности нелинейной волновой системы с дефокусирующей нелинейностью. В сильной турбулентности в рамках уравнения (11) могут одновременно присутствовать и конденсат, и фононы, и ударные волны, и тёмные солитоны и квантовые вихри. Такая сложность, тем не менее, не подразумевает невозможным существование универсального скэйлинга для корреляционных функций, а лишь затрудняет установить его.

В параграфе 3.3.2 обсуждаются результаты численного моделирования уравнения (11), в которое добавлены накачка и затухание для волн. При умеренных накачках турбулентность выходила на стационарный режим, в котором присутствовали линейно растущий конденсат и анизотропные вне-конденсатные флуктуации. Анизотропия (в отличие от анизотропного спектра, предсказываемого теорией слабой турбулентности) обусловлена нелинейными эффектами (такими как образование кинков и ударных волн) см. Рисунок 6.

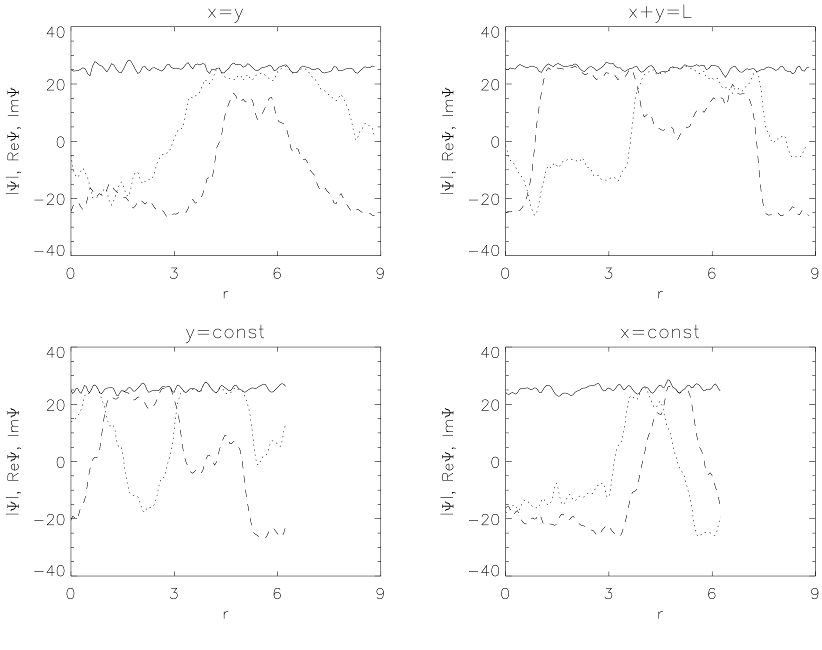


Рис. 6: Профили $|\Psi|$ (сплошная), $\mathrm{Re}\,\Psi$ (пунктирная) $\mathrm{Im}\,\Psi$ (точечная), взятые вдоль диагонали и вдоль границ области моделирования, $t = 135.7$

Для характеристики вне-конденсатных флуктуаций строились корреляционные функции

$$S_i(r) = \langle |\psi(\mathbf{x} + \mathbf{r}) - \psi(\mathbf{x})|^i \rangle.$$

Нетрудно видеть из Рисунка 7 (a), что парная корреляционная функция имеет логарифмическую асимптотику на больших масштабах, на временах, когда достигается стационарный режим.

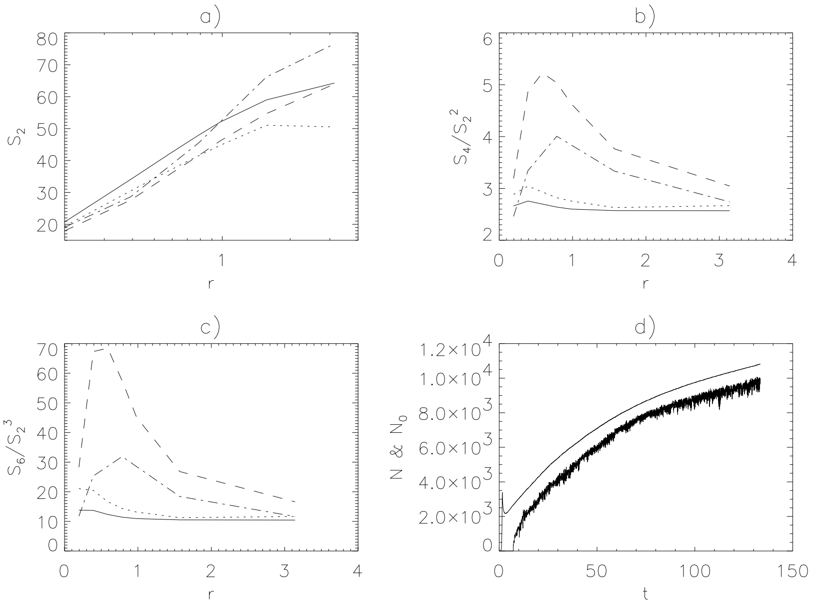


Рис. 7: a,b,c) Корреляционные функции в раличные времена: $-\cdot-$ $t = 32$, $---$ $t = 55$, $\cdots$ $t = 92$, сплошная $t = 127$; d) полное число волн N и число волн в конденсате N_0.

