РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

ИНСТИТУТ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

имени Л. Д. ЛАНДАУ

На правах рукописи

ДЬЯЧЕНКО Александр Иванович

УДК 532.5:517.9

Турбулентность и сингулярности в нелинейных волновых системах

Специальность 01.01.03 - Математическая физика

Диссертация на соискание ученой степени

доктора физико-математических наук

Москва - 2005

Оглавление

Введение **13**

1 Конформные преобразования и Гамильтонов формализм в гидродинамике несжимаемой идеальной жидкости со свободной границей **23**

1.1 Введение 24

1.2 Лагранжиан для идеальной жидкости в конформных переменных 27

1.2.1 Уравнения движения в явной форме 34

1.3 Некоторые частные случаи 36

1.3.1 Приближение большой кривизны 36

1.3.2 “Пальцеобразные” решения 39

1.3.3 Автомодельные уравнения для глубокой воды 41

1.4 Кубически нелинейные уравнения 44

1.5 Модуляционная неустойчивость волны Стокса. Волны-убийцы. 48

1.5.1 Введение 48

1.5.2 Численный эксперимент 52
1.6 Заключение 68

2 Интегрируема ли гидродинамика идеальной жидкости со свободной поверхностью ? 70

2.1 Частные интегрируемые случаи 71
2.2 Уравнения и 4-х волновой матричный элемент 73
2.2.1 Резонансное многообразие в одномерии 76
2.2.2 $T_{kk_1,k_2k_3} = 0$ 77
2.2.3 Кинетические равнения Захарова и Хассельманна . . . 78
2.3 5-ти волновое взаимодействие 82
2.3.1 Введение 82
2.3.2 Конформные канонические переменные 86
2.3.3 5-й порядок в разложении Гамильтониана 89
2.3.4 Эффективный 4-х волновой гамильтониан 94
2.3.5 5-ти волновое взаимодействие на резонансной поверхности 98
2.4 Кинетическое уравнение 103

3 Волновая турбулентность в нелинейном уравнении Шредингера 107

3.1 Слабая волновая турбулентность в одномерном нелинейном уравнении Шредингера 107
3.1.1 Введение 107
3.1.2 ММТ-модель. 108

3.1.3 Численный эксперимент 110
3.2 Солитонная турбулентность 116
3.2.1 Слабонелинейная волновая турбулентность и “газ” солитонов 116
3.2.2 Элементарные процессы столкновений 117
3.2.3 Численный эксперимент 121
3.2.4 Заключение 124
3.3 Турбулетность конденсата в двумерном уравнении Шредингера с отталкиванием 126
3.3.1 Введение 126
3.3.2 Численный эксперимент 129
3.3.3 Заключение 134
3.4 Неустойчивость и самофокусировка солитонов в сдвиговом потоке 134
3.4.1 Предыстория 135
3.4.2 Модель 136
3.4.3 Солитоны и их свойства 139
3.4.4 Неустойчивость одномерного солитона 144
3.4.5 Коллапс 146
3.4.6 О пороге коллапса 148
3.4.7 Численный эксперимент 149
3.4.8 Ремарки 152

4 Слабая волновая турбулентность волн на поверхности жид-

кости **167**

4.1 Введение 168

4.2 Резонансные взаимодействия волн на дискретной сетке 173

4.2.1 Капиллярные волны 175

4.2.2 Гравитационные волны 183

4.3 Колмогоровские спектры в турбулентности гравитационных волн 191

4.3.1 Введение. Решения кинетического уравнения. 192

4.3.2 Численное моделирование 195

4.3.3 Заключение 200

Заключение **201**

Приложения **204**

.1 Стационарные волны 204

.2 Гамильтониан 4-го и 5-го порядков 206

.3 Элементы диаграммной техники 210

.4 5-ти волновые диаграммы 213

.5 Численная схема моделирования гравитационных и капиллярных поверхностных волн 224

.5.1 Построение численной схемы 225

.5.2 Выбор шага по времени 227

.5.3 Обобщение численной схемы 229

.5.4 Заключение 230

.6 Дискретная вариация Гамильтониана 230

Литература 232

Публикации автора по теме диссертации 243

Список иллюстраций

1.1 Развитие модуляционной неустойчивости: Фурье-спектр $R(k)$ в различные моменты времени 57
1.2 Поверхность жидкости в начальный момент времени 57
1.3 Поверхность жидкости в момент времени $t = 80$. 59
1.4 Пространственная плотность кинетической энергии в момент времени $t = 80$. 60
1.5 Пространственная плотность потенциальной энергии в момент времени $t = 80$. 60
1.6 Пространственная плотность полной энергии в момент времени $t = 80$. 61
1.7 Форма поверхности жидкости при $T = 422$ 63
1.8 Форма поверхности жидкости при $T = 458.56$ 64
1.9 Форма поверхности жидкости вблизи гребня волны при $T = 458,61$ 64
1.10 Увеличенное изображение формы поверхности жидкости вблизи гребня волны при $T = 458.842$ 65

1.11 Кривизна поверхности при $T = 458.842$ 65

1.12 Плотность кинетической энергии перед опрокидыванием при $T = 456$ (пунктирная линия), и в момент опрокидывания при $T = 458.5$ (сплошная линия) 66

1.13 пространственная плотность горизонтального импульса перед опрокидыванием при $T = 456$ (пунктирная линия), и в момент опрокидывания при $T = 458.5$ (сплошная линия) 67

3.1 Полная энергия системы как функция времени для различных значений коэффициента g ("один в три"процесс) 114

3.2 $|\psi_k|^2$, усреднённый проинтервалу времени 100. Изображены отдельно спектры для положительных и отрицательных k. Прямая линия соответствует степенному спектру $0.15|k|^{-\frac{5}{2}}$ 115

3.3 Фрагменты эволюции решения уравнения $i\psi_t + \psi_{xx} + |\psi|\psi = 0$ с параметрами $\psi_0 = 1$, $L = 60$; время t равно 17,4 (а), 365,4 (б) и 730,8 (в) 123

3.4 Фрагменты эволюции решения уравнения $i\psi_t + \psi_{xx} + |\psi|^2[(1 + 0.1|\psi|^2)/(1 + 0.5|\psi|^2)]\psi = 0$ с параметрами $\psi_0 = 1$, $L = 40$; время t равно 52,2 (а), 765,4 (б) 154

3.5 Фрагменты эволюции решения уравнения $i\psi_t + \psi_{xx} + \psi_{yy} + |\psi|^{\frac{1}{2}}\psi = 0$ с параметрами $\psi_0 = 1$, $L = 37,7$; а - $t = 13$, $|\psi_{max}|^2 = 33,2$; б - $t = 277$, $|\psi_{max}|^2 = 63,9$; в - $t = 2681$, $|\psi_{max}|^2 = 137,3$. 155

3.6 a,b,c) Корреляционные функции в раличные времена: $- \cdot -$ $t = 32$, $- - -$ $t = 55$, $\cdots$ $t = 92$, сплошная $t = 127$; d) полное число волн N и число волн в конденсате N_0. 156

3.7 a) Линии уровня спектра $n(k_x, k_y)$ усреднённого по времени $t = (119 \div 127)$, b) "Срезы"спектра по разным напрвлениям в k-пространстве: $- \cdot -$ $k_x = 0$, $- - -$ $k_y = 0$, $\cdots$ $k_x = -k_y$, сплошная $k_x = k_y$. 157

3.8 Профили $|\Psi|$ (сплошная), $\mathrm{Re}\,\Psi$ (пунктирная) $\mathrm{Im}\,\Psi$ (точечная), взятые вдоль диагонали и вдоль границ области моделирования, $t = 135.7$ 158

3.9 Эволюция на большие времена при умеренной накачке: a) полное число квантов N и число квантов в конденсате N_0, b) отношение квадрата числа квантов к Гамильтониану, c) гистограмма внеконденсатных флуктуаций, d) параметр нелинейности $H_4/H_2 = \int |\psi|^4\, dxdy / 2 \int |\nabla\psi|^2\, dxdy$. 159

3.10 a) Начальная стадия эволюции при большой накачке: полное число частиц N и число квантов в конденсате N_0, b) пространственная зависимость $|\psi(x, \pi)|^2$ при $t = 42.4$. 159

3.11 Профили $|\Psi|$ (сплошная), $\mathrm{Re}\,\Psi$ (пунктирная) и $\mathrm{Im}\,\Psi$ (точечная) вдоль диагонали и вдоль границ области, $t = 45.4$ 160

3.12 Зависимость максимума амплитуды от времени в режиме коллапса, $H < 0$. 161

3.13 Зависимость максимума скорости от времени в режиме коллапса 162

3.14 Линии уровня $u(x, y)$ при $t = 45$ в режиме коллапса. Изображены контуры от -10,0 до 0,8. Интервал - 0,9. 163

3.15 Зависимость $u(x, 0)$ при $t = 45$. 164

3.16 Эволюция Гамильтониана в режиме коллапса. Гамильтониан уменьшается из-за излучения волн. 165

3.17 Эволюция $u(x, y)$ (линии уровня) с начальными условиями в виде возмущенной периодической волны (3.49). Видно развитие неустойчивости. 166

4.1 Резонансное множество для $k_0 = 68$. 176

4.2 Фрагмент резонансной кривой. Хорошо видна разная расстройка для разных узлов сетки. 178

4.3 Эволюция различных гармоник при распадающейся волне $\vec{k}_0 = (00, 68)$. 178

4.4 Резонансные гармоники начинают расти. Момент времени t=1.4.179

4.5 Начинаются вторичные процессы распада. Момент времени t=11. 180

4.6 Линии уровня поверхности $|a_k|^2$. Хорошо видны вторичные распады. Момент времени t=14. 181

4.7 Поверхность $|a_k|^2$ в момент времени t=57. 182

4.8 Резонансная кривая для $\vec{k}_0 = (0; 30)$. 184

4.9 Фрагмент резонансной кривой. Хорошо заметна разная расстройка для разных узлов сетки. 185

4.10 Рост гармоник как функция времени. Видно, что есть резонансные и не резонансные гармоники. 185
4.11 Начало роста гармоник при $\vec{k}_0 = (0; 30)$. 186
4.12 Начало роста гармоник. Линии уровня $|a_{\vec{k}}|^2 = 1.5 \times 10^{-18}$. . . 187
4.13 Продолжение роста гармоник. 187
4.14 Продолжение роста гармоник. Линии уровня $|a_{\vec{k}}|^2 = 1.5 \times 10^{-18}$.188
4.15 Начальная волна окружена порожденными вторичными распадами волн гармониками. 188
4.16 Начальная волна окружена порожденными вторичными распадами гармониками. Линии уровня $|a_{\vec{k}}|^2 = 1.5 \times 10^{-18}$. 189
4.17 Рост гармоник в случае начальных условий в виде двух волн с противоположными волновыми векторами. 190
4.18 «Квази-резонансная» кривая для трехволнового взаимодействия гравитационных волн. $\vec{k}_0 = (0; 30)$. 191
4.19 Гамильтониан системы как функция времени. 197
4.20 Корреляционная функция отклонения поверхности в двойном логарифмическом масштабе. 198
4.21 Скомпенсированный коррелятор отклонения поверхности при различных степенях компенсации: $z = 3.5$ сплошная линия (теория слабой турбулентности), $z = 4.0$ прерывистая линия (теория Филлипса). 198
4.22 Уширение области степенного спектра при увеличении количества точек на сетке. 199

4.23 Инерционный интервал спектра при различных уровнях накачки. 200

Введение

Ядром данной работы, вокруг которого построен весь материал диссертации, являются уравнения потенциального течения несжимаемой идеальной жидкости со свободной границей. Эти уравнения представляют собой один из классических обектов исследований, который явился основой, стимулом для построения различных физических моделей. В данной работе представлены исследования по нескольким направлениям, и все они так или иначе связаны с гидродинамикой жидкости со свободной границей.

Система уравнений, описывающие течение несжимаемой жидкости (не обязательно потенциальное) в области ограниченной свободной границей $\eta(x, y, t)$, хорошо известна. Это уравнение Эйлера, условие несжимаемости жидкости, и кинематическое условие на свободной границе:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \left(\vec{V}\nabla\right)\vec{V} &= -\nabla P + \vec{g} \\ \nabla \cdot \vec{V} &= 0 \\ \frac{\partial \eta}{\partial t} + V_x \frac{\partial \eta}{\partial x} + V_y \frac{\partial \eta}{\partial y} &= V_z|_{z=\eta}\,. \end{aligned} \tag{0.1}$$

Здесь $\vec{V}$ - вектор скорости течения жидкости, P - давление жидкости, $\vec{g}$ -

вектор гравитационного ускорения. Для потенциального же течения, когда

$$\vec{V} = \nabla\Phi, \qquad \nabla^2\Phi = 0 \tag{0.2}$$

($\Phi(x, y, z, t)$ - потенциал скорости) уравнение Эйлера принимает вид:

$$\nabla\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}\left|\nabla\Phi\right|^2 + P\right) = \vec{g}. \tag{0.3}$$

На свободной же границе, где давление P постоянно, эти уравнения эквивалентны следующей краевой задаче для потенциала, с граничным условием на переменной границе:

$$\begin{aligned} \nabla^2\Phi &= 0, \\ \frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}\left|\nabla\Phi\right|^2 + g\eta &= \left.\mathrm{const}\right|_{z=\eta}, \text{(уравнение Бернулли)} \\ \frac{\partial\eta}{\partial t} + V_x\frac{\partial\eta}{\partial x} + V_y\frac{\partial\eta}{\partial y} &= \left.V_z\right|_{z=\eta} \text{(кинематическое условие).} \end{aligned} \tag{0.4}$$

Конечно, сюда ещё нужно добавить граничное условие для потенциала на остальной границе. Это могут быть такие условия, как отсутствие движения жидкости на бесконечности, периодические условия, условия непротекания на "дне".

Отметим здесь, что если ещё учесть поверхностное натяжение, тогда к const в уравнении Бернулли следует добавить член

$$\sigma\left(1 - \sqrt{1 + \left|\nabla\eta\right|^2}\right). \tag{0.5}$$

Здесь σ - коэффициент поверхностного натяжения.

Кратко остановимся на основных результатах, известных для этих уравнений.

1. Первый важный результат для уравнений (0.4) датирован 1880 годом и принадлежит Стоксу [144, 32]. Его гипотеза относится к установившимся, стационарным гравитационным волнам предельной амплитуды. Гравитационная волна называется волной предельной амплитуды, если на её профиле есть точка, в которой скорость жидкости обращается в нуль. Стокс высказал гипотезу о том, что особая точка волны предельной амплитуды является угловой точкой на вершине волны, и этот угол равен 120°. Гипотеза Стокса была доказана в работах Толанда и Плотникова [148, 49, 39].

2. В 1921 г. Некрасов [36], а в 1925 г. независимо Леви-Чивитта доказали, что эти уравнения имеют решение в виде установившейся, стационарной, бегущей волны.

3. В 1957 г. Краппер [70] нашел точное решение задачи о установившихся двумерных капиллярных волнах, в отсутствии силы тяжести ($g = 0$).

4. В 1974 г. Налимов доказал [35], что задача Коши для (0.4) имеет единственное решение на конечном интервале времени $0 \leq t \leq T$, если $g > 0$, и начальное условие достаточно мало. Был рассмотрен случай двумерного течения. В 1999 г. Wu доказала [157], что такое же утверждение справедливо и для более общего, трехмерного течения.

Известны некоторые частные решения уравнений (0.4) без гравитации и поверхностного натяжения. Движущаяся граница опысывается кривыми второго порядка: эллипсом, гиперболой и параболой. Эти решения были найдены Дирихле ещё в 1860 году. Они подробно описаны в работе [114].

Несомненно, особый интерес представляют гравитационные волны большой амплитуды, так называемые волны-убийцы, появляющееся на поверхности океана "из ниоткуда", и быстро исчезающие. Они представляют угрозу для моряков, из-за них теряются человеческие жизни и суда. Они очень круты. В последней стадии их развития, крутизна становится бесконечной, образуя "стену воды". Кроме того, типичная волна-убийца - отдельное событие [6]. Изучение этих волн важно как для кораблестроения, так и для проектирования нефтяных и газовых платформ на морских шельфах. Также важным является разработка методов их прогноза. Нет никаких сомнений, что волны-убийцы являются нелинейными объектами. Естественно связать появление волн-убийц с модуляционной неустойчивостью волны Стокса. Линейная теория этой неустойчивости была разработана независимо в [8] и в [57]. В данной работе численно исследуется нелинейная стадия этой неустойчивости.

Хорошо известно, что уравнения описывающие идеальную жидкость со свободной поверхностью в поле силы тяжести вполне интегрируемы в нескольких важных случаях. Интегрируемость имеет место для длинных волн на мелкой воде (KdV[86], для уравнения Кадомцева-Петвиашвили [19], для приближения Буссинеска[161], для спектрально узкой волны в жидкости произвольной глубины (нелинейное уравнение Шредингера [18]). Слабо нелинейное движение жидкости в отсутствии поля силы тяжести также интегрируемо [104]. Очень естественно сформулировать гипотезу, что и произвольное одномерное движение идеальной жидкости в гравитационном поле интегрируемо. Во втрой главе исследуется этот вопрос, и хотя ответ, строго говоря,

отрицательный, одномерная ситуация является почти интегрируемой.

Следующая важная проблема, затронутая в диссертации - проблема Колмогоровских спектров - является ключевой в теории слабой волновой турбулентности. Эти спектры являются точными решениями стационарного кинетического уравнения для среднеквадратичных амплитуд волн [167]. Несомненно, что слаботурбулентные Колмогоровские спектры должны теоретически объяснять степенные спектральные распределения энергии в ансамблях стохастических нелинейно взаимодействующих волн любой природы. Спектры такого типа наблюдаются систематически. Самый яркий пример такого рода - спектр $\epsilon_\omega \simeq gv/\omega^4$, который обычно наблюдается при возбуждении ветром гравитационных волн в море. Однако, эта точка зрения разделяется не всеми. Кроме того, самая применимость кинетического уравнения для волн к реальной ситуации также дискутируется. (См., например [117].) Вывод кинетического уравнения из исходных динамических уравнений предполагает законность предположения о хаотичности фаз, которая может быть нарушена формированием некоторых когерентных структур, таких как волновые коллапсы, солитоны или Бозе-конденсат. Фактически, эта критика имеет серьезные основания. В реальных ситуациях когерентные структуры встречаются часто, но в то же время нет причин для полного отказа от теории слабой турбулентности. Действительность многообразна, и во многих конкретных ситуациях когерентные структуры сосуществуют со слаботурбулентной компонентой, участвуя в процессы переноса и диссипации энергии и других интегралов движения.

Следовательно, есть сильная мотивация, чтобы продолжить исследование

теории слабой турбулентности, исследуя тот случай, где когеретные структуры важны, и случай, где такие структуры не важны.

Структура диссертации следующая.

В **Главе 1** изложен краткий обзор известных результатов для уравнений двумерного течения идеальной несжимаемой жидкости со свободной границей. Это, в первую очередь, относится к стационарным, установившимся гравитационным волнам. Применение теории функций комплексных переменных в этой области позволило получить важные результаты, первый из которых принадлежит Стоксу [144]. Им было показано, что с ростом амплитуды стационарных гравитационных волн происходит заострение гребней волн и образуется угол, равный 120^0. Для двумерной геометрии наиболее естественным является подход, сочетающий конформные отображения и канонический формализм гамильтоновой системы. Этот подход разработан для случая воды произвольной глубины с учетом поля тяжести и поверхностного натяжения. Найдены некоторые частные приближенные решения нестационарной динамики свободной границы в отсутствии гравитационного поля и сил поверхностного натяжения, исследован случай динамики границы с большой кривизной. Получены точные, *кубически нелинейные* уравнения, описывающие потенциальное течение двумерной несжимаемой жидкости в гравитационном поле. Переменными, в которых уравнения становятся кубическими, являются функция, обратная производной конформного преобразования области занимаемой жидкостью, на нижнюю полуплоскость,

и комплексная потенциальная скорость течения. С помощью полученных уравнений проведено численное моделирование образования волны-убийцы, и её опрокидывания. Делается вывод, что волна убийца образуется в результате развития модуляционной неустойчивости.

В **Главе 2** рассмотрен вопрос о интегрируемости уравнений двумерной гидродинамики идеальной жидкости со свободной поверхностью. Получен эффективный четырёхволновой Гамильтониан (исключены нерезонансные трёхволновые взаимодействия). Сделана параметризация резонансного многообразия для одномерного случая и двумерного случаев. Показано, что четырёхволновой матричный элемент взаимодействия тождественно равен нулю на резонансной поверхности. Рассмотрен вопрос о идентичности кинетических уравнений Хассельманна и Захарова. Введены конформные канонические переменные, позволившие сравнительно легко (хотя и громоздко) получить разложение Гамильтониана до 5-го порядка включительно. Представлена процедура вычисления матричного элемента, соответствующего процессу $3 \Leftrightarrow 2$ с учётом исключения нерезонансных процессов. Это сделано с помощью диаграмной техники. Он оказался не рававным нулю и , тем самым, доказано, что система уравнений, описывающая двумерное потенциальное, бесконечно глубокое течение несжимаемой идеальной жидкости в гравитационном поле неинтегрируема. Кроме того в этой Главе выводится 5-ти волновое кинетическое уравнение и получены его стационарные решения, Колмогоровские спектры.

В **Главе 3** изучается влияние когерентных структур на слаботурбулентные спектры в рамках модифицированной ММТ-модели (A.Maida, D.McLaughlin

и E.Tabak [117]). Наличие в модифицированной модели "распадного"члена обеспечивает отсутствие локализованных структур, и создаёт условия для слаботурбулентного режима.

Кроме того в этой главе, численно и аналитически, рассматривается также солитонная турбулентность в неинтегрируемом нелинейном уравнении Шредингера. Поведение системы определяется накоплением слабых эффектов, которые обусловлены нескомпенсированностью процессов, протекающих в противоположных направлениях. При взаимодействии солитонов со слаботурбулентным спектром термодинамически выгодными являются процессы, приводящие к увеличению амплитуд солитонов при уменьшении их числа.

Также рассматривается турбулентность в двумерном уравнении Шредингера с отталкиванием (уравнение Гросса-Питаевского), в которой присутствуют и конденсат, и фононы, и тёмные солитоны и квантовые вихри. Для характеристики вне-конденсатных флуктуаций построены корреляционные функции. Качественно объясняется анизотропия полученных численно турбулентных спектров.

Численно и аналитически исследовано обобщенное двумерное уравнение Бенджамина-Оно, найдена интегральная граница на энергию возмущений двумерного солитона, когда коллапс ещё невозможен. Исследована неустойчивость одномерного солитона относительно изгибных возмущений. Отмечается совпадение численного и реального экспериментов.

В **Главе 4** рассмотрен вопрос о влиянии дискретности волновых чисел в численном моделировании слаботурбулентных режимов, когда важным является резонансное взаимодействие волн. Численно и аналитически изучено

резонансное взаимодействие капиллярных и гравитационных волн. Кроме того, проведено численное моделирование слабой турбулентности гравитационных волн на поверхности трёхмерной жидкости, и впервые получены для неё Колмогоровские спектры. Для решения этой задачи была разработана численная схема, сохраняющая Гамильтониан в бездиссипативном случае.

В **Заключении** сформулированы результаты работы.

В **Приложения** вынесен подробный вывод некоторых формул, приведение которых в основном тексте прерывало бы связность изложения из-за их излишней громоздкости, диаграммы 5-ти волновых процессов.

Целью работы является развитие теоретических и численных методов исследования нелинейных явлений в гидродинамике идеальной жидкости со свободной границей. Особое внимание уделяется разработке эффективных численных алгоритмов, сохраняющих интегралы движения.

Также важным здесь являлся поиск интегрируемых приближений.

Исследование роли когерентных структур в развитой волновой турбулентности также было одной из целью работы.

Кроме того, проведённое исследование слаботурбулентных режимов в различных моделях имело своей целью обосновать применимость кинетических уравнений, которые позволяют с гораздо большей эффективностью моделировать волновую турбулентность, чем исходные динамические уравнения.

Практическая и теоретическая ценность работы

Полученные кубически нелинейные уравнения безвихревой двумерной гидродинамики позволяют эффективное численное моделирование нелинейных процессов на поверхности жидкости, включая такие как обрушение волн, когда граница жидкости становится неоднозначной.

Новый подход к вычислению матричных элементов (с помощью конформных канонических переменных) позволяет эффективно вычислять резонансные взаимодействия волн в двумерной потенциальной гидродинамике.

Теоретическое и численное исследование коллапса в пограничном слое объясняет эксперименты по генерации когерентных структур в пограничном слое.

Наблюдениие в численных экспериментах слаботурбулентных режимов, с Колмогоровскими спектрами флуктуаций, близких к экспериментальным, позволяет обосновать применение более простых, кинетических уравнений для предсказания океанского волнения в метеорологических приложениях.

Работа выполнена в Институте теоретической физики им. Л. Д. Ландау Российской Академии Наук.

По теме диссертации опубликовано 20 работ, список которых приведен в конце диссертации.

1 Конформные преобразования и Гамильтонов формализм в гидродинамике несжимаемой идеальной жидкости со свободной границей

В этой главе представлены результаты, опубликованные с работах [181, 182, 183, 185, 186, 188, 193].

Глава организована следующим образом. В разделе 1.2 вводится описание динамики свободной поверхности жидкости конечной глубины исходя из вариационного принципа и используя конформное отображение. Неявные уравнения на комплексный потенциал скорости и конформное отображение в полосу возникают как уравнения Эйлера-Лагранжа. В разделе 1.2.1 получена явная формулировка этих уравнений. Разложение по обратным степеням якобиана рассмотрено в разделе 1.3. Там же мы анализируем решения в виде "пальцев"а также автомодельные решения для полной системы уравнений в отсутствии поля тяжести и капиллярности. Следующий раздел главы,

1.4, посвящен выводу кубических уравнений. И, наконец, в последнем разделе 1.5 представлены результаты численного моделирования образования волн-убийц, и опрокидывания волн.

В Приложении .1 которое относится к этой главе, рассматриваются стационарные волны (в присутствии поля тяжести) и вычисляется зависимость частоты волн от амплитуды волн (нелинейную поправку к частоте).

1.1 Введение

Двумерное потенциальное течение идеальной жидкости в области, ограниченной свободной поверхностью и плоским дном, представляет собой один из классических обектов исследований гидродинамики. Метод конформных преобразований традиционен для этой задачи. Первый важный результат в этой области датирован серединой прошлого века и принадлежит Стоксу [144]. Им было показано, что с ростом амплитуды стационарных гравитационных волн происходит заострение гребней волн и образуется угол, равный 120^0. В двадцатые годы этого века в этом направлении были выполнены классические работы Некрасова [36] и Леви-Чивита [111], математические аспекты которых дали мощный импульс ряду направлений теории интегральных уравнений и функционального анализа. Впоследствие не раз метод конформных отображений находил свое применение в задачах со свободной границей (см., например, книгу Стокера [143] и ссылки в ней).

Для исследования нестационарной динамики поверхности в шестидесятые годы и позже получил развитие подход, основанный на лагранжевом опи-

сании [59, 52]. Ряд авторов (см. [91], обзор [115] и ссылки в нем) пытался применить метод аналитического продолжения по лагранжевым переменным. Однако, эти координаты не допускают подходящего конформного преобразования, т.к. их аналитическое продолжение имеет особенности в обеих полуплоскостях комплексного переменного. Недавно Танвеер [145, 146] предложил применить конформное отображение к нестационарной задаче прямо в эйлеровом описании. Он использовал для периодической (вдоль горизонтальной переменной) задачи для случая глубокой воды конформные отображение области, занятой жидкости, во внутренность единичного круга. Однако, уравнения оказались достаточно сложны, а их аналитический и численный анализ - затруднительным.

Удобный подход описания потенциальных течений жидкости со свободной поверхностью для произвольной размерности пространства основан на использовании канонического формализма, известного с 1968 г. (см. [9]). Для двумерной геометрии наиболее естественным является подход, сочетающий канонический формализм и конформные отображения. Этот подход был осуществлен в работе [182] для случая глубокой воды с учетом поля тяжести и поверхностного натяжения. Уравнения, полученные в этой работе, могут быть записаны в двух разных формах – неявной (не разрешенной относительно производных по времени формы поверхности и потенциала на поверхности) и в явной (с разрешенной относительных временных производных). Неявные уравнения просты и симметричны. В отсутствии поверхностного натяжения они содержат только квадратичную нелинейность. Явные уравнения, хотя и не так просты как неявные, однако весьма удобны для

численного интегрирования.

Наиболее интересные нерешенные проблемы в гидродинамике со свободной поверхностью связаны с образованием особенностей (опрокидывание волн) и с существенными изменениями геометрии поверхности – с генерацией волн, струй, капель и брызг. В некоторых случаях [105] уравнения могут быть эффективно исследованы с помощью традиционной теории возмущений на фоне плоской поверхности. Как было показано в [105] для глубокой воды в отсутствии внешних сил и капиллярного натяжения в главном порядке уравнение для потенциала оказывается автономным – несодержащим η и при аналитическом продолжении в нижнюю полуплоскость становится дифференциальным уравнением типа Хопфа. Исследование его показывает, что для практически любого начального условия за конечное время возникают особенности типа опрокидывания. С математической точки зрения это соответствует движению особенностей потенциала – точек ветвления к действительной оси. Анализ всех возможных особенностей поверхности показывает, что только слабые особенности корневого типа согласуются с приближением малых углов отклонения поверхности (подробнее см. [105]). Данное приближение не справедливо для сингулярности типа углов, когда якобиан преобразования уже не близок к единице. Примечательно, что для больших значений якобиана в некоторой области уравнения также могут быть эффективно изучены. Первый шаг в этом направлении был сделан в работе [182]. Несмотря на то, что уравнения изначально нелокальны, процедура разложения по обратным степеням J тем не менее может быть развита. Особо просто может быть получено уравнение в первом порядке. Интересно, что в этом

случае система уравнений на форму поверхности и потенциал на ней сводится к одному уравнению, совпадающему с хорошо известным уравнением лапласовского роста (УЛР). Это уравнение интегрируемо в том смысле, что оно допускает бесконечное число частных решений, выраженных в элементарных функций. Среди них - решения, описывающие образование структур типа пальцев, весьма похожих на решения такого типа, полученные Саффманом и Тейлором [135]).

В настоящей главе представлены результаты более детального анализа такого типа решений, анонсированных в короткой статье [182]. В данной главе также рассматривается, каким образом модифицируются полученные результаты для глубокой воды [181, 105] на случай жидкости конечной глубины. В частности показано, что исследование особенностей, возникающих на поверхности жидкости конечной глубины, для малоуглового приближения путем аналитического продолжения в полосу сводится к дифференциальному. Эта же процедура дает возможность записать уравнения в явном и неявном видах в общем положении для случая конечной глубины.

1.2 Лагранжиан для идеальной жидкости в конформных переменных

Пусть несжимаемая жидкость занимает в плоскости (x, y) область, ограниченную свободной поверхностью

$$y = \eta(x, t), \qquad -\infty < x < \infty, \tag{1.1}$$

и дном $y = -\bar{h}$. Будем считать течение жидкости потенциальным $V = \nabla\Phi$, где Φ подчиняется уравнению Лапласа

$$\Delta\Phi = 0. \tag{1.2}$$

Это уравнение должно быть рассмотрено вместе со следующими граничными условиями:

$$\frac{\partial\eta}{\partial t} + \frac{\partial\Phi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial x} = \left.\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right|_{y=\eta}, \tag{1.3}$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\frac{\partial\Phi}{\partial x})^2 + \left.\frac{1}{2}(\frac{\partial\Phi}{\partial y})^2\right|_{y=\eta} + g\eta = 0\,, \tag{1.4}$$

$$\left.\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right|_{y=-\bar{h}} = 0\,. \tag{1.5}$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} = 0, |x| \to \infty. \tag{1.6}$$

где в (1.4) g – ускорение поля тяжести. Введем величину Φ – значение потенциала на свободной поверхности:

$$\Psi(x,t) = \Phi(x,y,t)|_{y=\eta} = \Phi(x,\eta(x,t),t)\,. \tag{1.7}$$

Как было установлено в [9], $\eta(x,t)$ и $\Psi(x,t)$ являются канонически сопряженными величинами:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\eta}{\partial t} &= \frac{\delta H}{\delta\Psi}\,, \\ \frac{\partial\Psi}{\partial t} &= -\frac{\delta H}{\delta\eta}\,, \end{aligned} \tag{1.8}$$

а гамильтониан H совпадает с полной энергией жидкости:

$$H = T + U\,,$$

$$T = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\eta}^{\eta} (\nabla\Phi)^2 dy\,, \tag{1.9}$$

$$U = \frac{g}{2}\int \eta^2 dx\,. \tag{1.10}$$

Уравнения (1.8) в этом случае следуют из вариационного принципа Гамильтона:

$$\delta S = 0\,, \qquad S = \int L dt\,, \tag{1.11}$$

$$L = \int \Psi \frac{\partial \eta}{\partial t} dx - H\,. \tag{1.12}$$

Совершим конформное отображение области, занятой жидкостью, в плоскости $z = x + iy$,

$$-\infty < x < \infty, \quad -\bar{h} \le y \le \eta(x,t)\,, \tag{1.13}$$

в полосу,

$$-\infty < u < \infty, \quad -h \le v \le 0\,, \tag{1.14}$$

в плоскости $w = u + iv$[1]. Пусть это преобразование переводит свободную границу в прямую $v = 0$, так что форма поверхности задается параметрически в виде

$$y = y(u,t), \quad x = u + \tilde{x}(u,t)\,. \tag{1.15}$$

Функции y и $\tilde{x}$ связаны между собой соотношением

$$y = \hat{R}\tilde{x}\,. \tag{1.16}$$

Здесь $\hat{R}$ – интегральный оператор вида:

$$\hat{R}f(u) = \frac{1}{2h} P.V. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(u')}{\sinh \pi/2h(u'-u)} du'\,. \tag{1.17}$$

В Фурье-представлении он локален

$$y_k = R_k x_k, \qquad R_k = i \tanh kh\,. \tag{1.18}$$

[1]Если $\eta \to 0$ при $|x| \to \infty$, то $\bar{h} = h$. В периодическом случае $\bar{h}$ и h различаются.

В предельном случае бесконечно глубокой воды $h \to \infty$ $\hat{R}$ переходит в преобразование Гильберта:

$$\lim_{h\to\infty} \hat{R} = \hat{H}\,, \tag{1.19}$$

$$\hat{H}f = \frac{1}{\pi} P.V. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(u')du'}{u'-u}\,. \tag{1.20}$$

Обратный к $\hat{R}$ оператор $\hat{T}$, определяемый как

$$\tilde{x} = \hat{T}y, \quad \text{с} \quad \hat{R}\hat{T} = \hat{T}\hat{R} = 1\,, \tag{1.21}$$

имеет вид:

$$\hat{T}f = \frac{1}{h} P.V. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(u')}{1-e^{-\pi/h(u-u')}} du'\,. \tag{1.22}$$

Его фурье-образ равен:

$$T_k = -i \coth kh\,.$$

Асимптотически при $h \to \infty$,

$$\hat{T} \to -\hat{R}\,, \quad \text{но} \quad \hat{T}^{-1} \neq -\hat{R}\,.$$

Оба оператора $\hat{R}$ и $\hat{T}$ антиэрмитовы:

$$\hat{R}^{+} = -\hat{R} \quad \text{и} \quad \hat{T}^{+} = -\hat{T}\,. \tag{1.23}$$

С помощью оператора $\hat{R}$ для любой действительной достаточно гладкой функции $\phi(w)$, которая задана на действительной оси и затухает на бесконечности $u \to \infty$, можно построить комплексную функцию θ:

$$\theta = \phi + i\hat{R}\phi, \tag{1.24}$$

которая аналитически продолжима в полосу $0 \le v \le -h$. Реальная часть этой функции, являясь гармонической функцией в полосе, автоматически

будет удовлетворять граничному условию

$$\left.\frac{\partial\phi}{\partial v}\right|_{v=-h} = 0.$$

Совершая конформное преобразование, потенциал $\Phi = \Phi(u, v)$ остается гармонической функцией в полосе, т.е. удовлетворяет уравнению Лапласа:

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial v^2} = 0\,, \tag{1.25}$$

с граничными условиями:

$$\left.\frac{\partial\Phi}{\partial v}\right|_{v=-h} = 0 \quad \text{и} \quad \Phi|_{v=0} = \Psi(u,t)\,. \tag{1.26}$$

Применяя процедуру (1.24) к функции Ψ, мы приходим к комплексному потенциалу

$$\Theta = \Phi + i\xi,$$

где Φ и функция тока ξ гармонические функции в полосе и удовлетворяют на дне соответствующим граничным условиям. На действительной оси $\Theta = \Psi + i\hat{R}\Psi$ и поэтому

$$\left.\frac{\partial\Phi}{\partial v}\right|_{v=0} = -\frac{\partial}{\partial u}\hat{R}\Psi = -\hat{R}\Psi_u\,, \tag{1.27}$$

так что кинетическая энергия имеет вид:

$$T = -\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\Psi\hat{R}\Psi_u du\,. \tag{1.28}$$

Далее имеем:

$$dx = x_u du\,,$$

$$\eta_t dx = (y_t x_u - x_t y_u)du\,, \tag{1.29}$$

а лагранжиан выражается как

$$L = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(y_t x_u - x_t y_u) du + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \Psi \hat{R} \Psi_u du - \frac{g}{2}\int_{-\infty}^{\infty} y^2 x_u du + \int_{-\infty}^{\infty} f(y - \hat{R}\tilde{x}) du \,. \tag{1.30}$$

Здесь f - множитель Лагранжа, вариация по которому выдает соотношение (1.21). Вариация S по Ψ дает следующее уравнение

$$y_t x_u - x_t y_u = -\hat{R}\Psi_u \tag{1.31}$$

или

$$(1 + \tilde{x}_u) y_t - \tilde{x}_t y_u = -\hat{R}\Psi_u \,.$$

Средний уровень жидкости должен быть постоянен, поэтому

$$\int_{-\infty}^{\infty} (y_t x_u - x_t y_u) du = 0 \,. \tag{1.32}$$

Из (1.31) можно найти

$$\Psi = -\hat{T}\partial_u^{-1}(y_t x_u - x_t y_u) + C(t) \,. \tag{1.33}$$

Подставляя (1.33) в (1.30) и используя равенство (1.32), получаем

$$L = T - U + \int_{-\infty}^{\infty} f(y - \hat{R}\tilde{x}) du \,. \tag{1.34}$$

Если $y = y(u,t)$ задана в качестве координаты поверхности, то последний член в (1.34) можно опустить и в результате мы приходим к стандартному выражению для лагранжиана:

$$L = T - U \,. \tag{1.35}$$

Рассмотрим теперь другие уравнения Лагранжа-Эйлера:

$$\frac{\delta S}{\delta y} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\delta S}{\delta x} = 0 \,.$$

Они имеют вид:

$$\Psi_t x_u - \Psi_u x_t + g y x_u = f\,, \tag{1.36}$$

$$\Psi_t y_u - \Psi_u x_t + g y y_u = -\hat{R} f\,, \tag{1.37}$$

которые эквивалентны уравнению

$$\Psi_t y_u - \Psi_u y_t + g y y_u + \hat{R}(\Psi_t x_u - \Psi_u x_t + g y x_u) = 0\,. \tag{1.38}$$

Уравнения (1.31) и (1.38) образуют полную систему уравнений, описывающих потенциальное течение жидкости со свободной поверхностью. Важно отметить, что они содержат только квадратичную нелинейность - этот факт был получен впервые в [181]. Уравнения (1.31) и (1.38) не разрешены относительно временных производных – заданы в неявном виде. Кроме того, отметим, что уравнения (1.31) и (1.38) почти не меняются при переходе к случаю жидкости бесконечной глубины. Необходимо лишь заменить оператор $\hat{R}$ на $\hat{H}$.

Заметит, что уравнения (1.31) и (1.38) могут быть использованы, чтобы получить Лагранжево описание динамики свободной поверхности. Действительно, из них легко получить:

$$\Psi = -\partial^{-1}\hat{T}(y_t x_u - x_t y_u) \tag{1.39}$$

Подставляя (1.39) в выражение(1.12), Лагранжиан можно выразить только через форму границы. Этот результат был получен независимо в [54] для случая жидкости бесконечной глубины.

1.2.1 Уравнения движения в явной форме

Сейчас мы покажем, что система (1.31), (1.36) и (1.37) может быть разрешена относительно временных производных от Ψ и z, заданных при $v = 0$.

Поскольку $z = x + iy$, мы имеем $x = \frac{1}{2}(z + z^*)$ и $y = \frac{1}{2i}(z - z^*)$. Поэтому уравнение (1.34) может быть записано как

$$z_t z_u^* - z_t^* z_u = -2i\hat{R}\Psi_u$$

или

$$\mathrm{Im}\left[\frac{z_t}{z_u}\right] = \left.\frac{\hat{R}\Psi_u}{|z_u|^2}\right|_{v=0}. \tag{1.40}$$

Отсюда функция $\frac{z_t}{z_u}$, являясь аналитической в полосе, может быть восстановлена полностью с помощью (1.24):

$$z_t = -z_u(\hat{T} + i)\frac{\hat{R}\Psi_u}{|z_u|^2}\,, \tag{1.41}$$

или

$$y_t = -(y_u\hat{T} + x_u)\frac{\hat{R}\Psi_u}{|z_u|^2}\,, \tag{1.42}$$

$$x_t = (y_u - x_u\hat{T})\frac{\hat{R}\Psi}{|z_u|^2}\,. \tag{1.43}$$

Вычитая (2.35), умноженное на x_u, из (2.36), умноженное на y_u, и используя (1.34), приходим к уравнению

$$-\Psi_u\hat{R}\Psi_u = y_u f + x_u\hat{H}f\,. \tag{1.44}$$

Обе части этого уравнения могут быть представленыы как мнимые части аналитических функций в полосе:

$$-\frac{1}{2}\mathrm{Im}(\Psi_u + i\hat{R}\Psi_u)^2 = \mathrm{Im}[z_u(f + i\hat{R}f)].$$

Отсюда благодаря аналитичности мы заключаем, что функции совпадают

$$-\frac{1}{2}(\Psi_u + i\hat{R}\Psi_u)^2 = z_u(f + i\hat{R}f)$$

или

$$f + i\hat{R}f = -\frac{1}{2z_u}(\Psi_u + i\hat{R}\Psi_u)^2. \tag{1.45}$$

Далее вычтем уравнение (2.35), умноженное на x_t, из уравнения (2.36), умноженное на y_t. В результате имеем:

$$(\Psi_t + gy)(y_t x_u - x_t y_u) = y_t f + x_t \hat{R}f = \mathrm{Im}[z_t(f + i\hat{R}f)]\,. \tag{1.46}$$

Временные производные x_t, y_t, z_t исключаются при помощи (1.34), (1.41). Отсюда после простых вычислений окончательно получаем

$$\Psi_t + gy = -\frac{(\Psi_u)^2 - (\hat{R}\Psi_u)^2}{2J} - \Psi_u \hat{T}(\frac{\hat{R}\Psi_u}{J})\,, \tag{1.47}$$

где $J = |z_u|^2$. Используя тождество

$$(\Psi_u)^2 - (\hat{R}\Psi_u)^2 = 2\hat{T}(\Psi_u \hat{R}\Psi_u)\,,$$

которое следует из аналитичности функции $(\Psi_u + i\hat{R}\Psi_u)^2$, последнее уравнение может быть переписано в виде:

$$\Psi_t + gy = -\frac{\hat{T}(\Psi_u \hat{R}\Psi_u)}{J} - \Psi_u \hat{T}(\frac{\hat{R}\Psi_u}{J})\,. \tag{1.48}$$

Таким образом, мы имеем пару уравнений (1.41) и (1.47) (или 1.48) для z и Ψ, разрешенных относительно временных производных. Легко показать, что кинематическое условие (2.3) после конформного преобразования переходит вначале в (1.3), а затем может преобразовано в уравнение (3.2). Соответственно, динамическое граничное условие (1.4) на свободной поверхности

переходит с помощью (1.41) в уравнение (1.47) или в эквивалентную форму (1.48).