Для того, чтобы определить насколько вне-конденсатные флуктуации отклоняются от Гауссовой статистики, вычислялись нормированные корреляционные функции 4-го ("flatness")S_4/S_2^2 (должна быть равна 2 для Гауссовой статистики) и 6-го S_6/S_2^3 (должна быть равна 8 для Гауссовой статистики) порядков. "Flatness"растет до времени $t \approx 55$ (когда относительный рост конденсата насыщается), а затем "flatness"уменьшается. "Flatness"почти одинакова на всех масштабах при $r > r_0$, где корреляционная длина $r_0 \simeq N_0^{-1/2}$ уменьшается со временем.

В параграфе 3.3.3 делается заключение о том, что, наблюдались две качественно различных компоненты в турбулентности неравновесного Бозе-конденсата. Умеренная накачка приводит

- к слаботурбулентному режиму в области накачки, в котором также присутствует и сильнотурбулентная компонента (кинки, ударные волны)

- обратный каскад производит линейно растущий конденсат, который стабилизирует вне-конденсатные флуктуации, т.е. служит стоком в турбулентности, которая стационарна при всех $k \neq 0$.

В **разделе 3.4**, в рамках обобщенного двумерного уравнения Бенджамина-Оно аналитически и численно показано, что в пределе малой вязкости неустойчивость одномерных длинноволновых солитонов в пограничном слое приводит к их самофокусировке и коллапсу. Найдена точная верхняя граница для полной энергии возмущений, когда коллапс все еще невозможен и когда любое возмущение асимптотически исчезает с течением времени. Теоретические предсказания находятся в качественном согласии с экспериментами [11].

В параграфах 3.4.1 и 3.4.2 обсуждается возможный механизм коллапса, и отмечается различие между одно- и двумерным случаем. Отмечается также, что уравнение Бенджамина-Оно для флуктуаций скорости в сдвиговом потоке, обобщенное на двумерный случай в [17] (уравнение Шриры)

$$u_t = \frac{\partial}{\partial x}\hat{k}u - 6uu_x \tag{12}$$

не предполагает малости отношения компонент k_y/k_x, что является важным при коллапсе.

Далее в параграфе 3.4.3 рассматриваются свойства *двумерного солитона*, полученного численно в работе [1]. Выводятся интегральные соотношения для такого солитона, позволяющие получить зависимость Гамильтониана от масштабного параметра солитона. Эта зависимость существенно различна в одно- и двумерной ситуации. В одномерии Гамильтониан всегда ограничен снизу, и таким образом, солитон устойчив, и коллапс невозможен. В двумерном же случае, Гамильтониан равен нулю на солитонном решении. Это, в свою очередь, означает, что возмущение солитонного решения может нарушить баланс в любую сторону. А именно, одни возмущения приводят к расплыванию солитона, а другие, наоборот, к коллапсу. Вопрос о конкретном выборе таких возмущений остаётся открытым.

В следующем параграфе 3.4.4 показано, что одномерный солитон неустойчив относительно двумерных возмущений (изгибных возмущений его фронта), найден его инкремент. В параграфе 3.4.5 обсуждается сценарий развития неустойчивости одномерного солитона. Он разбивается на отдельные кластеры, каждый из которых коллапсирует, поскольку исходный одномерный солитон имеет отрицательный Гамильтониан. Такая система должна коллапсировать. Хотя получить аналог теоремы вириала, как это сделано для нелинейного уравнения Шредингера, не удалось. Важную роль здесь должен сыграть численный эксперимент.

Однако, в парагафе 3.4.6 доказано другое утверждение, о достаточных условиях отсутствия коллапса: если продольный импульс начального условия меньше критического,

$$P_x < P_{x,cr}$$

(который определяется солитонным решением), то такое решение асимптотически "расплывается".

В параграфе 3.4.7 представлены результаты численного эксперимента. Главная трудность здесь в том, что солитон, и коллапсирующий, и устойчивый имеет степенные, медленно спадающие хвосты, пэтому численное моделирование проводилось на разностной сетке 512x512 узлов. Исследовались два вопроса:

1. Порог коллапса для начальных условий, у которых Гамильтониан близок к нулю, $H \simeq 0$. Здесь было получено, что если для начальных условий (Лоренцев профиль сворости) выполнено $P_x > P_{x,cr}$ и $H < 0$, мы наблюдаем коллапс (см. Рисунок 8). Если же $P_x < P_{x,cr}$ и $H > 0$ наблюдается медленное расплывание начального условия.

2. Неустойчивость одномерного солитона. В качестве начального условия бралось точное решение одномерго уравнения (12, возмущенное в поперечном направлении. Временная эволюция линий уровня показана на Рисунке 9.

В параграфе 3.4.8 обсуждаются экперименты по генерации когерентных структур [11]. Отмечается совпадение "шипов"на профиле скорости в эксперименте, с коллапсирующими кластерами в нашем численном эксперименте. Так же отмечается, наличие порога образования "шипов"в эксперименте, и порога коллапса в теории.

Глава 4. Слабая волновая турбулентность волн на поверхности жидкости

В **разделе 4.1** приведены уравнения динамики слабонелинейных волн на поверхности жидкости, следуя работам В.Е. Захарова и Н.Н. Филоненко

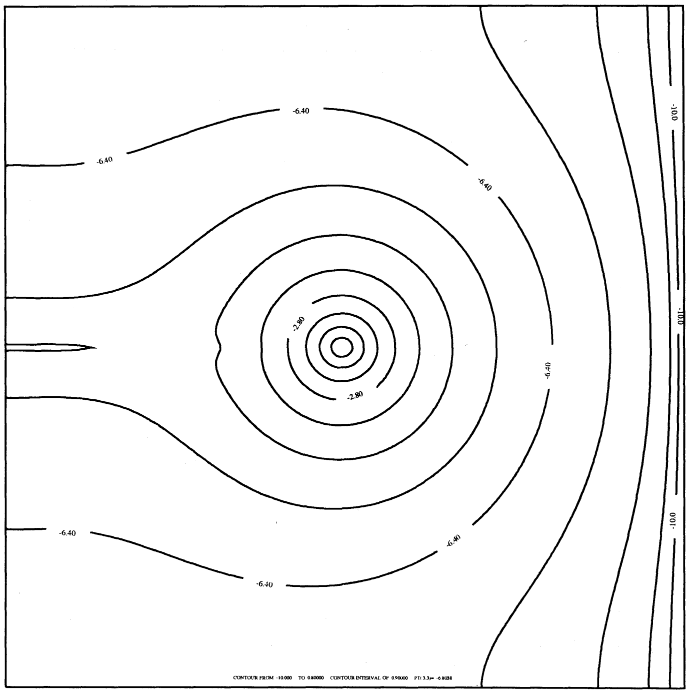


Рис. 8: Линии уровня $u(x,y)$ при $t=45$ в режиме коллапса. Изображены контуры от -10,0 до 0,8. Интервал - 0,9.

60-х годов. Гамильтониан для дальнейших целей нужно удерживать до 4-го порядка, у уравнения при этом, кубически нелинейные:

$$\begin{aligned}
\dot{\eta} &= \hat{k}\psi - (\nabla(\eta\nabla\psi)) - \hat{k}[\eta\hat{k}\psi] + \hat{k}(\eta\hat{k}[\eta\hat{k}\psi]) + \\
&\quad + \tfrac{1}{2}\triangle[\eta^2\hat{k}\psi] + \tfrac{1}{2}\hat{k}[\eta^2\triangle\psi], \\
\dot{\psi} &= \sigma\triangle\eta - g\eta - \tfrac{1}{2}\left[(\nabla\psi)^2 - (\hat{k}\psi)^2\right] - [\hat{k}\psi]\hat{k}[\eta\hat{k}\psi] - [\eta\hat{k}\psi]\triangle\psi,
\end{aligned} \tag{13}$$

Здесь $\eta = \eta(x,y;t)$ — это отклонение поверхности жидкости от положения равновесия, $\psi = \psi(x,y;t)$ — потенциал скорости на поверхности, а g и σ — это гравитационная постоянная и коэффициент поверхностного натяжения соответственно.

Одним из краеугольных камней в теории слабой турбулентности является резонансное взаимодействие волн. Однако, в численных эксперименах, условия резонанса для волн на дискретной сетке не могут быть выполнены точно [26]. Поэтому вопрос о влиянии дискретности волновых чисел в численном моделировании несомненно важен. Он рассматривается **разделе 4.2**.