В случае глубокой воды ($h \to \infty$) уравнения (1.41), (1.47) и (1.48) приобретают вид:

$$z_t = z_u(\hat{H} - i)\frac{\hat{H}\Psi_u}{|z_u|^2}\,, \tag{1.49}$$

$$\Psi_t + gy = -\frac{(\Psi_u)^2 - (\hat{H}\Psi_u)^2}{2J} + \Psi_u\hat{H}(\frac{\hat{H}\Psi_u}{J})\,, \tag{1.50}$$

$$\Psi_t + gy = \frac{\hat{H}(\Psi_u\hat{H}\Psi_u)}{J} + \Psi_u\hat{H}(\frac{\hat{H}\Psi_u}{J})\,. \tag{1.51}$$

Замечание. Уравнения (1.49) и (1.50) были получены в работе [181]. Однако, недавно мы обнаружили, что подобные уравнения для случая бесконечной глубины были получены еще в 1973 году Овсянниковым [37].

Стационарные волны описаны в Приложении .1.

1.3 Некоторые частные случаи

1.3.1 Приближение большой кривизны

Пусть сингулярность функции $z = z(w)$ расположена на мнимой оси верхней полуплоскости и достаточно близка к началу координат. Тогда вблизи нуля величина $J = J(u)$ является большой величиной, так что $1/J$ в этой области является гладкой функцией, локально близкой к нулю. Для такого случая может быть предложена другая приближенная теория. Здесь мы рассмотрим только случай бесконечной глубины. Будем искать решение уравнения (3.10)

в виде:

$$\Psi = -\frac{1}{2}\int \lambda^2 dt + \lambda(t)y + \tilde{\Psi}\,, \tag{1.52}$$

где

$$\dot{\lambda} = -g \tag{1.53}$$

так, что $\lambda = \lambda(t) = \lambda_0 - gt$ является линейной функцией времени.

Смысл отделения $\tilde{\Psi}$ от Ψ состоит в следующем. Пусть сингулярность Ψ находится на малом расстоянии δ от вещественной оси. Тогда функции $\Psi(u)$ и $y(u)$ существенно меняют свое значение в области $u \simeq \delta$ и ключевое предположение состоит в том, что потенциал (1.52) $\tilde{\Psi}$ является "гладкой"функцией, существенно изменяясь только на масштабах ~ 1. Чтобы проверить это предположение, мы должны решить (или оценить) решение уравнения для $\tilde{\Psi}$. Для того, чтобы получить это уравнение, мы будем использовать тождества:

$$(1 - i\hat{H})(\tilde{x}_u + iy_u)^2 \;=\; 0\,, \tag{1.54}$$

$$(1 + i\hat{H})(\frac{1}{z_u^*} - 1) \;=\; 0\,. \tag{1.55}$$

Из них следует, что

$$\hat{H}(y_u \hat{H} y_u) = \frac{1}{2}\left[(\tilde{x}_u)^2 - y_u^2\right] \tag{1.56}$$

и

$$\frac{y_u}{J} + \hat{H}(\frac{x_u}{J} - 1) = 0\,. \tag{1.57}$$

После простых преобразований мы получаем уравнение для $\tilde{\Psi}$.

$$\begin{aligned}\frac{\partial\tilde{\Psi}}{\partial t} \;&=\; \frac{\lambda^2}{2J} + \lambda\left(\frac{1}{J}\hat{H}\tilde{\Psi}_u + \tilde{\Psi}_u\hat{H}(\frac{1}{J} - 1)\right)\\ &+ \frac{1}{2J}\left((\hat{H}\tilde{\Psi}_u)^2 - \tilde{\Psi}_u^2\right) + \tilde{\Psi}_u\hat{H}\frac{\hat{H}\tilde{\Psi}_u}{J}\,.\end{aligned} \tag{1.58}$$

Вся информация о форме поверхности "спрятана"в функции $1/J$, которая согласно нашему предположению является гладкой. Поэтому мы можем полагать, что потенциал $\tilde{\Psi}$ также является гладкой функцией на масштабах $\simeq \delta$.

В первом приближении мы положим

$$\tilde{\Psi} = 0\,. \tag{1.59}$$

Соответствующее уравнение для формы поверхности, записанное в неявном виде, выглядит чрезвычайно просто:

$$y_t(1+\tilde{x}_u) - \tilde{x}_t y_u = \lambda \tilde{x}_u\,. \tag{1.60}$$

Обозначим через $\tilde{z} = \tilde{x} + iy$. В терминах $\tilde{z}$ уравнение (1.60) может быть записано следующим образом:

$$\tilde{z}_t - \tilde{z}_t^* + \tilde{z}_t\tilde{z}_u^* - \tilde{z}_t^*\tilde{z}_u = i\lambda(\tilde{z}_u + \tilde{z}_u^*)\,. \tag{1.61}$$

Введением новой функции

$$z = \tilde{z} + u - i\int \lambda dt$$

уравнение (1.61) преобразуется к виду

$$\mathrm{Im}(z_t z_u^*) = -\lambda\,. \tag{1.62}$$

В простейшем случае $\lambda = const$, это уравнение известно в литературе с 1945 г. [40, 3]. Обычно его называют Laplacian Growth Equation (LGE) – уравнение лапласовского роста. Оно широко используется при описании динамики границы двух жидкостей с существенно различными вязкостями, движения границы раздела двух фаз (например, льда и воды) и роста дендритов в частности.

1.3.2 “Пальцеобразные” решения

Уравнение (1.61) является интегрируемым. Оно имеет широкий класс специальных решений (n-"пальцевые"решения):

$$\tilde{z} = \sum_{n=1}^{N} q_n \ln(u - a_n(t)) \,. \tag{1.63}$$

где N - любое положительное целое число (включая $N = \infty$), q_n комплексные постоянные, а $\mathrm{Im} a_n > 0$. Для того, чтобы выполнить условие $\tilde{z} \to 0$ при $|u| \to \infty$, необходимо потребовать

$$\sum_{n=1}^{N} q_n = 0 \,. \tag{1.64}$$

Однако условие (1.64) с физической точки зрения не существенно, поскольку для произвольного выбора q_n ему можно удовлетворить добавлением к (1.63) еще одного слагаемого:

$$-\left(\sum_{n=1}^{N} q_n\right) \ln(u - a_{N+1}(t)), \qquad \mathrm{Im} a_{N+1} \to +\infty.$$

Подставляя (1.63) в (1.61) и раскладывая сумму на простые дроби, мы получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений для a_n:

$$\dot{a}_n + \sum_m q_m^* \frac{\dot{a}_n - \dot{a}_m^*}{a_n - a_m^*} = -i\lambda(t) \,. \tag{1.65}$$

Интегрирование по времени приводит к следующей системе трансцендентных уравнений:

$$a_n + \sum_m q_m^* \ln(a_n - a_m^*) = -\int \lambda(t) dt + C_n \,, \tag{1.66}$$

где C_n - произвольные комплексные константы. Простейшим решением этого типа является "однопальцевое":

$$\tilde{z} = -i \ln(u - ib(t)), \tag{1.67}$$

где действительная величина b определяется из

$$b + \ln b = -\int \lambda dt + \ln r\,. \tag{1.68}$$

Здесь r – некоторая действительная константа.

Асимптотическое поведение b при $\int \lambda dt \to +\infty$ имеет следующий вид:

$$b \simeq r \exp\left(-\int \lambda dt\right) \to 0, \qquad t \to \infty\,. \tag{1.69}$$

В рассматриваемом случае мы имеем:

$$\begin{aligned} y &= -\ln\sqrt{u^2 + b^2(t)}\,, \\ \tilde{x} &= \arctan\frac{u}{b(t)}\,, \\ \frac{1}{J} &= \frac{u^2 + b^2(t)}{(1 + b(t))^2 + u^2}\,. \end{aligned} \tag{1.70}$$

Пусть $\int \lambda dt$ является большим положительным числом. Тогда

$$\frac{1}{J} \to \frac{u^2}{1 + u^2} \tag{1.71}$$

мало при $u \simeq b$ и действительно является гладкой функцией. Из (1.53) следует, что

$$\int \lambda dt = -\frac{1}{2} g t^2 + Ct\,. \tag{1.72}$$

Для положительных g (устойчивый случай) $\int \lambda dt$ может быть большим только в течении конечного времени (если C положительно и велико). Для $g \leq 0$ (безразлично устойчивый и неустойчивый случаи) рассматриваемое нами приближение улучшается при $t \to \infty$. Для "однопальцевого"решения

$$y(0,t) = -2\ln b(t) \simeq \int \lambda dt \;\text{ при } t \to \infty. \tag{1.73}$$

В то же время кривизна поверхности при $x = 0$ стремится к константе:

$$1/R = \eta_{xx} \to -\text{const}, \;\text{ при } t \to \infty\,. \tag{1.74}$$

Однопальцевое решение такого типа было найдено Саффманом и Тэйлором [135]. N-пальцевые решения LGE были исследованы в статьях [119, 73]. Общее решение уравнения (1.61) может быть получено из (1.63) предельным переходом $N \to \infty$. Здесь мы не будем рассматривать этот вопрос.

1.3.3 Автомодельные уравнения для глубокой воды

В этом параграфе рассмотрим случай глубокой воды без поля тяжести, тогда уравнения (1.31) и (1.38) имеют вид:

$$y_t x_u - x_t y_u = -\hat{H}\Psi_u \,, \tag{1.75}$$

$$\Psi_t x_u - \Psi_u x_t = \hat{H}(\Psi_t y_u - \Psi_u y_t) \,. \tag{1.76}$$

Система (1.75), (1.76) имеет семейство автомодельных решений. Заметим, что она инвариантна относительно преобразования

$$u \to \frac{u}{a(t)} \tag{1.77}$$

где $a(t)$ - произвольная функция времени. Эта инвариантность имеет простой смысл - она следует из возможности перемасштабирования конформной переменной u произвольным образом в любой момент времени.

Можно искать решения системы (1.75)-(1.76) в следующем виде:

$$\begin{aligned} y &= f(t)y_0(u) \,, \\ x &= f(t)x_0(u) \,, \\ \Psi &= g(t)\Psi_0(u) \,. \end{aligned} \tag{1.78}$$

Из (1.75) легко получить

$$g(t) = ff' \,, \tag{1.79}$$

а из (1.76) получается следующее соотношение:

$$(ff')' = qf'^2 \qquad q \text{ - const.} \tag{1.80}$$

Уравнение (1.80) имеет степенное решение

$$f(t) = c(t_0 - t)^s, \quad s = \frac{1}{(2-q)}, \quad \text{если } q \neq 2\,, \tag{1.81}$$

и экспоненциальное

$$f(t) = ce^{\lambda t} \quad \text{если } q = 2\,. \tag{1.82}$$

y_0, x_0 и Ψ_0 удовлетворяют следующим уравнениям:

$$\begin{aligned} y_0 x_0' - x_0 y_0' &= -\hat{H}\Psi_0'\,, \\ q\Psi_0 x_0' - x_0\Psi_0' &= \hat{H}(q\Psi_0' y_0\prime - \Psi_0' y_0)\,. \end{aligned} \tag{1.83}$$

В естественных переменных (1.78) - это автомодельное решение:

$$\begin{aligned} \eta &= f(t)\eta_0(\frac{x}{f(t)}\,, \\ \phi &= f(t)f'(t)\phi_0(\frac{x}{f(t)}, \frac{y}{f(t)})\,. \end{aligned} \tag{1.84}$$

Если $s > 0$ ($q < 2$), это решение образование сингулярности на границе за конечное время. Это сингулярность типа угол, подобна той что найдена в работе [105]. На s имеются ограничения, накладываемые законом сохранения энергии. Дейсвительно, из (1.84) можно получить для кинетической энергии

$$T = f^2 f'^2 \int (\nabla\phi_0(\vec{\xi}))^2 d\vec{\xi}, \quad \vec{\xi} = (\frac{x}{f(t)}, \frac{y}{f(t)})\,.$$

Автомодельное решение может "терять"энерги, или сохранять её. Но энергия не может расти. А поскольку

$$T \simeq (t_0 - t)^{4s-2},$$

и $\infty > s \geq \frac{1}{2}$, q должен быть в пределах $2 \leq q \leq 0$. For $q = 2$, $s = \infty$, и коллапс происходит за бесконечное время.

Случай $q = s = 1$ - особый. Здесь решение системы 1.75), (1.76) можно искать в виде:

$$\begin{aligned} x &= x_0 t + x_1 \,, \\ y &= y_0 t + y_1 \,, \\ \Psi &= \Psi_0 t + \Psi_1 \end{aligned} \tag{1.85}$$

В (1.85) x_0, y_0 и Ψ_0 представляют автомодельное решение, удовлетворяющее уравнениям

$$\begin{aligned} y_0 x_0' - x_0 y_0' &= -\hat{H}\Psi_0' \,, \\ \Psi_0 x_0' - x_0 \Psi_0' &= \hat{H}(\Psi_0' y_0\prime - \Psi_0' y_0) \,, \end{aligned} \tag{1.86}$$

а в свою очередь x_1, y_1 и Ψ_1 подчиняются линейным уравнениям

$$\begin{aligned} y_0 x_1' - x_0 y_1' &= -\hat{H}\Psi_1' \,, \\ \Psi_0 x_1' - x_0 \Psi_1' &= \hat{H}(\Psi_0' y_1\prime - \Psi_1' y_0) \,. \end{aligned} \tag{1.87}$$

Зная автомодельное решение (1.85), можно построить общее решение системы (1.75)-(1.76). Его можно записать в виде бесконечного ряда:

$$\begin{aligned} x &= x_0 t + x_1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_{-k}}{t^k} \,, \\ y &= y_0 t + y_1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{y_{-k}}{t^k} \,, \\ \Psi &= \Psi_0 t + \Psi_1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Psi_{-k}}{t^k} \,. \end{aligned} \tag{1.88}$$

Первые два члена разложения (1.88) удовлетворяют уравнениям (1.86), (1.87)

и далее:

$$\begin{aligned} y_0 x'_{-n} - y'_{-n} x_0 + \hat{H}\Psi'_{-n} &= F_n\,, \qquad (1.89)\\ \Psi_0 x'_{-n} - \Psi_{-n}\prime x_0 + \hat{H}(y_0\Psi_{-n} - \Psi_0 y'_{-n}) &= G_n\,, \end{aligned}$$

где F_n и G_n выражения, зависящие только от x_{-k}, y_{-k} и Ψ_{-k} $(k < n)$. В частности

$$\begin{aligned} F_2 &= y_{-1}x'_1 - x_{-1}y'_1\,,\\ G_2 &= \Psi_{-1}x'_1 - x_{-1}\Psi'_1 - \hat{H}(\Psi_{-1}y'_1 - y_{-1}\Psi'_1)\,. \end{aligned}$$

Предположим, что решения уравнений (1.86) и (1.87) найдены, и, более того, решены явно линейные, не зависящие от времени неоднородные уравнения (1.89) при любых заданных F_n, G_n. Тогда можно найти рекуррентно все члены в разложении (1.88). В этом смысле система (1.75)-(1.76) точно решаема.

К настоящему моменту решения уравнений (1.86) и (1.87), так же как и алгоритм решения (1.89) неизвестны. И мы не знаем существует ли решение уравнений (1.83), и не знаем что определяет выбор значения s. Однако мы знаем, случай $s = 2$ соответствует малоугловому приближению описанному в [105].

1.4 Кубически нелинейные уравнения

Если уж мы применили конформное преобразование и используем комплексный потенциал скорости, то нам следует вместо вещественных уравнений (1.49) и (1.50) написать комплексные уравнения для $z(w,t)$ и комплексного потенциала скорости $\Phi(w,t)$. Эти комплексные уравнения можно получить

применяя оператор проектирования $\hat{P}$

$$\hat{P}(f) = \frac{1}{2}(1 + i\hat{H})(f)$$

к уравнениям 1.49) и (1.50):

$$\begin{aligned} z_t &= iUz_u, \\ \Phi_t &= iU\Phi_u - \hat{P}(\frac{|\Phi_u|^2}{|z_u|^2}) + ig(z-u). \end{aligned} \tag{1.90}$$

Здесь U - это комплексная скорость переноса:

$$U = 2\hat{P}(\frac{-\hat{H}\Psi_u}{|z_u|^2}).$$

Оказалось, что уравнения (1.90) могут быть упрощены просто заменой переменных. Действительно, вместо переменных $z(w,t)$ и $\Phi(w,t)$ введем новые функции $R(w,t)$ и $V(w,t)$ следующим способом:

$$\begin{aligned} R &= \frac{1}{z_w}, \\ \Phi_w &= -iVz_w. \end{aligned} \tag{1.91}$$

(V - это $i\frac{\partial\Phi}{\partial z}$, т.е. комплексная скорость). Заметим, что поскольку $z(w,t)$ является конформным преобразованием, его производная существует в нижней полуплоскости и не имеет там нулей. Таким образом функция $R(w,t)$ также является аналитической в нижней полуплоскости, и имеет следующие граничные условия:

$$R(w,t) \to 1, \quad |w| \to \infty, \quad Im(w) \leq 0.$$

Очевидно, что для V граничные условия выглядят так:

$$V(w,t) \to 0, \quad |w| \to \infty, \quad Im(w) \leq 0.$$

Тогда для этих функций уравнения приобретают весьма изящную форму:

$$\begin{aligned} R_t &= i(UR' - U'R), \\ V_t &= i(UV' - R\hat{P}'(V\bar{V})) + g(R-1). \end{aligned} \tag{1.92}$$

Здесь

$$U = \hat{P}(V\bar{R} + \bar{V}R).$$

Полученные уравнения кубически нелинейны и влючают в себя линейный интегральный оператор. Они являются уравнениями гидродинамического типа, но действуют в комплексной плоскости. Важную роль в этих уравнениях играет комплексная скорость переноса U. Она переносит нули функции $R(w,t)$, которые являются особыми точками конформного отображения $z(w,t)$. Разные типы нулей предполагается изучить в следующей статье. Здесь же следует лишь отметить, что в численном моделировании наблюдаются лишь корневые ($\sqrt{w}$) точки ветвления.

В уравнениях (1.92) легко учесть и поверхностное натяжение, следует лишь заменить второе уравнение на

$$V_t = i(UV' - R\hat{P}'(V\bar{V}) + g(R-1)) - 2\sigma R\hat{P}'(Q'\bar{Q} - \bar{Q}'Q),$$

где σ - это коэффициент поверхностного натяжения, а $Q = \sqrt{R}$.

Следует отметить, что уравнения (1.92) сохраняют свою форму и для других граничных условий. Например, вместо граничных условий (1.6) можно рассмотреть периодические условия, а также жидкость конечной глубины.

Отметим также, что новые уравнения включают в себя только производные конформного отображения и комплексного потенциала скорости. Что

касается интегралов движения, то они приобретают в новых переменных более сложную форму. Однако, если интегрированием восстановить комплексный потенциал

$$\Phi = -i \int \frac{V}{R} dw$$

то гамильтониан равен

$$\mathcal{H} = -\int_{-\infty}^{\infty} Re(\Phi) Im(\Phi')$$

а импульсы

$$P_y = \int_{-\infty}^{\infty} Re(\Phi) Re(\frac{1}{R}) du, \quad P_x = \int_{-\infty}^{\infty} Re(\Phi) Im(\frac{1}{R}) du.$$

Основное утверждение этого параграфа заключается в следующем. Хорошо известные уравнения (1.3) - (1.4), описывающие потенциальное течение несжимаемой жидкости со свободной границей, являются эквивалентными кубическим уравнениям (1.92), которые написаны для обратной производной конформного отображения $R(w,t) = 1/z'(w,t)$ и комплексной скорости жидкости $V(w,t)$. Эти уравнения являются уравнениями гидродинамического типа и описывают перенос особенностей конформного отображения в верхней полуплоскости. Движение особенностей и определяет форму свободной поверхности. Уравнения получены впервые.

1.5 Модуляционная неустойчивость волны Стокса. Волны-убийцы.

1.5.1 Введение

Волны чрезвычайно большой амплитуды, так называемые **freak waves**, волнами убийцами или гигантскими волнами - хорошо известны морякам (см., например [141, 74, 108, 66]). Из-за этих волн теряются суда и человеческие жизни. Нет никаких сомнений, что волны-убийцы являются нелинейными объектами. Они очень круты. В последней стадии их развития, крутизна становится бесконечной, образуя "стену воды". А перед этим моментом, крутизна больше чем у предельной волны Стокса. Кроме того, типичная волна-убийца - отдельное событие (см. [6]). Перед опрокидыванием её гребень в три-четыре (или даже больше) раза выше чем гребни соседних волн. Волне-убийце предшествует глубокая впадина, или "отверстие в море". Характерное время существования волны-убийцы - невелико, десяток периодов волны или около этого. Если период волны - пятнадцать секунд, это - только несколько минут. Волна-убийца появляется почти "мгновенно"в относительно спокойном море. Несомненно, эти специфические особенности волн-убийц нельзя объяснить линейной теорией. Линейная форкусировка океанских волн создает только предварительные условия для формирования волн-убийц, а сама волна является нелинейным объектом.

Естественно связать появление волн-убийц с модуляционной неустойчивостью волны Стокса. Эту неустойчивость обычно называют неусточивостью Бенджамина-Фейра, однако, она была сначала обнаружена Лайтхил-

лом в[112]. Теория этой неустойчивости была разработана независимо в [57] и в [8]. Фейр (см. [85]) был первым, кто наблюдал эту неустойчивость экспериментально в 1967 году.

Эволюция модулированной нелинейной волны Стокса описывается нелинейным уравнением Шредингера (NLSE), полученым в [9]. Это уравнение интегрируемо (см. [18]), и является первыйм членом в иерархии уравнений огибающих, описывающих пакеты гравитационных поверхностных волн. Второй член в этой иерархии был вычислен Дысте в[82], следующий был найден несколько лет назад в[147]. Уравнение Дысте исследовалось численно Абловицем и сооавторами(см. [47]).

Начиная с первой работы [141], разные авторы пробовали объяснить формирование волн-убийц в рамках NLSE и его обобщений, как уравнение Дысте. Обширная научная литература посвящена этому предмету. Список, представленный ниже длинен, но неполон: [47, 67, 124, 125, 126, 128, 129, 130, 147, 149, 150, 151]. Обзор различных возможных механизмов формирования волн-убийц дается в [94, 30].

Нельзя отрицать результаты, достигнутые при помощи уравнений для огибающих. Результаты многих авторов сходятся в одном важном пункте: нелинейное развитие модуляциогнной неустойчивости приводит к концентрации энергии волны в маленькой пространственной области. Это - "намек"о возможном формировании волны-убийцы. С другой стороны, ясно, что явление волны-убийцы нельзя объяснить в терминах уравнений огибающих. Действительно, NLSE и его обобщения получены разложением по параметру $\lambda \simeq (Lk)^{-1}$, где k - волновое число, L - длина модуляции. Для реальной

волны-убийцы это условие нарушается, также как и приближение огибающих. Однако, анализ уравнений типа NLSE дает ценную информацию о формировании волн-убийц.

Модуляционная неустойчивость приводит к разбиению первоначально однородных волн Стокса в систему квазисолитонов огибающих [14, 163]. Это состояние можно назвать "квазисолитонной турбулентностью". В этой модели солитоны могут сливаться, увеличивая пространственную перемежаемость (intermittency) и приводить к установлению хаотических интенсивных модуляций плотности энергии. Однако, пока эта модель не может объяснить формирование волн-убийц с $\lambda \sim 1$.

Явление образования волны-убийцы можно было бы объяснить, если бы решения для уравнения огибающих с амплидудой, большей некоторой критической, были бы неустойчивы и коллапсировали. В то время как в рамках одномерного уравнения NLSE солитоны устойчивы, улучшенная модель должна иметь некоторый порог по амплитуде для устойчивости солитона. Неустойчивость солитона большой амплитуды и его дальнейший коллапс могли бы быть надлежащим теоретическим объяснением происхождения волн-убийц.

Этот сценарий наблюдался в численном эксперименте в эвристической одномерной модели Maida-McLaughlin-Tabak (MMT-модель) (см. [117]) для одномерной волновой турбулентности [163]. В экспериментах, описанных в этой работе неустойчивость монохроматической волны умеренной амплитуды ведет сначала к созданию цепочки солитонов, которые сливаются (из-за неупругого взаимодействия) в один солитон большой амплитуды. Этот соли-

тон поглощает энергию от соседних волн, становится неустойчивым и затем коллапсирует до $\lambda \sim 1$. Это может быть интерпретировано как образование волны-убийцы.

В наших экспериментах наблюдался другой сценарий. А именно, волна-убийца появляется в модулированном цуге волн. Образование волны-убийцы похожа на развитие некоторого дефекта на периодической сетке, являющеся периодической волной Стокса.

Самый прямой способ доказать справедливость вышеизложенных сценариев формирования волны-убийцы - прямое численное моделирование уравнения Эйлера, описывающего потенциальные течения идеальной жидкости со свободной поверхностью в поле тяготения. Это моделирование может быть выполнено методом, опубликованным в нескольких статьях [181, 183, 188, 160]. Этот метод применим в $1+1$ геометрии; он включает конформное преобразование жидкости, ограниченной поверхностью в нижнюю полуплоскость вместе с "оптимальным"выбором переменных, который гарантирует корректность дискретных уравнений [81].

Далее представлены результаты численных экспериментов для волн, с начальной крутизной от $\mu \simeq 0.1$ до $\mu \simeq 0.3$. Эти эксперименты можно рассмотривать как моделирование реалистической ситуации. Если типичная крутизна морского волнения - $\mu \simeq 0.06 \div 0.07$, в некоторых областях крутизна бывает в два-три раза больше. В экспериментах мы начинаем с волны Стокса, с длинноволновой модуляцией, амплитуда которой в двадцать раз меньше чем амплитуда самой волны. В наших экспериментах наблюдается развитие модуляционной неустойчивости, и в конце взрывное формирование

волны-убийцы, которая подобна волнам, наблюдаемым в природе.

1.5.2 Численный эксперимент

Много численных схем были разработаны для решения уравнения Эйлера, описывающего потенциальное течение жидкости со свободной поверхностностью в гравитационном поле. Большинство из них использует интегральные уравнения, которые дают решение краевой задачи для уравнения Лапласа [77, 78, 76]. Обзор этих методов может дан в [152].

В этом параграфе мы изучаем модуляциионную неустойчивость волны Стокса. В качестве начального условия условия мы используем стационарную нелинейную волну Стокса с длинноволновой модуляцией. Этот волна неустойчива относительно роста модуляции длинного масштаба. Этот замечательный факт был сначала установлен в [112], который вычислил инкремент неустойчивости в пределе длинноволновой модуляции. Поскольку инкремент Лайтилла был пропорционален волновому числу молуляции, результат был в принципе неполон: в коротких масштабах неустойчивость должна отсутствовать. Точный инкремент был найден независимо в [8, 9, 57].

Для численного моделирования мы, в принципе, имеем три формы уравнений.

1. Это уравнения (1.31) и (1.38),

$$\begin{aligned} y_t x_u - x_t y_u &= -\hat{H}\Psi_u, \\ \Psi_t y_u - \Psi_u y_t + g y y_u &+ \hat{H}(\Psi_t x_u - \Psi_u x_t + g y x_u) = 0, \end{aligned}$$

не разрешенные относительно производных по времени, и поэтому ма-

лоприспособленны для численного решения.

2. Уравнения (1.90),

$$\begin{aligned} z_t &= iUz_u, \\ \Phi_t &= iU\Phi_u - \hat{P}(\frac{|\Phi_u|^2}{|z_u|^2}) + ig(z-u). \end{aligned}$$

записанные для аналитических в нижней полуплоскости функций комплексного потенциала скорости Φ и собственно конформного отображения Z.

3. Уравнения (1.92),

$$\begin{aligned} R_t &= i(UR' - U'R), \\ V_t &= i(UV' - R\hat{P}'(V\bar{V})) + g(R-1). \end{aligned}$$

Что касается уравнений (1.90), то вкоре после того, как они были переоткрыты в 1994 году (напомним, что впервые их написал Овсянников в 1973 году, в [37]), две группы исследователей принялись разрабатывать численные коды для их решения. Работы Чаликова и Шейнина были суммированы в их статье 1998 года [65] (см. также [64]). Первые результаты, полученные в нашей группе, были опубликованы в 1996 году в [181]. Однако, начиная с 2001 года, (с работы [186]) мы перешли к численному решению уравнений (1.92). И для этого имеются веские причины. Остановимся на этом вопросе подробнее. Конечно, все три формы уравнений являются эквивалентными как с физической, так и математической точек зрения. Однако, Было установлено, сначала эмпирически, а затем и дано объяснение (в [81]), что численное решение уравнений (1.92) для переменных R и V является наиболее

устойчивым. Численный код для решения этих уравнений был разработан в [188].

Мы используем спектральный метод для численного решения уравнений (1.92). Следует отметить, что конформное преобразование - обычный подход, неоднократно применявшийся для изучения волны Стокса. Уравнения для её коэффициентов Фурье-разложения были решены численно многими авторами (см., например [171]). Идея осуществления конформного преобразования при численном моделировании динамики волны появилась в начале восьмидесятых (см. [118]). Но поскольку уравнения (1.92) в то время не были известны, авторы использовали квазилагранжевый подход в гидродинамике. После некоторых экспериментов и обсуждения их результатов, идея использования конформного преобразования перестала казаться привлекательной по следующей причине: конформное преобразование не очень хорошо для описания особенностей с углом на поверхности, естественно появляющегося на свободной поверхности жидкости. Эта причина серьезна, если пространственная разностная сетка редка. Однако, современные компьютеры делают возможным использовать очень точные разностные сетки , состоящие из больше чем миллиона узлов или спектральных мод. Таким образом, этот аргумент перестал быть актуальным.

Следует отметить, что эти уравнения не являются обычными уравнениями в частных производных. Их можно назвать "Гильберт-дифференциальными"уравнениями, которые наряду с обычным дифференцированием по u

$$f \to \frac{\partial f}{\partial u} \tag{1.93}$$

включают в себя интегральное преобразование Гильберта

$$f \to \hat{H}\, f \tag{1.94}$$

С точки аналитической точки зрения две эти операции совершенно различны. Но с точки зрения численного решения – очень пожожи. Действительно, для Фурье-гармоник операция (1.93) означает

$$f_k \to ikf_k$$

а преобразование (1.94) сответствует

$$f_k \to i\,\mathrm{sign}(k) f_k$$

С вычислительной точки зрения две эти операции - одинакового уровня трудности.

Первая серия

В первой серии численных экспериментов исследовалась локализация энергии в первоначально почти однородном цуге волн Стокса. Моделирование проводилось в периодической области 2π, так что волновые числа - это целые числа. Гравитационная постоянная $g = 10$. Волна Стокса характеризуется крутизной (steepness) $\mu = ak_0$, (k_0 – волновое число, a – амплитуда волны). Если $\mu \ll 1$, волна Стокса является почти монохроматической. В этой серии экспериментов $\mu = 0.1$. Столь малая крутизна позволяет взять в качестве начальных данных суперпозицию монохроматической волны (с $k_0 = 50$) и возмущения (Гауссов шум в Фурье-спектре). Колличество Фурье-гармоник, задействованных в вычислениях было сравнительно небольшим, 12288 (это 4096x3).

Инкремент модуляционной неустойчивости

$$\gamma = \frac{\omega_0}{2}\left(\left(\frac{\delta k}{k_0}\right)^2 (ak_0)^2 - \frac{1}{4}(\left(\frac{\delta k}{k_0}\right)^4\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{1.95}$$

Здесь ω_0 - частота волны

$$\omega_0 = \sqrt{gk_0},$$

а δk - определяет неустойчивые гармоники, такие что

$$k_1 = k_0 + \delta k,$$

$$k_2 = k_0 - \delta k,$$

$$k_3 = \delta k.$$

Максимальное значение инкремента

$$\gamma_{max} = \omega_0 \cdot \frac{1}{2}(ak_0)^2, \tag{1.96}$$

достигается для возмущения с волновым числом p,

$$p = \sqrt{2}(ak_0) \cdot k_0. \tag{1.97}$$

Численный эксперимент проводился со следующими параметрами:

$$\begin{aligned} &\mu = ak_0 \simeq 0.1 \qquad \omega_0 = \sqrt{500} \simeq 24, \\ &\gamma_{max} \simeq 0.12 \qquad \gamma_{max}^{-1} \simeq 8, \qquad p \simeq 7. \end{aligned} \tag{1.98}$$

Начальные условия для R и V, таким образом, даются следующими формулами:

$$\begin{aligned} R(u, t=0) &= 0.1\exp(-ik_0u) + \text{возмущение}, \\ V(u, t=0) &= -i0.1\frac{g}{k_0}\exp(-ik_0u) + \text{возмущение} \end{aligned} \tag{1.99}$$

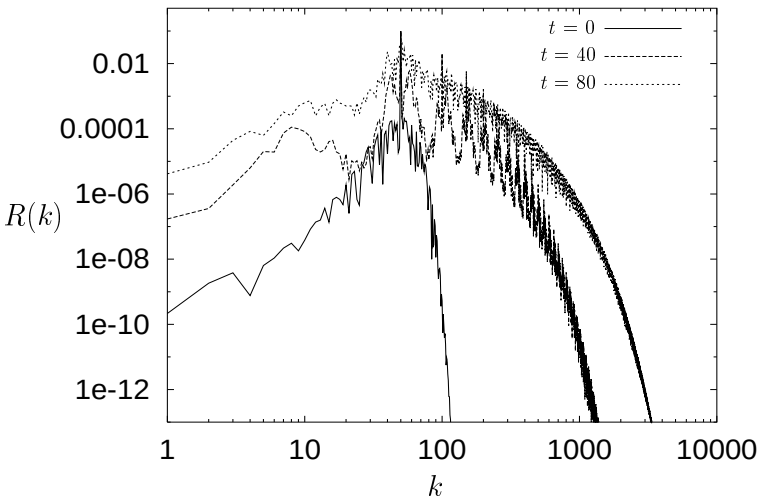


Рис. 1.1: Развитие модуляционной неустойчивости: Фурье-спектр $R(k)$ в различные моменты времени

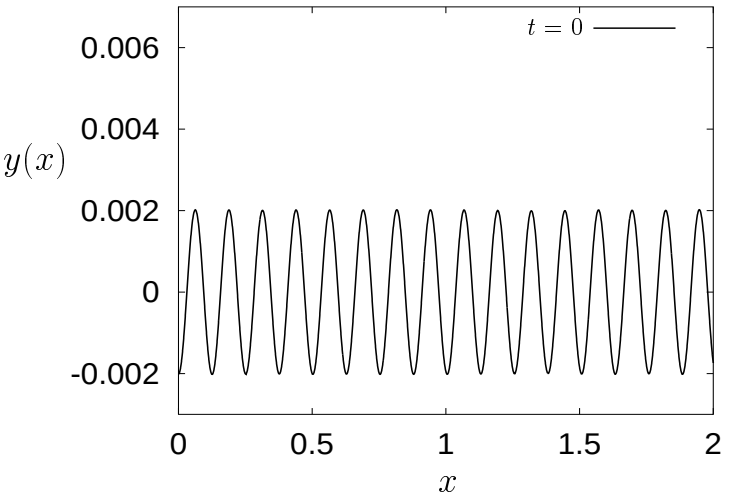


Рис. 1.2: Поверхность жидкости в начальный момент времени

Начальный спектр для $R(k)$ показан на Рисунке 1.1(при $t = 0$), а часть поверхности жидкости $y(x)$ показана на Рисунке 1.2. В этом численном эксперименте нет ни накачки, ни затухания, и полная энергия сохраняется.

Временная эволюция спектра показана на Рисунке 1.1. На нём видно, как

уширяется спектр из первоначально почти мохроматической волны и шума. Спектральные "хвосты"распространяются в область больших волновых чисел.

Этот процесс можно интерпретировать как формирование особенностей на гребнях отдельных волн, или, другими словами, как начало опрокидывания волны. Чтобы продолжать вычисления после момента $t = 80$, нужно включить в вычисление какой-либо механизм диссипации.

Итак, весь процесс занимает приблизительно десять обратных инкрементов модуляционной неустойчивости. В течение большей части этого времени наблюдается экспоненциальный рост начального возмущения. На последней стадии процесса, можно видеть быстрое формирование волн-убийц с амплитудой, которая больше чем в три раза превышает уровень начального волнения. Расстояние между волнамиубийцами - 5-7 периодов начальной волны. Сравнивая с (1.98), можно заключить, что расстояние между волнамиубийцами соответствует длине самой быстрорастущей гармонике, а именно k_3.

Главным результатом этого численного эксперимента является быстрое формирование волны-убийцы на нелинейной стадии модуляционной неустойчивости. На рисунке 1.2 показана начальная поверхность жидкости. Видно, что начальное возмущение монохроматической (или правильнее сказать волны Стокса) мало. На Рисунке 1.3 показан профиль поверхности в конце вычислений, при $t = 80$. Превышение среднего уровня в три раза (что наблюдается в данном эксперименте) и является характерным признаком волны-убийцы. Обычно даже достаточно превышения в 2-2,2 раза, чтобы

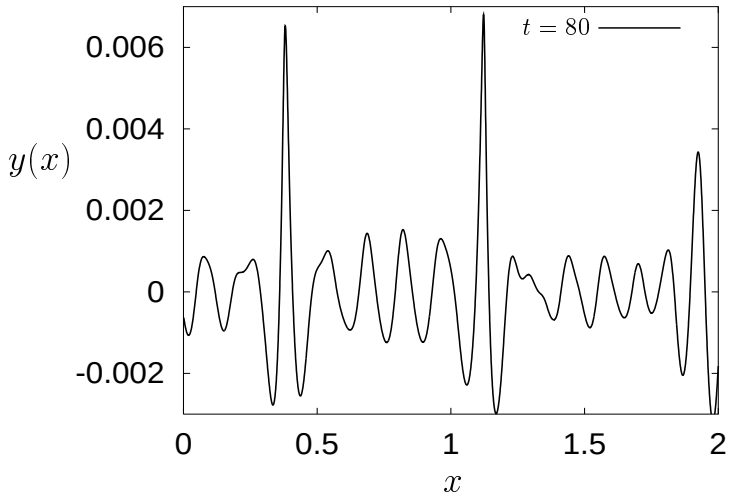


Рис. 1.3: Поверхность жидкости в момент времени $t = 80$.

можно было говорить о волне-убийце. Более подробно определение таких волн дано в [30].

Рисунки 1.4, 1.5, 1.6 показывают пространственное распределение кинетической, потенциальной и полной энергии при $t = 80$. Плотность энергии в волне-убийце почти на два порядка превышает плотность энергии в соседних волнах. Конечно, такая концентрация энергии малом пространстве является опасной для морских судов.

Вторая серия

Сравнительно небольшое колличество Фурье-гармоник не позволяет проследить весь процесс эволюции волны-убийцы, которая может завершиться опрокидыванием волны. Поэтому в следующем эксперименте представлены результаты численного моделирования образования волны-убийцы и её опрокидывания с $2 \cdot 10^6$ Фурье-гармоник. Как и ранее численно решались

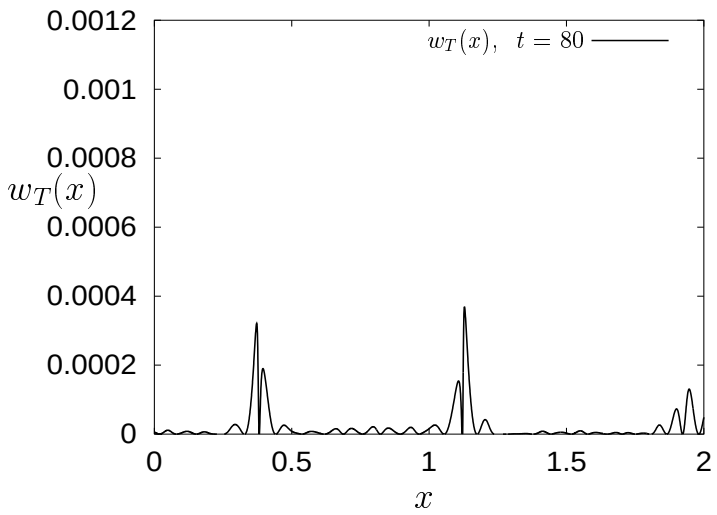


Рис. 1.4: Пространственная плотность кинетической энергии в момент времени $t = 80$.

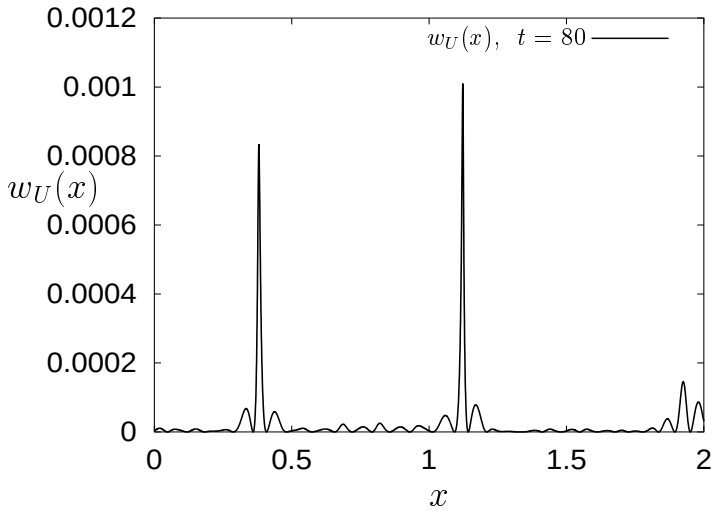


Рис. 1.5: Пространственная плотность потенциальной энергии в момент времени $t = 80$.

уравнения (1.92) в периодической области размером 2π, но здесь гравитационная постоянная $g = 1$.

Начальные данные выбраны как комбинация точной волны Стокса с волновым числом $k = 10$, и крутизной $a_0 = \mu = 0.15$ и длинной монохроматической волны с волновым числом $k = 1$ и малой амплитудой $5 \cdot 10^{-2}$. Для того,

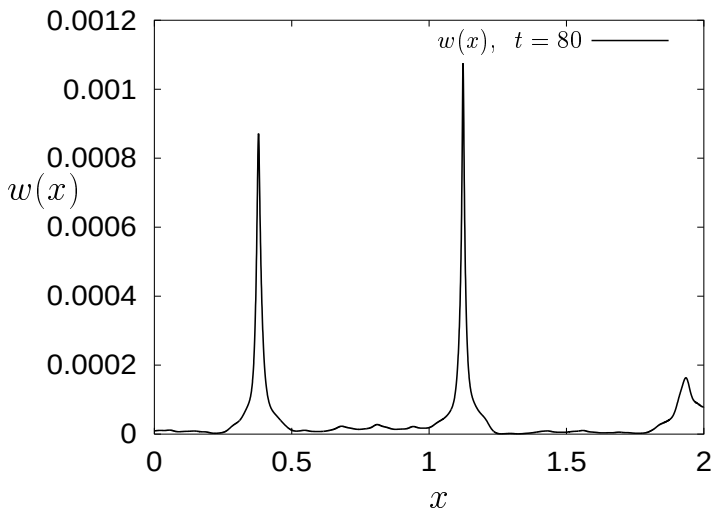


Рис. 1.6: Пространственная плотность полной энергии в момент времени $t = 80$.