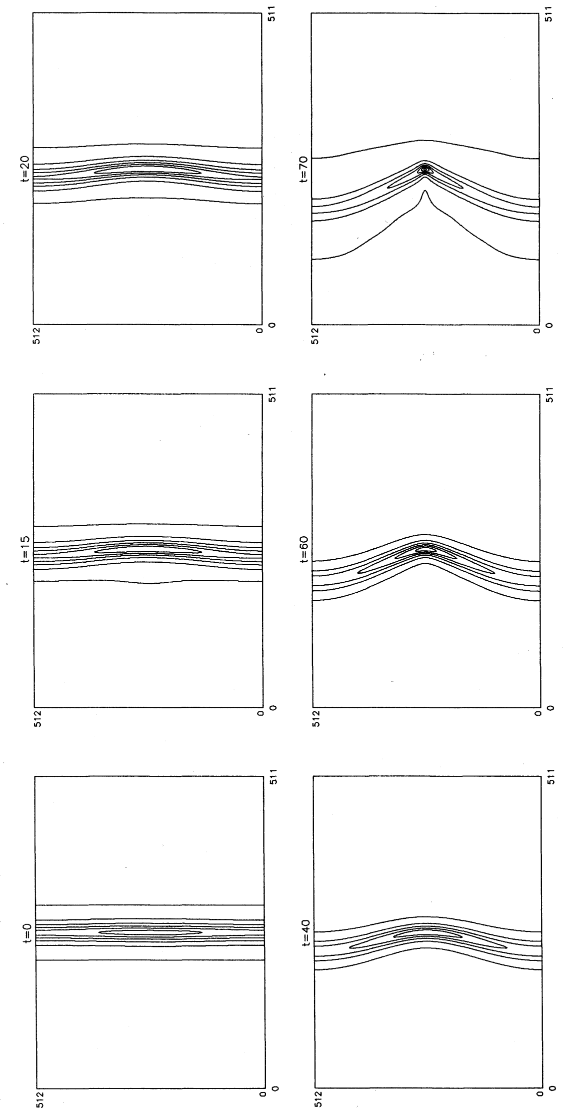


Рис. 9: Эволюция $u(x, y)$

В параграфе 4.2.1 рассматривается резонансное взаимодействие капиллярных волн на поверхности глубокой жидкости. В этом случае закон дисперсии имеет вид $\omega_k = \sqrt{\sigma k^3}$. Главным процессом здесь являются трехволновые распады и слияния волн с резонансными условиями

$$\vec{k}_1 + \vec{k}_2 = \vec{k}_3, \quad \omega_{k_1} + \omega_{k_2} = \omega_{k_3}. \tag{14}$$

Даже в отсутствии точных резонансов на дискретной сетке, нелинейный сдвиг частоты приводит к появлению у резонансной кривой конечной ширины, что и обеспечивает волновое взаимодействие в численном эксперименте.

Было проведено численное исследование распада монохроматической капиллярной волны при различных амплитудах. Продемострирован рост гармоник, близких к резонансной кривой. Измеренные в численном эксперименте инкременты распадной неустойчивости согласуются аналитической моделю взаимодействия трех волн с учетом расстройки резонанса. Получена картина вторичных распадов, формирующих Колмогоровский каскад.

В параграфе 4.2.2 рассмотрено резонансное взаимодействие гравитационных волн на поверхности глубокой жидкости. Закон дисперсии для таких волн имеет вид $\omega_k = \sqrt{gk}$. Здесь главным являются четырехволновые процессы рассеяния волн. Уравнения (14) в этом случае нетривиальных решений не имеют. Для процессов рассеяния условия резонанса таковы:

$$\vec{k}_1 + \vec{k}_2 = \vec{k}_3 + \vec{k}_4, \quad \omega_{k_1} + \omega_{k_2} = \omega_{k_3} + \omega_{k_4}. \tag{15}$$

Численно была исследована задача о "распаде"гравитационной волны,когда

$$\vec{k}_1 = \vec{k}_2 \quad \text{и} \quad \omega_{k_1} = \omega_{k_2}.$$

Резонансная кривая такого процесса (так называемая восьмёрка Филлипса) также не имеет целочисленных решений. Однако при конечном уровне "распадающейся"волны ширина резонанса становится порядка дискретности в пространстве волновых чисел, и процесс "распада"идёт в соответствии с теорией.

Важно понимать, что при слишком малых амплитудах волн в численном эксперименте резонансные взаимодействия отсктствуют. А слишком большая амплитуда волн может привести к нарушению условий применимости теории слабой турбулентности. Полученные результаты могут быть использованы при выборе параметров моделей, использующихся в экспериментах по численному моделированию турбулентности волн на поверхности жидкости.

Раздел 4.3 посвящён численному моделированию слабой турбулентности гравитационных волн на поверхности глубокой жидкости. Одним из самых успешных экспериментов по численному моделированию слабой является работа турбулентности волн на поверхности трехмерной жидкости следует признать работу [39], где моделировалась турбулентность капиллярных волн. Для гравитационных же волн, несмотря на значительные затраченные усилия, получить слаботурбулентный режим не удавалось.

В параграфе 4.3.1 вводится статистическое описание волнового поля на поверхности жидкости для случая гравитационных волн на глубокой воде. Здесь рассматривается спектр, отвечающий потоку энергии в малые масштабы (прямой Колмогоровский каскад). Теория слабой турбулентности дает такой ответ для флуктуаций поверхности жидкости:

$$< |\eta_k|^2 > \simeq \frac{C_p g^{1/2} P^{1/3}}{k^{7/2}}, \tag{16}$$

здесь P - поток энергии в область малых масштабов, C_p - безразмерная Колмогоровская константа.

В параграфе 4.3.2 приведены результаты расчетов. Было проведено численное моделирование уравнений (13) с накачкой и затуханием. Применялась численная схема, описанная в Приложении .6, которая сохраняет Гамильтониан (если нет затухания и накачки). Все расчеты проводились в периодической области $2\pi x 2\pi$, колличество узлов менялось от 128x128 до 256x256.