чтобы задать волну Стокса, необходимо было решить стационарное уравнение (.49) из Приложения .1, которое для случая жидкости бесконечной глубины переходит в

$$-c^2 y_u + g y y_u + g\hat{H}(y(1+\tilde{x}_u)) = 0. \tag{1.100}$$

Для его решения был разработан специальный алгоритм. Получив численное решение(1.100) лекго получить начальные условия для R и V.

$$\begin{aligned} Z' &= (1+\tilde{x}_u) = iy_u) \quad \text{из (1.100)}, \\ R &= \frac{1}{Z'}, \\ V &= ic(R-1). \end{aligned} \tag{1.101}$$

Относительно высокий уровень возмущения $5 \cdot 10^{-2}$ выбран преднамеренно, чтобы сделать короче время экспоненциального (линейного) роста, не представляющего особого интереса. При таких условиях, максимальный ин-

кремент

$$\gamma_{max} \simeq \frac{\sqrt{10}}{2} \cdot 0.15^2 \simeq 0.035$$

а

$$\gamma_{max}^{-1} \simeq 28.6$$

Период волны Стокса

$$T_0 = \frac{2\pi}{\sqrt{10}}.$$

Моделирование продолжалось до $T \simeq 458.842$, т.е. примерно 16 обратных инкрементов. Вычисления проводились с двойной точностью, с увеличением числа Фурье-гармоник, по мере надобности, чтобы обеспечить точность вычислений. Максимальное число Фурье-гармоник - два миллиона.

Наблюдался короткий период экспоненциального роста возмущения, затем небольшой промежуточный режима интенсивной модуляции, которая заканчивается взрывным формированием одной единственной волны-убийцы. Форма поверхности жидкости перед опрокидыванием во времена $T = 442$ и $T = 458.56$ представлены на Рисунке 1.7 и Рисунке 1.8.

Временной интервал от $T = 442$ и до $T = 458,56$ содержит только семь периодов начальной волны. В этом интервале можно видеть быстрое, немонотонное формирование волны-убийцы. В этот момент волна более крута чем волна Стокса предельной амплитуды, для которой $a_0 = \mu = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Амплитуды волн, бегущих впереди волны-убийцы - относительно малы (в три раза меньше). Можно видеть глубокую впадину перед волной-убийцей. Это - так называемая "дыра в воде"или "hole in the water"(морской фольклор), которая предшествует волне-убийце. Рисунок 1.9 демонстрирует по-

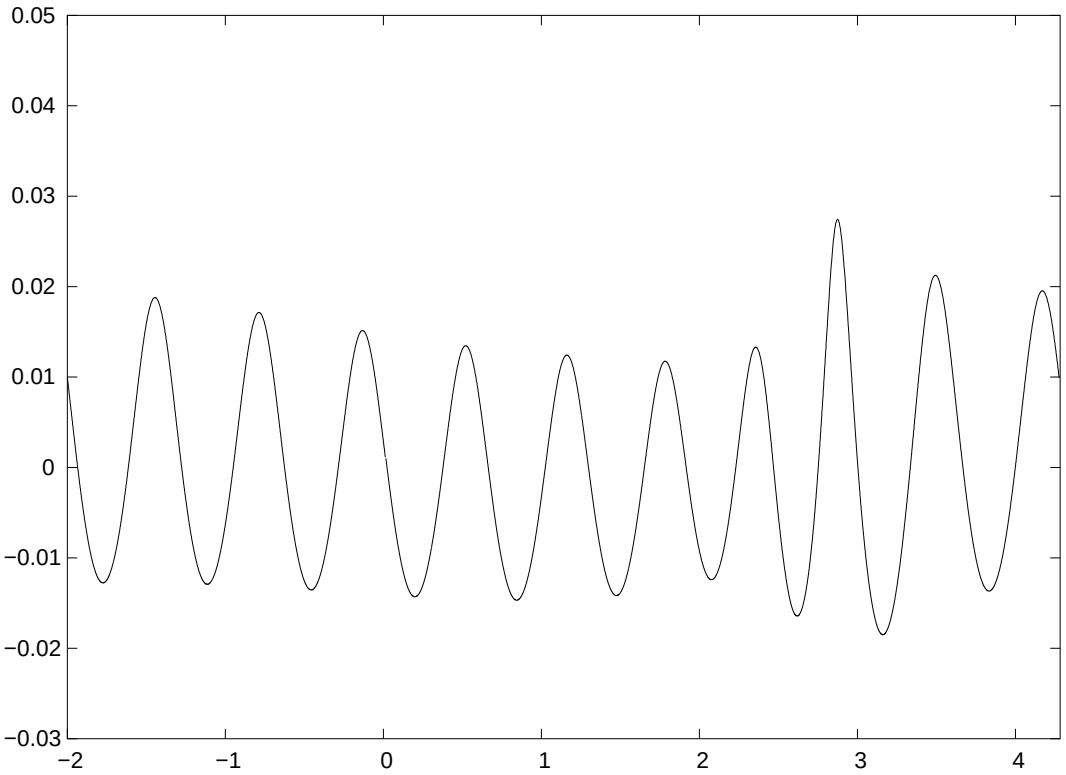


Рис. 1.7: Форма поверхности жидкости при $T = 422$

дробную структуру формы поверхности жидкости вблизи гребня волны.

Вычисления продолжалисть вплоть до момента времени $T = 458.842$, когда волна уже начала опрокидываться. Увеличенное изображение формы поверхности жидкости вблизи гребня волны в этот момент премени представлено на Рисунке 1.10. Заметим, что конформные переменные позволяют моделировать ситуацию с неоднозначной поверхностью (как функцию горизонтальной координаты).

Можно видеть, что около гребня передний фронт волны очень крут. Это - действительно "стена воды". В некоторой области крутизна даже отрицательна (где поверхность неоднозначна). Кривизна поверхности изображена на Рисунке 1.11.

Это в самом деле опрокидывающаяся волна. Следует отметить, что в этих

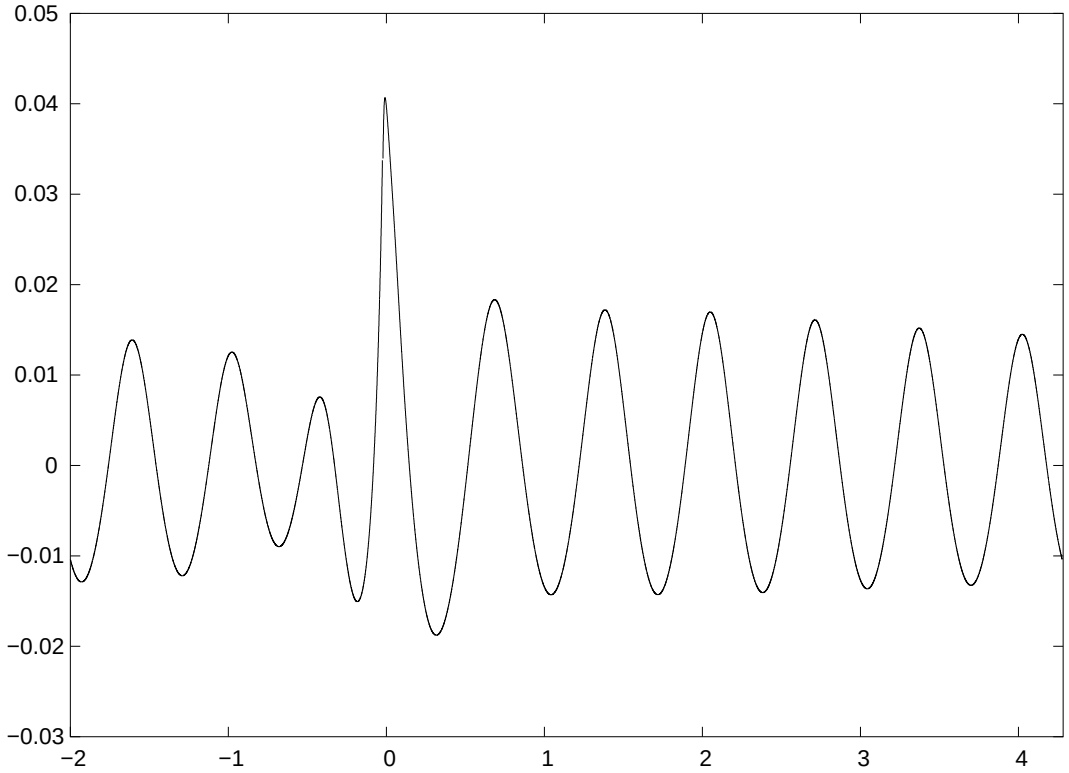


Рис. 1.8: Форма поверхности жидкости при $T = 458.56$

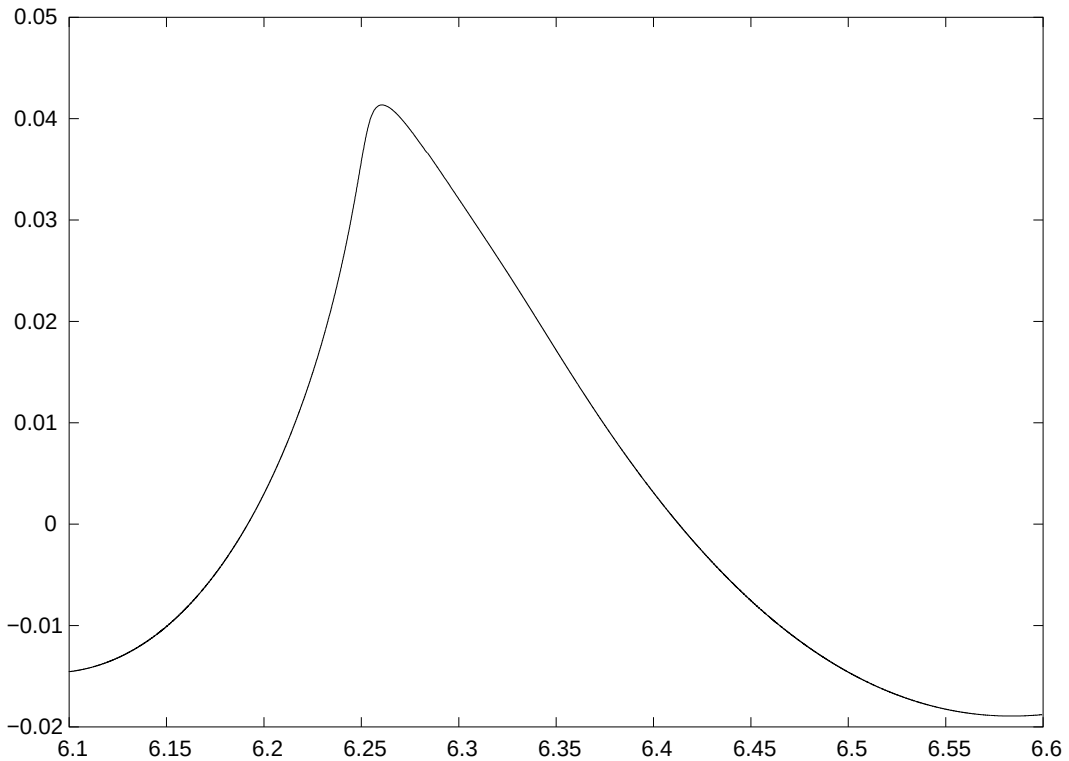


Рис. 1.9: Форма поверхности жидкости вблизи гребня волны при $T = 458,61$

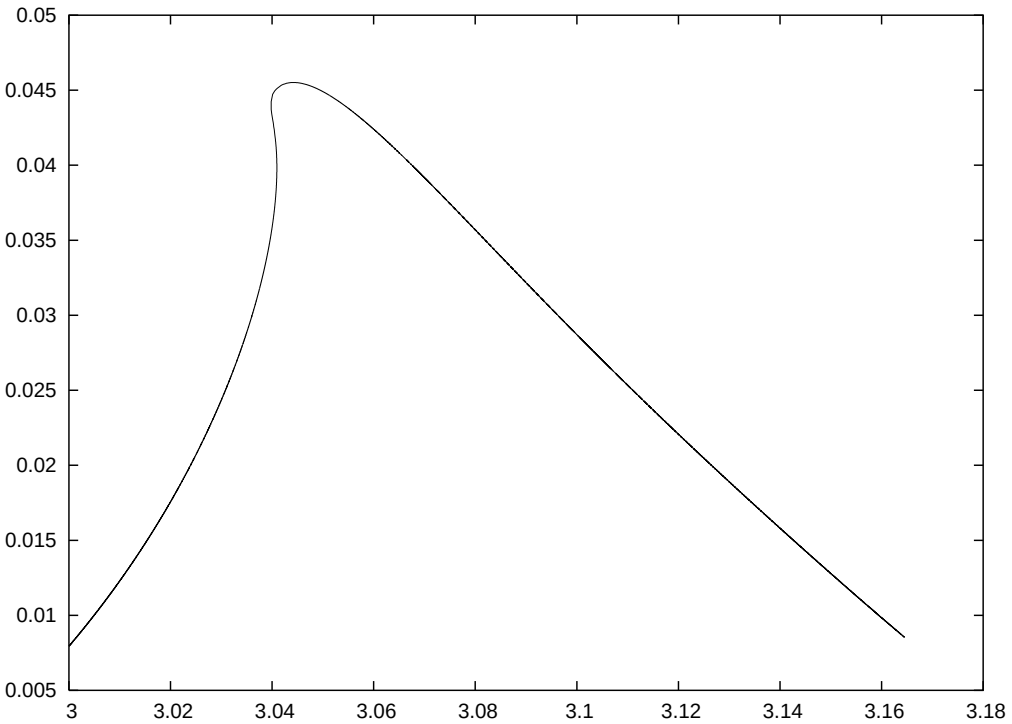


Рис. 1.10: Увеличенное изображение формы поверхности жидкости вблизи гребня волны при $T = 458.842$

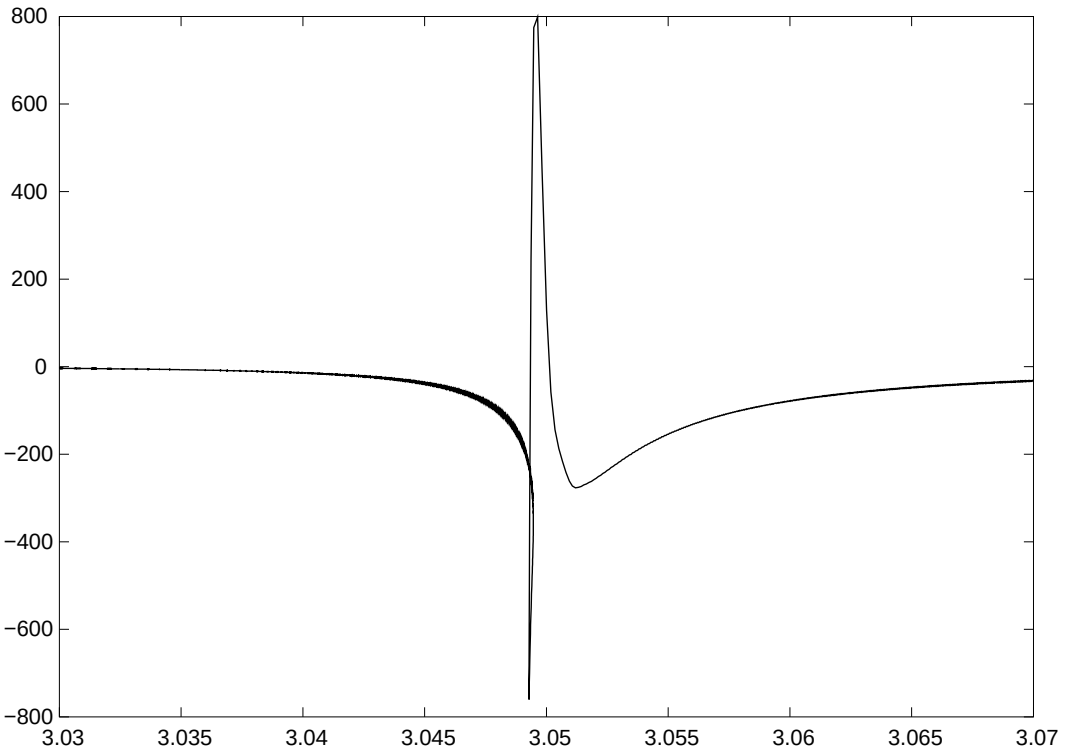


Рис. 1.11: Кривизна поверхности при $T = 458.842$

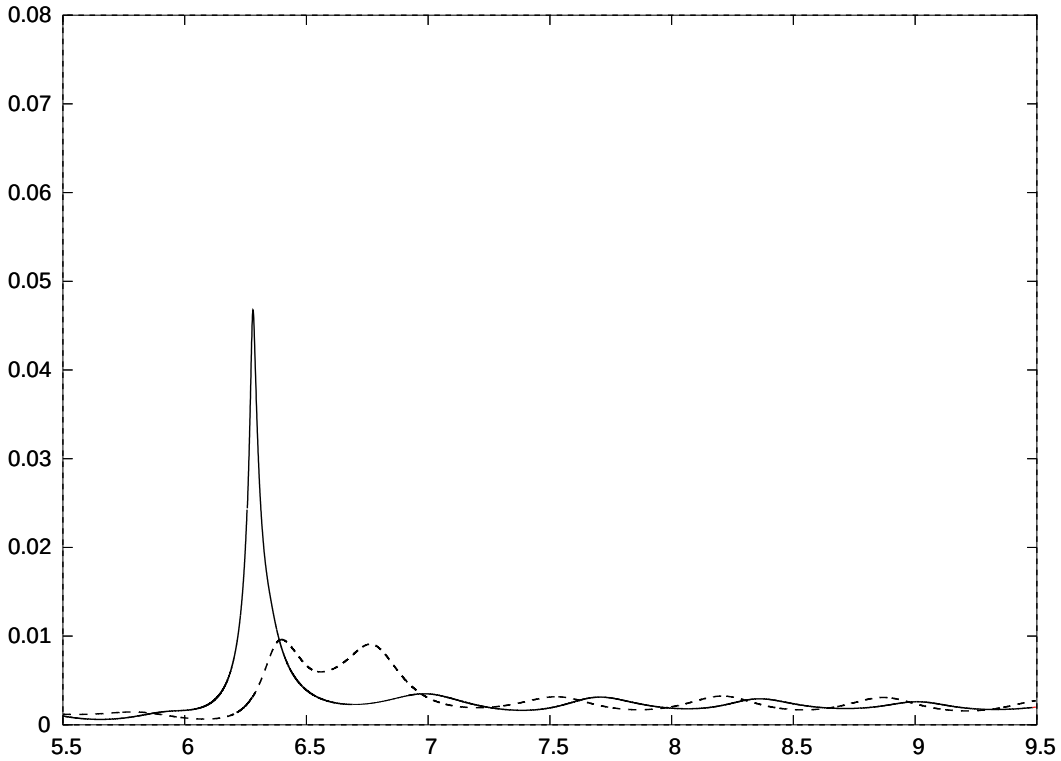


Рис. 1.12: Плотность кинетической енергии перед опрокидыванием при $T = 456$ (пунктирная линия), и в момент опрокидывания при $T = 458.5$ (сплошная линия)

экспериментах в момент начала опрокидывания отношение высоты волны-убийцы (от впадины до гребня) к её длине практически всегда одно и тоже, и близко к такому отношению для предельной волны Стокса, 0,141.

Отметим, что максимальная высота волны-убийцы в три раза выше чем высота начального волнения. Рост высоты волны до этого уровня отзанимает меньше чем десять периодов волны. Это - действительно быстрый процесс; это в три раза быстрее чем развитие модуляционной неустойчивости.

Рисунок 1.12 показывает динамику пространственной плотности кинетической энергии в области [5.5-9.5], где происходит опрокидывание волны.

Можно видеть, что динамика образования волны-убийцы не является монотонной. Плотность энергии колеблется во времени и, наконец конденсируется в одном очень узком гребне. Вообще, весь процесс формирова-

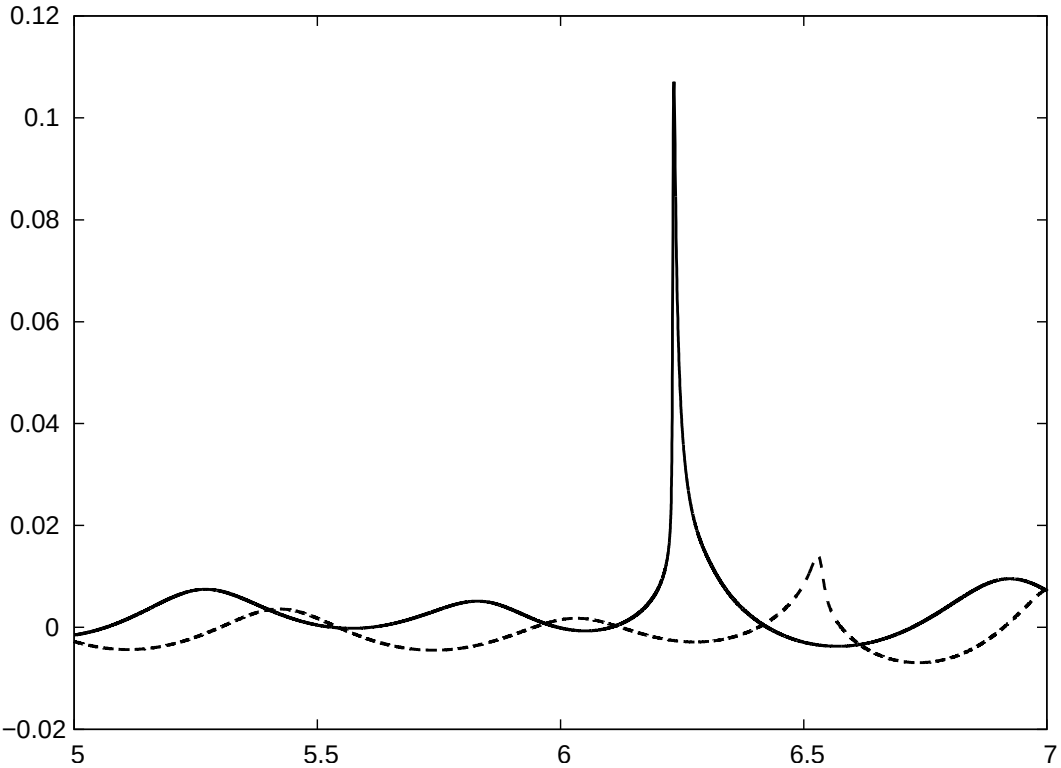


Рис. 1.13: пространственная плотность горизонтального импульса перед опрокидыванием при $T = 456$ (пунктирная линия), и в момент опрокидывания при $T = 458.5$ (сплошная линия)

ния волны-убийцы является немонотонным. Мы можем сказать, что волна-убийца "пробегает"по гребням волны до тех пор, пока однин из них достигает чрезвычайно высокой амплитуды. Это поведение можно легко объяснить различием групповой и фазовой скоростей: энергия распространяется с групповой скоростью, которая приблизительно вдвое меньше чем фазовая скорость.

Рисунок 1.13 демонстрирует распределение горизонтального импульса до и после опрокидывания, в $T = 455$ и $T = 456$. Можно видеть, что процесс концентрации импульса в движущейся, но ограниченной области является монотонным. Определенно, это поведение можно объяснить фактом, что импульс - сохраняющаяся величина (а кинетическая энергия - нет).

1.6 Заключение

Подведем итоги численных экспериментов. Конечно, они воспроизводят самые очевидные особенности волн-убийц:

- отдельные гребни волны очень высокой амплитуды, превышая высоту значительной волны больше чем три раза
- появляется из "ниоткуда"и достигет полной высоты в очень короткое время, меньше чем десять периодов окружения волн. ("Девятый вал"?)
- волне-убийце предшествует область волн с малой амплитудой
- в конце волна-убийца опрокидывается

Отношение высоты волны-убийцы к ее длине волны - практически всегда одно и тоже, и близко к такому отношению для предельной волны Стокса, 0.141. Волна-убийца движется со групповой скоростью.

В наших экспериментах волна-убийца появляется в результате развития модуляционной неустойчивости (если порог неустойчивости не превышен, никакие волны-убийцы не появляются вообще). Требуется много времени после начала модуляционной неустойчивости перед тем, как появится волна-убийца. Это время много больше, чем линейный обратный инкремент, волна-убийца появляется только после пятнадцатых обратных инкрементов. Что же происходит после начала развития неустойчивости, но перед образованием волны-убийцы? Эту стадию можно было бы рассматривать как развитие некоторого дефекта на периодической сетке. Эта сетка - периодический цуг

волн Стокса. Подобная картина наблюдалась в работе [142], где изучалось опрокидывание в группе волн.

2 Интегрируема ли гидродинамика идеальной жидкости со свободной поверхностью ?

В этой главе представлены результаты, опубликованные с работах [177, 178, 179]. В 1994 году автором была написана программа для численного решения уравнений гидродинамики идеальной несжимаемой жидкости со свободной границей. И, как обычно бывает, возник вопрос о её отладке. В качестве тестовой задачи В.Е. Захаров предложил проверить инкремент 4-х волнового резонансного взаимодействия гравитационных волн. Для вычисления этого инкремента необходимо было вычислить матричный элемент 4-х волнового взаимодействия на резонансной поверхности. К большому удивлению он оказался равным нулю.

Эта глава построена следующим образом. В разделе 2.1 перечислены некоторые частные *интегрируемые* системы, получающиеся из точных уравнений потенциального течения идеальной несжимаемой глубокой жидкости со свободной границей. В разделе 2.2 получен эффективный четырёхволновой Гамильтониан (исключены нерезонансные трёхволновые взаимодействия).

Показано, что матричный элемент взаимодействия на резонансной поверхности тождественно равен нулю. Показано, также, что кинетические уравнения Хассельманна и Захарова эквивалентны как о одномерном, так и в двумерном случаях.

В разделе 2.3 обосновывается необходимость рассмотрения 5-ти волнового кинетического уравнения. Вводятся *конформные канонические* переменные, и с помощью них строится эффективный четырёхволновой Гамильтониан и 5-ти волновой матричный элемент. Кроме того, в этом же разделе вычисляется 5-ти волновой матричный элемент на резонансной поверхности.

В разделе 2.4 выводится 5-ти волновое кинетическое уравнение, и получены его стационарные решения, Колмогоровские спектры.

2.1 Частные интегрируемые случаи

Хорошо известно, что уравнения описывающие идеальную жидкость со свободной поверхностью в поле силы тяжести вполне интегрируемы в нескольких важных случаях. Интегрируемость имеет место для длинных волн в на мелкой воде (KdV[86], для уравнения КР[19], для приближения Буссинеска[161], Каупа[93], Холма-Камассы[89]), и для спектрально узкой волны в жидкости произвольной глубины (нелинейное уравнение Шредингера[18]). Слабо нелинейное движение жидкости в отсутствии поля силы тяжести также интегрируемо [104].

Очень естественно сформулировать гипотезу, что произвольное одномерное движение идеальной жидкости в гравитационном поле интегрируемо.

Далее рассмотрены аргументы в поддержку этой гипотезы. Мы рассмотрим слабо нелинейные волны на поверхности жидкости бесконечной глубины и исследуем их самые простые резонансные взаимодействия. Покажем, что амплитуда этого процесса - равна нулю. В математической физики нет эффективных методов чтобы проверить интегрируемость для нелинейных гамильтоновых волновых систем в общем случае. Доказательство неинтегрируемости - легкая проблема. Следуя Пуанкаре, можно сделать это, анализируя ряд возмущений по степеням нелинейности [169]. Члены этого ряда, на резонансных поверхностях являются "амплитудами нелинейных взаимодействий"в волновой системе.

Неинтегрируемость - весьма очевидный факт. Чтобы доказать неинтегрируемость, достаточно доказать, что по крайней мере одна из этих амплитуд является отличной от нуля. Как сложность вычислений значительно увеличивается с порядком нелинейности, много информации может быть извлечено из рассмотрения первого нетривиального нелинейного процесса. Например, неинтегрируемость нелинейного уравнения Шредингера для $d \geq 2$ - тривиальный факт из-за отличной от нуля амплитуды для процесса рассеяния $2 \rightarrow 2$. Это рассеяниение тривиально для интегрируемого случая $d = 1$. Можно проверить (хотя и с большим трудом), что амплитуда первого нетривиального рассеивания $3 \rightarrow 3$ является тождественным нулем в этом случае.

2.2 Уравнения и 4-х волновой матричный элемент

Одномерное потенциальное движение идеальной несжимаемой жидкости со свободной поверхностью в поле тяжести описывается следующим набором уравнений:

$$\begin{aligned} \phi_{xx} + \phi_{zz} &= 0 \qquad (\phi_z \to 0, z \to -\infty), \\ \eta_t + \eta_x \phi_x &= \phi_z\Big|_{z=\eta} \\ \phi_t + \frac{1}{2}(\phi_x^2 + \phi_z^2) + g\eta &= 0\Big|_{z=\eta}; \end{aligned} \tag{2.1}$$

здесь $\eta(x,t)$ - форма поверхности, $\phi(x,z,t)$ - потенциал скорости потока, и g - гравитационная постоянная. Как показано в[9], переменные $\eta(x,t)$ и $\psi(x,t) = \phi(x,z,t)\Big|_{z=\eta}$, являются канонически сопряжёнными, и их Фурье преобразования, удовлетворяют уравнениям

$$\frac{\partial \psi_k}{\partial t} = -\frac{\delta H}{\delta \eta_k^*} \qquad\qquad \frac{\partial \eta_k}{\partial t} = \frac{\delta H}{\delta \psi_k^*}.$$

Здесь $H = K + U$ - полная энергия жидкости с соответствующими кинетической и потенциальной энергиям:

$$K = \frac{1}{2}\int dx \int_{-\infty}^{\eta} v^2 dz \qquad U = \frac{g}{2}\int \eta^2 dx$$

Гамильтониан может быть разложен в бесконечный ряд по степеням характерной крутизны волны $k\eta_k \ll 1$ (см.[9, 71])

$$H = H_0 + H_1 + H_2 + \ldots \tag{2.2}$$

Удобно ввести нормальную комплексную переменную a_k:

$$\eta_k = \sqrt{\frac{\omega_k}{2g}}(a_k + a^*_{-k}) \quad \psi_k = -i\sqrt{\frac{2g}{\omega_k}}(a_k - a^*_{-k}) \tag{2.3}$$

здесь $\omega_k = \sqrt{gk}$ - закон дисперсии для гравитационных волн. Нормальная переменная a_k удовлетворяет уравнению:

$$\frac{\partial a_k}{\partial t} + i\frac{\delta H}{\delta a^*_k} = 0, \tag{2.4}$$

где

$$\begin{aligned} H_0 &= \int \omega_k a_k a^*_k dk, \\ H_1 &= \int V_{kk_1k_2}\{a^*_k a_{k_1} a_{k_2} + a_k a^*_{k_1} a^*_{k_2}\}\delta_{k-k_1-k_2} dk dk_1 dk_2 \\ &+ \frac{1}{3}\int U_{kk_1k_2}\{a_k a_{k_1} a_{k_2} + a^*_k a^*_{k_1} a^*_{k_2}\}\delta_{k+k_1+k_2} dk dk_1 dk_2 \end{aligned} \tag{2.5}$$

$$\begin{aligned} V_{kk_1k_2} &= \frac{g^{\frac{1}{4}}}{8\pi\sqrt{2}}\left(\left(\frac{k}{k_1k_2}\right)^{\frac{1}{4}} L_{k_1k_2} - \left(\frac{k_2}{kk_1}\right)^{\frac{1}{4}} L_{-kk_1} - \left(\frac{k_1}{kk_2}\right)^{\frac{1}{4}} L_{-kk_2}\right) \\ U_{kk_1k_2} &= \frac{g^{\frac{1}{4}}}{8\pi\sqrt{2}}\left(\left(\frac{k}{k_1k_2}\right)^{\frac{1}{4}} L_{k_1k_2} + \left(\frac{k_2}{kk_1}\right)^{\frac{1}{4}} L_{kk_1} + \left(\frac{k_1}{kk_2}\right)^{\frac{1}{4}} L_{kk_2}\right) \end{aligned} \tag{2.6}$$

$$L_{kk_1} = (\vec{k}\vec{k_1}) + |k||k_1| \tag{2.7}$$

Среди разных компонент H_2 только одна является важной:

$$H_2 = \frac{1}{2}\int W_{kk_1k_2k_3} a^*_k a^*_{k_1} a_{k_2} a_{k_3} \delta_{k+k_1-k_2-k_3} dk dk_1 dk_2 dk_3 \tag{2.8}$$

$$\begin{aligned} W_{k_1k_2k_3k_4} = -\frac{1}{64\pi^2}\{&M_{-k_1-k_2k_3k_3} + M_{k_3k_4-k_1-k_2} - M_{-k_1k_3-k_2k_4} \\ &- M_{-k_1k_4-k_2k_3} - M_{-k_2k_3-k_1k_4} - M_{-k_2k_4-k_1k_3}\} \end{aligned} \tag{2.9}$$

$$M_{k_1k_2k_3k_4}=|k_1k_2|\left(\frac{k_3k_4}{k_1k_2}\right)^{\frac{1}{4}}(|k_1+k_3|+|k_1+k_4|+|k_2+k_3|+|k_2+k_4|-2|k_1|-2|k_2|).$$

Переменная a_k не является подходящей для гравитационных волн из-за того, что Гамильтониан содержит кубические члены, в то время как трехволновых резонансов нет. Следующее каноническое (до $O(a^5)$) преобразование от a_k до b_k (см. [9, 24])

$$\begin{aligned}
a_k = b_k + \int \Gamma^{(1)}_{kk_1k_2} b_{k_1} b_{k_2} \delta_{k-k_1-k_2} - 2\int \Gamma^{(1)}_{k_2kk_1} b^*_{k_1} b_{k_2} \delta_{k+k_1-k_2} + \\
+ \int \Gamma^{(2)}_{kk_1k_2} b^*_{k_1} b^*_{k_2} \delta_{k+k_1+k_2} + \int B_{kk_1k_2k_3} b^*_{k_1} b_{k_2} b_{k_3} \delta_{k+k_1-k_2-k_3} \\
B_{kk_1k_2k_3} = \Gamma^{(1)}_{k_1k_2k_1-k_2}\Gamma^{(1)}_{k_3kk_3-k} + \Gamma^{(1)}_{k_1k_3k_1-k_3}\Gamma^{(1)}_{k_2kk_2-k} - \\
-\Gamma^{(1)}_{kk_2k-k_2}\Gamma^{(1)}_{k_3k_1k_3-k_1} - \Gamma^{(1)}_{k_1k_3k_1-k_3}\Gamma^{(1)}_{k_2k_1k_2-k_1} - \\
-\Gamma^{(1)}_{k+k_1kk_1}\Gamma^{(1)}_{k_2+k_3k_2k_3} + \Gamma^{(2)}_{-k-k_1kk_1}\Gamma^{(2)}_{-k_2-k_3k_2k_3}
\end{aligned} \tag{2.10}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma^{(1)}_{kk_1k_2} &= -\frac{V_{kk_1k_2}}{\omega_k - \omega_{k_1} - \omega_{k_2}} \\
\Gamma^{(2)}_{kk_1k_2} &= -\frac{U_{kk_1k_2}}{\omega_k + \omega_{k_1} + \omega_{k_2}}
\end{aligned}$$

преобразует Гамильтониан к виду, не содержащему кубические члены:

$$H = \int \omega_k b_k b^*_k dk + \frac{1}{2}\int T_{kk_1,k_2k_3} b^*_k b^*_{k_1} b_{k_2} b_{k_3} \delta_{k+k_1-k_2-k_3} dk dk_1 dk_2 dk_3 + \ldots; \tag{2.11}$$

здесь T_{kk_1,k_2k_3} удовлетворяет условиям симметрии:

$$T_{kk_1,k_2k_3} = T_{k_1k,k_2k_3} = T_{kk_1,k_3k_2} = T_{k_2k_3kk_1}$$

и имеет вид:

$$T_{kk_1,k_2k_3} = W_{k_1k,k_2k_3} -$$

$$
\begin{aligned}
&-V_{kk_2k-k_2}V_{k_3k_1k_3-k_1}\left[\frac{1}{\omega_{k_2}+\omega_{k-k_2}-\omega_k}+\frac{1}{\omega_{k_1}+\omega_{k_3-k_1}-\omega_{k_3}}\right]-\\
&-V_{k_1k_2k_1-k_2}V_{k_3kk_3-k}\left[\frac{1}{\omega_{k_2}+\omega_{k_1-k_2}-\omega_{k_1}}+\frac{1}{\omega_k+\omega_{k_3-k}-\omega_{k_3}}\right]-\\
&-V_{kk_3k-k_3}V_{k_2k_1k_2-k_1}\left[\frac{1}{\omega_{k_3}+\omega_{k-k_3}-\omega_k}+\frac{1}{\omega_{k_1}+\omega_{k_2-k_1}-\omega_{k_2}}\right]-\\
&-V_{k_1k_3k_1-k_3}V_{k_2kk_2-k}\left[\frac{1}{\omega_{k_3}+\omega_{k_1-k_3}-\omega_{k_1}}+\frac{1}{\omega_k+\omega_{k_2-k}-\omega_{k_2}}\right]-\\
&-V_{k+k_1kk_1}V_{k_2+k_3k_2k_3}\left[\frac{1}{\omega_{k+k_1}-\omega_k-\omega_{k_1}}+\frac{1}{\omega_{k_2+k_3}-\omega_{k_2}-\omega_{k_3}}\right]-\\
&-U_{-k-k_1kk_1}U_{-k_2-k_3k_2k_3}\left[\frac{1}{\omega_{k+k_1}+\omega_k+\omega_{k_1}}+\frac{1}{\omega_{k_2+k_3}+\omega_{k_2}+\omega_{k_3}}\right] \qquad (2.12)
\end{aligned}
$$

2.2.1 Резонансное многообразие в одномерии

Первый нетривиальный процесс - четырёхволновое рассеивание, которое удовлетворяет следующим резонансным условиям (k_i - одномерны)

$$
\begin{aligned}
k+k_1 &= k_2+k_3,\\
\omega_k+\omega_{k_1} &= \omega_{k_2}+\omega_{k_3}, \qquad (2.13)
\end{aligned}
$$

и все частоты ω_{k_i} здесь положительны. Система (2.13) определяет двумерное многообразие в четырехмерном пространстве (k, k_1, k_2, k_3). Это многообразие имеет тривиальную компоненту

$$
k_2 = k_1, \quad k_3 = k, \quad or \quad k_2 = k, \quad k_3 = k_1, \qquad (2.14)
$$

но имеет также и нетривиальную часть. Пусть $k, k_1, k_3 > 0, k_2 < 0$. Теперь (2.13) описывает рациональное многообразие, которое можно параметризовать следующим образом:

$$
k = a(1+\zeta)^2,
$$

$$\begin{aligned} k_1 &= a(1+\zeta)^2\zeta^2, \\ k_2 &= -a\zeta^2, \\ k_3 &= a(1+\zeta+\zeta^2)^2; \end{aligned} \tag{2.15}$$

здесь $0 < \zeta < 1$ и $a > 0$. Легко видеть, что эти два многообразия, (2.14) и (2.15), представляют общее решение для резонансного взаимодействия (кроме тривиальных перестановок).

2.2.2 $T_{kk_1,k_2k_3} = 0$

Главный результат состоит в следующем: **амплитуда T_{kk_1,k_2k_3} тождественно равна нулю на резонансной поверхности** (2.15). Этот факт может быть проверен прямым вычислением T_{kk_1,k_2k_3}, используя выражение (2.12) (это сделано с помощью 'Mathematica' [156]). Сокращение множества членов в T_{kk_1,k_2k_3} может быть не случайным; сокращение имело бы место естественно, если бы система (2.1) была интегрируема, или имела по крайней мере дополнительный интеграл движения [169]. Конечно, это не доказательство интегрируемости (мы не имеем никакого способа исследовать все более высокие амплитуды резонансных взаимодействий в (2.11)), но есть другие свидетельства, упомянутые выше, в пользу гипотезы интегриуемости. Интегрируемость уравнений гравитационных волн в жидкости конечной глубины может быть проверена вычислением соответствующего T_{kk_1,k_2k_3}. Кроме того, в работе [137] численное моделирование эволюции набора волн показало, что частотные спектры волн сконцентрированы в **дискретный** точках около кривых $\omega_k = \sqrt{nk}$, n=1,2,3, ... Кроме того, дискретный спектр - прямое следствие интегрируемости системы (2.1).

Получить строгое доказательство интегрируемости можно, по видимому, лишь предложив новый метод интегрирования. Обнуление T_{kk_1,k_2k_3} на резонансной поверхности оставляет в действительности только тривиальное взаимодействие (2.14), которое соответствует нелинейному изменению частоты отдельных мод:

$$\widetilde{\omega_k} = \omega_k + \int T_{kk_1}|b_{k_1}|^2 dk_1,$$

где

$$T_{kk_1} = \frac{1}{4\pi^2}(\vec{k}\vec{k_1})min(|k|,|k_1|),$$

и гамильтониан может быть записан (используя новые канонические переменные c_k) как

$$H = \int \omega c_k {c_k}^* dk + \frac{1}{2}\int T_{kk_1}|c_k|^2|c_{k_1}|^2 dk dk_1 + O({c_k}^5).$$

Поэтому, интегрируемость, имеет место по крайней мере до пятого порядка c_k (или крутизны $k\eta_k$). Кроме того, любая форма вида

$$I_4 = \int f(k)|c_k|^2 dk$$

- также интеграл движения с точностью до пятого порядка.

2.2.3 Кинетические равнения Захарова и Хассельманна

В 1962, К. Хассельман[88] предложил уравнение Больцмановского типа для описания динамики "числа волн"энергетического спектра $n_{\hat{\mathbf{k}}}$ ($n_{\hat{\mathbf{k}}}\delta_{\hat{\mathbf{k}}-\hat{\mathbf{k}}'} =< \eta_{\hat{\mathbf{k}}}\eta_{\hat{\mathbf{k}}'} > /(\alpha\omega_{\hat{\mathbf{k}}})$)

$$\begin{aligned}\frac{\partial n_{\hat{\mathbf{k}}}}{\partial t} &= \alpha^2 \int T_H^2 \{n_{\hat{\mathbf{k}}_2} n_{\hat{\mathbf{k}}_3}(n_{\hat{\mathbf{k}}} + n_{\hat{\mathbf{k}}_1}) - n_{\hat{\mathbf{k}}} n_{\hat{\mathbf{k}}_1}(n_{\hat{\mathbf{k}}_2} + n_{\hat{\mathbf{k}}_3})\} \times \\ &\times \delta_{\hat{\mathbf{k}}+\hat{\mathbf{k}}_1-\hat{\mathbf{k}}_2-\hat{\mathbf{k}}_3}\delta_{\omega_{\hat{\mathbf{k}}}+\omega_{\hat{\mathbf{k}}_1}-\omega_{\hat{\mathbf{k}}_2}-\omega_{\hat{\mathbf{k}}_3}} d\hat{\mathbf{k}}_1 d\hat{\mathbf{k}}_2 d\hat{\mathbf{k}}_3 \end{aligned} \quad (2.16)$$

и вычислил выражение для T_H^2 - амплитуды четырёхволнового взаимодействия (здесь $\omega_{\hat{\mathbf{k}}} = \sqrt{g|\hat{\mathbf{k}}|}$ а α - произвольная константа).

В 1968, В.Захаров[9] показал, что переменные $\eta(x,y,t)$ и $\psi(x,y,t) = \phi(x,y,z,t)\Big|_{z=\eta}$ являются канонически сопряженными, и их Фурье-преобразования удовлетворяют следующим уравнениям

$$\frac{\partial \psi_{\hat{\mathbf{k}}}}{\partial t} = -\frac{\delta H}{\delta \eta^*_{\hat{\mathbf{k}}}} \qquad \frac{\partial \eta_{\hat{\mathbf{k}}}}{\partial t} = \frac{\delta H}{\delta \psi^*_{\hat{\mathbf{k}}}}.$$

Здесь $H = K + U$ - полная энергия жидкости, с кинетической и потенциальной энергиями:

$$K = \frac{1}{2}\int dx \int_{-\infty}^{\eta} v^2 dz \qquad U = \frac{g}{2}\int \eta^2 dx$$

После введения нормальной канонической переменной a_k:

$$\eta_{\hat{\mathbf{k}}} = \sqrt{\frac{\omega_{\hat{\mathbf{k}}}}{2g}}(a_{\hat{\mathbf{k}}} + a^*_{-\hat{\mathbf{k}}}) \quad \psi_{\hat{\mathbf{k}}} = -i\sqrt{\frac{2g}{\omega_{\hat{\mathbf{k}}}}}(a_{\hat{\mathbf{k}}} - a^*_{-\hat{\mathbf{k}}}) \tag{2.17}$$

он также получил уравнение Больцмановского типа для парной корреляционной функции $n_{\hat{\mathbf{k}}}\delta_{\hat{\mathbf{k}}-\hat{\mathbf{k}}'} =< a_{\hat{\mathbf{k}}} a_{\hat{\mathbf{k}}'} >$

$$\begin{aligned} \frac{\partial n_{\hat{\mathbf{k}}}}{\partial t} &= 4\pi \int T_Z^2 \{ n_{\hat{\mathbf{k}}_2} n_{\hat{\mathbf{k}}_3} (n_{\hat{\mathbf{k}}} + n_{\hat{\mathbf{k}}_1}) - n_{\hat{\mathbf{k}}} n_{\hat{\mathbf{k}}_1} (n_{\hat{\mathbf{k}}_2} + n_{\hat{\mathbf{k}}_3}) \} \times \\ &\times \delta_{\hat{\mathbf{k}}+\hat{\mathbf{k}}_1-\hat{\mathbf{k}}_2-\hat{\mathbf{k}}_3} \delta_{\omega_{\hat{\mathbf{k}}}+\omega_{\hat{\mathbf{k}}_1}-\omega_{\hat{\mathbf{k}}_2}-\omega_{\hat{\mathbf{k}}_3}} d\hat{\mathbf{k}}_1 d\hat{\mathbf{k}}_2 d\hat{\mathbf{k}}_3 \end{aligned} \tag{2.18}$$

и вычислил матричный элемент T_Z[9]. Эти два выражения, T_H и T_Z выглядят очень по разному, но оба они определены с точностью до произвольной функции, равной нулю на резонансной поверхности

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{k}} + \hat{\mathbf{k}}_1 &= \hat{\mathbf{k}}_2 + \hat{\mathbf{k}}_3, \\ \omega_{\hat{\mathbf{k}}} + \omega_{\hat{\mathbf{k}}_1} &= \omega_{\hat{\mathbf{k}}_2} + \omega_{\hat{\mathbf{k}}_3}, \end{aligned} \tag{2.19}$$

В 1980, в работе Crawford,D.E., Yuen,H.G. и Saffman,P.G.[71] был сформулирован вопрос об идентичности результатов Хассельманна и Захарова, однако ответа на него не было.

В этом параграфе мы проверяем оба матричных элемента T_H и T_Z на резонансной поверхности (2.19). Сначала оба матричных элемента будут проверены в одномерном случае, где имеется компактное аналитическое выражение для резонансной поверхности. В этом случае резонансная поверхность имеет два различных решения, тривиальное (2.14), и нетривиальное (2.15) (см. [177])

На резонансной поверхности (2.14) T_Z и T_H различаются только знаком, так что $T_Z = -T_H = 1/4\pi^2(kk_1)min(|k|, |k_1|)$ (Замечание: Знак здесь не важен, так как только T_H^2 и T_Z^2 присутствуют в кинетических уравнениях. Костанта α в (2.16) равна $1/4\pi^2$.

На резонансной поверхности (2.15) оба матричных элемента равны нулю.

Для полного двумерного случая также найдена общая параметризация резонансной поверхности (2.19)

$$\hat{\mathbf{k}} = (\zeta - x)^2 \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \\ \sin\theta \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{k}}_1 &= (\zeta + x)^2 \begin{pmatrix} \cos\theta_1 \\ \\ \sin\theta_1 \end{pmatrix}, \\
\hat{\mathbf{k}}_2 &= (\zeta - y)^2 \begin{pmatrix} \cos\theta_2 \\ \\ \sin\theta_2 \end{pmatrix}, \\
\hat{\mathbf{k}}_3 &= (\zeta + y)^2 \begin{pmatrix} \cos\theta_3 \\ \\ \sin\theta_3 \end{pmatrix}, 0 < \zeta < 1
\end{aligned} \tag{2.20}$$

здесь

$$\begin{aligned}
\cos\theta &= (1 + |\hat{\mathbf{k}}|^2 - |\hat{\mathbf{k}}_1|^2)/2|\hat{\mathbf{k}}|, \\
\cos\theta_1 &= (1 - |\hat{\mathbf{k}}|^2 + |\hat{\mathbf{k}}_1|^2)/2|\hat{\mathbf{k}}_1|, \\
\cos\theta_2 &= (1 + |\hat{\mathbf{k}}_2|^2 - |\hat{\mathbf{k}}_3|^2)/2|\hat{\mathbf{k}}_2|, \\
\cos\theta_3 &= (1 - |\hat{\mathbf{k}}_2|^2 + |\hat{\mathbf{k}}_3|^2)/2|\hat{\mathbf{k}}_3|,
\end{aligned}$$

и численно посчитаны T_Z и T_H для нескольких значений ζ, x и y. Они совпадают с точностью до ошибок округления. В работе [113] перекачка энергии по спектру исследовалась численно в рамках уравнений Хассельмана (2.16) и Захарова (2.18). Сравнение результатов показало соответствие между этими моделями. Небольшое различие объясняется численными ошибками при вычислении T_H и T_Z на резонансной поверхности, т.к. T_H и T_Z совпадают лишь на резонансной поверхности, но не в её окрестности.

2.3 5-ти волновое взаимодействие

2.3.1 Введение

В этом параграфе исследуется взаимодействие гравитационных волн, распространяющихся в одном, выделенном направлении на поверхности идеальной жидкости бесконечной глубины. Эта проблема имеет большую теоретическое и практическое значение. Из эксперимента известно, что функция распределения энергии волн даже в активной зоне шторма почти одномерна в энергосодержащей области. Даже больше того, это справедливо "морской зыби"далеко от активной зоны. Общепринято, что главный механизм взаимодействия волн является рассеиванием четырёхволновое рассеяние , удовлетворяющее следующим резонансным условиям

$$\begin{aligned} \omega_k + \omega_{k_1} &= \omega_{k_2} + \omega_{k_3} \\ \vec{k} + \vec{k}_1 &= \vec{k}_2 + \vec{k}_3 \end{aligned} \tag{2.21}$$

здесь $\vec{k}_i$ волновые вектора четырёх взаимодействующих волн, а $\omega_k = \sqrt{gk}$ - закон дисперсии волн. Соответствующий эффективный Гамильтониан имеет вид:

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \int \omega_k a_k a_k^* dk + \\ &+ \frac{1}{4} \int T^{kk_1}_{k_2k_3} a_k^* a_{k_1}^* a_{k_2} a_{k_3} \delta_{k+k_1-k_2-k_3} dk dk_1 dk_2 dk_3 + \dots \end{aligned} \tag{2.22}$$

(a_k являются нормальными комплексными амплитудами волн [9],[71],[159]). Соответствующее же кинетическое уравнение для парной корреляционной функции

$$n_k = < a_k a_{k'}^* > \delta_{k-k'}$$

хорошо известно (см., например, [167, 174], а также параграф 4.3 диссертации):

$$\begin{aligned}\frac{\partial n_k}{\partial t} &= \pi \int |T^{kk_1}_{k_2k_3}|^2 \delta_{k+k_1-k_2-k_3}\delta_{\omega_k+\omega_{k_1}-\omega_{k_2}-\omega_{k_3}}\times \\ &\times \{n_{k_2}n_{k_3}(n_k+n_{k_1}) - n_k n_{k_1}(n_{k_2}n_{k_3})\}dk_1dk_2dk_3 \end{aligned} \quad (2.23)$$

Как показано в параграфе 2.2.3, это кинетическое уравнение эквивалентно (см. [178]) кинетическому уравнению Хассельманна, полученному впервые в 1962году в [88]. Это уравнение, (2.23), вполне премлемо в ситуации, если волновые вектора $\vec{k}_i$ являются двумерными. но в одномерной ситуации, когда

$$T_{kk_1,k_2k_3} = 0$$

оно теряет смысл.

Резонансные условия (2.21) имеют в одномерном случае два типа решений:

1. Тривиальное решение:

$$\begin{aligned} k_2 &= k_1, \quad k_3 = k, \\ \text{или} \quad k_3 &= k_1, \quad k_2 = k. \end{aligned} \quad (2.24)$$

   Здесь k и k_1 могут иметь как одинаковые, так и противоположные знаки.

2. Нетривиальное решение: $(k_2 \neq k, k_1)$. Такое решение существует только в том случае, когда произведение kk_1 и k_2k_3 имеют противоположные знаки.

Это нетривиальное решение описано в параграфе 2.2.2 Пусть $k > 0$, $k_1 > 0$,

$k_2 < 0$, $k_3 > 0$. Тогда

$$\begin{aligned} k &= a(1+\zeta)^2, \quad k_1 = a(1+\zeta)^2\zeta^2, \\ k_2 &= -a\zeta^2, \qquad k_3 = a(1+\zeta+\zeta^2)^2. \end{aligned} \tag{2.25}$$

Теперь рассмотрим столкновительный член кинетического уравнения на обеих резонансах, тривиальном, и нетривиальном. Если одно из условий (2.24) выполнено, тогда столкновительный член

$$n_{k_2}n_{k_3}(n_k + n_{k_1}) - n_k n_{k_1}(n_{k_2}n_{k_3})$$

тождественно равен нулю. Так, что *тривиальный резонанс* не даёт никакого вклада в кинетическое уравнение. Если же мы рассмотрим *нетривиальный резонанс* (2.25), то столкновительный член также равен нулю, поскольку, как показано в параграфе 2.2.2 (см. [177]), коэффициент $T^{kk_1}_{k_2k_3}$ тождественно равен нулю.

$$T^{kk_1}_{k_2k_3} \equiv 0$$

на резонансном многообразии (2.25).

Это замечательное тождество означает, что система (2.22) является "почти"интегрируемой. Более того, Штясны в работах [61] показал, что и некоторые 5-ти волновые амплитуды равны нулю на резоансной поверхности. Однако, как будет показано ниже, это справедливо не для всех 5-ти волновых резонансов, и кинетическое уравнение имеет смысл только в следующем порядке (пятиволновое взаимодействие)

$$\frac{\partial n}{\partial t} = st(n,n,n,n).$$

Здесь $st(n,n,n,n)$ столкновительный член, соответствующий пятиволновому взаимодействию, которому соответствуют следующие резонансные условия:

$$\begin{aligned} \omega_k + \omega_{k_1} + \omega_{k_2} &= \omega_{k_3} + \omega_{k_4} \\ k + k_1 + k_2 &= k_3 + k_4 \end{aligned} \tag{2.26}$$

Соответствующий Гамильтониан имеет вид:

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \int \omega_k a_k a_k^* dk + \\ + &\frac{1}{12} \int T_{k_3 k_4}^{k k_1 k_2} \{a_k^* a_{k_1}^* a_{k_2}^* a_{k_3} a_{k_4} + c.c.\} \delta_{k+k_1+k_2-k_3-k_4} dk dk_1 dk_2 dk_3 dk_4 + \dots \end{aligned}$$

Выражение для столкновительного члена $st(n,n,n,n)$ имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} & st(n,n,n,n) = \frac{\pi}{3} \int |T_{k k_5}^{k_1 k_2 k_3}|^2 f_{k_1 k_2 k_3 k k_5} dk_1 dk_2 dk_3 dk_5 - \\ - \; & \frac{\pi}{2} \int |T_{k_4 k_5}^{k k_2 k_3}|^2 f_{k k_2 k_3 k_4 k_5} dk_2 dk_3 dk_4 dk_5, \\ & f_{k_1 k_2 k_3 k_4 k_5} = \delta_{k_1+k_2+k_3-k_4-k_5} \delta_{\omega_{k_1}+\omega_{k_2}+\omega_{k_3}-\omega_{k_4}-\omega_{k_5}} \times \\ \times \; & \{n_{k_1} n_{k_2} n_{k_3} (n_{k_4} + n_{k_5}) - n_{k_4} n_{k_5} (n_{k_1} n_{k_2} + n_{k_1} n_{k_3} + n_{k_2} n_{k_3})\} \end{aligned} \tag{2.27}$$

Столкновительный член (2.27) впервые был получен Красицким [101]. Он также нашёл, "в принципе"выражение для $T_{k_3 k_4}^{k k_1 k_2}$. Но его окончательная формула чрезвычайно громоздка, и не может быть практически использована. Он использовал технику канонических преобразований, которая позволяет исключать нерезонансные нелинейные члены из Гамильтониана.

Здесь в диссертационной работе, и в статье [179] матричный элемент $T_{k_3 k_4}^{k k_1 k_2}$ вычисляется на резонансной поверхности (2.26). Окончательная формула - чрезвычайно проста, и будет получена в параграфе 2.3.4. здесь мы только

приведём результат вычислений:

$$T^{k_1k_2k_3}_{k_4k_5} = \frac{2}{g^{1/2}\pi^{3/2}}\sqrt{\frac{\omega_{k_1}\omega_{k_2}\omega_{k_3}}{\omega_{k_4}\omega_{k_5}}}\frac{k_1k_2k_3k_4k_5}{max(k_1,k_2,k_3)}$$

Это ещё один удивительный факт в теории поверхностных гравитационных волн.

Также найдены Колмогоровские решения стационарного 5-ти волнового кинетического уравнения

$$st(n,n,n,n) = 0$$

При его выводе применялась техника, отличная от общепринятой, [9],[71],[159],[88].

2.3.2 Конформные канонические переменные

В этом параграфе мы получим *конформные канонические переменные*, которые понадобятся (в следующих параграфах этой главы) для получения коэффициентов разложения Гамильтониана до пятого порядка включительно. Начнём опять с исходных динамических уравнений для двумерного течения идеальной несжимаемой жидкости на бесконечной глубине (2.1),

$$\begin{aligned} \phi_{xx} + \phi_{zz} &= 0 \qquad (\phi_z \to 0, z \to -\infty), \\ \eta_t + \eta_x\phi_x &= \phi_z\Big|_{z=\eta} \\ \phi_t + \frac{1}{2}(\phi_x^2 + \phi_z^2) + g\eta &= 0\Big|_{z=\eta}; \end{aligned}$$

Здесь $\eta(x,t)$ - профиль границы, $\phi(x,z,t)$ - потенциал скорости течения и g - гравитационная постоянная. Как было показано в работе Захарова [9], потенциал на границе

$$\psi(x,t) = \phi(x,z,t)\Big|_{z=\eta(x,t)} \qquad \text{и } \eta(x,t)$$

являются канонически сопряженными, и их Фурье-преобразования удовлетворяют следующим уравнениям

$$\frac{\partial \psi_k}{\partial t} = -\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \eta_k^*} \qquad \frac{\partial \eta_k}{\partial t} = \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \psi_k^*}.$$

Здесь $\mathcal{H} = K + U$ - полная энергия системы, состоящая из кинетической, K, и потенциальной, U, частей:

$$K = \frac{1}{2}\int dx \int_{-\infty}^{\eta} v^2 dz \qquad U = \frac{g}{2}\int \eta^2 dx$$

Гамильтониан может быть разложен в бесконечный ряд по степеням характеристической крутизны поверхности $k\eta_k << 1$ (см. [9, 71]) с помощью итерационной процедуры. Все члены до пятого порядка включительно дают вклад в пятиволновое взаимодействие.

Здесь мы применим другой способ. А именно, сначала сделаем каноническое преобразование от переменных ψ, η к новым каноническим же переменным. Это преобразование будет связано с конформная заменой координат. Рассмотрим эту замену подробно. Следуя работе [181], сделаем конформное преобразование области, занятой жидкостью

$$z < \eta(x,t),$$

на нижнюю полуплоскость комплексной переменной

$$w = u + iv, \qquad -\infty < u < \infty, \qquad -\infty < v < 0.$$

Форма границы параметризуется двумя функциями

$$z(u,t), \quad x(u,t)$$

которые связаны преобразованием Гильберта (как мнимая и вещественная части аналитической в нижней полуплоскости функции):

$$\begin{aligned} x(u,t) &= u - \hat{H}(z(u,t)) \\ \hat{H}(f(u)) &= \frac{1}{\pi} P.V. \int \frac{f(u')du'}{u'-u} \end{aligned}$$

Необходимо также ввести комплексный потенциал скорости (вместо ψ).

$$\Phi(w,t) = \Psi(u,v,t) + i\Theta(u,v,t)$$

На границе жидкости, $(v=0)$, справедливо следующее соотношение:

$$\Theta(u,0,t) = \hat{H}(\Psi(u,0,t)),$$

Новые канонические переменные могут быть получены из вариационного принципа для действия.

$$S = \int dt \{ \int \psi(x,t)\eta_t(x,t)dx - \mathcal{H} \}.$$

После конформного преобразования [181] для действия и Лагранжиана имеем выражение:

$$\begin{aligned} S &= \int L dt, \\ L &= \int \{ \Psi(z_t x_u - x_t z_u) + \frac{1}{2}\Psi\hat{H}\Psi_u - \frac{g}{2}z^2 x_u \} du. \end{aligned}$$

Лагранжиан L может быть переписан в терминах новых переменных как

$$L = \int \{ z_t(\Psi x_u - \hat{H}(\Psi z_u)) + \frac{1}{2}\Psi\hat{H}\Psi_u - \frac{g}{2}y^2 x_u \} du.$$

и новыми каноническими переменными теперь являются

$$z(u,t)$$

$$\mathcal{P}(u,t) \;=\; \Psi x_u - \hat{H}(\Psi z_u).$$

Ψ можно легко обратить

$$\Psi = \frac{\mathcal{P}x_u + \hat{H}(\mathcal{P}z_u)}{x_u^2 + z_u^2} \tag{2.28}$$

и, окончательно, Гамильтониан системы принимает следующий вид:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\int \{gz^2 x_u - \Psi \hat{H} \Psi_u\} du$$

где Ψ выражается через новую каноническую переменную $\mathcal{P}$ с помощью соотношения (2.28). Уравнения движения могут быть написаны в явной гамильтоновой форме, которая включает в себя интегральный оператор Гильберта:

$$\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial t} = -\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta z} \qquad\qquad \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \mathcal{P}}$$

2.3.3 5-й порядок в разложении Гамильтониана

В этом параграфе мы собственно получим разложение Гамильтониана до пятого порядка включительно по степеням z и $\mathcal{P}$. удобно ввести новую переменную $\tilde{x}$ следующим образом.

$$x = u + \tilde{x}, \;\; x_u = 1 + \tilde{x}_u, \;\; \tilde{x} = -\hat{H}z$$

Тогда

$$\Psi = \frac{\mathcal{P} + \mathcal{P}\tilde{x}_u + \hat{H}(\mathcal{P}z_u)}{(1+\tilde{x}_u)^2 + z_u^2}$$

Теперь мы разложим Ψ по степеням $\tilde{x}_u$ и z_u

$$\Psi \;=\; \Psi^{(1)} + \Psi^{(2)} + \Psi^{(3)} + \Psi^{(4)} + \ldots$$

$$\begin{aligned}
\Psi^{(1)} &= \mathcal{P} \\
\Psi^{(2)} &= \hat{H}(z_u\mathcal{P}) - \tilde{x}_u\mathcal{P} \\
\Psi^{(3)} &= \mathcal{P}(\tilde{x}_u^2 - z_u^2) - 2\tilde{x}_u\hat{H}(z_u\mathcal{P}) \\
\Psi^{(4)} &= \mathcal{P}\tilde{x}_u(3z_u^2 - \tilde{x}_u^2) + (3\tilde{x}_u^2 - z_u^2)\hat{H}(z_u\mathcal{P})
\end{aligned}$$

Гамильтониан системы определяется следующим выражением:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\int\{gz^2(1+\tilde{x}_u) - \Psi\hat{H}\Psi_u\}du$$

Теперь разложение Гамильтониана $\mathcal{H}$ может быть записано следующим образом

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_2 + \mathcal{H}_3 + \mathcal{H}_4 + \mathcal{H}_5 + \ldots \tag{2.29}$$

здесь

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_2 &= \frac{1}{2}\int(gz^2 - \Psi^{(1)}\hat{H}\Psi_u^{(1)})du \\
\mathcal{H}_3 &= \frac{1}{2}\int(gz^2\tilde{x}_u - 2\Psi^{(2)}\hat{H}\Psi_u^{(1)})du \\
\mathcal{H}_4 &= -\frac{1}{2}\int(2\Psi^{(3)}\hat{H}\Psi_u^{(1)} + \Psi^{(2)}\hat{H}\Psi_u^{(2)})du \\
\mathcal{H}_5 &= -\int(\Psi^{(4)}\hat{H}\Psi_u^{(1)} + \Psi^{(3)}\hat{H}\Psi_u^{(2)})du
\end{aligned}$$

Введем преобразование Фурье следующим образом:

$$f_k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int f(u)e^{-iku}du, \qquad f(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int f_k e^{iku}dk$$

После несложных, но довольно громоздких высислений можно получить следующие выражения для $\mathcal{H}_n$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_2 &= \frac{1}{2}\int(g|z_k|^2 + |k||\mathcal{P}_k|^2)dk, \\
\mathcal{H}_3 &= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\int z_{k_1}\{S_{k_1k_2k_3}z_{k_2}z_{k_3} - F_{k_2k_3}^{k_1}\mathcal{P}_{k_2}\mathcal{P}_{k_3}\}\delta_{k_1+k_2+k_3}dk_1dk_2dk_3,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_4 &= \frac{1}{4\pi}\int M^{k_1k_2}_{k_3k_4} z_{k_1} z_{k_2} \mathcal{P}_{k_3}\mathcal{P}_{k_4}\delta_{k_1+k_2+k_3+k_4} dk_1 dk_2 dk_3 dk_4,\\ \mathcal{H}_5 &= \frac{1}{2(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\int N^{k_1k_2k_3}_{k_4k_5} z_{k_1} z_{k_2} z_{k_3}\mathcal{P}_{k_4}\mathcal{P}_{k_5}\delta_{k_1+k_2+k_3+k_4+k_5} dk_1 dk_2 dk_3 dk_4 dk_5\end{aligned}$$

Здесь $S_{k_1k_2k_3}$, $F^{k_1}_{k_2k_3}$, $M^{k_1k_2}_{k_3k_4}$ и $N^{k_1k_2k_3}_{k_4k_5}$ функции, симметричные отдельно по верхним, и отдельно по нижним индексам. А именно

$$\begin{aligned}S_{k_1k_2k_3} &= \frac{g}{3}(|k_1|+|k_2|+|k_3|)\\ L_{k_1k_2} &= k_1k_2 + |k_1k_2|\\ F^{k_1}_{k_2k_3} &= L_{-k_1k_2} + L_{-k_1k_3} = |k_1|(|k_1|+|k_2|+|k_3|)\end{aligned} \tag{2.30}$$

Выражение для $M^{k_1k_2}_{k_3k_4}$ и $N^{k_1k_2k_3}_{k_4k_5}$ приведены в Приложении .2.

Здесь опять удобно ввести нормальую комплексную переменную a_k следующим образом

$$y_k = \sqrt{\frac{\omega_k}{2g}}(a_k + a^*_{-k}) \quad \mathcal{P}_k = -i\sqrt{\frac{2g}{\omega_k}}(a_k - a^*_{-k}) \tag{2.31}$$

Эта переменная удовлетворяет следующему уравненю движения:

$$\frac{\partial a_k}{\partial t} + i\frac{\delta\mathcal{H}}{\delta a^*_k} = 0. \tag{2.32}$$

где $\omega_k = \sqrt{g|k|}$ - закон дисперсии для гравитационных волн на глубокой воде.

В новых канонических переменных a_k квадратичный член в Гамильтониане принимает вид:

$$\mathcal{H}_2 = \int \omega_k a_k a^*_k dk$$

Кубический член в Гамильтониане равен:

$$\mathcal{H}_3 = \frac{1}{2}\int V^{k_1}_{k_2k_3}\{a^*_{k_1}a_{k_2}a_{k_3} + a_{k_1}a^*_{k_2}a^*_{k_3}\}\delta_{k_1-k_2-k_3} dk_1 dk_2 dk_3 +$$

$$+ \quad \frac{1}{6}\int U_{k_1k_2k_3}\{a_{k_1}a_{k_2}a_{k_3} + a^*_{k_1}a^*_{k_2}a^*_{k_3}\}\delta_{k_1+k_2+k_3}dk_1dk_2dk_3$$

А для $V^{k_1}_{k_2k_3}$ и $U_{k_1k_2k_3}$ имеем:

$$\begin{aligned} V^{k_1}_{k_2k_3} &= \frac{g^{\frac{1}{4}}}{2\sqrt{4\pi}}(|k_1|+|k_2|+|k_3|)\times \\ &\left(|k_1k_2k_3|^{\frac{1}{4}} + \left(\frac{k_1}{k_2k_3}\right)^{\frac{1}{4}}|k_1| - \left(\frac{k_2}{k_1k_3}\right)^{\frac{1}{4}}|k_2| - \left(\frac{k_3}{k_1k_2}\right)^{\frac{1}{4}}|k_3|\right) \\ U_{k_1k_2k_3} &= \frac{g^{\frac{1}{4}}}{2\sqrt{4\pi}}(|k_1|+|k_2|+|k_3|)\times \\ &\left(|k_1k_2k_3|^{\frac{1}{4}} + \left(\frac{k_1}{k_2k_3}\right)^{\frac{1}{4}}|k_1| + \left(\frac{k_2}{k_1k_3}\right)^{\frac{1}{4}}|k_2| + \left(\frac{k_3}{k_1k_2}\right)^{\frac{1}{4}}|k_3|\right) \end{aligned}$$

Член четвертого порядка в Гамильтониане состоит из трёх слагаемых:

$$\mathcal{H}_4 = \mathcal{H}_4^{4\Leftrightarrow 0} + \mathcal{H}_4^{3\Leftrightarrow 1} + \mathcal{H}_4^{2\Leftrightarrow 2}$$

соответствующих различным типам волновых взаимодействий. Слагаемое, соответствующее $4 \Leftrightarrow 0$ взаимодействию имеет вид:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_4^{4\Leftrightarrow 0} = \frac{1}{24}\int \quad & R_{k_1k_2k_3k_4}(a_{k_1}a_{k_2}a_{k_3}a_{k_4} + a^*_{k_1}a^*_{k_2}a^*_{k_3}a^*_{k_4})\times \\ & \delta_{k_1+k_2+k_3+k_4}dk_1dk_2dk_3dk_4 \end{aligned}$$

где $R_{k_1k_2k_3k_4}$ равно:

$$\begin{aligned} R_{k_1k_2k_3k_4} = \frac{-1}{4\pi} \quad & (\left|\frac{k_1k_2}{k_3k_4}\right|^{\frac{1}{4}} M^{k_1k_2}_{k_3k_4} + \left|\frac{k_1k_3}{k_2k_4}\right|^{\frac{1}{4}} M^{k_1k_3}_{k_2k_4} + \left|\frac{k_1k_4}{k_2k_3}\right|^{\frac{1}{4}} M^{k_1k_4}_{k_2k_3} + \\ + \quad & \left|\frac{k_2k_3}{k_1k_4}\right|^{\frac{1}{4}} M^{k_2k_3}_{k_1k_4} + \left|\frac{k_2k_4}{k_1k_3}\right|^{\frac{1}{4}} M^{k_2k_4}_{k_1k_3} + \left|\frac{k_3k_4}{k_1k_2}\right|^{\frac{1}{4}} M^{k_3k_4}_{k_1k_2} \end{aligned}$$

Слагаемое, соответствующее $3 \Leftrightarrow 1$ взаимодействию имеет такой вид:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_4^{3\Leftrightarrow 1} = \frac{1}{6}\int \quad & G^{k_1}_{k_2k_3k_4}(a^*_{k_1}a_{k_2}a_{k_3}a_{k_4} + a_{k_1}a^*_{k_2}a^*_{k_3}a^*_{k_4})\times \\ & \delta_{k_1-k_2-k_3-k_4}dk_1dk_2dk_3dk_4 \end{aligned}$$

где $G^{k_1}_{k_2k_3k_4}$ равно:

$$\begin{aligned} G^{k_1}_{k_2k_3k_4} = \ & \tfrac{-1}{4\pi} \ (\left|\frac{k_1k_2}{k_3k_4}\right|^{\frac{1}{4}} M^{-k_1k_2}_{k_3k_4} + \left|\frac{k_1k_3}{k_2k_4}\right|^{\frac{1}{4}} M^{-k_1k_3}_{k_2k_4} + \left|\frac{k_1k_4}{k_2k_3}\right|^{\frac{1}{4}} M^{-k_1k_4}_{k_2k_3} - \\ & - \left|\frac{k_2k_3}{k_1k_4}\right|^{\frac{1}{4}} M^{k_2k_3}_{-k_1k_4} - \left|\frac{k_2k_4}{k_1k_3}\right|^{\frac{1}{4}} M^{k_2k_4}_{-k_1k_3} - \left|\frac{k_3k_4}{k_1k_2}\right|^{\frac{1}{4}} M^{k_3k_4}_{-k_1k_2}) \end{aligned}$$

Слагаемое, соответствующее взаимодействию $2 \Leftrightarrow 2$ выражается следующим образом:

$$\mathcal{H}^{2\Leftrightarrow 2}_4 = \frac{1}{4}\int W^{k_1k_2}_{k_3k_4} a^*_{k_1} a^*_{k_2} a_{k_3} a_{k_4} \delta_{k_1+k_2-k_3-k_4} dk_1 dk_2 dk_3 dk_4$$

где $W^{k_1k_2}_{k_3k_4}$:

$$\begin{aligned} W^{k_1k_2}_{k_3k_4} = \ & \tfrac{-1}{4\pi} \ (\left|\frac{k_1k_2}{k_3k_4}\right|^{\frac{1}{4}} M^{-k_1-k_2}_{k_3k_4} - \left|\frac{k_1k_3}{k_2k_4}\right|^{\frac{1}{4}} M^{-k_1k_3}_{-k_2k_4} - \left|\frac{k_1k_4}{k_2k_3}\right|^{\frac{1}{4}} M^{-k_1k_4}_{k_3-k_2} - \\ & - \left|\frac{k_2k_3}{k_1k_4}\right|^{\frac{1}{4}} M^{-k_2k_3}_{-k_1k_4} - \left|\frac{k_2k_4}{k_1k_3}\right|^{\frac{1}{4}} M^{-k_2k_4}_{-k_1k_3} + \left|\frac{k_3k_4}{k_1k_2}\right|^{\frac{1}{4}} M^{k_3k_4}_{-k_1-k_2}) \end{aligned}$$

Среди различных членов пятого порядка здесь мы рассмотрим только один, а именно тот, который соответствует процессу $2 \Leftrightarrow 3$, (2.26):

$$\mathcal{H}_5 = \frac{1}{12}\int Q^{k_1k_2k_3}_{k_4k_5} \{a^*_{k_1} a^*_{k_2} a^*_{k_3} a_{k_4} a_{k_5} + c.c.\} \delta_{k_1+k_2+k_3-k_4-k_5} dk_1 dk_2 dk_3 dk_4 dk_5$$

здесь

$$\begin{aligned} Q^{k_1k_2k_3}_{k_4k_5} \ = \ & \frac{-3}{(4\pi)^{\frac{3}{2}} g^{\frac{1}{4}}} \times \{ \\ & + \ (\frac{|k_1k_2k_3|}{|k_4k_5|})^{\frac{1}{4}} N^{-k_1,-k_2,-k_3}_{k_4,k_5} - (\frac{|k_1k_2k_4|}{|k_3k_5|})^{\frac{1}{4}} N^{-k_1,-k_2,k_4}_{-k_3,k_5} - \\ & - \ (\frac{|k_1k_2k_5|}{|k_3k_4|})^{\frac{1}{4}} N^{-k_1,-k_2,k_5}_{k_4,-k_3} - (\frac{|k_1k_3k_4|}{|k_2k_5|})^{\frac{1}{4}} N^{-k_1,k_4,-k_3}_{-k_2,k_5} - \\ & - \ (\frac{|k_1k_3k_5|}{|k_2k_4|})^{\frac{1}{4}} N^{-k_1,k_5,-k_3}_{k_4,-k_2} - (\frac{|k_2k_3k_4|}{|k_1k_5|})^{\frac{1}{4}} N^{k_4,-k_2,-k_3}_{-k_1,k_5} - \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&- \ (\frac{|k_2k_3k_5|}{|k_1k_4|})^{\frac{1}{4}} N^{k_5,-k_2,-k_3}_{k_4,-k_1} + (\frac{|k_1k_4k_5|}{|k_2k_3|})^{\frac{1}{4}} N^{-k_1,k_4,k_5}_{-k_2,-k_3} + \\
&+ \ (\frac{|k_2k_4k_5|}{|k_1k_3|})^{\frac{1}{4}} N^{k_4,-k_2,k_5}_{-k_1,-k_3} + (\frac{|k_3k_4k_5|}{|k_1k_2|})^{\frac{1}{4}} N^{k_4,k_5,-k_3}_{-k_1,-k_2}\}
\end{aligned}
$$

2.3.4 Эффективный 4-х волновой гамильтониан

Гамильтониан $\mathcal{H}$, записанный в нормальных переменных a_k слишком громоздок. В этом параграфе мы упростим его, приведя к следующему виду:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{H} \ &= \int \omega_k b_k b^*_k dk + \frac{1}{4}\int T^{k_1k_2}_{k_3k_4} b^*_{k_1} b^*_{k_2} b_{k_3} b_{k_4} \delta_{k_1+k_2-k_3-k_4} dk_1 dk_2 dk_3 dk_4 + \\
&+ \ \frac{1}{12}\int T^{k_1k_2k_3}_{k_4k_5} \{b^*_{k_1} b^*_{k_2} b^*_{k_3} b_{k_4} b_{k_5} + c.c.\} \delta_{k_1+k_2+k_3-k_4-k_5} dk_1 dk_2 dk_3 dk_4 dk_5 \quad (2.33)
\end{aligned}
$$

Для того, чтобы это сделать произведём каноническое преобразование к новым переменным b_k, в духе работ [11, 24]

$$
\begin{aligned}
a_k \ &= \ b_k + \int \Gamma^k_{k_1k_2} b_{k_1} b_{k_2} \delta_{k-k_1-k_2} - 2\int \Gamma^{k_2}_{kk_1} b^*_{k_1} b_{k_2} \delta_{k+k_1-k_2} + \\
&+ \ \int \Gamma_{kk_1k_2} b^*_{k_1} b^*_{k_2} \delta_{k+k_1+k_2} + \int B^{kk_1}_{k_2k_3} b^*_{k_1} b_{k_2} b_{k_3} \delta_{k+k_1-k_2-k_3} + \ldots \quad (2.34)
\end{aligned}
$$

$$
\Gamma^k_{k_1k_2} = -\frac{1}{2}\frac{V^k_{k_1k_2}}{\omega_k - \omega_{k_1} - \omega_{k_2}} \quad \Gamma_{kk_1k_2} = -\frac{1}{2}\frac{U_{kk_1k_2}}{\omega_k + \omega_{k_1} + \omega_{k_2}}
$$

$$
\begin{aligned}
B^{kk_1}_{k_2k_3} \ &= \ \Gamma^{k_1}_{k_2k_1-k_2}\Gamma^{k_3}_{kk_3-k} + \Gamma^{k_1}_{k_3k_1-k_3}\Gamma^{k_2}_{kk_2-k} - \\
&- \ \Gamma^{k}_{k_2k-k_2}\Gamma^{k_3}_{k_1k_3-k_1} - \Gamma^{k_1}_{k_3k_1-k_3}\Gamma^{k_2}_{k_1k_2-k_1} - \\
&- \ \Gamma^{k+k_1}_{kk_1}\Gamma^{k_2+k_3}_{k_2k_3} + \Gamma_{-k_1-k_1kk_1}\Gamma_{-k_2-k_3k_2k_3} + \tilde{B}^{kk_1}_{k_2k_3}
\end{aligned}
$$

Здесь $\tilde{B}^{kk_1}_{k_2k_3}$ является произвольной функцией, удовлетворяющей условиям:

$$
\tilde{B}^{kk_1}_{k_2k_3} = \tilde{B}^{k_1k}_{k_2k_3} = \tilde{B}^{kk_1}_{k_3k_2} = -(\tilde{B}^{k_2k_3}_{kk_1})^*
$$

Преобразование (2.34) является каноническим с точностью вплоть до членов порядка $|b_k|^4$. Оно исключает из Гамильтониана кубические члены, которые

не являются резонансными. Вид матричного элемента $T^{kk_1}_{k_2k_3}$ зависит от выбора функции $\tilde{B}^{kk_1}_{k_2k_3}$. Пусть

$$\tilde{B}^{kk_1}_{k_2k_3} = 0.$$

Вычисленный при таком условии матричный элемент $\hat{T}^{kk_1}_{k_2k_3}$, обозначим как

$$T^{kk_1}_{k_2k_3} = \hat{T}^{kk_1}_{k_2k_3}$$

и для него получается следующее выражение:

$$\begin{aligned}
\hat{T}^{kk_1}_{k_2k_3} &= W^{k_1k}_{k_2k_3} - \\
&-\frac{1}{2}V^{k}_{k_2k-k_2}V^{k_3}_{k_1k_3-k_1}\left[\frac{1}{\omega_{k_2}+\omega_{k-k_2}-\omega_k}+\frac{1}{\omega_{k_1}+\omega_{k_3-k_1}-\omega_{k_3}}\right]- \\
&-\frac{1}{2}V^{k_1}_{k_2k_1-k_2}V^{k_3}_{kk_3-k}\left[\frac{1}{\omega_{k_2}+\omega_{k_1-k_2}-\omega_{k_1}}+\frac{1}{\omega_{k}+\omega_{k_3-k}-\omega_{k_3}}\right]- \\
&-\frac{1}{2}V^{k}_{k_3k-k_3}V^{k_2}_{k_1k_2-k_1}\left[\frac{1}{\omega_{k_3}+\omega_{k-k_3}-\omega_{k}}+\frac{1}{\omega_{k_1}+\omega_{k_2-k_1}-\omega_{k_2}}\right]- \\
&-\frac{1}{2}V^{k_1}_{k_3k_1-k_3}V^{k_2}_{kk_2-k}\left[\frac{1}{\omega_{k_3}+\omega_{k_1-k_3}-\omega_{k_1}}+\frac{1}{\omega_{k}+\omega_{k_2-k}-\omega_{k_2}}\right]- \\
&-\frac{1}{2}V^{k+k_1}_{kk_1}V^{k_2+k_3}_{k_2k_3}\left[\frac{1}{\omega_{k+k_1}-\omega_k-\omega_{k_1}}+\frac{1}{\omega_{k_2+k_3}-\omega_{k_2}-\omega_{k_3}}\right]- \\
&-\frac{1}{2}U_{-k-k_1kk_1}U_{-k_2-k_3k_2k_3}\left[\frac{1}{\omega_{k+k_1}+\omega_k+\omega_{k_1}}+\frac{1}{\omega_{k_2+k_3}+\omega_{k_2}+\omega_{k_3}}\right]
\end{aligned} \tag{2.35}$$

Это выражение, (2.35), несмотря на свою сложность имеет весьма важные свойства. Рассмотрим все нетривиальные решения резонансных уравнений (2.21). Они состоят из многообразияТ (2.25) и семи других многообразий, которые получаются из (2.25) перестановками индексов.

$$k \leftrightarrow k_1, \quad k_2 \leftrightarrow k_3, \quad (k, k_1) \leftrightarrow (k_2, k_3)$$

Непосредственные аналитические вычисления показывают (см. раздел 2.2 и [177]), что

$$\hat{T}^{kk_1}_{k_2k_3} \equiv 0$$

на всех этих многообразиях. Отметим здесь, что этот результат был проверен в работе [69] независимыми вычислениями. Другая замечательная особенность матричного элемента $\hat{T}^{kk_1}_{k_2k_3}$ - его простая диагональная часть. Обозначим

$$T_{kk_1} = \hat{T}^{kk_1}_{kk_1}.$$

Простые, но довольно длинные вычисления ([177], [31]) показывают, что

$$T_{kk_1} = \frac{1}{4\pi^2} kk_1 min\{|k|, |k_1|\}.$$

Оказывается, из него можно сконструировать весь матричный элемент $T^{kk_1}_{k_2k_3}$. Действительно, рассмотрим функцию

$$\begin{aligned} \tilde{T}^{kk_1}_{k_2k_3} &= [\frac{1}{2}(T_{kk_2} + T_{kk_3} + T_{k_1k_2} + T_{k_1k_3}) - \\ &- \frac{1}{4}(T_{kk} + T_{k_1k_1} + T_{k_2k_2} + T_{k_3k_3})]\theta(kk_1k_2k_3) \end{aligned}$$

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & \text{if } x \geq 0; \\ 0, & \text{if } x < 0. \end{cases}$$

Очевидно, что

$$\tilde{T}^{kk_1}_{kk_1} = \hat{T}^{kk_1}_{kk_1} = T_{kk_1}$$

Выберем теперь другое $\tilde{B}^{kk_1}_{k_2k_3}$, не равное нулю, а

$$\tilde{B}^{kk_1}_{k_2k_3} = \frac{\tilde{T}^{kk_1}_{k_2k_3} - \hat{T}^{kk_1}_{k_2k_3}}{\omega_k + \omega_{k_1} - \omega_{k_2} - \omega_{k_3}}$$

Нетрудно убедиться, что такое преобразование преобразует $\hat{T}^{kk_1}_{k_2k_3}$ в $\tilde{T}^{kk_1}_{k_2k_3}$. Так, что далее будем погагать, что

$$T^{kk_1}_{k_2k_3} = \tilde{T}^{kk_1}_{k_2k_3}$$

В случае периодических граничных условий с периодом

$$L = \frac{2\pi}{k_0},$$

$$b_k = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n \delta_{k-k_0 n}$$

Вводя обозначения

$$\begin{aligned} \omega_{k_0 n} &= \omega_n \\ T^{k_0 n k_0 n_1}_{k_0 n_2 k_0 n_3} &= T^{n n_1}_{n_2 n_3} \end{aligned}$$

легко получить, что теперь уравнение движения принимает вид:

$$\frac{\partial b_n}{\partial t} + i\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta b_n^*} = 0,$$

а Гамильтониан соответственно

$$\mathcal{H} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \omega_n |b_n|^2 + \frac{1}{4} \sum_{n,n_1,n_2,n_3=-\infty}^{\infty} T^{n n_1}_{n_2 n_3} b_n^* b_{n_1}^* b_{n_2} b_{n_3} \delta_{n+n_1,n_2+n_3}$$

В каноническом же преобразовании (2.34) все интегралы должны быть заменены на суммы. В частности, вместо

$$\tilde{B}^{k k_1}_{k_2 k_3}$$

будем иметь

$$\tilde{B}^{n n_1}_{n_2 n_3} = \tilde{B}^{k_0 n k_0 n_1}_{k_0 n_2 k_0 n_3}$$

Выберем в качестве $\tilde{B}^{n n_1}_{n_2 n_3}$

$$\tilde{B}^{n n_1}_{n_2 n_3} = \frac{T^{n n_1}_{n_2 n_3} - T_{n n_1} \delta_{n,n_2} \delta_{n_1,n_3} - T_{n n_1} \delta_{n,n_3} \delta_{n_1,n_2}}{\omega_n + \omega_{n_1} - \omega_{n_2} - \omega_{n_3}}. \qquad (2.36)$$

Это выражение не имеет сингулярностей на диагоналях $n_2 = n, n_3 = n_1$ и $n_2 = n_1, n_3 = n$. Каноническое преобразование (2.34) с (2.36) приводит Гамильтониан к нормальной форме Биркгоффа

$$\mathcal{H} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \omega_n |b_n|^2 + \frac{1}{2} \sum_{n \neq n_1}^{\infty} T_{nn_1} |b_n|^2 |b_{n_1}|^2 + \frac{1}{4} \sum_{n=-\infty}^{\infty} T_{nn} |b_n|^4. \quad (2.37)$$

А это Гамильтониан интегрируемой системы. Уровень нелинейности же, при котором ещё справедливо такое приближение (2.37) (без учета 5-ти волновых взаимодействий) ещё следует изучить отдельно.