Достигается состояние динамического равновесия, в котором энергия накачки прямым Колмогоровским каскадом переносится в область затухания и там поглощалась. В этом состоянии была вычислена парная корреляционная функция отклонения поверхности от состояния равновесия: При этом в значительной части области инерционного интервала наблюдалось степенной спектр, такой как предсказывает теория (16). При увеличении инерционного интервала (что достигалось увеличением разностной сетки) область, в которой наблюдается слаботурбулентный спектр, также увеличивалась. Также была показана независимость показателя степенного убывания спектра от уровней накачки и затухания. Это позволяет сделать вывод об универсальности слаботурбулентного спектра гравитационных волн.

Заключение

В заключении сформулированы результаты работы.

Приложения

В приложения вынесен подробный вывод некоторых формул, приведение которых в основном тексте прерывало бы связность изложения из-за их

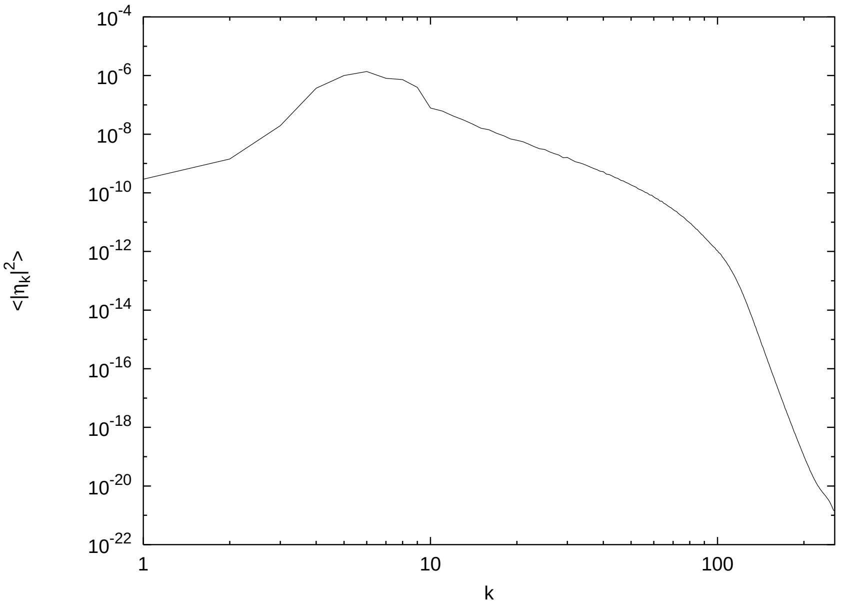


Рис. 10: Парная корреляционная функция отклонения поверхности в двойном логарифмическом масштабе.

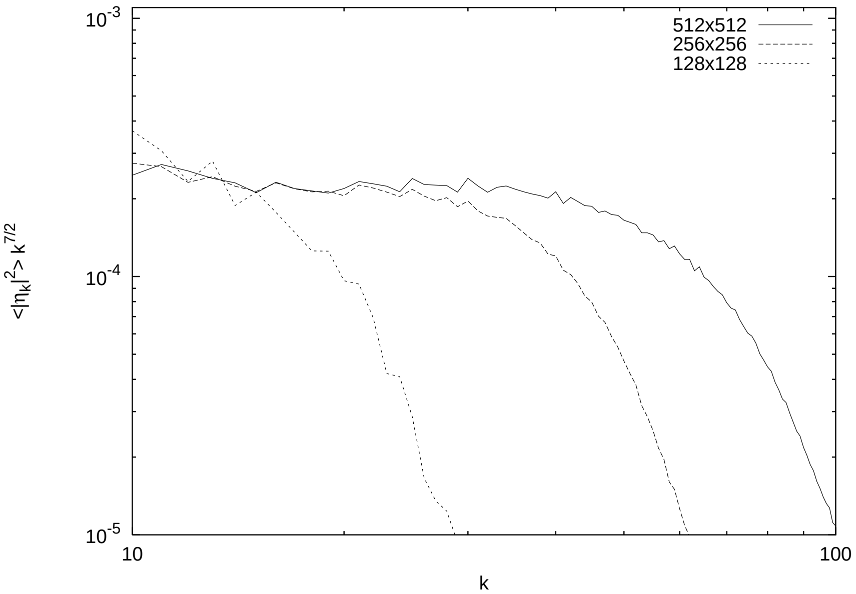


Рис. 11: Уширение области "правильного"степенного спектра при увеличении количества точек на сетке. Показан скомпенсированный спектр.

излишней громоздкости. Кроме того, в Приложение .5 вынесены диаграммы, 5-ти волновых процессов.