2.3.5 5-ти волновое взаимодействие на резонансной поверхности

Теперь мы переходим к вычислению 5-ти волнового матричного элемента. Чтобы вычислить $T^{kk_1k_2}_{k_3k_4}$ необходимо учесть члены порядка b^3 и b^4 в каноническом преобразовании (2.34). Эта весьма громоздкая процедура была проделана Красицким в [101]. К сожалению, полученная в результате формула чрезвычайно громоздка, и не может быть использована практически. В этом параграфе предлагается намного более простой и ясный способ вычисления $T^{kk_1k_2}_{k_3k_4}$ использующий диаграммную технику для матриц рассеяния.

Наша промежуточная формула также очень громоздка (из-за большого колличества диаграмм), однако вся процедура намного более ясная. А окончательное выражение - замечательно простое.

Сперва мы вводим формальную классическую матрицу рассеяния. Пусть H

$$H = H_2 + H_{int}$$

это Гамильтониан некоторой нелинейной системы в однородном пространстве. Здесь $H_2 = \int \omega_k a_k a_k^* dk$, а H_{int} в общем случае это бесконечный ряд по степеням a_k, a_k^*

$$H_{int} = H_3 + H_4 + \dots$$

Уравнение движения как обычно есть

$$\frac{\partial a_k}{\partial t} + i\frac{\delta H}{\delta a_k^*} = 0. \tag{2.38}$$

Заменим H на вспомогательный Гамильтониан

$$\hat{H} = H_2 + e^{-\epsilon|t|} H_{int} \tag{2.39}$$

Тогда уравнение движения (2.38) становится линейным при $t \to \pm\infty$, и

$$\begin{aligned} a_k(t) &\to c_k^{\pm} e^{-i\omega_k t} \\ t &\to \pm\infty \end{aligned}$$

Асимптотические состояния $c_k^{\pm}$ не независимы, а связаны соотношением

$$c_k^+ = \hat{S}_\epsilon[c_k^-].$$

Здесь $\hat{S}_\epsilon[c_k^-]$ - нелинейный оператор, который может быть представлен в виде ряда по степеням c^-, c^{-*}. Будем считать этот ряд формальным, и не будем заботиться о его сходимости. Формальный же ряд, получающийся предельным переходом

$$\hat{S}[c_k^-] = \lim_{\epsilon \to 0} \hat{S}_\epsilon[c_k^-]$$

и есть формальная классическая матрица рассеяния. Она имеет следующий вид

$$\hat{S}[c_k^-] = c_k^- \; - \sum_{n+m\geq 3} \frac{2\pi i}{(n-1)!m!} \int S_{nm}(k, k_1, \dots, k_{n-1}; k_n, \dots, k_{n+m-1}) \times$$

$$\times \quad \delta_{k+k_1+\ldots+k_{n-1}-k_n-\ldots-k_{n+m-1}}\delta_{\omega_k+\omega_{k_1}+\ldots+\omega_{k_{n-1}}-\omega_{k_n}-\ldots-\omega_{k_{n+m-1}}}\times$$
$$\times \quad c^{-*}_{k_1}\ldots c^{-*}_{k_{n-1}}c^{-}_{k_n}\ldots c^{-}_{k_{n+m-1}}dk_1\ldots dk_{n+m-1} \tag{2.40}$$

Функции S_{nm} - элементы матрицы рассеяния. Они определены на резонансных многообразиях

$$\begin{aligned} k+k_1+\ldots+k_{n-1} &= k_n+\ldots+k_{n+m-1} \\ \omega_k+\omega_{k_1}+\ldots+\omega_{k_{n-1}} &= \omega_{k_n}+\ldots+\omega_{k_{n+m-1}}. \end{aligned} \tag{2.41}$$

Далее нам будут важны два свойства матрицы рассеяния.

1. Значение матричного элемента S_{nm} на резонасном многобразии (2.41) инвариантно по отношению к каноническому преобразованию (2.34).

2. Имеется простой алгоритм вычисления матричных элементов. Элемент S_{nm} авляется конечной суммой членов, которые могут быть выражены через коэффициенты Гамильтониана $H_i, i \leq n+m$. Каждый такой член соответствует определенной диаграмме Фейнмана. Правила соответствия описаны в Приложении .3.

Способ вычисления $T^{kk_1k_2}_{k_3k_4}$ теперь состоит в следующем. Мы вычисляем первый ненулевой элемент матрицы рассеяния для Гамильтониана (2.29) и для Гамильтониана and (2.33). Поскольку оба эти Гамильтониана связаны каноническим преобразованием (2.34), результаты должны совпадать. Для поверхностных гравитационных волн первым нетривиальным матричным элементом является S_{22}. В терминах Гамильтониана (2.33) он равен

$$S_{22}(k,k_1,k_2,k_3) = T^{kk_1}_{k_2k_3}$$

Вычисленный же для Гамильтониана (2.29), Этот элемент состоит их шести членов. Они представлены (вместе с соответствующими диаграммами) в Приложении .3. Нетрудно видеть, что результат совпадает с выражением (2.35) на резонансном многообразии (2.21).

В одномерном случае первый интеграл в (2.40) берется, так что первые два члена в (2.40) приобретают вид

$$c_k^+ = c_k^-(1 - \pi i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{T_{kk_1}}{|\omega_k - \omega_{k_1}|}|c_{k_1}^-|^2 dk_1). \tag{2.42}$$

Эта формула ещё раз подчеркивает тот факт, что черырёхволновые процессы в одномерии приводят только к тривиальному рассеянию, и не производят "новых волновых векторов". Интеграл в (2.42) логарифмически расходится. Именно поэтому матрица рассеяния является формальной. В одномерной ситуации, действительно, волны не становятся линейными при $t \to \infty$. Они имеют логарифмически растущую фазу (см. [15]).

Первый нетривиальный элемент матрицы рассеяния в одномерном случае, это

$$S_{32}(k, k_1, k_2, k_3, k_4) = T_{k_3 k_4}^{k k_1 k_2}$$

Вычисленный в терминах первоначального Гамильтониана (2.29) он состоит из 81 члена (диаграммы). Их выражения, вместе с диаграммами, представлены в Приложении .4.

Несмотря на сложность общего выражения для $T_{k_3 k_4}^{k k_1 k_2}$, на резонансном многообразии оно сущесвенным образом упрощается. Здесь мы рассмотрим только случай, когда все волновые вектора k_i при резонансных условиях

$$k + k_1 + k_2 \;=\; k_3 + k_4$$

$$\omega_k + \omega_{k_1} + \omega_{k_2} \;=\; \omega_{k_3} + \omega_{k_4} \tag{2.43}$$

имеют одинаковый знак. Резонансные условия (2.43) могут быть параметризованы следующим образом

$$\begin{aligned} k &= a(p^2 - q^2 + 1 - 2p)^2, \\ k_1 &= a(p^2 - q^2 + 1 + 2p)^2, \\ k_2 &= 16a, \\ k_3 &= a(p^2 - q^2 + 3 - 2q)^2, \\ k_4 &= a(p^2 - q^2 + 3 + 2q)^2, \end{aligned} \tag{2.44}$$

здесь $0 < |p|, |q| < 1, |p \pm q| < 1, a > 0$. Нетрудно видеть, что k_i удовлетворяют следующим неравенствам:

$$k, k_1 < k_3, k_4 < k_2$$

Подставляя параметризацию (2.44) в выражение, полученное для $T^{kk_1k_2}_{k_3k_4}$ получаем сумму из более чем тысяча членов. Используя для аналитических вычислений программу 'Mathematica' эта сумма существенно упрощается, и приводится к виду

$$T^{k_1k_2k_3}_{k_4k_5} = \frac{2}{g^{1/2}\pi^{3/2}} \sqrt{\frac{\omega_{k_1}\omega_{k_2}\omega_{k_3}}{\omega_{k_4}\omega_{k_5}}} \frac{k_1k_2k_3k_4k_5}{max(k_1, k_2, k_3)} \tag{2.45}$$

Эта формула является главным результатом этого параграфа. Тот факт, что

$$T^{kk_1k_2}_{k_3k_4} \neq 0$$

на резонансной поверхности означает, что система одномерных поверхностных гравитационных волн на глубокой воде является underlineнеинтегрируемой.

Следует отметить, что матричные элементы для всех остальных комбинаций волновых векторов с резонансными условиями (2.43), были затем вычислены в работе [116]. Часть из них оказались равны нулю, часть - нет.

2.4 Кинетическое уравнение

Матричный элеметны $T^{kk_1}_{k_2k_3k_4}$ для процесса $3 \Leftrightarrow 2$ и $T^{kk_1}_{k_2k_3}$ дают возможность написать кинетическое уравнение, включающее четырёх и пятиволновые взаимодействия.

Динамическое уравнение для b_k (с Гамильтонианом (2.33)) имеет вид:

$$\begin{aligned}\frac{\partial b_k}{\partial t} &+ i\omega_k b_k + i\frac{1}{2}\int T^{kk_1}_{k_2k_3} b^*_{k_1} b_{k_2} b_{k_3} \delta_{k+k_1-k_2-k_3} dk_1 dk_2 dk_3 + \\ &+ i\frac{1}{4}\int T^{kk_2k_3}_{k_4k_5} b^*_{k_2} b^*_{k_3} b_{k_4} b_{k_5} \delta_{k+k_2+k_3-k_4-k_5} dk_2 dk_3 dk_4 dk_5 + \\ &+ i\frac{1}{6}\int T^{k_1k_2k_3}_{kk_5} b_{k_1} b_{k_2} b_{k_3} b^*_{k_5} \delta_{k_1+k_2+k_3-k-k_5} dk_1 dk_2 dk_3 dk_5 = 0. \qquad (2.46)\end{aligned}$$

Введём стандартную парную корреляционную функцию n_k

$$< b_k b_{k_1} >= n_k \delta_{k-k_1}$$

и получим из (2.46) для n_k уравнение:

$$\begin{aligned}\frac{\partial n_k}{\partial t} &= \mathtt{Im}\int T^{kk_1}_{k_2k_3} < b^*_k b^*_{k_1} b_{k_2} b_{k_3} > \delta_{k+k_1-k_2-k_4} dk_1 dk_2 dk_3 + \\ &+ \frac{1}{2}\mathtt{Im}\int T^{kk_2k_3}_{k_4k_5} < b^*_k b^*_{k_2} b^*_{k_3} b_{k_4} b_{k_5} > \delta_{k+k_2+k_3-k_4-k_5} dk_2 dk_3 dk_4 dk_5 - \\ &- \frac{1}{3}\mathtt{Im}\int T^{k_1k_2k_3}_{kk_5} < b^*_{k_1} b^*_{k_2} b^*_{k_3} b_k b_{k_5} > \delta_{k_1+k_2+k_3-k-k_5} dk_1 dk_2 dk_3 dk dk_5\end{aligned}$$

Очевидно, что $T^{kk_1}_{k_2k_3}$ даёт вклад только в корреляционную функцию четвертого порядка, а $T^{k_1k_2k_3}_{k_4k_5}$ даёт вклад только в уравнение для для корреляторa пятого порядка (из-за того, что корреляционная функция седьмого порядка полагается равной нулю). Корреляционная функция пятого порядка $<$

$b^*_{k_1}b^*_{k_2}b^*_{k_3}b_{k_4}b_{k_5}>$ может быть выражена через коррелятор восьмого порядка:

$$
\begin{aligned}
&(\frac{\partial}{\partial t} - i(\omega_{k_1}+\omega_{k_2}+\omega_{k_3}-\omega_{k_4}-\omega_{k_5}))<b^*_{k_1}b^*_{k_2}b^*_{k_3}b_{k_4}b_{k_5}>= \\
= \;& i\frac{1}{4}\int T^{k_1p_2p_3}_{p_4p_5}<b^*_{k_2}b^*_{k_3}b^*_{p_4}b^*_{p_5}b_{k_4}b_{k_5}b_{p_2}b_{p_3}>\delta_{k_1+p_2+p_3-p_4-p_5}dp_2dp_3dp_4dp_5+ \\
+ \;& i\frac{1}{4}\int T^{k_2p_2p_3}_{p_4p_5}<b^*_{k_1}b^*_{k_3}b^*_{p_4}b^*_{p_5}b_{k_4}b_{k_5}b_{p_2}b_{p_3}>\delta_{k_2+p_2+p_3-p_4-p_5}dp_2dp_3dp_4dp_5+ \\
+ \;& i\frac{1}{4}\int T^{k_3p_2p_3}_{p_4p_5}<b^*_{k_1}b^*_{k_2}b^*_{p_4}b^*_{p_5}b_{k_4}b_{k_5}b_{p_2}b_{p_3}>\delta_{k_3+p_2+p_3-p_4-p_5}dp_2dp_3dp_4dp_5- \\
- \;& i\frac{1}{6}\int T^{p_1p_2p_3}_{k_4p_5}<b^*_{k_1}b^*_{k_2}b^*_{k_3}b^*_{p_5}b_{k_5}b_{p_1}b_{p_2}b_{p_3}>\delta_{p_1+p_2+p_3-k_4-p_5}dp_1dp_2dp_3dp_5- \\
- \;& i\frac{1}{6}\int T^{p_1p_2p_3}_{k_5p_5}<b^*_{k_1}b^*_{k_2}b^*_{k_3}b^*_{p_5}b_{k_4}b_{p_1}b_{p_2}b_{p_3}>\delta_{p_1+p_2+p_3-k_5-p_5}dp_1dp_2dp_3dp_5
\end{aligned}
$$

Полагая справедливым приближение случайных фаз для коррелятора 8-го порядка (чтобы расщепить его на произведение парных корреляционных функций), и полагая медленное изменение со временем коррелятора пятого порядка, можно получить следующее выражение для $<b^*_{k_1}b^*_{k_2}b^*_{k_3}b_{k_4}b_{k_5}>$:

$$
\begin{aligned}
&\mathtt{Im}<b^*_{k_1}b^*_{k_2}b^*_{k_3}b_{k_4}b_{k_5}>=\pi T^{k_1k_2k_3}_{k_4k_5}\delta_{\omega_{k_1}+\omega_{k_2}+\omega_{k_3}-\omega_{k_4}-\omega_{k_5}}\times \\
\times \;& \{n_{k_1}n_{k_2}n_{k_3}(n_{k_4}+n_{k_5})-n_{k_4}n_{k_5}(n_{k_1}n_{k_2}+n_{k_1}n_{k_3}+n_{k_2}n_{k_3})\} \qquad (2.47)
\end{aligned}
$$

В выражении (2.47) опущены нерезонансные члены. Для корреляционной функции четвёртого порядка имеется хорошо известное выражение в [167]:

$$
\begin{aligned}
&\mathtt{Im}<b^*_kb^*_{k_1}b_{k_2}b_{k_3}>=\pi T^{kk_1}_{k_2k_3}\delta_{\omega_k+\omega_{k_1}-\omega_{k_2}-\omega_{k_3}}\times \\
\times \;& \{n_{k_2}n_{k_3}(n_k+n_{k_1})-n_kn_{k_1}(n_{k_2}+n_{k_3})\} \qquad (2.48)
\end{aligned}
$$

Подставляя (2.48) и (2.47) в уравнение для n_k мы приходим к 5-ти волновому кинетическому уравнению:

$$
\frac{\partial n_k}{\partial t} = st(n,n,n)+st(n,n,n,n)
$$

$$
st(n,n,n) = \pi\int|T^{kk_1}_{k_2k_3}|^2f^{kk_1}_{k_2k_3}dk_1dk_2dk_3
$$

$$\begin{aligned} st(n,n,n,n) &= \frac{\pi}{3}\int |T^{k_1k_2k_3}_{kk_5}|^2 f^{k_1k_2k_3}_{kk_5} dk_1dk_2dk_3dk_5 - \\ &- \frac{\pi}{2}\int |T^{kk_2k_3}_{k_4k_5}|^2 f^{kk_2k_3}_{k_4k_5} dk_2dk_3dk_4dk_5, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f^{kk_1}_{k_2k_3} &= \delta_{k+k_1-k_2-k_3}\delta_{\omega_k+\omega_{k_1}-\omega_{k_2}-\omega_{k_3}}\times \\ &\times \{n_{k_2}n_{k_3}(n_k+n_{k_1}) - n_kn_{k_1}(n_{k_2}+n_{k_3})\} \\ f^{k_1k_2k_3}_{k_4k_5} &= \delta_{k_1+k_2+k_3-k_4-k_5}\delta_{\omega_{k_1}+\omega_{k_2}+\omega_{k_3}-\omega_{k_4}-\omega_{k_5}}\times \\ &\times \{n_{k_1}n_{k_2}n_{k_3}(n_{k_4}+n_{k_5}) - n_{k_4}n_{k_5}(n_{k_1}n_{k_2}+n_{k_1}n_{k_3}+n_{k_2}n_{k_3})\} \end{aligned}$$

Как уже было показано в параграфе 2.3.1, в одномерном случае

$$st(n,n,n) \equiv 0$$

и мы приходим окончательно к 5-ти волновому кинетическому уравнению:

$$\frac{\partial n_k}{\partial t} = st(n,n,n,n) \tag{2.49}$$

Уравнение (2.49) формально сохраняет два интеграла движения, энергию

$$E = \int_0^\infty \omega_k n_k dk,$$

и импульс

$$P = \int_0^\infty k n_k dk.$$

(Мы рассматриваем случай, когда все k_i положительны). Стационарное же уравнение

$$st(n,n,n,n) = 0 \tag{2.50}$$

имеет термодинамическое решение

$$n_k = \frac{T}{\omega_k + \alpha k}.$$

Как и для четырёхволнового изотропного кинетического уравнения, уравнение (2.49) ещё описывает прямой и обратный каскады. Обратный каскад, это каскад энергии, котрая переностится в большие масштабы. Он описывается следующим Колмогоровским решением уравнения (2.50)

$$n_k^{(1)} = \alpha^{(1)} \epsilon^{1/4} |k|^{-25/8}.$$

Здесь ϵ - поток энергии, $\alpha^{(1)}$ - Колмогоровская константа.

Соответствующий энергетический спектр имеет вид:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_\omega \lceil \omega &= \omega_k n_k dk \\ \mathcal{E}_\omega &= \alpha^{(1)} \epsilon^{1/4} \omega^{-17/4} \end{aligned}$$

Прямой же каскад переносит импульс в малые масштабы. Он описывается Колмогоровским решением

$$n_k^{(2)} = \alpha^{(2)} \mu^{1/4} |k|^{-13/4}.$$

Здесь μ - поток импульса, $\alpha^{(2)}$ - Колмогоровская константа.

Теперь

$$\mathcal{E}_\omega = \alpha^{(2)} \mu^{1/4} \omega^{-9/2}.$$

3 Волновая турбулентность в нелинейном уравнении Шредингера

В этой главе представлены результаты, опубликованные с работах [172, 173, 174, 176, 180, 184, 187].

3.1 Слабая волновая турбулентность в одномерном нелинейном уравнении Шредингера

3.1.1 Введение

Проблема Колмогоровских спектров - является ключевой в теории слабой волновой турбулентности. Эти спектры являются точными решениями стационарного кинетического уравнения для среднеквадратичных амплитуд волн [167, 174]. Несомненно, что слаботурбулентные Колмогоровские спектры должны теоретически объяснять степенные спектральные распределения энергии в ансамблях стохастических нелинейно взаимодействующих волн любой природы. Спектры такого типа наблюдаются систематически. Самый яркий

пример такого спектра - спектр $\epsilon_\omega \simeq gv/\omega^4$, который обычно наблюдается в системах возбуждаемых ветром гравитационных волн в море.

Однако, эта точка зрения разделяется не всеми. Кроме того, самая применимость кинетического уравнения для волн к реальной ситуации также дискутируется. (См., например [117].) Вывод кинетического уравнения из исходных динамических уравнений предполагает законность предположения о хаотичности фаз, которая может быть нарушена формированием некоторых когерентных структур, таких как волновые коллапсы или солитоны. Фактически, эта критика имеет серьезные основания. В реальных ситуациях когерентные структуры встречаются часто, но в то же время нет причин для полного отказа от теории слабой турбулентности. Действительность многообразна, и во многих конкретных ситуациях когерентные структуры сосуществуют со слаботурбулентной компонентой, участвуя в процессы переноса и диссипации энергии и других интегралов движения.

Следовательно, есть сильное мотивация, чтобы продолжить исследование теории слабой турбулентности, исследуя тот случай, где когеретные структуры важны, и случай, где такие структуры не важны.

3.1.2 ММТ-модель.

Один из самых надёжных подходов для исследования теории слабой турбулентности - прямое численное моделирование нелинейных динамических уравнений, описывающих систему волн. Во многих случаях эти уравнения могут быть эффективно решены при помощи спектрального метода. Конечно, численное моделирование уравнений, наиболее близкого к реальной фи-

зической ситуации является самым предпочтительным. Однако, много интересной информации может быть извлечено и из решения упрощенных, более или менее искусственных моделей, которые наследуют основные особенности реальных физических уравнений. Проверить, насколько теория слабой турбулентности является общей, а также проверить её главные утверждения, такие как

- - применимость кинетического уравнения
- - существование спектров Колмогоровского типа
- - изучить структуры старших корреляционных функций

и т.д., - можно должным образом на более простых моделях. И компьютерное моделирование таких моделей может быть сделано достаточно легко, во всяком случае легче и понятнее, чем для более физических ситуаций.

Одномерные модели являются самыми привлекательными с этой точки зрения. Даже скромный современный компьютер даёт возможность провести численное моделирование системы нелинейных волн, состоящей из тысяч волновых мод, и более трех декад масштабов. Исторически первое такое моделирование было проделано A.Maida, D.McLaughlin и E.Tabak в 1997 [117]. Они использовали модель, которую называют теперь, после опубликования этой статьи, как MMT-модель. MMT-модель - обобщенное нелинейное уравнение Шредингера, сохраняющее не только энергия и импульс, но также и волновое действие (число частиц).

Дальнейшее моделирование в рамках MMT-модели было сделано теми же самыми авторами в сотрудничестве с D.Cai [63]. Позже численные экспе-

рименты с ММТ-моделью были выполнены в работе [165, 87]. Результаты моделирования, проведенного обеими группами в основном совпадают. ММТ-модель демонстрирует сложное много-вариантное поведение, которое нельзя рассматривать как простое подтверждение слаботурбулентной теории теории. Отсутствие простого, явного подтверждения происходит из-за наличия когерентных структур, которые постоянно присутствуют во всех версиях ММТ-модели.

В следующих параграфах приводится постановка задачи и результата численного моделирования модифицированной ММТ-модели, которая включает в себя не только стандартные процессы рассеяния "два в два", но и процессы распада "один в три", которые не сохраняют волновое действие. Оказывается, что такая модель, при надлежащем выборе параметров, ведет себя в соответствии со слаботурбулентной теорией. В частности, она демонстрирует существование степенного решения (Колмогоровского спектра) в широком инерционном интервале (больше двух декад).

3.1.3 Численный эксперимент

исследуется следующая модель:

$$
\begin{aligned}
& i\Big(\frac{\partial \psi}{\partial t} + \gamma_k\, \psi_k\Big) = \\
& k^\alpha\, \psi + a\Big\{ \int (|k||k_1||k_2||k_3|)^{\beta/4}\, \psi^*_{k_1}\, \psi_{k_2}\, \psi_{k_3}\, \delta_{k+k_1-k_2-k_3}\, dk_1\, dk_2\, dk_3 + \\
& g \int (|k||k_1||k_2||k_3|)^{\beta/2}\, (\psi_{k_1}\, \psi_{k_2}\, \psi_{k_3}\, \delta_{k-k_1-k_2-k_3} + 3\, \psi_{k_1}\, \psi^*_{k_2}\, \psi^*_{k_3}\, \delta_{k-k_1+k_2+k_3}) dk_1\, dk_2\, dk_3 \Big\}
\end{aligned}
\tag{3.1}
$$

В случае, когда $g = 0$, эта модель является стандартной ММТ-моделью.

Эта модель описывает некоторую Гамильтонову систему, и поэтому может быть записана в следующем виде:

$$i\Big(\frac{\partial\psi}{\partial t}+\gamma_k\,\psi_k\Big)=\frac{\delta H}{\delta\psi_k^*}, \tag{3.2}$$

где

$$\begin{aligned} H &= H_0+H_{int}\\ H_0 &= \int |k|^\alpha\,\psi_k\,\psi_k^*\,dk\\ H_{int} &= a\Big\{\frac{1}{2}\int (kk_1k_2k_3)^{\beta/4}\,\psi_k^*\,\psi_{k_1}^*\,\psi_{k_2}\,\psi_{k_3}\,\delta_{k+k_1-k_2-k_3}+\\ &\quad g\int (kk_1k_2k_3)^{\beta/4}\Big[\psi_k^*\,\psi_{k_1}^*\,\psi_{k_2}^*\,\psi_{k_3}+\psi_k\,\psi_{k_1}\,\psi_{k_2}\,\psi_{k_3}^*\Big]\times\\ &\quad \delta_{k+k_1+k_2-k_3}\,dk_1\,dk_2\,dk_3\Big\} \end{aligned} \tag{3.3}$$

Гамильтониан H описывает следующие четырёх-волновые процессы:

1. Рассеяние, со следующими резонансными условиями

$$\begin{aligned} \omega_k+\omega_{k_1} &= \omega_{k_2}+\omega_{k_3}\\ k+k_1 &= k_2+k_3 \end{aligned} \tag{3.4}$$

2. Распад "один в три"и обратный процесс слияния "три в один", подчиняющиеся следующим резонансным условиям

$$\begin{aligned} \omega_k &= \omega_{k_1}+\omega_{k_2}+\omega_{k_3}\\ k &= k_1+k_2+k_3 \end{aligned} \tag{3.5}$$

Здесь $\omega_k=|k|^\alpha$.

Далее исследуется только один случай $\alpha>1$. В этой ситуации резонансные условия (3.4), соответствующие рассеянию имеют только тривиальное

решение

$$k_2 = k, \;\; k_3 = k_1 \;\; or \;\; k_2 = k_1, \;\; k_3 = k, \tag{3.6}$$

а резонансные условия (3.5), соответствующие распаду и слиянию описывают двумерное многообразие в пространстве (k, k_1, k_2, k_3). При $a > 0$ и достаточно малом g, Гамильтониан (3.3) является положительно определенным.

Наличие в Гамильтонияне "распадного"члена обеспечивает отсутствие локализованных структур, и создаёт условия для "наблюдения"слаботурбулентного режима.

При этих предположениях система (3.1) описывается кинетическим уравнением

$$\frac{\partial n}{\partial t} + 2\gamma_k \, n_k + st(n, n, n), \tag{3.7}$$

где

$$\begin{aligned} st(n,n,n) = 4\pi a^2 g^2 \Big\{ & \int (k k_1 k_2 k_3)^{\beta/2} \times \\ & (n_{k_1} \, n_{k_2} \, n_{k_3} - n_k \, n_{k_1} \, n_{k_2} - n_k \, n_{k_1} \, n_{k_3} - n_k \, n_{k_2} \, n_{k_k}) \times \\ & \delta(k - k_1 - k_2 - k_3) \, \delta(\omega_k - \omega_{k_1} - \omega_{k_2} - \omega_{k_3}) dk_1 \, dk_2 \, dk_3 + \\ & + 3 \int (k k_1 k_2 k_3)^{\beta/2} (n_{k_1} n_{k_2} n_{k_3} + n_k n_{k_1} n_{k_2} + n_k n_{k_1} n_{k_3} - n_k n_{k_2} n_{k_3}) \times \\ & \delta(k - k_1 + k_2 + k_3) \, \delta(\omega_k - \omega_{k_1} + \omega_{k_2} + \omega_{k_3}) \, dk_1 \, dk_2 \, dk_3 \Big\} \end{aligned} \tag{3.8}$$

По определению

$$< \psi_k \, \psi^*_{k'} >= n_k \, \delta_{k-k'}. \tag{3.9}$$

А стационарное уравнение

$$st(n, n, n) = 0 \tag{3.10}$$

имеет, при определенных значениях параметров α и β, степенные решения (см. [167])

$$n_k = \frac{\alpha P^{1/3}}{k^\gamma} \tag{3.11}$$

$$\gamma = \frac{2}{3}\beta + 1. \tag{3.12}$$

Это есть Колмогоровский спектр, который обеспечивает постоянный поток энергии P в область малых масштабов (больших волновых чисел k). А α - безразмерная Колмогоровская константа.

4. Было выполнено численное моделирование уравненгия 3.1 с использованием стандартного спектрального метода. Были выбраны следующие

$$\alpha = 3/2,\ \beta = 9/4,\ a = 1.$$

А коэффициет члена в Гамильтониане, соответствующего процессу "один в три"варьировался, и принимал в разных варинтах счёта такие значения:

$$g = 0, \quad 0.05, \quad 0.1, \quad 0.15, \quad 0.2.$$

Вычисления проводились на разностной равномерной сетке с 2048 узлами в периодической области 2π, что соответствует в спектральном коде волновым числам $-1024 < k < 1023$. Система накачивалась в области малых волновых чисел, инкремент накачки выглядит так:

$$\gamma_k = -0,005 \qquad 5 \le |k| \le 10.$$

Диссипация же энергии в области больших волновых чисел обеспечивалась следующим декрементом:

$$\gamma_k = \begin{cases} 400(k/512)^2 & |k| > 512; \\ 0 & |k| \le 512. \end{cases}$$

Во всех вариантах моделирования наблюдался рост, а затем стабилизация полной энергии волновой системы H. Уровень же энергии, на котором происходит стабилизация, существенно зависит от параметра g.

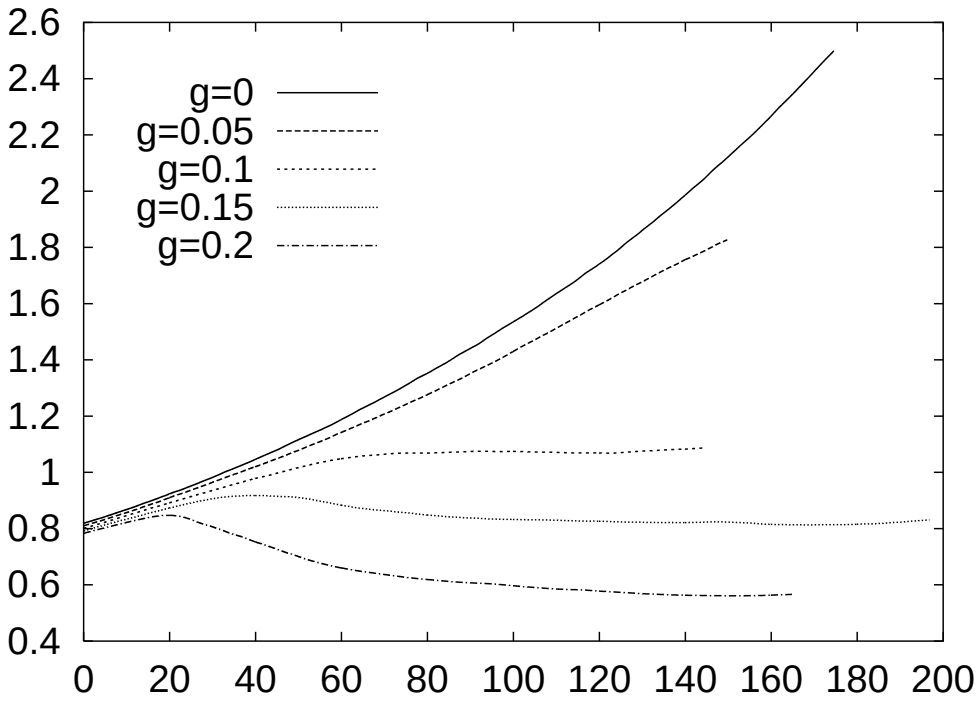


Рис. 3.1: Полная энергия системы как функция времени для различных значений коэффициента g ("один в три"процесс)

Из Рисунка 3.1 хорошо видно, что процесс $1 \iff 3$ играет существенную роль в установлении равновесия накачки и диссипации.

На Рисунке 3.2 изображён типичный стационарный, усреднённый по времени, спектр для варианта с $g = 0.15$.

Из Рисунка 3.2 хорошо видно, что в инерционном интервале $30 < k < 300$ этот спектр аппроксимируется степенным Колмогоровским спектром с показателем

$$\lambda = \frac{5}{2}.$$

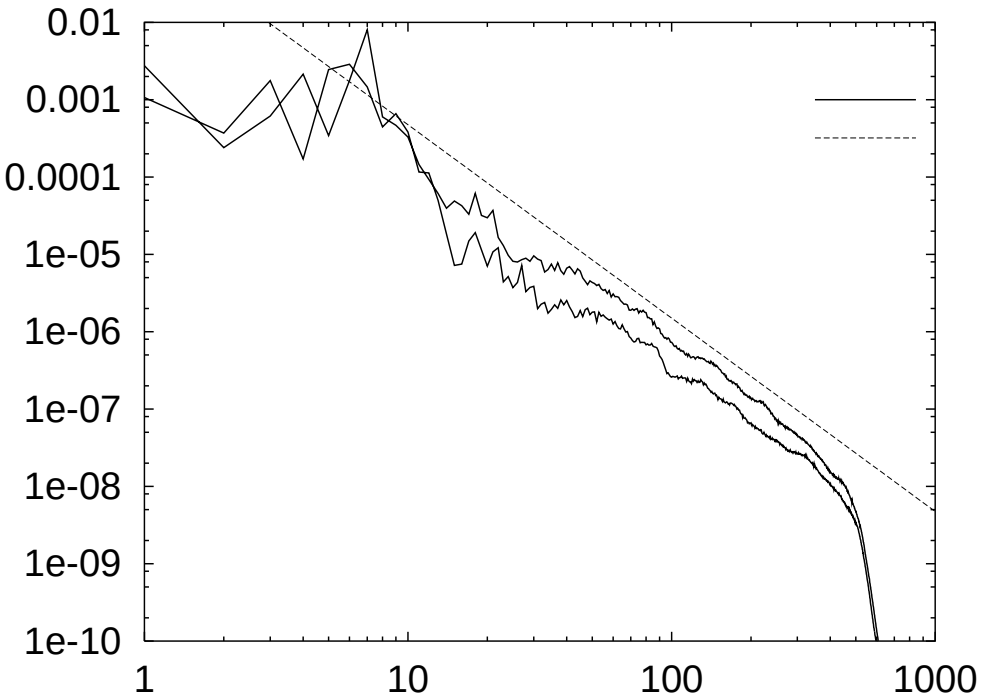


Рис. 3.2: $|\psi_k|^2$, усреднённый проинтервалу времени 100. Изображены отдельно спектры для положительных и отрицательных k. Прямая линия соответствует степенному спектру $0.15|k|^{-\frac{5}{2}}$

Типичная величина нелинейности

$$\epsilon = \frac{H_{int}}{H},$$

составляет $\epsilon \simeq 0.15$. Таким образом, можно говорить, что в этих численных экспериментах мы находимся в слаботурбулентном режиме.

В заключение следует отметить, что представленные в этом параграфе результаты являются первыми, подтверждающими справедливость теории слабой турбулентности именно в **одномерном** случае. Для двумерного случая аналочичные результаты, подтверждающие существование слаботурбулентных Колмогоровских спектров были получены в работе [132], для уранений капиллярных волн на поверхности идеальной жидкости. Однако в одномерном случае инерционный интервал, в котором наблюдается степен-

ной спектр зачительно больше, что делает всю слаботурбулентную картину более убедительной.

3.2 Солитонная турбулентность

3.2.1 Слабонелинейная волновая турбулентность и “газ” солитонов

Турбулентность в нелинейных сплошных средах, как правило, сопровождается возникновением локализованных существенно нелинейных структур. В тех случаях, когда уравнения, описывающие среду, имеют устойчивые солитонные решения, естественными кандидатами на роль таких структур являются солитоны. Турбулентность в этом случае может быть названа солитонной. Впервые солитонная турбулентность рассматривалась, по-видимому, в 1973 г. в работе [95]. Цель этой части главы дать качественную картину солитонной турбулентности в рамках неинтегрируемого нелинейного уравнения Шредингера в условиях отсутствия волновых коллапсов. Ниже показано - на основе простых оценок, подтвержденных численным экспериментом (см. также [16, 173]), что с течением времени становится возможным выделить две компоненты турбулентности: слабонелинейную волновую турбулентность и разреженный газ солитонов. При больших временах степень разреженности солитонного газа (отношение характерного расстояния между солитонами к их размеру) асимптотически увеличивается, при этом почти все значение интеграла "числа квазичастиц"(физически играющего роль энергии) оказывается сосредоточенным в солитонной компоненте.

Подобное утверждение уже высказывалось в работах [25, 38], где для его обоснования использовался термодинамический подход. Такое обоснование, однако, недостаточно, так как на самом деле турбулентность далека от состояния термодинамического равновесия. Поэтому в работе [41] вывод об особой роли солитонов в турбулентности, свободной от коллапсов, был подвергнут сомнению. В этой части главы даётся обоснование утверждения о центральной роли солитонов в асимптотическом состоянии турбулентности данного типа и показывается, тем самым, что солитонный газ является своеобразным статистическим аттрактором уменьшающейся со временем размерности в неинтегрируемой гамильтоновской системе с бесконечным числом степеней свободы.

3.2.2 Элементарные процессы столкновений

Достаточно универсальной моделью волновой турбулентности является нелинейное уравнение Шредингера (см., например, [16, 38, 133])

$$i\psi_t + \Delta\psi + f(|\psi|^2)\psi = 0, \tag{3.13}$$

имеющее решение в виде движущегося солитона:

$$\psi(r,t) = g(\lambda,\xi)\exp\left[\frac{i}{2}(vr) + i(\lambda^2 - \frac{v^2}{4})t\right],$$

$$\xi = r - vt, \quad \Delta g + f(g^2)g - \lambda^2 g = 0, \quad \nabla g|_{\xi=0} = 0, \quad g \to 0, \xi \to \infty \tag{3.14}$$

При $f(u) > 0$ и $f'(u) \geq Cu^{(2-d)/d}$ (d - размерность пространства) солитон (3.14) неустойчив и в трубулентных процессах не реализуется. Напротив, при условии устойчивости солитона (имеющем для важного частного случая степенной нелинейности $f = u^{s/2}$ вид $sd < 4$), турбулентность является

солитонной. Фундаментальный общефизический интерес представляет вопрос о характере эволюции этой турбулентности. Уравнение (3.13) имеет следующие интегралы движения:

$$N = \int |\psi|^2 dr, P = i \int [\psi \nabla \psi^* - \psi^* \nabla \psi] dr,$$

$$H = \int [|\nabla \psi|^2 - \Phi(|\psi|^2)] dr, \tag{3.15}$$

$$\Phi'(u) = f(u).$$

В пренебрежении квантовыми эффектами тенденция к равнораспределению энергии по степеням свободы приводит к тому, что значение гамильтониана H определяется в основном областью коротких волн. При этом в системе мог бы сформироваться конденсат - однородное поле, сопровождающееся мелкомасштабными флуктуациями. Но при $f'(u) > 0$ конденсат неустойчив и в отсутствие коллапса распадается на солитоны. В специальном интегрируемом случае $f(u) = Cu$, $C > 0$, $d = 1$ солитоны рассеиваются друг на друге упруго, и их число сохраняется. В общем неинтегрируемом случае качественное термодинамическое рассмотрение взаимодействия солитонов со свободными волнами [25, 38] показывает, что поведение системы определяется накоплением слабых эффектов, которые обусловлены нескомпенсированностью процессов, протекающих в противоположных направлениях. При взаимодействии солитонов со слаботурбулентным спектром термодинамически выгодными являются процессы, приводящие к увеличению амплитуд солитонов при уменьшении их числа. При слиянии солитонов несколько уменьшается значение интеграла H, и разница уносится свободными волнами; интеграл числа квазичастиц (волновая энергия в основном определяется

солитоном. Размер солитона при этом уменьшается.

Рассмотрим более подробно элементарные процессы взаимодействия солитонов друг с другом и со слабонелинейными свободными волнами с учетом интегралов движения (3.15). Ограничимся для простоты степенной нелинейностью $f(u) = u^{s/2}$. Тогда солитон произвольного размера λ^{-1} выражается через универсальную моду $R(\eta)$:

$$g(\lambda, \xi) = \lambda^{2/s} R(\lambda\xi), \quad \Delta R - R + R^{s+1} = 0$$

($R(\eta) = [(1 + s/2)^{1/2}/\operatorname{ch}(s\eta/2)]^{2/s}$ при $d = 1$), что позволяет, в частности, получить полезные соотношения между интегралами (3.15) на солитонном решении:

$$P = Nv, \quad H = N\frac{v^2}{4} - \frac{\kappa}{1+q}N^{1+q}, \quad N = \lambda^{2/q} N_{kp}, \tag{3.16}$$

где

$$N_{kp} = \int R^2 d\eta, \quad q = \frac{2s}{4 - sd} > 0, \quad \kappa = N_{kp}^{-q}.$$

С учетом (3.16) нетрудно получить, что при рассеянии слабонелинейной волны вида $\exp[i(kr - k^2 t)]$ с числом квантов δN, импульсом $\delta P = 2kdeltaN$ и гамильтонианом $\delta H = k^2 \delta N$ на солитоне (N, v) выполнено соотношение:

$$\delta N_0(|k_0 - v/2|^2 + \kappa N^q) = \delta N_1(|k_1 - v/2|^2 + \kappa N^q), \tag{3.17}$$

где индексы "0"и "1"относятся к исходной и рассеянной волнам соответственно.

Из (3.17) следует, что при перекачке энергии из волны в солитон ($\delta N_1 < \delta N_0$) происходит торможение солитона и увеличение волнового вектора волны. Качественно понятно, что в среднем этот процесс более вероятен, чем

обратный: при накоплении волн в области больших k их фазовый объем возрастает, соответственно растет энтропия системы (так как число солитонных степеней свободы много меньше, чем слаботурбулентных практически можно считать, что значение энтропии определяется вкладом слаботурбулентного спектра).

Более сложен кинематический расчет взаимодействия солитонов с участием свободных волн. Используя (3.16), можно показать, что при действии двух солитонов (N_1, v_1) и (N_2, v_2) справедливы (в системе отсчета, в которой полный импульс волн равен нулю) соотношения

$$\Delta N_1 = \frac{\kappa N_2^q + v_2^2/4)\overline{\delta N} + \overline{\delta H} + N_1(v_1 - v_2)\Delta v_1/2}{\kappa(N_1^q - N_2^q) - |v_1 - v_2|^2/4} \tag{3.18}$$

$$\Delta N_2 = \frac{\kappa N_1^q + v_1^2/4)\overline{\delta N} + \overline{\delta H} + N_2(v_1 - v_2)\Delta v_2/2}{\kappa(N_1^q - N_2^q) - |v_1 - v_2|^2/4}$$

где $\overline{\delta N}$ и $\overline{\delta H}$ уносятся свободными волнами. Из (3.18) видно, что при малых скоростях происходит усиление более интенсивного и ослабление менее интенсивного солитона. Этот процесс соответствует парному "столкновению"и является, очевидно, более вероятным, чем обратный (тройное "столкновение"). Приведенные рассуждения подтверждают качественные выводы термодинамического рассмотрения: в результате эволюции заданного начального распределения солитон оказывается статистическим аттрактором - состояние асимптотически, по времени распадается на солитон и совокупность слабонелинейных волн.

3.2.3 Численный эксперимент

С целью прямого доказательства этого утверждения мы проводили численное интегрирование одно- и двумерного уравнения (3.13) на болыших временах эволюции при различных нелинейностях $f(u)$. Задача решалась в фиксированной области $0 \leq r \leq L$ с периодическими граничными и возмущенными однородными начальными условиями

$$\psi(r,0) = \psi_0[1 + \phi(r)], \tag{3.19}$$

где $\phi(r) << 1$ — малое возмущение.

В рамках (3.13) инкремент модуляционной неустойчивости конденсата

$$\psi_0 \exp[if(|\psi_0|^2)t]$$

определяется выражением

$$\gamma(k) = k(2A - k^2)^{1/2},$$

$$A = (u\frac{\partial f}{\partial u})|_{u=|\psi_0|^2}. \tag{3.20}$$

Он максимален при $k = A^{1/2}$ и равен $\gamma_{max} =$. Соответствующая модуляционная длина $\lambda_{mod} = 2\pi/A^{1/2}$ определяет число сформировавшихся при $t > \gamma_{max}^{-1}$ солитонов $n \approx (L/\lambda_{mod})$. Параметры модели выбирались таким образом, чтобы конкурирующие между собой требования убедительной статистики солитонов $n >> 1$ и достаточного разрешения асимптотического солитон $(\lambda\Delta)^d << 1$ (Δ — линейный размер ячейки, λ — обратный характерный размер солитона; для степенной нелинейности $\lambda\ N^{s/(4-sd)}$) в расчетах всегда выполнялись. Расчеты проводились на многопроцессорном комплексе

ЕС-1037-ЕС-2706 ИКИ АН СССР. Интегрирование уравнения (3.13) осуществлялось с использованием алгоритмов БПФ по методике, аналогичной [2]. Для контроля использовались интегралы движения (3.15). Помимо степенной нелинейности, рассматривались системы с насыщением типа

$$f(u) = u(1 - au), \quad f(u) = u(1 + b_1 u)/(1 + b_2 u).$$

Результаты расчетов продемонстрировали полное соответствие наблюдаемой пространственно-временной динамики системы предсказанной качественной картине солитонной турбулентности. На Рисунке 3.3 представлены результаты интегрирования одномерного уравнения с $f(u) = u^{1/2}$.

В результате развития модуляционной неустойчивости формируется решетка солитонов с периодом порядка λ_{mod} (Рисунок 3.3, а). В процессе дальнейшей эволюции система все более разделяется на солитоны и слабонелинейные свободные волны. Взаимодействие солитонов друг с другом и со свободными волнами приводит к постепенной перекачке числа волн из солитонов в более интенсивные, амплитуды солитонов растут с уменьшением их числа (Рисунок 3.3, б). На больших временах система приходит к единственному солитону малого размера и большой амплитуды (Рисунок 3.3, в). Измеренная скорость солитона v много меньше групповой скорости $(\partial\omega/\partial k)_{k=\lambda}$, что вполне естественно: неподвижный солитон реализует минимум энергии. Форма асимптотического солитона адекватно описывается точным решением уравнения (3.14), в котором величина вычислена λ вычислена из измеренной амплитуды. На свободные; волны приходится около 15-20% значения исходного интеграла N.

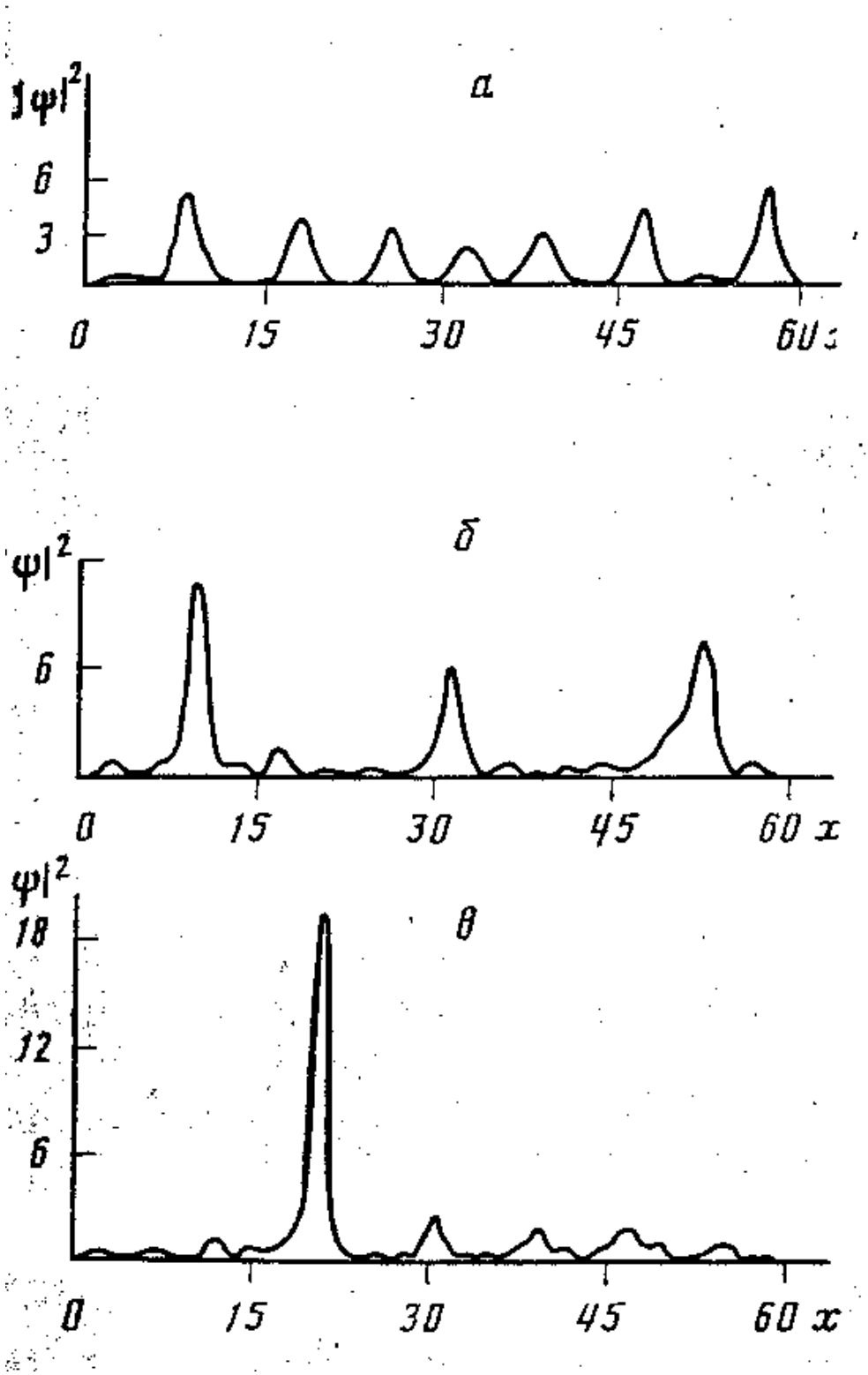


Рис. 3.3: Фрагменты эволюции решения уравнения $i\psi_t + \psi_{xx} + |\psi|\psi = 0$ с параметрами $\psi_0 = 1$, $L = 60$; время t равно 17,4 (а), 365,4 (б) и 730,8 (в)

Аналогичные результаты получены и при других видах нелинейности (Рисунок 3.4 соответствует нелинейности $f(u) = u[(l + 0,1u)/(1 + 0,5u)]$), а также при решении двумерной задачи. Однако в двумерном случае (результаты интегрирования уравнения (3.13) с $f(u) = u^{1/2}$ представлены на (Рисунке 3.5) время эволюции настолько возрастает (с уменьшением числа солитонов падает вероятность их взаимодействия между собой), что задача достижения единственного солитона становится весьма сложной для численного моделирования. Качественная же картина эволюции турбулентности как мы видим, совпадает с описанной выше. Следует отметить, что при рассмотрении эволюции турбулентности мы не обнаружили ни одного случая увеличения числа солитонов из-за дробления солитона под действием слабонелинейных волн, что говорит о статистической необратимости процесса. Такое поведение согласуется с расчетами [5], в которых было обнаружено, что для дробления солитона звуковой волной приходится брать специально подобранный звуковой пакет большой амплитуды.

3.2.4 Заключение

Итак, в процессе эволюции долгоживущей солитонной турбулентности неинтегрируемая система приближается к состоянию солитонного газа, что позволяет считать это состояние статистическим аттрактором. Этот результат получен тремя способами: аналитически вблизи равновесного состояния [25, 38] и вдали от равновесия (в работе [172]), а также прямым численным моделированием (в работе [172]). Результат не зависит от размерности пространства и от деталей взаимодействия (если, разумеется, солитоны устой-

чивы).

Для одномерного случая и степенной нелинейности выделенность солитонного состояния подтверждена в подробной статье [109], в которой в отличие от прямого моделирования сначала делаются аналитические предположения о свойствах термодинамически равновесного состояния, а затем это состояние исследуется численно.

Аналитическая работа [41] основана на методе ланжевеновской силы; в ней введено феноменологическое уравнение для описания солитона, подобранное так, чтобы дать верный ответ для линейных волн. Это феноменологическое уравнение, отличающееся от аналитически полученного в [45], не учитывает прямых взаимодействий солитон - солитон, а полученный результат - отсутствие интенсивных солитонов в асимптотике - противоречит результатам численного эксперимента настоящей работы.

Отметим, что для бесконечномерных систем гамильтоновый характер системы не является препятствием для существования статистических аттракторов типа солитонов. Собственно говоря, и диссипация, обеспечивающая возможность существования истинных аттракторов, появляется как результат усреднения по многим степеням свободы исходно гамильтоновой системы.

Заметим также, что в реальных физических системах всегда имеется затухание волн с большими волновыми числами, а также различные нелинейные механизмы затухания. Эти эффекты приведут к тому, что солитоны достаточно малого размера и большой интенсивности будут быстро диссипировать. Тем самым концентрация энергии в солитонах малых размеров

оказывается сильно нелинейным механизмом поглощения энергии, который можно сравнить с "коллапсным"механизмом диссипации за счет катастрофического развития особенностей волнового поля. Итак, оказывается, что "солитонный"и "коллапсный"варианты волновой турбулентности качественно отличаются друг от друга не слишком сильно.

3.3 Турбулетность конденсата в двумерном уравнении Шредингера с отталкиванием

3.3.1 Введение

Если бездиссипативная система сохраняет больше чем один интеграл движения, тогда накачка, действующая в некотором масштабе, в общем случае производит два каскада в k-пространстве. В то время как прямой каскад и перемежаемость это то, что естественно ожидается от турбулентности, обратный каскад - своего рода самоорганизация. Другое важное различие между каскадами состоит в их предназначении. Большинство систем предполагает наличие некоторой диссипации (как вязкость) для естественного стока при прямом каскаде. С другой стороны, во многих системах, крупномасштабные моды не имеют затухания, и обратный каскад может привести к накоплению длинноволновой моды, аналогичному Бозе-конденсации.

Обратный каскад имеет место в двумерной несжимаемой жидкости [98, 90, 140]. Также, в любой системе с Гамильтонианом $H = H_2 + H_4$

$$H_2 = \sum_k \omega_k \psi_k^* \psi_k, \quad H_4 = \sum_{k_1 k_2 k_3 k_4} \lambda_{k_1 k_2 k_3 k_4} \psi_{k_1}^* \psi_{k_2}^* \psi_{k_3} \psi_{k_4}$$

имеет место обратный каскад, так как такая система сохраняет полное число волн $N = \sum_k |\psi_k|^2$. Такая система состоит из волн с частотным спектром ω_k, и в которой имеется четырёхволновое взаимодействие с очевыдным свойством $\lambda_{k_1k_2k_3k_4} = \lambda_{k_2k_1k_3k_4} = \lambda_{k_3k_4k_1k_2}$. Для малого уровня нелинейности $H_4 \ll H_2$, имеется хорошо разработанная теория слабой турбулентности [167]. Наличие двух интегралов движения, квадратичных по волновым амплитудам (в пренебрежении вкладом H_4 в Гамильтониан), приводит к существованию двух каскадов, прямого каскада энергии, и обратного каскада числа волн. Можно доказать простую утверждение: необходимы две области поглощения, она в больших масштабах, другая в малых (по сравнению с характерным масштабом накачки), чтобы поглощать потоки обоих интегралов и обеспечить стационарное состояние [167]. Если же уровень нелинейности не является малым, тогда связь между интегралами и их потоками уже не будет столь простой. Этому вопросу и посвящен данный раздел.

Рассматривается случай $\omega_k = k^2$ и $\lambda_{k_1k_2k_3k_4} = \text{const}$, соответствующий хорошо известному нелинейному уравнению Шредингера:

$$i\psi_t + \Delta\psi + \lambda|\psi|^2\psi = 0 \ , \tag{3.21}$$

которое описывает как распространение света в средах с Керровской нелинейностью, так и турбулентность огибающих [48]. Слабая турбулентность для уравнения (3.21) описана в [167, 84, 174]. Для длумерного случая основное утверждение теории состоит в том, что парная корреляционная функция $\langle \psi_k \psi^*_{k'} \rangle = n_k \Delta_{\mathbf{kk'}}$ равна: $n_k = f(k)T/k^2$, где безразмерная функция $f(k)$ (определяющая отклонение от термодинамическог равновесия T/k^2, и

обеспечивающая потоки интегралов) является медленной логарифмической функцией в области прямого каскада [174], и является почти константой в области обратного каскада [174]. Безразмерный параметер нелинейности $\lambda|a_k|^2k^2/\omega_k = \lambda|a_k|^2$ увеличивается с длиной волны, так что турбулентность неизбежно становится сильной при малых k. В отличие от слабой турбулентности, которая является нечувствительной к знаку λ, сильная турбулентность имеет качественно различные свойства для фокусирующей ($\lambda > 0$) и дефокусирующей ($\lambda < 0$) среды.

Качественное объяснение турбулентности для фокусирующего случая дано в [174]: обратный каскад приводит к образованию крупно-масштабных каверн, которые являются модуляционно неустойчивыми, и коллапсируют за конечное время. Коллапс ((или самофокусировка) обеспечивают сильнонелинейный прямой каскад числа волн (квантов) в область коротковолнового затухания. И в результате устанавливается стационарное состояние без какой-либо диссипации в области крупных масштабов: все средние величины - энергия, полное число волн и т.д. - не растут со временем. При этом сильная крупномасштабная турбулентность сосуществует с мелкомасштабной слабой турбулентностью.

Здесь, далее, рассматривается дефокусирующий случай. Уравнение (3.21) с $\lambda < 0$, или уравнение Гросса-Питаевского используется для описания слабо взаимодействующего Бозе-газа и Бозе-конденсата [4]. Большое колличество литературы посвящено свойствам частных решений и равновесной статистике (и фазовым переходам) в этой модели (см. например, [79, 34]). Неравновесная кинетика Бозе-конденсации может быть применена в связи с

экспериментами с ансамблями атомов при сверхнизких температурах [139]. В сильной турбулентности в рамках уравнения (3.21) могут одновременно присутствовать и конденсат, и фононы, и ударные волны, и тёмные солитоны и квантовые вихри. Такая сложность, тем не менее, не подразумевает невозможным существование универсального скэйлинга для корреляционных функций, а лишь затрудняет установить его. Разумеется, здесь не идёт речь о полном аналитическом описании такой турбулентности.

Трёхмерная кинетика была рассмотрена Крайчнаном (ring-model approximation) в [99]. Здесь же рассматривается двумерная турбулентность, возбуждаемая источником в области промежуточных масштабов, и с затуханием с области малых масштабов. Затухания в крупных масштабах нет. По сути, рассматриваются два вопроса:

- Возможно ли получить стационарное состояние к области конечных k без диссипации в области крупных масштабов?
- Как образуется конденсат?

Будет показано, что эти два вопроса тесно связаны: флуктуации при $k \neq 0$ могут быть стационарными, только в присутствии растущего конденсата при $k = 0$.

3.3.2 Численный эксперимент

Для численного интегрирования уравнения (3.21) с $\lambda = -1$, был применён метод, описанный в [174]. Все варианты моделирования были выполнены в области $2\pi \times 2\pi$. В качестве начальных данных был выбран "ква-

зи"равновесный спектр

$$n_k = T/(k^2 + \mu)$$

с $T = 0.01$ и $\mu = 1/12$. Начальные фазы волн были случайны. Чтобы получить турбулентный режим, в уравнение были добавлены накачка

$$\begin{aligned} \gamma_p(k) &= \alpha\sqrt{(k^2 - k_l^2)(k_r^2 - k^2)} \quad \text{at} \quad k_l < k < k_r \\ &= 0 \quad \text{otherwise} . \end{aligned}$$

и затухание в малых k

$$\begin{aligned} \gamma_d(k) &= 0.5k^2 h(k/k_d) , \\ h(x) &= \frac{1}{6x^5}\exp[5(1 - x^{-2})] , \quad x \le 1 , \\ h(x) &= 1 - \frac{5}{6}\exp[1/2(1 - x^2)] , \quad x > 1 . \end{aligned}$$

Выбор γ_d был сделан похожим на затухание Ландау в плазме; хотя конкретный вид $h(x)$ не важен, лишь бы $h(x) \to 0$ при больших x.

На Рисунках 3.6 и 3.7 представлены результаты для варианта на сетке 128×128 с $\alpha = 0.05, k_l = 28, k_r = 32$ (умеренная накачка). Из Рисунка 3.6 (d) видно, что конденсат появляется после $t \simeq 10$ и в конце концов почли все волны (кванты, частицы) оказываются в конденсате. Здесь N_0 вычислялся усреднением ψ по всей области, т.е. эта величина представляет когерентный конденсат. Корневой режим, $N_0 \propto \sqrt{t}$ начинается, когда число квантов в конденсате почти сравнивается с полным числом квантов. (при $t \approx 70$) когда корреляционный масштаб $r_0 \simeq N_0^{-1/2}$ сравнивается с диссипационным. Для характеристики вне-конденсатных флуктуаций строились корреляционные функции

$$S_i(r) = \langle|\psi(\mathbf{x} + \mathbf{r}) - \psi(\mathbf{x})|^i\rangle.$$

Усреднение производилось по $\mathbf{x}$ и времени (по нескольким безразмерным единицам). Нетрудно видеть из Рисунка 3.6 (а), что парная корреляционная функция имеет логарифмическую асимптотику на больших масштабах, на временах, когда достигается стационарный режим (после времени $t \simeq 100$ изменения S_i уже не видны на Рисунке 3.6). Это соответствует спектру $n_k \propto k^{-2}$.

Для того, чтобы определить насколько вне-конденсатные флуктуации отклоняются от Гауссовой статистики мы вычисляли нормированные корреляционные функции 4-го ("flatness")S_4/S_2^2 (должна быть равна 2 для Гауссовой статистики) и 6-го S_6/S_2^3 (должна быть равна 8 для Гауссовой статистики) порядков. "Flatness"растет до времени $t \approx 55$ (когда относительный рост конденсата насыщается), а затем "flatness"уменьшается. "Flatness"почти одинакова на всех масштабах при $r > r_0$, где корреляционная длина $r_0 \simeq N_0^{-1/2}$ уменьшается со временем.

Стационарный спектр - существенно анизотропен, несмотря на то, что накачка изотропна. Анизотропия растёт с уменьшением k — см. Рисунок 3.7(а). Отметим, что в рамках теории слабой турбулентности крупномасштабный равновесный спектр устойчив по отношению к угловым возмущениям [167]. Нарушение симметрии же в рассматриваемом случае может быть обусловлено нелинейными эффектами (такими как образование кинков) — см. также Рисунок 3.8. Рисунки 3.7 и 3.8 демонстрируют, что имеется два взаимно перпендикулярных направления, (одно при $\simeq 30^o$) с наибольшим и наименьшим уровнями флуктуаций. По первому направлению спектр практически плоский в малых k, а затем спадает приблизительно как k^{-3}, что может

соответствовать спектру ударных волн. Более слабые флуктуации в перпендикулярном направлении спадают как k^{-2}.

Суммируя вышеизложенное, можно предположить, что сильная турбулентность внеконденсатных флуктуаций состоит из квази-одномерных структур наложенных более-менее изотропные волны.

Для того, чтобы исследовать асимптотический режим (линейный рост уровня конденсата и стационарный уровень флуктуаций) на больших временах был проведён численный эксперимент на небольшой сетке, 32×32 с $\alpha = 0.05, k_l = 6, k_r = 10$ — см. Рисунок 3.9. Отметим,что параметр нелинейности H_4/H_2 был намного больше 1 когда флуктуации были стационарны, в то время как отношение $N^2/2SH$ ($S = 4\pi^2$ площадь области) оставалось порядка 1, так что конденсат даёт главный вклад как в энергию, так и в число квантов. На Рисунке 3.9 (c) представлена гистограмма флуктуаций числа квантов вне конденсата. Статистика внеконденсатных флуктуаций примерно Гауссова на больших временах, как это видно из Рисунков 3.6(b) и 3.6(c), хотя режим - сильнотурбулентный.

Был посчитан ещё один вариант (здесь не представлен), в котором амплитуда накачки была в десять раз больше. При таких же временах моделирования, $t \simeq 400$, мы не обнаружили никаких признаков растущего конденсата и стационарных флуктуакий при конечных k. Здесь можно предположить, что накачка сначала приводит к слаботурбулентному режиму, затем конденсат имеет время, чтобы развиться, а затем растущий конденсат выполняет роль "стока"при $k \neq 0$. А слишком сильная накачка приводит к нестабилизируемой турбулентности в малым уровнем конденсата.

Следующий вариант, качественно отличающийся от представленного на Рисунках 3.6, 3.7 и 3.8, в котором накачка находилась дальше от области накачки. На Рисунках 3.10 и 3.11 представлены данные моделирования с $\alpha = 0.068, k_l = 13, k_r = 17$. Главная разница в положении накачки, которая теперь находится при $k_p = 15$. Начальные условия и затухание - такие же, как на Рисунке 3.6. Также как и в случае сильной накачки, стационарное состояние в конечных k не наблюдается (расчеты велись до $t \simeq 70$). Полное число квантов растет экспоненциально до $t \approx 2$, затем наступает промежуточная стадия роста $N \sim t^2$. И наконец при $t \simeq 50$, рост $N(t)$ выходит на линейный по времени $N \sim t$. Числа заполнения n_k растут в области малых k и стабилизируются в области накачки, спектр спадает быстрее с показателем степени примерно 4.5 на временах $t = 44$. В течение этой промежуточной стадии конденсат мал, см. Рисунок 3.10(a). И только после $t > 50$, конденсат начинает расти, отношение N_0/N флуктуирует около $1/3$. Это значит, что среднее значение $\bar{\psi}$ мало, и в тоже время величина $|\psi(\mathbf{r})|^2$ почти постоянна в пространстве, см. Рисунки 3.10 (b) и 3.11. Но есть несколько глубоких минимумов у $|\psi|^2(\mathbf{r})$ (как видно из Рисунка 3.10 (b) при $x \approx 2.1$). Этот минимум, соответствут темному солитону, или вихрю. $\bar{\psi}$ в большинстве посчитанных вариантов похожи на то, что на Рисунке 3.11 (сравните с Рисунком 3.8 для умеренной накачки). Хорошо выдны структуры типа кинков на профилях $\mathrm{Re}\,\Psi$ и $\mathrm{Im}\,\psi$ в то время как $|\psi|$ - почти константа. Тот факт, что флуктуации $|\psi(\mathbf{r})|^2$ в пространстве малы, отражается также и на поведении отношения $N^2/2SH$. Оно приближается к 1, также как и для варианта на Рисунке 3.9 (b).

3.3.3 Заключение

В заключение отметим, наблюдалось две качественно различных компоненты в турбулентности неравновесного Бозе-конденсата. Умеренная накачка приводит

- к слаботурбулентному режиму в области накачки,

- обратный каскад производит линейно растущий конденсат, который стабилизирует вне-конденсатные флуктуации, т.е. служит стоком в турбулентности, которая стационарна при всех $k \neq 0$.

Другие режимы, при сильной накачке, где наряду с ростом конденсата растут и все остальные Фурье-гармоники требует дальнейшего изучения.

3.4 Неустойчивость и самофокусировка солитонов в сдвиговом потоке

В рамках обобщенного двумерного уравнения Бенджамина-Оно аналитически и численно показано, что в пределе малой вязкости неустойчивость одномерных длинноволновых солитонов в пограничном слое приводит к их самофокусировке и коллапсу. Найдена точная верхняя граница для полной энергии возмущений, когда коллапс все еще невозможен и когда любое возмущение асимптотически исчезает с течением времени. Теоретические предсказания находятся в качественном согласии с экспериментами [22].

3.4.1 Предыстория

В нелинейной акустике имеется аналог самофокусировки света. Это коллапс акустических волн с положительной дисперсией [27] который можно рассматривать как нелинейная стадия неустойчивости Кадомцева-Петвиашвили (КП) одномерного солитона [20]. В отличие от самофокусировки света, механизм КП-неустойчивости и, следовательно, коллапса акустических волн связан с уменьшением скорости солитона и увеличинением амплитуды. Несмотря на физическое различие между самосфокусировкой света и акустическим коллапсом, оба явления могут быть описаны и, соответственно, объяснены на основе общего гамильтонового описания. С этой точки зрения, причина образования особенности за конечное время - та же самая для обеих систем, а именно, она связана с неограниченностью Гамильтониа снизу (когда другие инварианты зафиксированы, константы) из-за нелинейных членов. В некотором смысле коллапс можно рассматривать как падение частицы в неограниченном, самосогласованном потенциале. Если же Гамильтониан ограничен снизу, тогда эта нижняя граница соответствует стацоинарному решению солитонного типа, на которм нелинейность и дисперсия точно компенсируют друг длуга. Согласно теореме Ляпунова, такие солитоны устойчивы [103]. Волновые коллапсы, как правило присущи многомерным системам (см., например, [12], [13]), а устоичивые солитонные решения обычно встречаются в одномерном случае. Это связано с увеличением влияния нелинейности с ростом размерности пространства d.

В этом разделе мы покажем каким образом эти общие аргументы действу-

ют в конкретном случае при описании нелинейной динамики длинноволновых осцилляций в пограничном слое, в пределе малой вязкости. В параграфе 3.4.2 представлена модель - двумерное обобщение уравнения Бенджамина-Оно, впервые полученного в работе [46]. В параграфе 3.4.3 обсуждаются общие свойства одно- и двумерных солитонов, которые распространяются в пограничном слое, и представляют собой "замедления"на среднем профиле скорости. В следующем параграфе, 3.4.4 мы показываем, что одномерные солитоны являются устойчивыми относительно одномерных же возмущений, но неустойчивы относительно изгибных возмущений (аналогично акустическим солитонам). Эта неустойчивость - фокусирующего типа, приводящая на нелинейной стадии к разбиению солитона на отдельные кластеры и дальнейшей самофокусировке каждого кластера 3.4.5. В параграфе 3.4.6 найдена точная верхняя граница для энергии возмущений, когда коллапс ещё невозможен, и асимптотическое состояние на больших временах лишь уширяется из-за дисперсии. Параграф 3.4.7 посвящен численному эксперименту. И, наконец, в последнем параграфе теоретические и численные результаты сравниваются с экспериментальными данными о когерентных структурах в пограничном слое [22].

3.4.2 Модель

Рассмотрим сдвиговый поток, параллельный плоским стенкам, с постоянной (по времени) скоростью U, зависящей от нормальной координаты z. Мы предполагаем, что

- функция $U(z)$ не имеет точек перегиба,

- U стремится к некоторой константе U_0 при $z \to \infty$ и
- первая производная U' в точке $z = 0$ положительна, $U'(0) > 0$.

Такой профиль скорости $U(z)$ стационарен лишь для идеальной жидкости, т.е в рамках уравнения Эйлера. Даже для малой вязкости он уже не стационарен: пограничный слой становится турбулентным, но среднее значение скорости $\overline{U(z)}$ ведет себя также.

Рассмотрим низкочастотные колебания (с длиной волны $\lambda \gg h$), считая их невзаимодействующими с высокочастотными флуктуациями. В этом случае для низкочастотых движений можно использовать уравнение Эйлера. Влияние вязкости будет малым, Re^{-1} в сравнении с дисперсией осцилляций в пограничном слое. В слабонелинейном приближении уравнение для амплитуды $A(x, y, t)$ низкочастотных колебаний может было получено в [46] из уравнения Эйлера:

$$\frac{\partial A}{\partial t} + U'(0) A A_x + U_0 h \frac{\partial}{\partial x} \hat{k} A = 0 \tag{3.22}$$

где $h = U_0/U'(0)$. Фурье-преобразование интегрального оператора $\hat{k}$ это $|\vec{k}| = (k_x^2 + k_y^2)^{1/2}$. Из-за этого оператора уравнение становится двумерным. В одномерном же случае этот оператор выражается через преобразование Гильберта $\hat{H}$,

$$\hat{H}\psi(x) = \frac{1}{\pi} P.V. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\psi(x')}{x' - x} dx',$$

следующим образом

$$\hat{k} = \partial_x \hat{H}.$$

Зависимость от третьей координаты z в этом уравнении отсутствует, поскольку в главном порядке флуктуации скорости вдоль потока (параллель-

ного x) выражаются через амплитуду A следующим образом

$$v_x \approx A(x, y, t)U'(z). \tag{3.23}$$

Две другие компоненты - малы по сравнению с ней.

Уравнение (3.22) было получено Шрирой в [46]. Оно является двумерным обобщением известного уравнения Бенджамина-Оно (БО), описывающего длинные волны в стратифицированной жидкости. Следует отметить, что подобное уравнение, учитывающее малую вязкость, было получено в работе [7].

Уравнение (3.22) записано с точностью $(kh)^3$. В следующем порядке у частоты $\omega = U_0 h k_x |k|$ появляется мнимая часть $\sim (kh)^3$, которая обеспечивает диссипацию. Поэтому, об этих осцилляциях можно говорить как о квази-модах, не противоречащих общей теореме Рэлея см., например, [32], [33]). Согласно этой теореме, сдвиговое течение с профилем скорости без перегиба, линейная спектральная проблема не имеет связанных состояний, а только непрерывный спектр.

Обсуждаемые здесь квази-моды действительно являются длинноволновыми пакетами собственных мод из непрерывного спектра (см. подробнее в [46]). Эти квази-моды ведут себя как волны с дисперсией и слабым затуханием. Поэтому нелинейные эффекты, обсуждаемые ниже, аналогичны, например, акустическим волнам со слабой дисперсией. Также важно, что уравнение (3.22) не подразумевает малости отношения k_y/k_x, что, наоборот, имеет место для уравнения Кадомцева-Петвиашвили [20]. Это связано со структурой низкочастотных квази-мод. Поперечная компонента флукту-

аций скорости для этих мод малы по сравнению с продольными, [46]. Аналогичная ситуация имеет место для ионно-акустических волн в замагниченой плазме, где ионы двигаются в основном вдоль внешнего магнитного поля, [166], а также для гравитационных волн на мелкой воде, когда продольная компонента скорости много больше, чем вертикальная. Одномерность нелинейного члена $\sim AA_x$ в уравнении (3.22) и объясняется такой структурой мод.

3.4.3 Солитоны и их свойства

Обычным масштабным преобразованием

$$\vec{r} \to -\vec{r}h, \quad t \to t/U'(0), \quad A \to -6hu \tag{3.24}$$

уравнение (3.22) может быть переписано в стандартном (для уравнения Бенджамина-Оно) виде:

$$u_t = \frac{\partial}{\partial x}\hat{k}u - 6uu_x = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\delta H}{\delta u} \tag{3.25}$$

где Гамильтониан есть

$$H = \frac{1}{2}I_1 - I_2.$$

Здесь

$$I_1 = \int u\hat{k}ud\vec{r}, \quad I_2 = \int u^3 d\vec{r}.$$

Кроме Гамильтониана H, уравнение (3.25) сохраняет другие интегралы: импульс $\vec{P}$ с компонентами

$$P_x = 1/2\int u^2 d\vec{r}, \quad P_y = 1/2\int u\phi_y d\vec{r}, \quad \phi_x = u,$$

"массу"на линии $y = const$,

$$M(y) = \int u dx,$$

и центр "масс",

$$\int \vec{r} u d\vec{r} - 6P_x \vec{n} t = const,$$

где $\vec{n}$ единичный вектор вдоль оси x. В частности, из последнего интеграла следует, что центр "масс"движется вдоль оси x с постоянной скоростью. Поэтому естественно искать солитонное решение, движущееся вдоль оси x в виде

$$u = u_s(x - Vt, y). \tag{3.26}$$

Форма солитона определяется уравнением

$$-Vu_s - \hat{k}u_s + 3u_s^2 = 0. \tag{3.27}$$

Для одномерного случая решение уравнения (3.27) известно, его явный вид

$$u_s = \frac{2V}{3(x^2V^2 + 1)} \quad (V > 0). \tag{3.28}$$

В двумерном случае уравнение (3.27) имеет более широкий класс решений. Здесь нас интересует только солитон основного состояния, аксиально симметричное решение уравнения (3.27) без нулей. Такое решение было найдено численно в работе [1].

Здесь важно отметить, что скорость двумерного солитона, так же как и его амплитуда - положительные величины. В физических переменных, и одномерныk и двумерные солитоны, как это следует из замены (3.24), двигаются против течения и имеют отрицательную амплитуду. Это означает,

что в реальном течении солитоны выглядят как "дырки"на профиле скорости. Именно поэтому они они движутся медленнее основного потока. Когда амплитуда солитона растет, его скорость падает, и наоборот.

Получим некоторые интегральные соотношения для солитонных решений уравнения (3.26), необходимых для дальнейшего рассмотрения. Представим (3.27) в вариационном виде

$$\frac{\delta}{\delta u}(H + VP_x) = 0.$$

Солитон (3.27) является стационарной точкой Гамильтониана H при фиксированном $P_x \equiv P$. Если солитон реализует минимум H, тогда он устойчив по Ляпунову.

Рассмотрим масштабное преобразование, сохраняющее P_x,

$$u_s(\vec{r}) \to \frac{1}{a^{d/2}} u_s(\vec{r}/a). \tag{3.29}$$

При этом преобразовании Гамильтониан H становится функцией масштабного параметра a,

$$H(a) = \frac{I_{1s}}{2a} - \frac{I_{2s}}{a^{d/2}}. \tag{3.30}$$

Здесь и далее индекс s означает величину интегралов на солитонном решении. Нетрудно видеть, что в одномерном случае $H(a)$ имеет минимум, соответствующий солитонному решению (3.28),

$$H_{min} = -\frac{1}{2} I_{1s}. \tag{3.31}$$

Кроме того, из очевидного равенства

$$\frac{\partial H}{\partial a}_{a=1} = 0$$

можно получить

$$I_{1s} = dI_{2s}. \tag{3.32}$$

Умножая затем (3.27) на u_s и интегрирую по x, можно получить ещё одно соотношение между I_{1s} и I_{2s}:

$$-2VP_{xs} - I_{1s} + 3I_{2s} = 0. \tag{3.33}$$

Следовательно, для $d = 1$ имеем

$$I_{1s} = I_{2s} = VP_{xs}$$

или

$$H_s = -\frac{1}{2}VP_{xs}. \tag{3.34}$$

Для двумерного же случая, Гамильтониан на солитонном решении тождественно равен нулю в силу соотношения (3.32). Если в начальных условиях $I_2 > I_1$, тогда (при $d = 2$), в соответствии с (3.30), он будет неограничен снизу при $a \to 0$. В противоположном случае, $I_1 > I_2$, Гамильтониан будет ограничен снизу.

Далее покажем, что на солитонном решении (3.28) достигается точный минимум H в классе одномерных функций принадлежащих пространству $W_2^{1/2}$ с нормой

$$||u|| = \left(\int u^2 dx + \int u\hat{k}u dx\right)^{1/2}.$$

Для этого используем неравенство [121], следующее из теоремы вложения для пространств $W_2^{1/2}$ и L_3:

$$\int u^3 d\vec{r} \le C\left(\int u\hat{k}u d\vec{r}\right)^{d/2}\left(\int u^2 d\vec{r}\right)^{\frac{3-d}{2}} \tag{3.35}$$

где наилучшая константа C определяется как верхняя граница функционала

$$F = \int u^3 d\vec{r} \Big(\int u \hat{k} u d\vec{r} \Big)^{-d/2} \Big(\int u^2 d\vec{r} \Big)^{\frac{d-3}{2}} . \tag{3.36}$$

Отметим, что, во-первых, $\sup F$ достигается на аксиально симметричном решении без нулей, и, во-вторых, F, согласно определению (3.36), является инвариантным по отношению к масштабированию координат и u. В частности это значит, что уравнение для стацинарной точки F, т.е., уравнение Лагранжа

$$\frac{\delta F}{\delta u} = 0,$$

всегда может быть представлено в следующем виде

$$-Vu - \hat{k}u + 3u^2 = 0.$$

Это уравнение совпадает с уравнением (3.27) для солитонного решения. Следовательно, учитывая (3.34), неравенство (3.35) для одномерного случая даёт:

$$I_2 \leq I_{1s}^{1/2} I_1^{1/2} \frac{P_x}{P_{xs}}. \tag{3.37}$$

Подставляя эту оценку в H и полагая $P_x = P_{xs}$, приходим к следующему неравенству для H,

$$H \geq H_s + 1/2(I_1^{1/2} - I_{1s}^{1/2})^2, \tag{3.38}$$

являющемуся точным для одномерного солитона. Таким образом, в одномерном случае минимум H достигается на солитонном решении, и тем самым доказана его устоичивость по отношению к малым одномерным возмущениям. Здесь следует отметить, что эта устойчивость была независимо доказана ранее в работе [154].

3.4.4 Неустойчивость одномерного солитона

Рассмотрим задачу о неустойчивости одномерного солитона по отношению к двумерным возмущениям. Будем искать решение уравнения (3.25) в виде $u = u_s(x') + u'(x', y, t)$ $(x' = x - Vt)$, полагая возмущение u' малым по сравнению с u_s. После лианеризации получаем спектральную задачу для амплитуды ψ,

$$-i\omega\psi + \frac{\partial}{\partial x} L_0\psi - \frac{\partial}{\partial x}(\hat{k} - \hat{k}_0)\psi = 0. \tag{3.39}$$

где u' и ψ связаны следующим образом

$$u' = \psi(x') \exp(-i\omega t + ik_y y)$$

.

Здесь введены следующие обозначения

$$L_0 = -V - \hat{k}_0 + 6u_s; \quad \hat{k}^2 = k_y^2 + \hat{k}_0^2, \quad \hat{k}_0 = -\partial_x \hat{H}.$$

действуя аналогично работе [29], будем искать решение спектральной задачи в длинноволновом пределе ($\epsilon = k_y V \ll 1$). Разложим ψ и ω в ряд по степеням малого параметра ϵ, полагая:

$$\psi = \psi_0 + \epsilon\psi_1 + \epsilon^2\psi_2 + ..., \quad \omega = \epsilon\omega_1 + \epsilon^2\omega_2 + ...$$

В главном порядке получаем

$$\partial_x L_o \psi_0 = 0.$$

Одно из решений этого уравнения уже известно. Это нейтральная мода $\psi_0 = \partial u_s/\partial x$, соответствующая сдвигу солитона.

Сдедующий порядок по ϵ дает

$$-i\omega\partial_x u_s + \frac{\partial}{\partial x} L_0\psi_1 = 0,$$

или

$$-i\omega u_s + L_0\psi_1 = 0. \tag{3.40}$$

Дифференцируя уравнение (3.27) по V,

$$-u_s + L_0\frac{\partial u_s}{\partial V} = 0,$$

и сравнивая полученный результат с (3.40), получаем

$$\psi_1 = -i\omega\frac{\partial u_s}{\partial V}. \tag{3.41}$$

В следующем порядке по ϵ из (3.39) следует

$$-i\omega\psi_1 - \frac{k_y^2}{2}\hat{H}\psi_0 = -\partial_x L_0\psi_2. \tag{3.42}$$

Условие разрешимости для этого уравнения определяет соотношение между ω и k_y. Чтобы его получить, необходимо умножить скалярно слева на собственную функцию Φ_0 оператора, сопряженного к $\partial_x L_0$, с нулевым собственным числом (легко показать, что $\Phi_0 = u_s$). После несложных вычислений, учитывая (3.32) и (3.34), получаем неустойчивость одномерного солитона по отношению к изгибным возмущениям его фронта:

$$\omega^2 = -\frac{k_y^2 V^2}{2} < 0. \tag{3.43}$$

Смысл этой неустойчивости - такой же как и для неустойчивости Кадомцева-Петвиашвили для акустического солитона в среде с положительной дисперсией [20]. Как будет показано в параграфе 3.4.3, скорость солитона уменьша-

ется с ростом его амплитуды. Поэтому области, в которых поперечная модуляция приводит к уменьшению амплитуды, движутся быстрее, чем области с большой амплитудой. Это неустойчивость самофокусировочного типа.

3.4.5 Коллапс

Развитие неустойчивости (3.43) должно приводить разбиению солитона на отдельные кластеры. Довольно очевидно, что для волновых чисел k, больших, чем обратный характерный размер солитона V, неустойчивость должна отсутствовать. Максимум же инкремента (3.43) находится при $k_y \propto V$. И следовательно размер кластера должен быть порядка размера самого одномерного солитона. После разбиения на отдельные кластеры, нелинейная динамика системы будет определяться уже поведением кластеров. Какова же дальнейшая судьба кластеров? Здесь имеется несколько возможностей. Первая, это образование солитона. Но это противоречит сохранению энергии. Для двумерного солитона Гамильтониан равен нулю, а для одномерного - он отрицателен. Таким образом, формирование солитона в результате эволюции кластера выглядит маловероятным. По той же самой причине (сохранение энергии) кластер не может исчезнуть, так как течение с малыми амплитудами имеет положительный Гамильтониан.