Основные результаты

Используя канонический формализм для описания динамики свободной поверхности двумерной идеальной жидкости произвольной глубины и конформное отображение в горизонтальную полосу, получена простая система псевдо-дифференциальных уравнений на форму поверхности и гидродинамический потенциал скорости. Эта система может быть эффективно изучена аналитически в случае, когда якобиан конформного отображения принимает большие значения в окрестности некоторой точки поверхности. Применяя разложение по обратным степеням якобиана, система может быть сведена к одному уравнению, которое совпадает с хорошо известным уравнением лапласовского роста. В рамках этой модели найден ряд точных решений, которые описывают образование конфигураций типа "пальцев". Получены точные конформные уравнения, кубически нелинейные, для формы поверхности и гидродинамической скорости. Уравнения допускают эффективное численное моделирование. Они описывают перенос особенностей конформного преобразования в верхней полуплоскости. Проведено численное исследование волн-убийц на поверхности жидкости, исследован механизм их образования, мдуляционная неустойчивость, её нелинейная стадия.

Доказана неинтегрируемость двумерной идеальной гидродинамики. С помощью конформных канонических переменные получены явные выражения для матричных элементов резонансного взаимодействия волн четвертого (который оказался равным нулю для!) и пятого порядков. Получено кинетическое уравнение для волн, учитывающее 5-ти волновое резонансное взаимодействие. Получены его стационарные решения, Колмогоровские спектры.

Предложена модифицированная ММТ-модель одномерной волновой турбулентности, позволяющая избавиться от когерентных структур в слаботурбулентных режимах. Проведено численное моделирование, продемострировано существование степенных Колмогоровских спектров.

Аналитически и численно исследована солитонная турбулентность для неинтегрируемого уравнения типа НУШ, показано, что система асимптотически приближается к состоянию солитонного газа. Показывается, что "солитонный"и "коллапсный"варианты волновой турбулентности качественно отличаются друг от друга не слишком сильно.

Численно исследована турбулентность в модели НУШ с отталкиванием, турбулентность конденсата. Наблюдалось две качественно различных компоненты в турбулентности неравновесного Бозе-конденсата: обратный каскад производит линейно растущий конденсат, который стабилизирует вне-конденсатные флуктуации, т.е. служит стоком в турбулентности. Посроены корреляционные функции высших порядков, которые оказались близки к гауссовой статистике.

Численно и аналитически исследована возможность коллапса двумерном обобщении уравнения Бенджамина-Оно (уравнение Шриры). Найдена точная верхняя граница для полной энергии возмущений, когда коллапс все еще невозможен и когда любое возмущение асимптотически исчезает с течением времени. Теоретические предсказания находятся в качественном согласии с экспериментами.

Исследовано влияние дискретности (в численных экспериментах) на резонансное взаимодействие волн для капиллярных и гравитационных волн на поверхности жидкости. Получены некоторые критерии на правильный выбор параметров моделирования. Разработана численная схема для решения динамических уравнений трехмерной потенциальной гидродинамики, сохраняющая гамильтониан. Проведено численное моделирование слабой турбулентности гравитационных волн. В значительной части области инерционного интервала наблюдалось степенной спектр, совпадающий с теоретическим.

Публикации по теме диссертации

1. А.И. Дьяченко, В.Е. Захаров, А.Н. Пушкарев, В.Ф. Швец, В.В. Яньков, *Солитонная турбулентность в неинтегрируемых волновых системах*, *ЖЭТФ*, **96**, Вып. 6(12), стр. 2026-2031, (1989);
Sov. Phys. JETP, **69**(6), pp. 1144-1147 (1989).

2. Dyachenko A.I., Pushkarev A.N., Shvets V.F., et al. Proc IV Int. Workshop “Nonlinear and Turbulent processes in physics”, Kiev, 1989.

3. A.I.Dyachenko, A.C.Newell, A.N.Pushkarev, and V.E.Zakharov, *Optical Turbulence*, *Physica* D, **57**, pp. 96-160 (1992).

4. A.I.Dyachenko, E.A.Kuznetsov, *Instability and Self-Focusing of Solitons in the Boundary Layer*, *Письма в ЖЭТФ*, **59**, Вып. 2, стр. 103-108

(1994);
JETP Lett., **59**, pp. 108-113 (1994).

5. A.I.Dyachenko, V.E.Zakharov, *Is the free-surface hydrodynamics an integrable system? Phys. Lett. A* **190**, pp. 144-148 (1994).

6. A.I.Dyachenko, Y.V.L'vov, *On the Hasselmann's and Zakharov's approaches to the kinetic equations for the gravity waves J.Phys. Oceanography* **25** N12, pp. 3237-3238 (1995).

7. A.I.Dyachenko, Y.V.L'vov and V.E.Zakharov, *Five-wave interaction on the surface of deep fluid*, *Physica D* **87**, pp. 233-261 (1995).

8. A.I.Dyachenko, E.A.Kuznetsov, *Two-Dimentional Wave Collapse in The Boundary Layer*, *Physica D* **87**, pp. 301-313 (1995).

9. A.I.Dyachenko, E.A.Kuznetsov, M.D.Spector and V.E.Zakharov, *Analytical Description of the Free Surface Dynamics of an Ideal Fluid*, *Phys. Lett. A*, **221**, pp. 73-79 (1996).

10. A.I.Dyachenko, V.E.Zakharov, *Toward an Integrable Model of Deep Water*, *Phys. Lett. A*, **221** pp. 80-87 (1996).

11. А.И. Дьяченко, В.Е. Захаров, Е.А. Кузнецов, *Нелинейная динамика свободной поверхности идеальной жидкости*, *Физика плазмы*, **22**, Вып. 10, стр. 916-928 (1996);
Plasma Physics Reports, **22** # 10, pp. 829-840 (1996).

12. A.I.Dyachenko, G.Fal'kovich, *Condensate Turbulence in Two Dimensions*, *Physical Review E*, **54**, # 5, pp. 5095-5099, (1996).

13. V.E.Zakharov, A.I.Dyachenko, *High-Jacobian approximation in the free surface dynamics of an ideal fluid*, *Physica D* **98**, pp. 652-664 (1996).

14. А.И. Дьяченко, *О динамике идеальной жидкости со свободной поверхностью*, *Доклады Академии Наук*, **376**, Вып. 1, стр. 27-29 (2001);
Doklady Mathematics, **63**, No. 1, pp. 115-118 (2001).

15. V.E. Zakharov, O.A. Vasilyev and A.I. Dyachenko, *Kolmogorov spectra in one-dimensional weak turbulence*, *Письма в ЖЭТФ*, **73**, Вып. 2, стр. 68-70 (2001);
JETP Letters, **73**, No. 2, pp. 63-65 (2001).

16. V.E. Zakharov, A.I. Dyachenko and O.A. Vasilyev, *New method for numerical simulation of a nonstationary potential flow of incompressible fluid with a free surface*, *European Journal of Mechanics B-Fluids*, **21**, No. 3, pp. 283-291 (2002).

17. A.I. Dyachenko, A.O. Korotkevich, V.E. Zakharov, *Decay of the monochromatic capillary wave*, *Письма в ЖЭТФ*, **77**, Вып. 9-10, стр. 572-576 (2003)

18. A.I. Dyachenko, A.O. Korotkevich, V.E. Zakharov, *Weak turbulence of gravity waves*, *Письма в ЖЭТФ*, **77**, Вып. 9-10, стр. 649-653 (2003).

19. A.I. Dyachenko, A.O. Korotkevich, V.E. Zakharov, *Weak Turbulent Kolmogorov Spectrum for Surface Gravity Waves*, *Phys. Rev. Lett.*, **92**, No. 13, pp. 134501-1–134501-4 (2004).

20. A.I. Dyachenko, V.E. Zakharov, *Modulation Instability of Stokes Wave → Freak Wave*, *Письма в ЖЭТФ*, **81**, Вып. 6, стр. 318-322 (2005).

Список литературы

[1] Абрамян Л.А, Степанянц Ю.А., Шрира В.И., ДАН СССР, **327**, No. 4-6, (1992), 460

[2] Гинзбург В.Л. Питаевский Л.П., ЖЭТФ **34**, (1958), 85;

[3] Дивинский Б.В., Левин Б.В., Лопатухин Л.И., Пелиновский Е.Н., Слюняев А.В. Доклады РАН, **395**, (2004), 438.

[4] Захаров В.Е., Журнал прикл. мех. и техн. физики, **2**, (1968), 190

[5] Захаров В.Е., ЖЭТФ **51**, 668 (1966)

[6] Захаров В.Е., ЖЭТФ, **38**, (1973), 108.

[7] Захаров В.Е., Изв. Высших учеб. завед.„ **17**, (1974) 431.

[8] Захаров В.Е. и Шабат А.Б, ЖЭТФ , **61**, (1971), 118.

[9] Захаров В.Е. и Шабат А.Б., Функц. анализ и прил.., **8**, No. 3, (1974), 43.

[10] Красицкий,В.П., ЖЭТФ, **71**,(1990), 921.

[11] Качанов Ю.С., Рыжов О.С., Сиб. физ.-техн. журнал, **1**, (1992), 34;
Kachanov Yu.S., Ryzhov O.S. and Smith F.T., J. Fluid Mech., **251**, (1993), 273.

[12] Куркин, А.А., Пелиновский, Е.Н., *Волны-убийцы: факты, теория и моделирование.* Нижегородский государственный университет, (2004).

[13] Петвиашвили В.И., Яньков В.В., Вопросы теории плазмы, **14**, Под редакцией Б.Б. Кадомцева. М.:Энергоатомиздат, (1985), 5.

[14] Полубаринова-Кочина П.Я., ДАН СССР т. **47** (1945) стр. 254;
Галин Л.А., ДАН СССР т. **47** (1945), 246.