С другой стороны, как было показано в параграфе 3.4.3, в двумерном случае с отрицательным Гамильтонианом, такое состояние неограничено снизу при масштабном преобразовании, когда параметр $a \to 0$. Это значит, что коллапс кластера более вероятен. С точки зрения закона сохранения энергии, этот процесс возможен. Конечно, важно также учитывать и излучение

волн малой амплитуды из кластера.

Посмотрим на свойства масштабного преобразования системы (3.25) с другой стороны. В двумерном случае Гамильтониан уравнения (3.25) при масштабном преобразовании (3.29) ведет себя также, как в двумерном уравнении Шредингера (НУШ), в фокусирующем случае. Главная особеннось НУШ, что это уравнение описывает критический коллапс. Для более слабой нелинейности, или меньшей размерности пространства, коллапс становится невозможным. Он становится возможным начиная с $d = 2$. В параграфе 3.4.3 было показано, что Гамильтониан при $d = 1$ ограничен снизу, и коллапс поэтому невозможен. Для случая же $d = 3$, член Гамильтониана, отвечающий за нелинейность, ($H_{int} = -I_2$), обеспечивает неограниченость H снизу при $a \to 0$, как это видно из (3.30) если только $I_2 > 0$. В этом смысле двумерное уравнение Бенджамина-Оно также является пограничным, как и двумерный НУШ. И можно его также считать критической моделью. Здесь следует вспомнить,что в критическом НУШ (см., например, [174]) форма коллапсирующей структуры практически совпвдает с формой двумерного солитона. Поэтому и для двумерного уравнения Бенджамина-Оно (по аналогии с НУШ) можно ожидать такого же поведения. Легко видеть, что уравнение (3.25) допускает автомодельное коллапсирующее решение (точнее подстановку) вида

$$u = \frac{1}{(t_0 - t)} f(\vec{\xi}), \quad \vec{\xi} = \frac{\vec{r}}{(t_0 - t)}$$

где f определяется уравнением

$$-1/2(f + (\vec{\xi}\nabla)f) + \frac{\partial}{\partial \xi_x}\hat{k}_\xi f + 6f\frac{\partial}{\partial \xi_x} f = 0.$$

На этом решении P, имеющий смысл энергии возмущений, конечен. Однако, здесь аналогия с двумерным НУШ заканчивается. В частости, не удаётся получить аналог теоремы вириала, как это имеет место для НУШ [153].

3.4.6 О пороге коллапса

Тем не менее, для неколлапсирующего сектора (так же как и для НУШ [174, 153]) можно найти критическую энергию $P_{x,cr}$, ниже которой коллапс невозможен. Как будет показано далее, величина $P_{x,cr}$ определяется основным солитонным состоянием. Важно, что эта энергия не зависит от V. Действительно, согласно (3.27),

$$u_s(\vec{r}) = V g(\xi), \quad \xi = \vec{r}/V$$

где g подчиняется уравнению

$$-g - \hat{k}_\xi g + 3g^2 = 0. \tag{3.44}$$

Поэтому

$$P_{x,cr} = \frac{1}{2}\int g^2(\xi) d\vec{\xi}.$$

Покажем, что при $P_x < P_{x,cr}$, Гамильтониан ограничен снизу и его нижняя граница равна нулю, и достигается на распределении, в котором $\int u\hat{k}u d\vec{x} \to 0$.

Используем неравенство (3.37) и определим наилучшую константу C для $d = 2$. Учитывая соотношение (3.44) вместо (3.36), получаем для двумерного случая

$$\int u^3 dr \le \frac{1}{2}\left(\int u_s^2 dr\right)^{-1/2}\left(\int u^2 dr\right)^{1/2}\int u\hat{k}u dr.$$

Подставляя это неравенство в H,

$$H \geq \frac{1}{2}\left[1 - \left(\frac{P_x}{P_{x,cr}}\right)^{1/2}\right] \int u\hat{k}ud\vec{r} \tag{3.45}$$

получаем, что Гамильтониан при фиксированном $P_x < P_{x,cr}$ ограничен снизу, и его нижняя граница достигается на решениях со средним $\langle k \rangle \to 0$. Это и означает, что для начальных условий с $P_x \leq P_{x,cr}$ распределение будет расплываться из-за дисперсии и асимптотически исчезать.

3.4.7 Численный эксперимент

Основная трудность численного моделирования уравнения (3.25) связана с тем, что как солитоны, так и коллапсирующие кластеры имеют медленно спадающие хвосты. Это требует достаточно большую область (или мелкую разностную сетку), чтобы обеспечить убывание хвостов к границе моделирования. В расчетах использовалась Лоренцева и Гауссова форма для начальной амплитуды скорости $u(r,t)$ с характерным безразмерным размером(?) порядка 1, а размер области моделирования L был $32\pi x32\pi$. На масштабах порядка 1, необходимо хорошее разрешение солитота, так что число узлов сетки было выбрано $512x512$. Использовались два типа граничных условий. Первый - периодические по обоим переменным. Второй - (для того чтобы обеспечить излучение из области) "поглощающие", при которых уже не сохраняется ни H ни P_x. (Впервые такая идея примеялась в численном моделировании коллапса для трёхмерного коллапса в уравнении Кадомцева-Петвиашвили [27, 26]). Граничные условия были выбраны периодическими

по y и

$$u|_{x=0} = \hat{k}u|_{x=0} = \hat{k}u|_{x=L} = 0.$$

Для удобства уравнение (3.25) решалось в движущейся системе отсчета, где коллапсирующий кластер неподвижен, или двигается медленно. Т.е. фактически численно решалось уравнение

$$u_t - Vu_x = \frac{\partial}{\partial x}\hat{k}u - 6uu_x \tag{3.46}$$

Здесь $V(t)$ выбиралась численно на каждом шаге по времени, чтобы поддерживать пик коллапса в центре области моделирования.

Применялась стандартная схема Лакса-Вендрофа для уравнения (3.46) записанного в дивергентном виде:

$$u_t + F_x = 0. \tag{3.47}$$

Здесь поток $F = -Vu - \hat{k}u + 3u^2$, и интегральный оператор $\hat{k}u$ вычислялся спектральным методом.

Исследовались две проблемы:

I) Порог неустойчивости для начальных условий вблизи $H = 0$.

Для этих вариантов использовалась Лоренцева форма для начальных условий

$$u(\vec{r}) = \frac{2/3|\vec{V}|}{1 + (V_x x)^2 + (V_y y)^2}.$$

Изменением V можно получить как положительное, так и отрицательное значение H. Для всех начальных условий с $P_x > P_{x,cr}$ и $H < 0$ наблюдался коллапс. Как видно из Рисунка 3.12, амплитуда пика, который движется с ускорением, увеличвается. Зависимость от времени скорости пика (центра

коллапса, см. 3.46), показанные на Рисунке 3.13 и Рисунке 3.12, похожи, что свидетельствует в пользу автомодельного режима. Имульс вдоль оси x, вычисленный по четверти области вокруг коллапса, остаётся почти постоянным во всех вариантах с отрицательным H. В то же самое время, Гамильтониан также вычисленный по четверти области, уменьшается. (Рисунок 3.16), что говорит об излучении энергии, отмеченном в параграфе 3.4.5. С приближением к центру коллапса, анизотропия исчезает, и распределение вогруг центра становится почти симметричным (Рисунки 3.14,3.15).

Для начальных условий с $P_x < P_{x,cr}$ ($H > 0$) наблюдалась медленная эволюция: распределение u в центре медленно падает. Эволюция спектра для $P_x < P_{x,cr}$ указывает на перераспределение энергии в длинноволновые масштабы, что находится в согласии с оценкой (3.45).

II) Неустойчивость одномерного солитона.

В качестве начальных условий использовалась периодическая нелинейная волна

$$u_p(x) = \frac{k}{3}\frac{\sinh(k/V)}{\cosh(k/V) - \cos(kx)} - 1 \tag{3.48}$$

возмущенная в поперечном направлении:

$$u_{ini}(x,y) = u_p(x)\left[1 + 0.1\cos\left(\frac{2\pi y}{L_y}\right)\right]. \tag{3.49}$$

Периодическая волна (3.48) есть точное решение одномерного уравнения Бенджамина-Оно (3.25). Эта волна переходит в солитон (3.28) при $k \to 0$. В численном эксперименте $k = 0.0625$, $V = 0.4$ и размер области моделирования, естественно совпадал с периодом волны. Гамильтониан H с такими параметрами был равен -0.668. На Рисунке 3.15 изображен профиль ско-

рости при $y = 0$ и времени $T = 45$. Временная эволюция линий уровня $u(x, y)$ показана на Рисунке 3.17. Легко видеть, как появляются кластеры. Стабилизация роста кластеров не наблюдалась.

3.4.8 Ремарки

Здесь мы хотим обратиться к экспериментальной работе [22], в которой суммированы многолетние результаты исследования генерации когерентных структур в пограничном слое вибрирующей пластиной (см. также [60], [21]). Согласно этим данным, на начальной стадии генерятся одномерные солитоны, затем (на больших расстояниях от края пластины) одномерные солитоны демонстрируют неустоййчивость, и распадаются на "шипы", т.е. локализованные трёхмерные когерентные структуры. На ещё больших расстояниях от пластины наблюдается самофокусировка этих структур. И затем происходит образование вихрей и их разделение.

Теория и численный эксперимент, представленные в этом разделе 3.4, объясняют эти экпериметы вплоть до образования вихрей, когда уравнение (3.25) становится неприменимым. До этого было неясно, применимо ли оно для количественного описания эксперимента, хотя сравнение теоретических результатов основанных на анализе одномерной модели (3.25), сделанное в работе [7], показало хорошее соответствие с экспериментом.

Здесь же показано, что имеется согласие между экспериментом и теорией и численным экспериментом представленными в этом разделе.

И наконец, хотелось бы ответить на вопрос, почему во вмогих других экспериментах в пограничном слое самофокусировка солитонов не наблюда-

лась, или не различалась на фоне турбулентного шума. По-видимому, это объясняется тем, что коллапс в пограничном слое возможен только начиная с некоторого уровня энергии импульса. А если уровень невысок, то коллапс отсутствует.

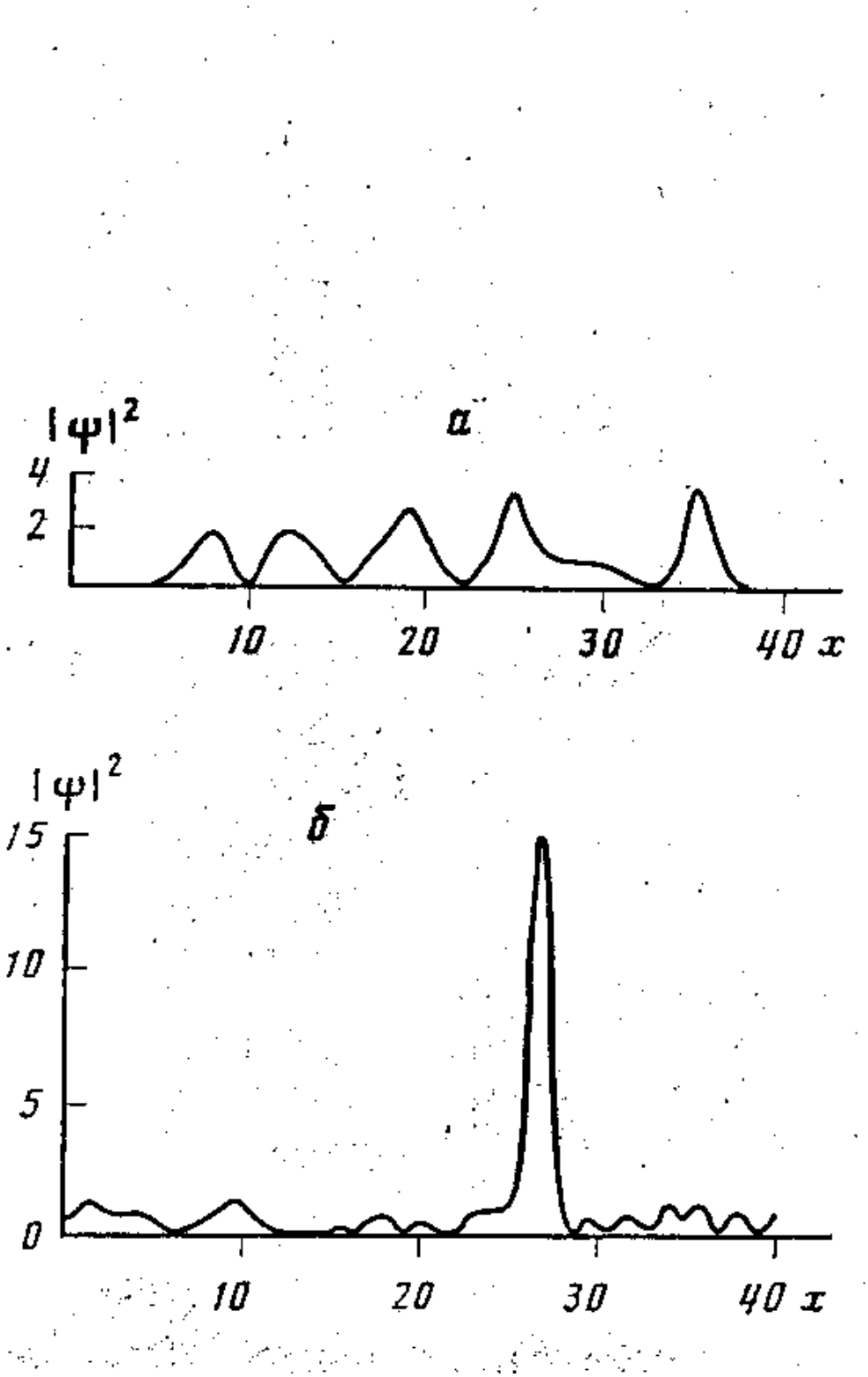


Рис. 3.4: Фрагменты эволюции решения уравнения $i\psi_t + \psi_{xx} + |\psi|^2[(1 + 0.1|\psi|^2)/(1 + 0.5|\psi|^2)]\psi = 0$ с параметрами $\psi_0 = 1$, $L = 40$; время t равно 52,2 (а), 765,4 (б)

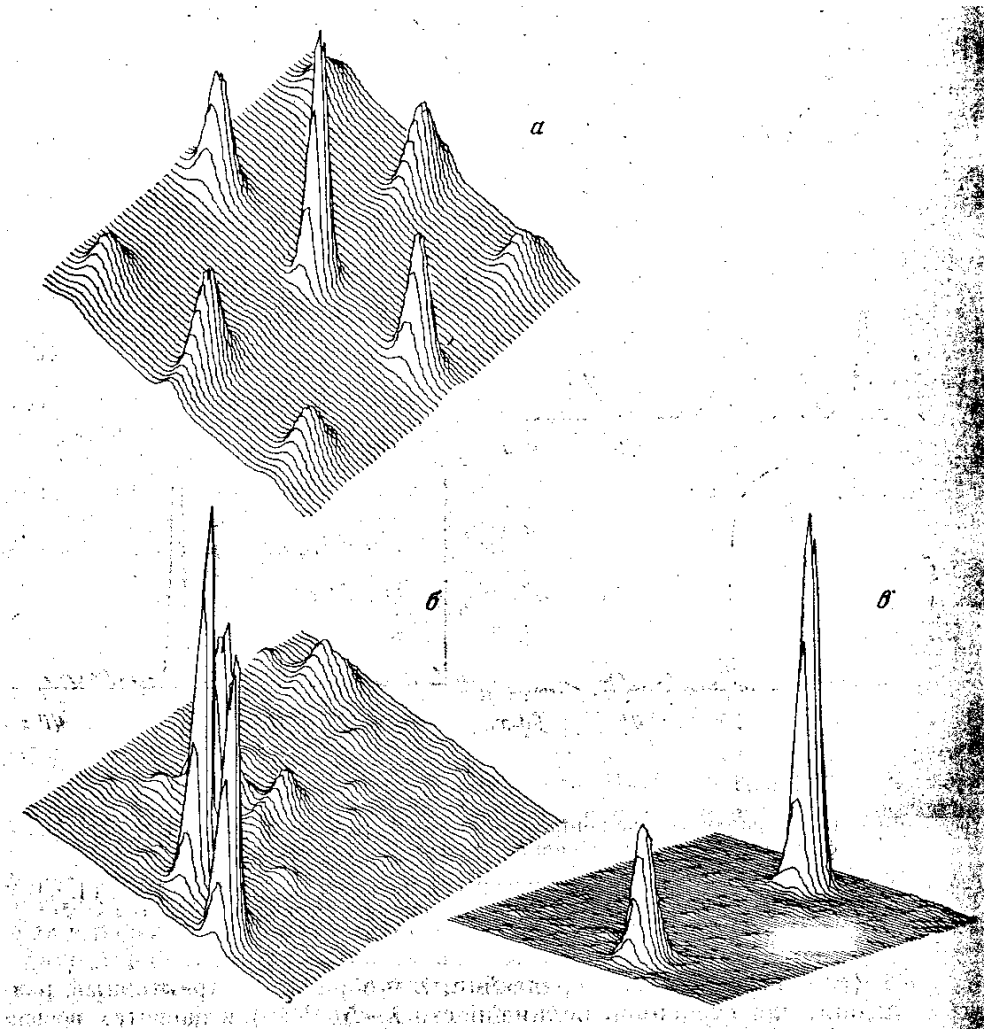


Рис. 3.5: Фрагменты эволюции решения уравнения $i\psi_t + \psi_{xx} + \psi_{yy} + |\psi|^{\frac{1}{2}}\psi = 0$ с параметрами $\psi_0 = 1$, $L = 37,7$; а - $t = 13$, $|\psi_{max}|^2 = 33,2$; б - $t = 277$, $|\psi_{max}|^2 = 63,9$; в - $t = 2681$, $|\psi_{max}|^2 = 137,3$

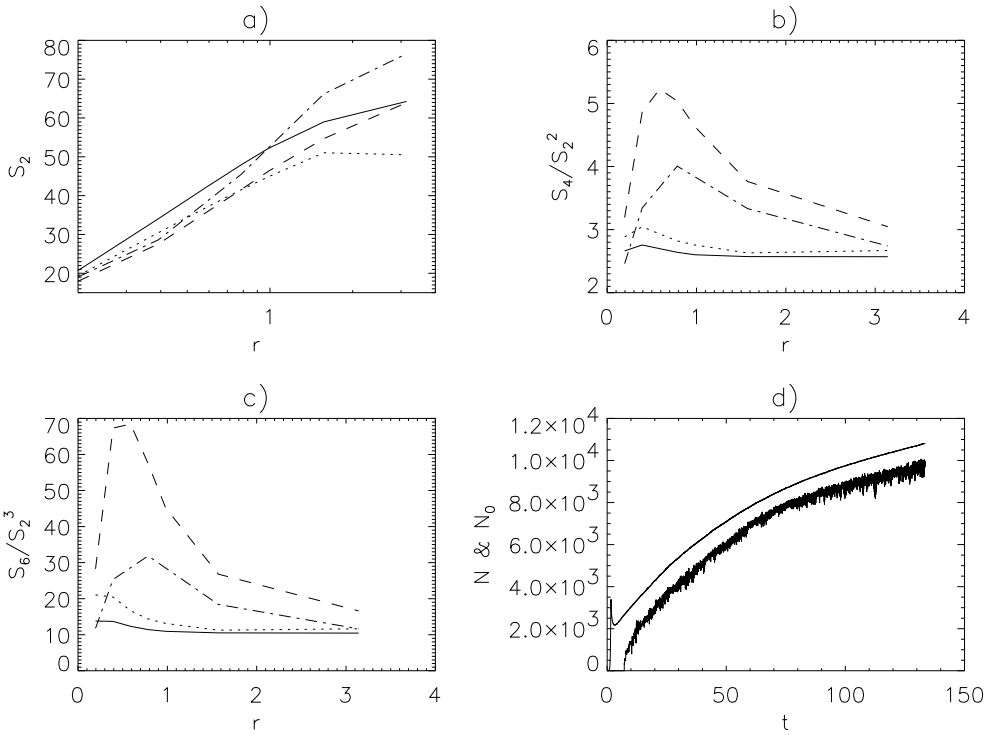


Рис. 3.6: a,b,c) Корреляционные функции в раличные времена: $-\cdot- \; t = 32$, $--- \; t = 55$, $\cdots \; t = 92$, сплошная $t = 127$; d) полное число волн N и число волн в конденсате N_0.

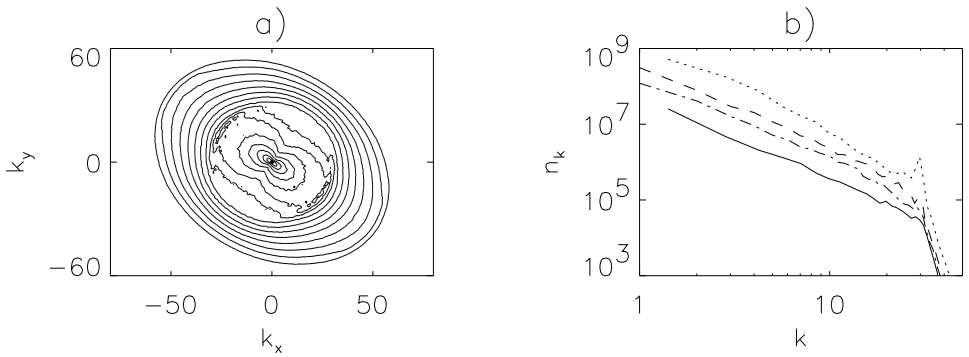


Рис. 3.7: a) Линии уровня спектра $n(k_x, k_y)$ усреднённого по времени $t = (119 \div 127)$, b) "Срезы"спектра по разным напрвлениям в k-пространстве: $- \cdot -$ $k_x = 0$, $- - -$ $k_y = 0$, $\cdots$ $k_x = -k_y$, сплошная $k_x = k_y$.

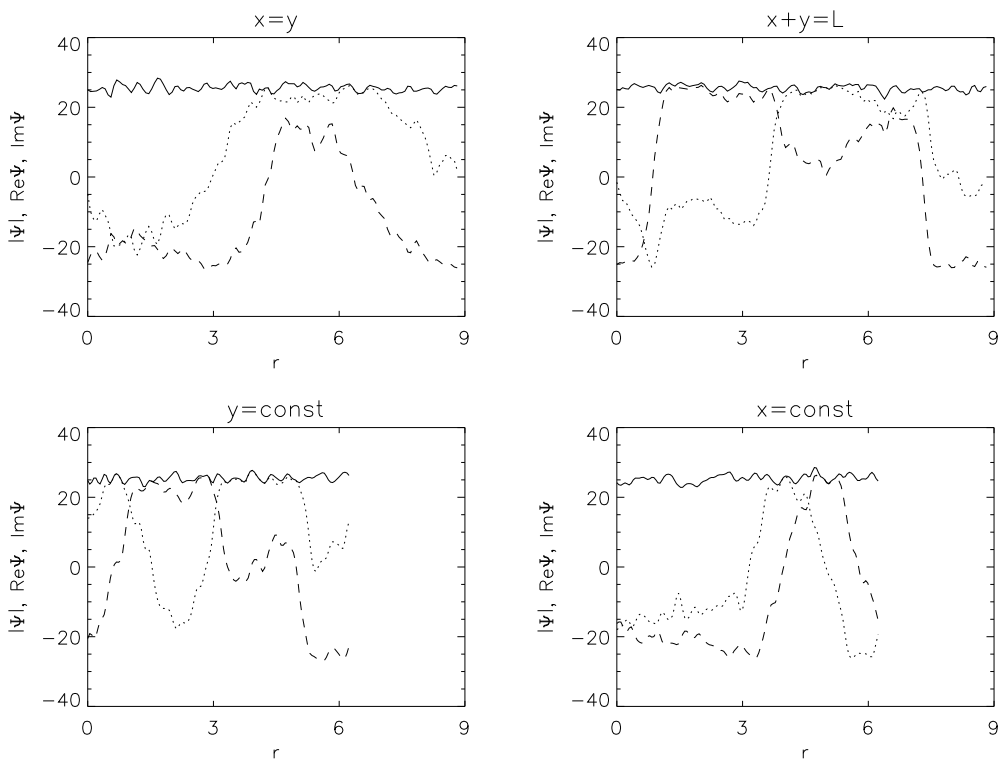


Рис. 3.8: Профили $|\Psi|$ (сплошная), $\mathrm{Re}\,\Psi$ (пунктирная) $\mathrm{Im}\,\Psi$ (точечная), взятые вдоль диагонали и вдоль границ области моделирования, $t = 135.7$

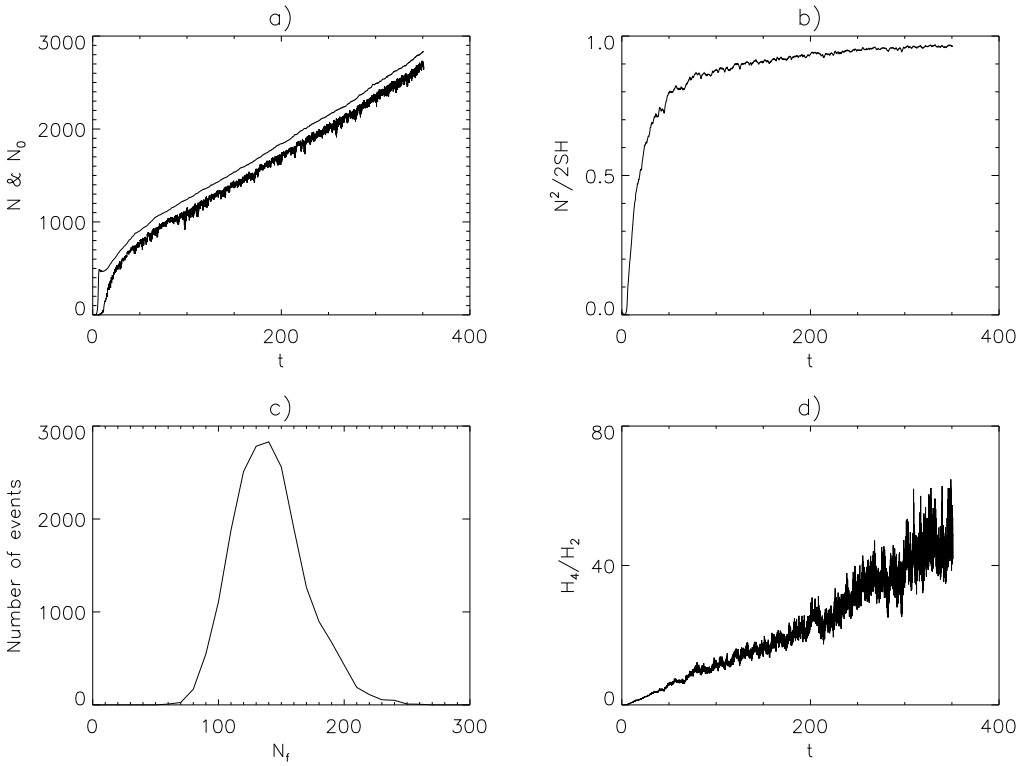


Рис. 3.9: Эволюция на большие времена при умеренной накачке: a) полное число квантов N и число квантов в конденсате N_0, b) отношение квадрата числа квантов к Гамильтониану, c) гистограмма внеконденсатных флуктуаций, d) параметр нелинейности $H_4/H_2 = \int |\psi|^4\, dxdy / 2\int |\nabla\psi|^2\, dxdy$.

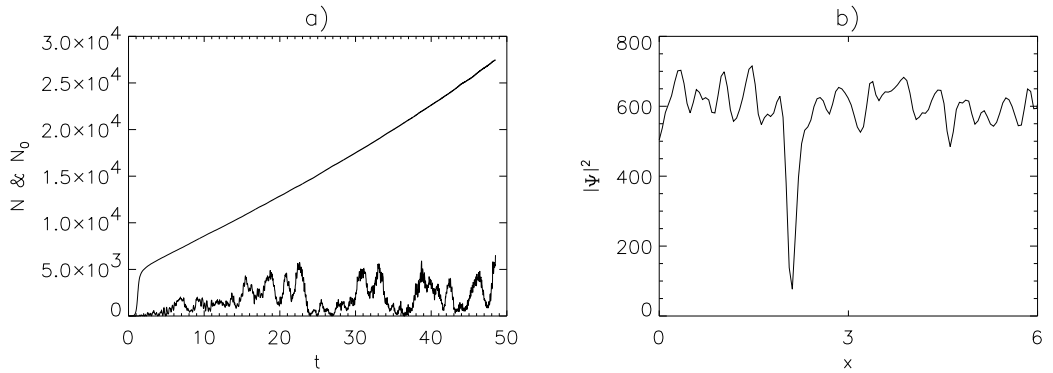


Рис. 3.10: a) Начальная стадия эволюции при большой накачке: полное число частиц N и число квантов в конденсате N_0, b) пространственная зависимость $|\psi(x,\pi)|^2$ при $t = 42.4$.

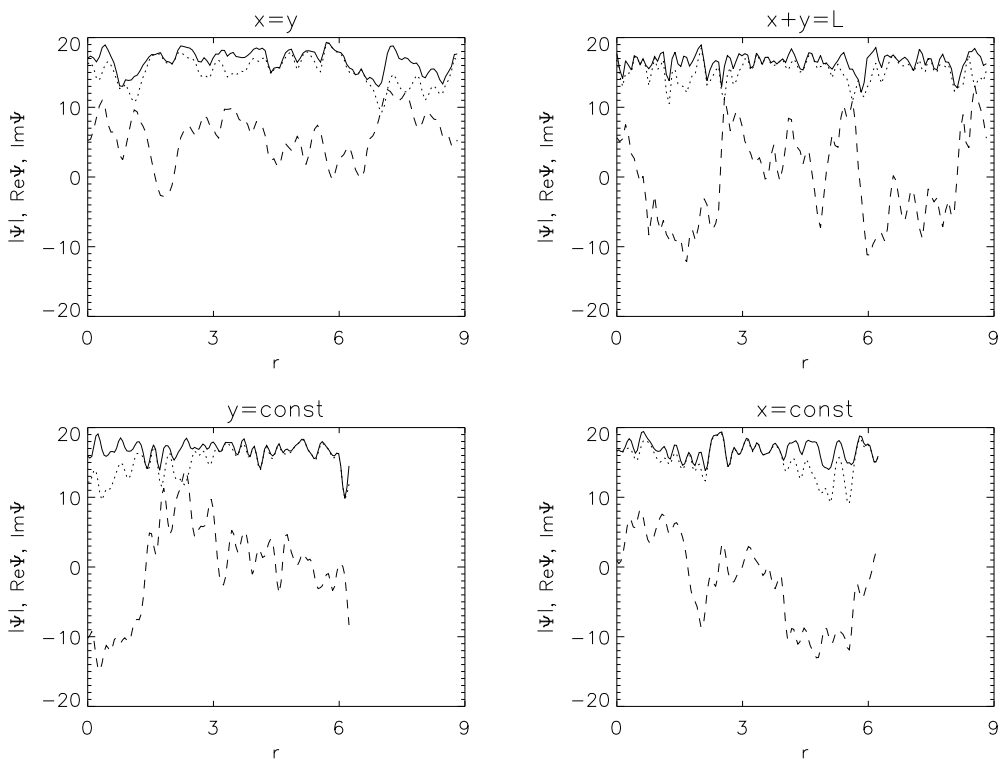


Рис. 3.11: Профили $|\Psi|$ (сплошная), $\mathrm{Re}\,\Psi$ (пунктирная) и $\mathrm{Im}\,\Psi$ (точечная) вдоль диагонали и вдоль границ области, $t = 45.4$

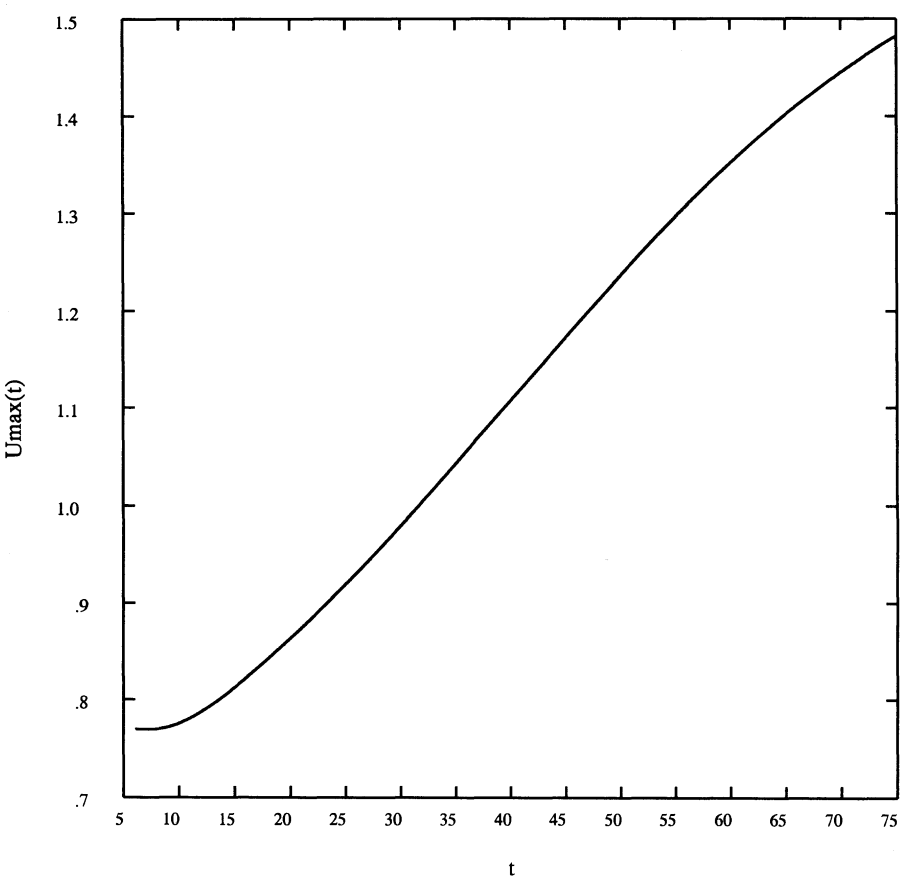


Рис. 3.12: Зависимость максимума амплитуды от времени в режиме коллапса, $H < 0$.

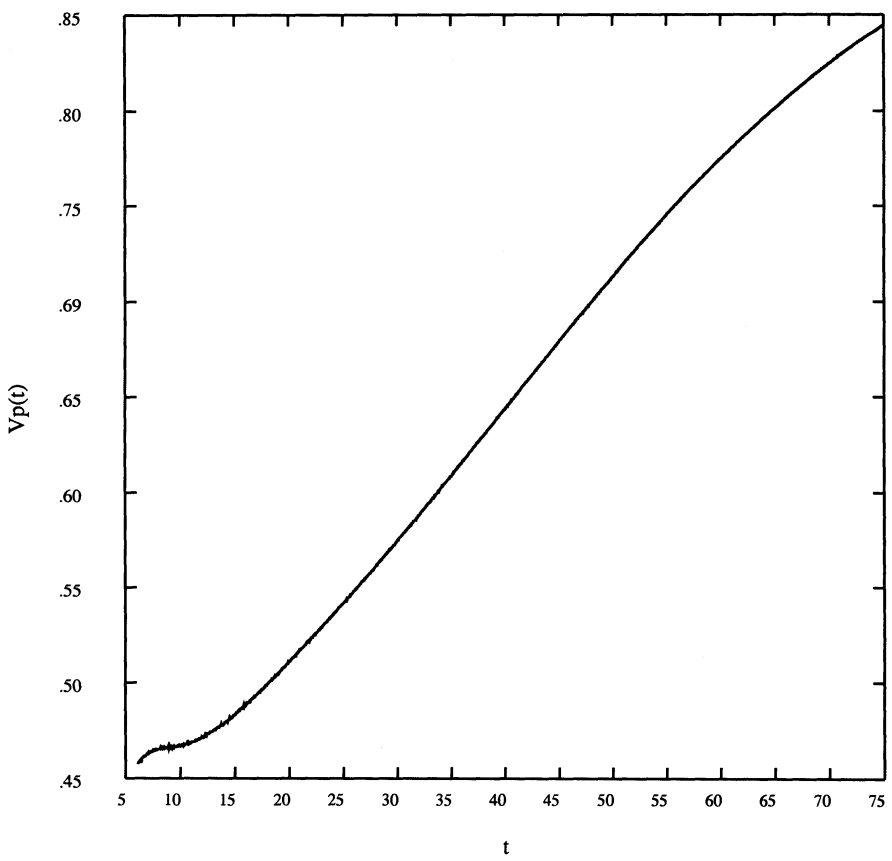


Рис. 3.13: Зависимость максимума скорости от времени в режиме коллапса

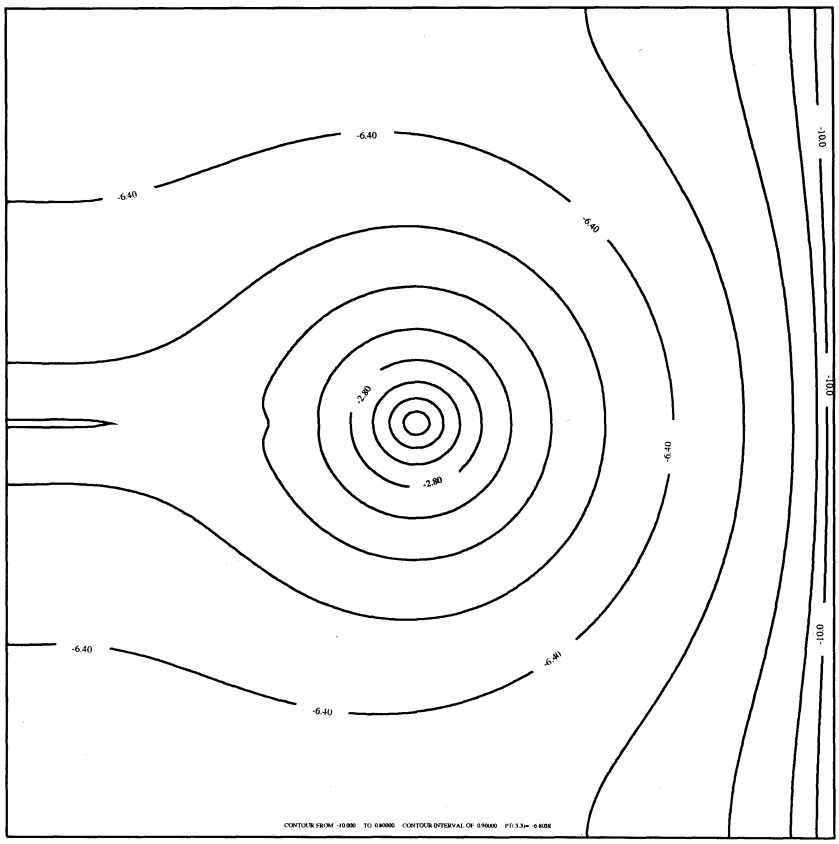


Рис. 3.14: Линии уровня $u(x, y)$ при $t = 45$ в режиме коллапса. Изображены контуры от -10,0 до 0,8. Интервал - 0,9.

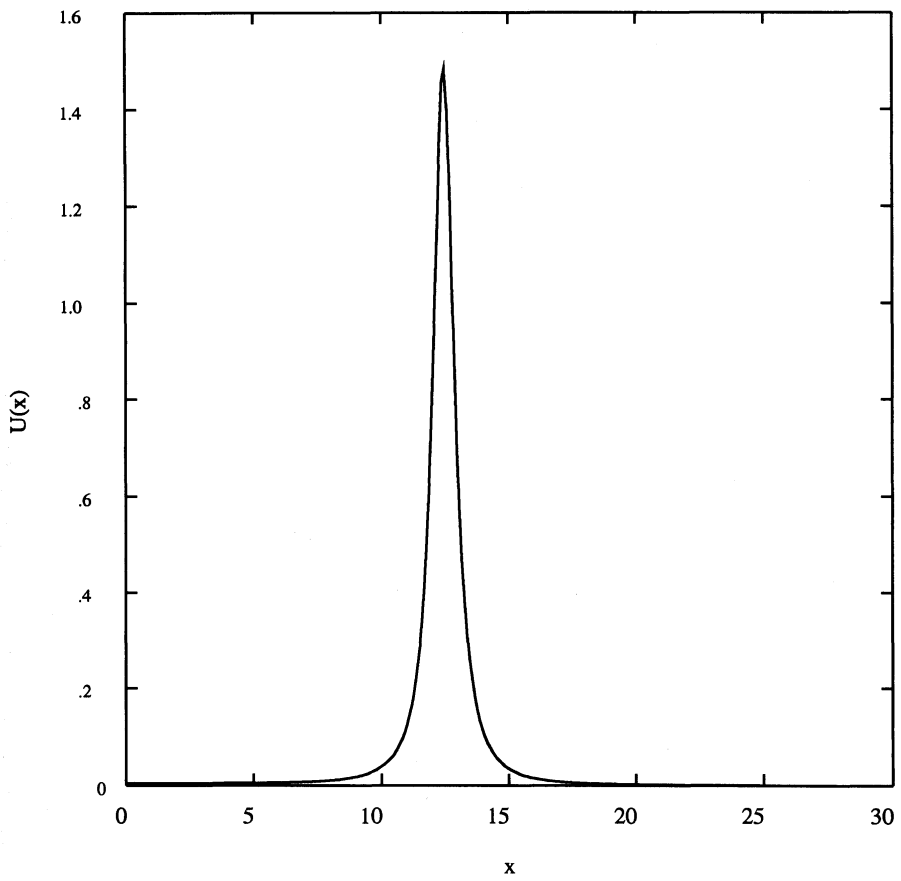


Рис. 3.15: Зависимость $u(x,0)$ при $t = 45$.

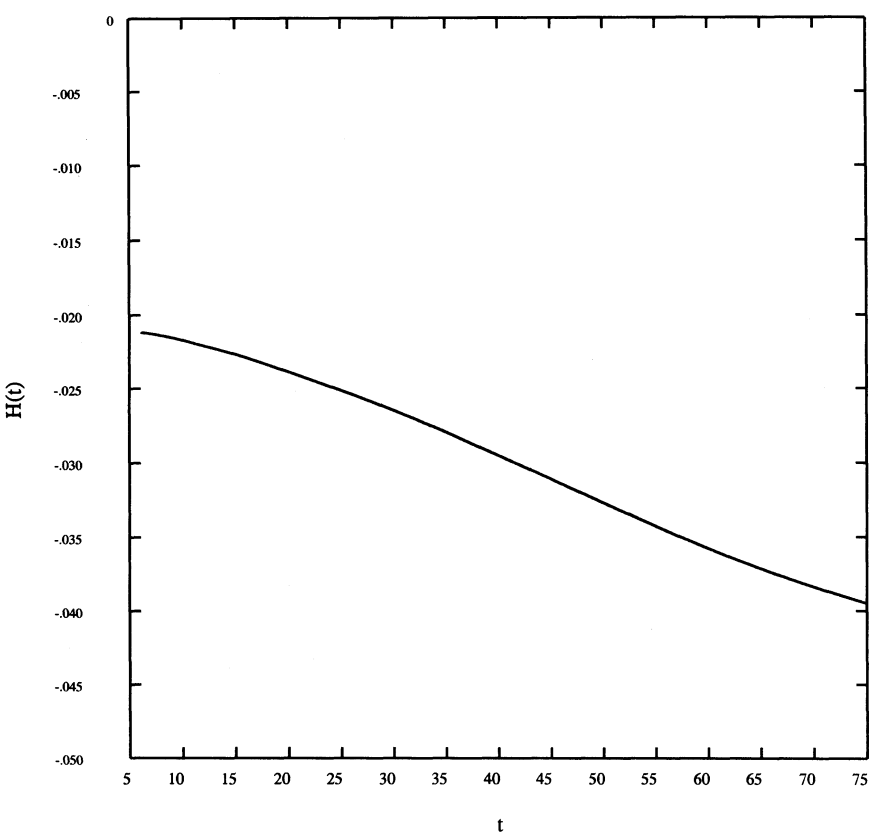


Рис. 3.16: Эволюция Гамильтониана в режиме коллапса. Гамильтониан уменьшается из-за излучения волн.