[15] Некрасов А.И. О волнах установившегося вида., Изв. Иваново-Вознесенского политехнического ин-та, **3**, (1921).

[16] Овсянников Л.В., Динамика сплошной среды, Изд. ИГ им. М.А. Лаврентьева СОАН СССР, вып.15, (1973), 104.

[17] Шрира В.И., ДАН СССР, **308**, (1989), 732.

[18] Ablovitz, M.I., Hammack, D., Henderson, J. and Scholder, C.M., Phys. Rev. Lett. **84**, (2000), 887;
Ablovitz, M.I., Hammack, D., Henderson, J. and Scholder, C.M., Physica D **152-153**, (2001), 416.

[19] Benjamin, T.B. and Feir, J.E., J. Fluid Mech. **27**, (1967), 417.

[20] Birkhoff G., In: Proc.Sympos.Appl.Maths. **XII**, Providence, R.I.: AMS (1962).

[21] Clamond, D. and Grue, J. C.R. Mecanique **330**, (2002), 575.

[22] Crawford D.E., Yuen H.G. and Saffman P.G., Wave Motion, **2**, (1980), 1.

[23] Dysthe, K.B., Proc. Roy. **Ser. A 369**, (1979), 105.

[24] Gardner,C.S., Greene,J.M., Kruskal,M.D. and Miura,R.M., Phys. Rev. Lett., **19**, (1967), 1095.

[25] Hasselmann K., J. Fluid Mech., **12**, (1962), 481. (Part I)
pp. 481-500, (Part I);
Hasselmann K., J. Fluid Mech., **15**, (1963), 273. (Part II)

[26] Kartasheva E., in Nonlinear Waves and Weak Turbulence, A.M.S. Translations - Series 2, edited by V. Zakharov (AMS, Providence, RI, 1998), 95;
Connaughton C., Nazarenko S. and Pushkarev A., Phys. Rev. E, **63**, (2001), 046306.

[27] Kharif, C., and Pelinovsky, E., Europ. J. Mech. B/Fluids, **22**, (2003), 603.

[28] Kingsep A.S., Rudakov L.I. and Sudan R.N., Phys. Rev. Lett., **31**, (1973), 1482.

[29] Kuznetsov E.A., Spector M.D. and Zakharov V.E., Phys. Rev. E, **49** # 2, (1994), 1283.

[30] Lavrenov, I.V., Natural Hazards **17**, (1998), 117.

[31] Levi-Civita T., Mathematische Annalen **93** (1925), 264.

[32] Longuet-Higgins M.S., In: Nonlinear Waves, ed. L.Denath.

[33] Majda, A., McLaughlin, D. and Tabak, E., J. Nonlinear Science **7**, (1997), 9.

[34] Mineev M.B. and Dawson S.P., Phys. Rev. E, **50**, (1994), 24.

[35] Onorato, M., Osborne, A.R., Serio, M. and Bertone, S., Phys. Rev. Letters **86**, (2001), 5831.

[36] Onorato, M., Osborne, A.R. and Serio, M., Phys. of Fluids **14**, (2002), L25.

[37] Peregrine, D.H., J. Austral. Math. Soc. **B 25**, (1983), 16.

[38] Peregrine, D.H., Skyner, D., Stiassnie, M. and Dold, N., in: *Proc. 21th Intl. Conf. on Coastal Engng.* Vol. 1, Chap. 54, (1988), 732.

[39] Pushkarev A.N. and Zakharov V.E., Phys.Rev.Lett., **76**, (1996), 3320.

[40] Saffman P.G. and Taylor G.I., Proc. Roy. Soc. A **245**, (1958), 312.

[41] Smith, R., J. Fluid Mech. **77**, (1976), 417.

[42] Stokes G.G.,. Mathematical and Physical Papers, Vol. 1, 197 and 317. (Cambridge University Press, 1880).

[43] Trulsen, K. and Dysthe, K.B., Wave Motion **24**, (1996), 281.

[44] Trulsen, K. and Dysthe, K.B., in: *Proc. 21st Symposium on Naval Hydrodynamics*, (1997), 550;
http://www.nap.edu/books/0309058791/html/550.html

[45] Trulsen K., in *Rogue waves 2000: Brest, France*, November 2000, eds. M. Olagnon and G.A. Athanassoulis, Ifremer, (2001), 265.

[46] Trulsen K., Kliakhandler I., Dysthe K.B. and Velarde M.G., Phys. Fluids, **24** (2000), 32.

[47] Wolfram V.P., Mathematica, Addison-Wesley Pub.Comp., (1988)

[48] Zakharov, V.E., Dias, F. and Pushkarev, A.N., Phys. Reports **398**, (2004), 1.

[49] Zakharov V.E., L'vov V.S., Falkovich G., Kolmogorov spectra of turbulence I, v.1, Springer-Verlag, 1992.

[50] V.E. Zakharov, A.I. Dyachenko and O.A. Vasilyev, **21**, No. 3, (2002), 283.