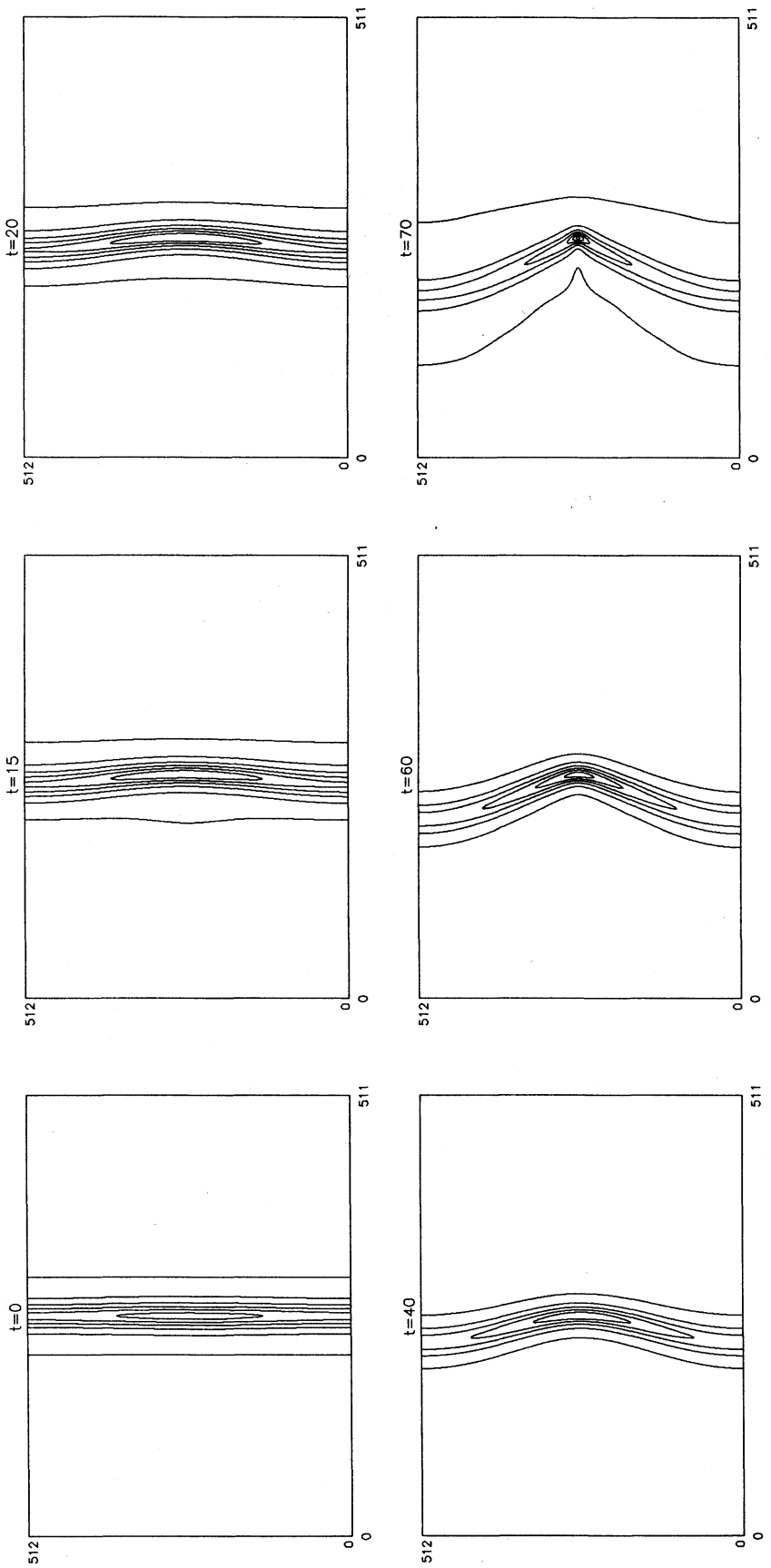


Рис. 3.17: Эволюция $u(x, y)$ (линии уровня) с начальными условиями в виде возмущенной периодической волны (3.49). Видно развитие неустойчивости.

4 Слабая волновая турбулентность волн на поверхности жидкости

В этой главе представлены результаты, опубликованные с работах [174, 190, 191, 192]

Одним из краеугольных камней в теории слабой турбулентности является резонансное взаимодействие волн. Как было показано в работе [92] и развито в [68], условия резонанса на характерной для численных эксперимеров дискретной сетке не могут быть выполнены точно. Однако, как было отмечено выше, в настоящий момент прямое численное моделирование динамических уравнений является важной задачей. Это один из основных инструментов проверки правильности предположений и допущений, в рамках которых была получена теория слабой турбулентности. Поэтому перед нами с очевидностью встают следующие вопросы:

- Как дискретная сетка волновых чисел в численном моделировании влияет на резонансное взаимодействие?
- Может ли нелинейный сдвиг частоты уширить резонансное множество таким образом, чтобы дискретность перестала быть важной?

В данной главе изучаются эти вопросы для капиллярных и гравитационных волн на поверхности несжимаемой жидкости бесконечной глубины.

Эта глава построена следующим образом. В разделе 4.1 мы запишем динамические уравнения в виде ряда по степеням крутизны волн. В разделе 4.2 выписаны уравнения на дискретной сетке. Случай капиллярных волн на поверхности глубокой воды рассмотрен в разделе 4.2.1. Произведено численное моделирование резонансного распада монохроматической волны. Получена картина вторичных распадов, формирующих Колмогоровский каскад. В разделе 4.2.2 приведены результаты моделирования распада монохроматической гравитационной волны на поверхности бесконечно глубокой идеальной жидкости. В параграфе 4.3 приводятся результаты численного моделирования слаботурбулентной системы гравитационных волн, возбуждаемой стохастической внешней силой. В заключении 4.3.3 приведен анализ полученных результатов и выводы, полезные для построения численной модели слабой турбулентности гравитационных поверхностных волн.

4.1 Введение

Рассмотрим безвихревое потенциальное течение идеальной несжимаемой жидкости бесконечной глубины. Для простоты будем считать плотность жидкости $\rho = 1$. Потенциал скорости ϕ при этих условиях удовлетворяет уравнению Лапласа:

$$\triangle\phi = 0, \tag{4.1}$$

в области со следующими границами:

$$-\infty < z < \eta(\vec{r}), \quad \vec{r} = (x, y). \tag{4.2}$$

Граничные условия на потенциал таковы

$$\begin{gathered} \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial \phi}{\partial z}\Big|_{z=\eta}, \\ \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2\right)\Big|_{z=\eta} + \sigma(\sqrt{1+(\nabla\eta)^2} - 1) = 0, \end{gathered} \tag{4.3}$$

при $z = \eta$, и:

$$\phi_z|_{z=-\infty} = 0, \tag{4.4}$$

при $z \to -\infty$. Здесь $\eta = \eta(x, y, t)$ смещение поверхности от состояния покоя. Энергия системы описывается следующей функцией:

$$H = T + U,$$

$$T = \frac{1}{2}\int d^2r \int\limits_{-\infty}^{\eta} (\nabla\phi)^2 dz, \tag{4.5}$$

$$U = \sigma\int(\sqrt{1+(\nabla\eta)^2} - 1)d^2r + \frac{1}{2}g\int \eta^2 d^2r, \tag{4.6}$$

где σ – коэффициент поверхностного натяжения, g – ускорение свободного падения. В [9] было показано, что эта система является гамильтоновой. Гамильтоновы переменные в этом случае — это смещение поверхности $\eta(x, y, t)$ и потенциал скосроти на поверхности жидкости $\psi(x, y; t) = \phi(x, y, \eta(x, y; t); t)$. Уравнения Гамильтона имеют следующий вид:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\delta H}{\delta \psi}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\delta H}{\delta \eta}. \tag{4.7}$$

Применяя разложение энергии по крутизне, можно получить следующее выражение для Гамильтониана:

$$\begin{gathered} H = \frac{1}{2}\int\left(\sigma|\nabla\eta|^2 + g\eta^2 + \psi\hat{k}\psi\right)d^2r + \frac{1}{2}\int\eta\left[|\nabla\psi|^2 - (\hat{k}\psi)^2\right]d^2r + \\ + \frac{1}{2}\int\eta(\hat{k}\psi)\left[\hat{k}(\eta(\hat{k}\psi)) + \eta\triangle\psi\right]d^2r. \end{gathered} \tag{4.8}$$

Здесь введен линейный оператор $\hat{k}$, суть действия которого на функцию сводится к следующему: надо взять фурье-компоненты функции, умножить их на модуль k и выполнить обратное преобразование Фурье. Для правильного описания нелинейного взаимодействия гравитационных волн необходимо использовать разложение Гамильтониана до членов четвертого порядка включительно. Уравнения Гамильтона (4.7) принимают вид:

$$\begin{aligned}\dot{\eta} &= \hat{k}\psi - (\nabla(\eta\nabla\psi)) - \hat{k}[\eta\hat{k}\psi] + \hat{k}(\eta\hat{k}[\eta\hat{k}\psi]) + \\ &\quad + \tfrac{1}{2}\triangle[\eta^2\hat{k}\psi] + \tfrac{1}{2}\hat{k}[\eta^2\triangle\psi], \\ \dot{\psi} &= \sigma\triangle\eta - g\eta - \tfrac{1}{2}\left[(\nabla\psi)^2 - (\hat{k}\psi)^2\right] - [\hat{k}\psi]\hat{k}[\eta\hat{k}\psi] - [\eta\hat{k}\psi]\triangle\psi.\end{aligned} \tag{4.9}$$

Удобно записать гамильтониан в фурье-гармониках:

$$\psi_{\vec{k}} = \frac{1}{2\pi}\int \psi_{\vec{r}} e^{i\vec{k}\vec{r}} d^2r, \quad \eta_{\vec{k}} = \frac{1}{2\pi}\int \eta_{\vec{r}} e^{i\vec{k}\vec{r}} d^2r. \tag{4.10}$$

Члены гамильтониана примут следующий вид:

$$\begin{aligned}&H = H_0 + H_1 + H_2 + ..., \\ &H_0 = \frac{1}{2}\int (|k||\psi_{\vec{k}}|^2 + \sigma|k|^2|\eta_{\vec{k}}|^2 + g|\eta_{\vec{k}}|^2) d\vec{k}, \\ &H_1 = -\frac{1}{4\pi}\int L_{\vec{k}_1\vec{k}_2}\psi_{\vec{k}_1}\psi_{\vec{k}_2}\eta_{\vec{k}_3}\delta(\vec{k}_1+\vec{k}_2+\vec{k}_3) d\vec{k}_1 d\vec{k}_2 d\vec{k}_3, \\ &H_2 = \frac{1}{16\pi^2}\int M_{\vec{k}_1\vec{k}_2\vec{k}_3\vec{k}_4}\eta_{\vec{k}_1}\psi_{\vec{k}_2}\eta_{\vec{k}_3}\psi_{\vec{k}_4}\delta(\vec{k}_1+\vec{k}_2+\vec{k}_3+\vec{k}_4) d\vec{k}_1 d\vec{k}_2 d\vec{k}_3 d\vec{k}_4,\end{aligned} \tag{4.11}$$

Здесь введены матричные элементы

$$\begin{aligned}&L_{\vec{k}_1\vec{k}_2} = (\vec{k}_1\vec{k}_2) + |\vec{k}_1||\vec{k}_2|, \\ &M_{\vec{k}_1\vec{k}_2\vec{k}_3\vec{k}_4} = |\vec{k}_2||\vec{k}_4|\left[\frac{1}{2}(|\vec{k}_1+\vec{k}_2| + |\vec{k}_1+\vec{k}_4| + \right. \\ &\left. + |\vec{k}_3+\vec{k}_2| + |\vec{k}_3+\vec{k}_4|) - |\vec{k}_2| - |\vec{k}_4|\right].\end{aligned} \tag{4.12}$$

Вследствие вещественности функций η и ψ их фурье-образы обладают симметрией $\eta_{\vec{k}} = \eta^*_{-\vec{k}}$. Поэтому удобнее ввести канонические переменные:

$$a_{\vec{k}} = \sqrt{\frac{\omega_k}{2k}}\eta_{\vec{k}} + i\sqrt{\frac{k}{2\omega_k}}\psi_{\vec{k}}, \tag{4.13}$$

здесь ω_k — это закон дисперсии волн:

$$\omega_k = \sqrt{\sigma k^3 + gk}. \tag{4.14}$$

Члены Гамильтониана (4.11) принимают вид:

$$\begin{aligned}
&H_0 = \int \omega_k |a_{\vec{k}}|^2 d\vec{k},\\
&H_1 = \frac{1}{6}\frac{1}{2\pi}\int E^{\vec{k}_0}_{\vec{k}_1\vec{k}_2}(a_{\vec{k}_1}a_{\vec{k}_2}a_{\vec{k}_0} + a^*_{\vec{k}_1}a^*_{\vec{k}_2}a^*_{\vec{k}_0})\delta(\vec{k}_1+\vec{k}_2+\vec{k}_0)d\vec{k}_1 d\vec{k}_2 d\vec{k}_0 +\\
&+\frac{1}{2}\frac{1}{2\pi}\int C^{\vec{k}_0}_{\vec{k}_1\vec{k}_2}(a_{\vec{k}_1}a_{\vec{k}_2}a^*_{\vec{k}_0} + a^*_{\vec{k}_1}a^*_{\vec{k}_2}a_{\vec{k}_0})\delta(\vec{k}_1+\vec{k}_2-\vec{k}_0)d\vec{k}_1 d\vec{k}_2 d\vec{k}_0,\\
&H_2 = \frac{1}{4}\frac{1}{(2\pi)^2}\int W_{\vec{k}_1\vec{k}_2\vec{k}_3\vec{k}_4}(a_{\vec{k}_1}a_{\vec{k}_2}a_{\vec{k}_3}a_{\vec{k}_4} + a^*_{\vec{k}_1}a^*_{\vec{k}_2}a^*_{\vec{k}_3}a^*_{\vec{k}_4})\times\\
&\times\delta(\vec{k}_1+\vec{k}_2+\vec{k}_3+\vec{k}_4)d\vec{k}_1 d\vec{k}_2 d\vec{k}_3 d\vec{k}_4 +\\
&+\frac{1}{4}\frac{1}{(2\pi)^2}\int F_{\vec{k}_1\vec{k}_2\vec{k}_3\vec{k}_4}(a^*_{\vec{k}_1}a_{\vec{k}_2}a_{\vec{k}_3}a_{\vec{k}_4} + a_{\vec{k}_1}a^*_{\vec{k}_2}a^*_{\vec{k}_3}a^*_{\vec{k}_4})\times\\
&\times\delta(\vec{k}_1-\vec{k}_2-\vec{k}_3-\vec{k}_4)d\vec{k}_1 d\vec{k}_2 d\vec{k}_3 d\vec{k}_4 +\\
&+\frac{1}{4}\frac{1}{(2\pi)^2}\int D_{\vec{k}_1\vec{k}_2\vec{k}_3\vec{k}_4}(a_{\vec{k}_1}a_{\vec{k}_2}a^*_{\vec{k}_3}a^*_{\vec{k}_4}\delta(\vec{k}_1+\vec{k}_2-\vec{k}_3-\vec{k}_4)d\vec{k}_1 d\vec{k}_2 d\vec{k}_3 d\vec{k}_4.
\end{aligned} \tag{4.15}$$

Здесь введены такие обозначения матричных элементов:

$$\begin{aligned}
&E^{\vec{k}_0}_{\vec{k}_1\vec{k}_2} = V^{k_0}_{\vec{k}_1\vec{k}_2} + V^{k_1}_{\vec{k}_0\vec{k}_2} + V^{k_2}_{\vec{k}_0\vec{k}_1},\\
&C^{\vec{k}_0}_{\vec{k}_1\vec{k}_2} = V^{k_0}_{\vec{k}_1\vec{k}_2} - V^{k_1}_{-\vec{k}_0\vec{k}_2} - V^{k_2}_{-\vec{k}_0\vec{k}_1},\\
&V^{k_0}_{\vec{k}_1\vec{k}_2} = \sqrt{\frac{\omega_{k_1}\omega_{k_2}k_0}{8k_1k_2\omega_{k_0}}}L_{\vec{k}_1\vec{k}_2},\\
&F_{\vec{k}_1\vec{k}_2\vec{k}_3\vec{k}_4} = W_{\vec{k}_1,-\vec{k}_2,-\vec{k}_3,-\vec{k}_4} - W_{-\vec{k}_2,\vec{k}_1,-\vec{k}_3,-\vec{k}_4} + W_{-\vec{k}_3,-\vec{k}_2,\vec{k}_1,-\vec{k}_4} -\\
&-W_{-\vec{k}_4,-\vec{k}_2,-\vec{k}_3,\vec{k}_1},\\
&D_{\vec{k}_1\vec{k}_2\vec{k}_3\vec{k}_4} = W_{\vec{k}_1,-\vec{k}_3,\vec{k}_2,-\vec{k}_4} + W_{\vec{k}_3,-\vec{k}_1,\vec{k}_4,-\vec{k}_2} -\\
&-\left(W_{\vec{k}_1,\vec{k}_2,-\vec{k}_3,-\vec{k}_4} + W_{\vec{k}_1,\vec{k}_2,-\vec{k}_4,-\vec{k}_3} + W_{\vec{k}_2,\vec{k}_1,-\vec{k}_3,-\vec{k}_4} + W_{\vec{k}_2,\vec{k}_1,-\vec{k}_4,-\vec{k}_3}\right),\\
&W_{\vec{k}_1\vec{k}_2\vec{k}_3\vec{k}_4} = \sqrt{\frac{k_1\omega_{k_2}k_3\omega_{k_4}}{16\omega_{k_1}k_2\omega_{k_3}k_4}}M_{\vec{k}_1\vec{k}_2\vec{k}_3\vec{k}_4}.
\end{aligned} \tag{4.16}$$

Несмотря на кажущуюся громоздкость представления Гамильтониана в таких перемнных, смысл каждого члена в выражении (4.15) ясен и понятен.

Член H_0 отвечает линейной эволюции начальных условий. Выражение с H_1 отвечает трехволновым взаимодействиям, в том числе: член с $E^{\vec{k}_0}_{\vec{k}_1\vec{k}_2}$ дает генерацию второй гармоники, а член с $C^{\vec{k}_0}_{\vec{k}_1\vec{k}_2}$ отвечает трехволновым процессам распада и слияния. Выражение с H_2 представляет четырехволновые процессы, а именно: член с $W_{\vec{k}_1\vec{k}_2\vec{k}_3\vec{k}_4}$ дает генерацию третьей гармоники, $F_{\vec{k}_1\vec{k}_2\vec{k}_3\vec{k}_4}$ — распад и слияние одной волны в три, $D_{\vec{k}_1\vec{k}_2\vec{k}_3\vec{k}_4}$ — рассеяние двух волн в две волны. Уравнения Гамильтона в этих переменных принимают вид:

$$
\begin{aligned}
&\dot{a}_{\vec{k}} = -i\frac{\delta H}{\delta a^*_{\vec{k}}} = -i\omega_k a_{\vec{k}} - \\
&-\frac{i}{2}\frac{1}{2\pi}\int C^{\vec{k}}_{\vec{k}_1\vec{k}_2} a_{\vec{k}_1} a_{\vec{k}_2}\delta(\vec{k}_1+\vec{k}_2-\vec{k})d\vec{k}_1 d\vec{k}_2 - \\
&-\frac{i}{2\pi}\int C^{\vec{k}_0}_{\vec{k}\vec{k}_2} a^*_{\vec{k}_2} a_{\vec{k}_0}\delta(\vec{k}+\vec{k}_2-\vec{k}_0)d\vec{k}_2 d\vec{k}_0 - \\
&-\frac{i}{2}\frac{1}{2\pi}\int E^{\vec{k}}_{\vec{k}_1\vec{k}_2} a^*_{\vec{k}_1} a^*_{\vec{k}_2}\delta(\vec{k}_1+\vec{k}_2+\vec{k})d\vec{k}_1 d\vec{k}_2 - \\
&-\frac{i}{(2\pi)^2}\int W_{\vec{k}_1\vec{k}_2\vec{k}_3\vec{k}} a^*_{\vec{k}_1} a^*_{\vec{k}_2} a^*_{\vec{k}_3}\delta(\vec{k}_1+\vec{k}_2+\vec{k}_3+\vec{k})d\vec{k}_1 d\vec{k}_2 d\vec{k}_3 - \\
&-\frac{i}{4}\frac{1}{(2\pi)^2}\int F_{\vec{k}\vec{k}_2\vec{k}_3\vec{k}_4} a_{\vec{k}_2} a_{\vec{k}_3} a_{\vec{k}_4}\delta(\vec{k}-\vec{k}_2-\vec{k}_3-\vec{k}_4)d\vec{k}_2 d\vec{k}_3 d\vec{k}_4 - \\
&-\frac{i}{4}\frac{3}{(2\pi)^2}\int F_{\vec{k}_1\vec{k}_2\vec{k}_3\vec{k}} a_{\vec{k}_1} a^*_{\vec{k}_2} a^*_{\vec{k}_3}\delta(\vec{k}_1-\vec{k}_2-\vec{k}_3-\vec{k})d\vec{k}_1 d\vec{k}_2 d\vec{k}_3 - \\
&-\frac{i}{2}\frac{1}{(2\pi)^2}\int D_{\vec{k}_1\vec{k}_2\vec{k}_3\vec{k}} a_{\vec{k}_1} a_{\vec{k}_2} a^*_{\vec{k}_3}\delta(\vec{k}_1+\vec{k}_2-\vec{k}_3-\vec{k})d\vec{k}_1 d\vec{k}_2 d\vec{k}_3.
\end{aligned}
\tag{4.17}
$$

Изложенные результаты можно найти во множестве источников (например, [164, 167]), в том числе и для более общего случая жидкости конечной глубины [162].

4.2 Резонансные взаимодействия волн на дискретной сетке

Рассмотрим динамические уравнения (4.17) в периодической области с линейными размерами L_x и L_y. Если мы находимся на дискретной сетке с количеством точек по направлениям N_x и N_y соответственно, то волновой вектор и координатный радиус вектор могут быть представлены как:

$$\vec{k} = \left(\frac{2\pi}{L_x}k_x, \frac{2\pi}{L_y}k_y\right), \quad \vec{r} = \left(\frac{L_x}{N_x}r_x, \frac{L_y}{N_y}r_y\right), \tag{4.18}$$

где k_i пробегает дискретный ряд значений от $-N_i/2$ до $N_i/2$, а r_i — от 0 до N_i. Соответственно, все знаки интегрирования заменятся на знаки суммирования, а δ-функция Дирака — на ее дискретный аналог, символ Кронекера $\triangle$. Для сокращения записи будем писать просто знак суммы $\sum$, подразумевая, что суммирование производится по всем повторяющимся символам. Тогда можем переписать уравнения (4.17) в следующем виде:

$$\begin{aligned}
&\dot{a}_{\vec{k}} = -i\omega_k a_{\vec{k}} - \\
&-\frac{i}{2}\frac{2\pi}{L_xL_y}\sum C^{\vec{k}}_{\vec{k}_1\vec{k}_2} a_{\vec{k}_1} a_{\vec{k}_2} \triangle_{\vec{k}_1+\vec{k}_2,\vec{k}} - \\
&-\frac{i2\pi}{L_xL_y}\sum C^{\vec{k}_0}_{\vec{k}\vec{k}_2} a^*_{\vec{k}_2} a_{\vec{k}_0} \triangle_{\vec{k}+\vec{k}_2,\vec{k}_0} - \\
&-\frac{i}{2}\frac{2\pi}{L_xL_y}\sum E^{\vec{k}}_{\vec{k}_1\vec{k}_2} a^*_{\vec{k}_1} a^*_{\vec{k}_2} \triangle_{\vec{k}_1+\vec{k}_2+\vec{k},0} - \\
&-\frac{i(2\pi)^4}{(L_xL_y)^3}\sum W_{\vec{k}_1\vec{k}_2\vec{k}_3\vec{k}} a^*_{\vec{k}_1} a^*_{\vec{k}_2} a^*_{\vec{k}_3} \triangle_{\vec{k}_1+\vec{k}_2+\vec{k}_3+\vec{k},0} - \\
&-\frac{i}{4}\frac{(2\pi)^4}{(L_xL_y)^3}\sum F_{\vec{k}\vec{k}_2\vec{k}_3\vec{k}_4} a_{\vec{k}_2} a_{\vec{k}_3} a_{\vec{k}_4} \triangle_{\vec{k},\vec{k}_2+\vec{k}_3+\vec{k}_4} - \\
&-\frac{i}{4}\frac{3(2\pi)^4}{(L_xL_y)^3}\sum F_{\vec{k}_1\vec{k}_2\vec{k}_3\vec{k}} a_{\vec{k}_1} a^*_{\vec{k}_2} a^*_{\vec{k}_3} \triangle_{\vec{k}_1,\vec{k}_2+\vec{k}_3+\vec{k}} - \\
&-\frac{i}{2}\frac{(2\pi)^4}{(L_xL_y)^3}\sum D_{\vec{k}_1\vec{k}_2\vec{k}_3\vec{k}} a_{\vec{k}_1} a_{\vec{k}_2} a^*_{\vec{k}_3} \triangle_{\vec{k}_1+\vec{k}_2,\vec{k}_3+\vec{k}}.
\end{aligned} \tag{4.19}$$

Удобно избавиться от линейного члена подстановкой:

$$a_{\vec{k}} = A_{\vec{k}} e^{i\omega_k t}. \tag{4.20}$$

В этих переменных уравнения принимают вид:

$$\begin{aligned}
\dot{A}_{\vec{k}} = &-\frac{i}{2}\frac{2\pi}{L_x L_y}\sum C^{\vec{k}}_{\vec{k}_1\vec{k}_2} A_{\vec{k}_1} A_{\vec{k}_2} \triangle_{\vec{k}_1+\vec{k}_2,\vec{k}} e^{i(\omega_{k_1}+\omega_{k_2}-\omega_k)t} - \\
&-\frac{i2\pi}{L_x L_y}\sum C^{\vec{k}_0}_{\vec{k}\vec{k}_2} A^*_{\vec{k}_2} A_{\vec{k}_0} \triangle_{\vec{k}+\vec{k}_2,\vec{k}_0} e^{i(-\omega_k-\omega_{k_2}+\omega_{k_0})t} - \\
&-\frac{i}{2}\frac{2\pi}{L_x L_y}\sum E^{\vec{k}}_{\vec{k}_1\vec{k}_2} A^*_{\vec{k}_1} A^*_{\vec{k}_2} \triangle_{\vec{k}_1+\vec{k}_2+\vec{k},0} e^{i(-\omega_{k_1}-\omega_{k_2}-\omega_k)t} - \\
&-\frac{i(2\pi)^4}{(L_x L_y)^3}\sum W_{\vec{k}_1\vec{k}_2\vec{k}_3\vec{k}} A^*_{\vec{k}_1} A^*_{\vec{k}_2} A^*_{\vec{k}_3} \triangle_{\vec{k}_1+\vec{k}_2+\vec{k}_3+\vec{k},0} e^{i(-\omega_{k_1}-\omega_{k_2}-\omega_{k_3}-\omega_{k_4})t} - \\
&-\frac{i}{4}\frac{(2\pi)^4}{(L_x L_y)^3}\sum F_{\vec{k}\vec{k}_2\vec{k}_3\vec{k}_4} A_{\vec{k}_2} A_{\vec{k}_3} A_{\vec{k}_4} \triangle_{\vec{k},\vec{k}_2+\vec{k}_3+\vec{k}_4} e^{i(-\omega_k+\omega_{k_2}+\omega_{k_3}+\omega_{k_4})t} - \\
&-\frac{i}{4}\frac{3(2\pi)^4}{(L_x L_y)^3}\sum F_{\vec{k}_1\vec{k}_2\vec{k}_3\vec{k}} A_{\vec{k}_1} A^*_{\vec{k}_2} A^*_{\vec{k}_3} \triangle_{\vec{k}_1,\vec{k}_2+\vec{k}_3+\vec{k}} e^{i(\omega_{k_1}-\omega_{k_2}-\omega_{k_3}-\omega_{k_4})t} - \\
&-\frac{i}{2}\frac{(2\pi)^4}{(L_x L_y)^3}\sum D_{\vec{k}_1\vec{k}_2\vec{k}_3\vec{k}} A_{\vec{k}_1} A_{\vec{k}_2} A^*_{\vec{k}_3} \triangle_{\vec{k}_1+\vec{k}_2,\vec{k}_3+\vec{k}} e^{i(\omega_{k_1}+\omega_{k_2}-\omega_{k_3}-\omega_{k_4})t}.
\end{aligned} \tag{4.21}$$

Если проинтегрировать левую и правую части уравнения по времени за некоторый фиксированный промежуток, то становится очевидно, что наибольший вклад в амплитуду волны дадут те члены уравнения, которые будут иметь наименьший показатель в экспоненте. В непрерывной среде мы можем выбрать волны так, чтобы занулить эти показатели точно. Однако на дискретной сетке волновых векторов сделать это в случае произвольного закона дисперсии, вообще говоря, нельзя. Заметим, что члены, отвечающие за генерацию кратных гармоник, в большинстве случаев законов дисперсии дают показатели, существенно отличающиеся от нуля. Поэтому в дальнейшем мы их рассматривать не будем.

Также заметим, что полученные уравнения удобно решать в области с линейными размерами $L_x = L_y = 2\pi$. В этом случае все формулы существенно

упрощаются, а проекции волнового вектора k_x и k_y, соответственно (4.18), принимают только целочисленные значения. Необходимо заметить, что выбор линейных размеров нисколько не влияет на универсальность полученных результатов, так как он приведит лишь к перенормировке времени, при фиксированных остальных константах.

4.2.1 Капиллярные волны

В случае капиллярных волн на поверхности бесконечно глубокой жидкости закон дисперсии имеет вид:

$$\omega_k = \sqrt{\sigma k^3}, \tag{4.22}$$

здесь σ — коэффициент поверхностного натяжения жидкости.

Рассмотрим трехволновой процесс, отвечающий распаду и слиянию волн. Условия резонанса, следующие из (4.21), выражаются так:

$$\omega_{k_1} + \omega_{k_2} = \omega_{k_0}, \quad \vec{k}_1 + \vec{k}_2 = \vec{k}_0. \tag{4.23}$$

В данном случае, для определенности, будем говорить о распаде волны $A_{\vec{k}_0}$ в две волны $A_{\vec{k}_1}$ и $A_{\vec{k}_2}$. Резонансное многообразие (4.23) для распада:

$$\begin{aligned} \vec{k}_0 &= \begin{pmatrix} 0 \\ k_0 \end{pmatrix}, \\ \vec{k}_1 &= \begin{pmatrix} -k_x \\ k_0 - k_y \end{pmatrix}, \ \vec{k}_2 = \begin{pmatrix} k_x \\ k_0 + k_y \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{4.24}$$

приведено на Рисунке 4.1.

Уравнение (4.21) сводится к системе обыкновенных дифференциальных

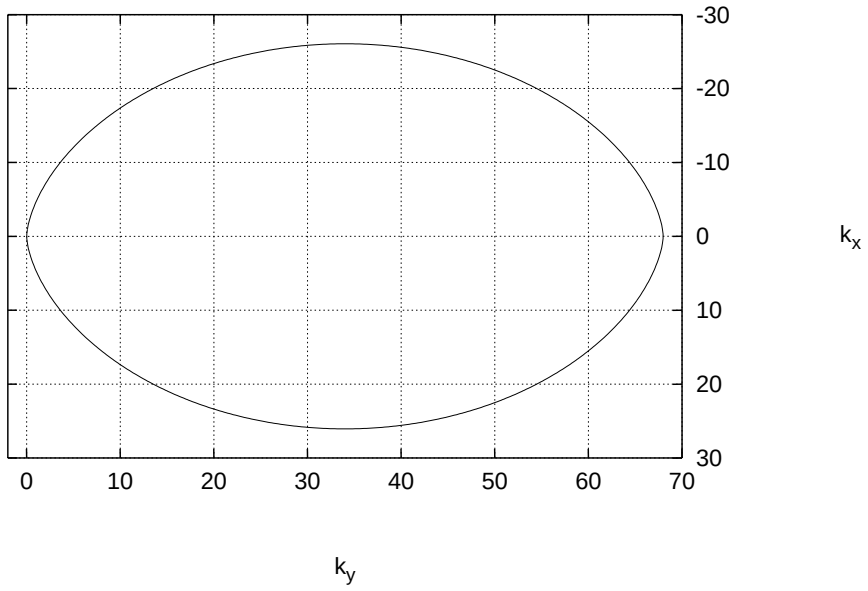


Рис. 4.1: Резонансное множество для $k_0 = 68$.

уравнений:

$$\begin{aligned}
\dot{A}_{\vec{k}_0} &= -\frac{i}{2}\frac{2\pi}{L_x L_y} C^{\vec{k}_0}_{\vec{k}_1\vec{k}_2} A_{\vec{k}_1} A_{\vec{k}_2} e^{i\Omega^{k_0}_{k_1k_2}t}, \\
\dot{A}_{\vec{k}_1} &= -i\frac{2\pi}{L_x L_y} C^{\vec{k}_0}_{\vec{k}_1\vec{k}_2} A^*_{\vec{k}_2} A_{\vec{k}_0} e^{-i\Omega^{k_0}_{k_1k_2}t}, \\
\dot{A}_{\vec{k}_2} &= -i\frac{2\pi}{L_x L_y} C^{\vec{k}_0}_{\vec{k}_1\vec{k}_2} A^*_{\vec{k}_1} A_{\vec{k}_0} e^{-i\Omega^{k_0}_{k_1k_2}t},
\end{aligned} \tag{4.25}$$

Здесь введена расстройка $\Omega^{k_0}_{k_1k_2} = \omega_{k_1} + \omega_{k_2} - \omega_{k_0}$. Пусть $A_{\vec{k}_1}, A_{\vec{k}_2}$ малы по сравнению с распадающейся волной $\left|A_{\vec{k}_0}\right| \gg \max(|A_{\vec{k}_1}|, |A_{\vec{k}_2}|)$ в начальный момент времени $t = 0$. Тогда на начальном этапе роста гармоник уравнения (4.25) можно линеаризовать. Предполагая ($A_{\vec{k}_0} \simeq const$), имеем растущее (при выполнении некоторых условий) решение:

$$A_{\vec{k}_{1,2}}(t) = A_{\vec{k}_{1,2}}(0) e^{\lambda t}, \tag{4.26}$$

здесь:

$$\lambda = -\frac{i}{2}\Omega^{k_0}_{k_1k_2} + \sqrt{\left|\frac{2\pi}{L_xL_y}C^{\vec{k}_0}_{\vec{k}_1\vec{k}_2}A_{\vec{k}_0}\right|^2 - \left(\frac{1}{2}\Omega^{k_0}_{k_1k_2}\right)^2}. \tag{4.27}$$

Отсюда видно, что вблизи от резонансной кривой, при выполнении условий:

$$\left|\frac{2\pi}{L_xL_y}C^{\vec{k}_0}_{\vec{k}_1\vec{k}_2}A_{\vec{k}_0}\right| > \left|\frac{1}{2}\Omega^{k_0}_{k_1k_2}\right|, \tag{4.28}$$

мы получаем рост гармоник. Выбрав достаточно большую начальную амплитуду мы можем уширить резонансную кривую так, чтобы в получившуюся область попало настолько большое число гармоник, что дискретность сетки волновых векторов перестает быть важной.

Для описания взаимодействия волн на стадии, когда амплитуды растущих волн уже нельзя считать малыми по сравнению с амплитудой распадающихся волн, надо переходить к решению полных динамических уравнений (4.9) или (4.17). Численная схема подробно описана в Приложении .5.

Система (4.9) решалась в области с линейными размерами $L_x = L_y = 2\pi$. Коэффициент поверхностного натяжения $\sigma = 1$. Число точек 512×512. В качестве начальных условий была взята монохроматическая волна с волновым вектором $\vec{k}_0 = (0; 68)$ и амплитудой $|a_{\vec{k}_0}| = 4 \times 10^{-3}$. Все остальные гармоники имели малую амплитуду $|a_{\vec{k}}| \sim 10^{-12}$ и случайную фазу. Как было отмечено выше, резонансная кривая практически никогда не проходит точно через точки сетки. При выбранных линейных размерах области все волновые числа являются целыми. Детальная картина резонансной кривой на сетке волновых векторов в области, где рядом с резонансной кривой точки лежат наиболее плотно, показана на Рисунке 4.2. Видно, что некоторые точки лежат ближе к резонансной кривой, чем другие.

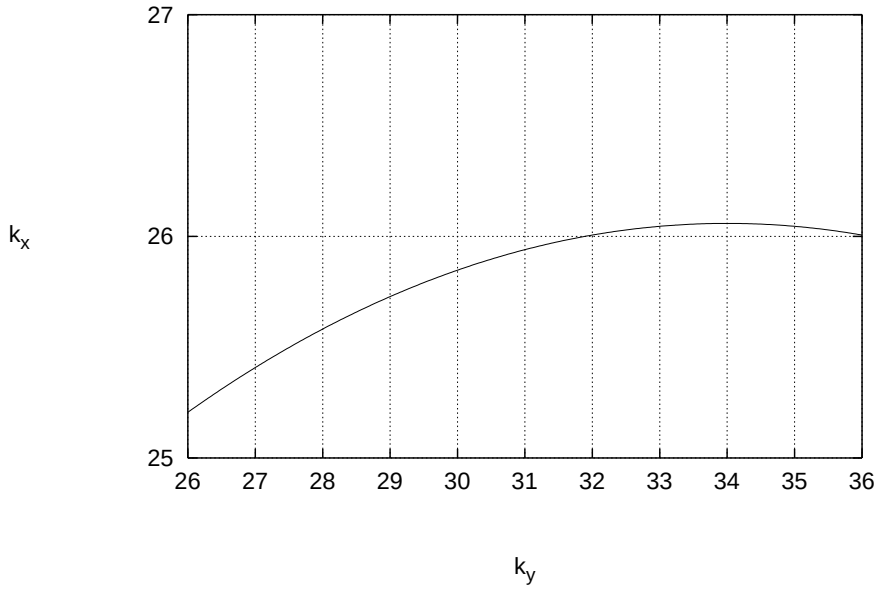


Рис. 4.2: Фрагмент резонансной кривой. Хорошо видна разная расстройка для разных узлов сетки.

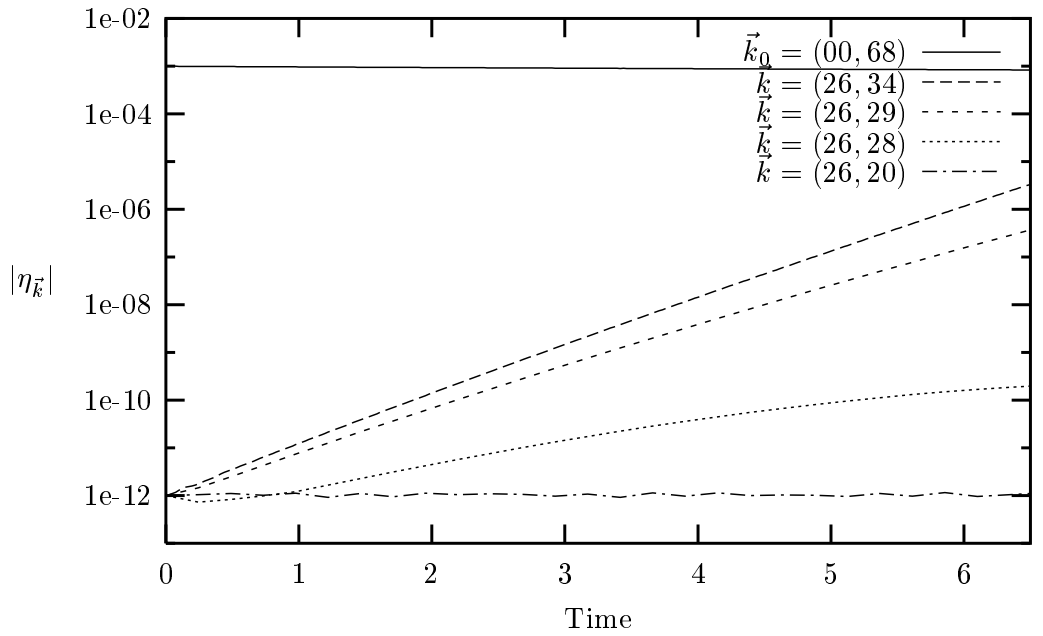


Рис. 4.3: Эволюция различных гармоник при распадающейся волне $\vec{k}_0 = (00, 68)$.

Как и ожидалось, в начале мы наблюдали экспоненциальный рост ряда гармоник согласно (4.26) и (4.27). Эта стадия показана на Рис.4.3 и Рис.4.4. Видно, что одни гармоники находятся в резонансе, а другие нет. Через некоторое время практически все гармоники, близкие к резонансному множеству, оказываются вовлечены в процесс распада начальной волны, как показано на Рис.4.5.

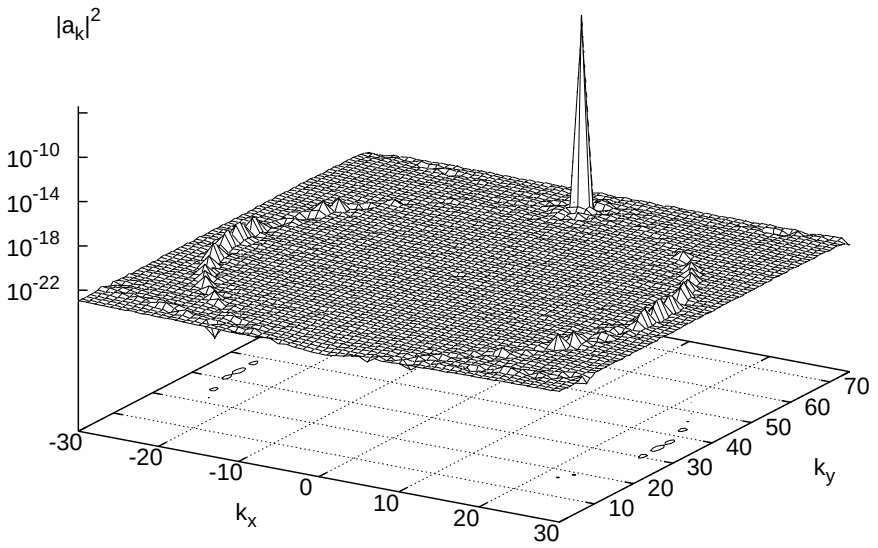


Рис. 4.4: Резонансные гармоники начинают расти. Момент времени t=1.4.

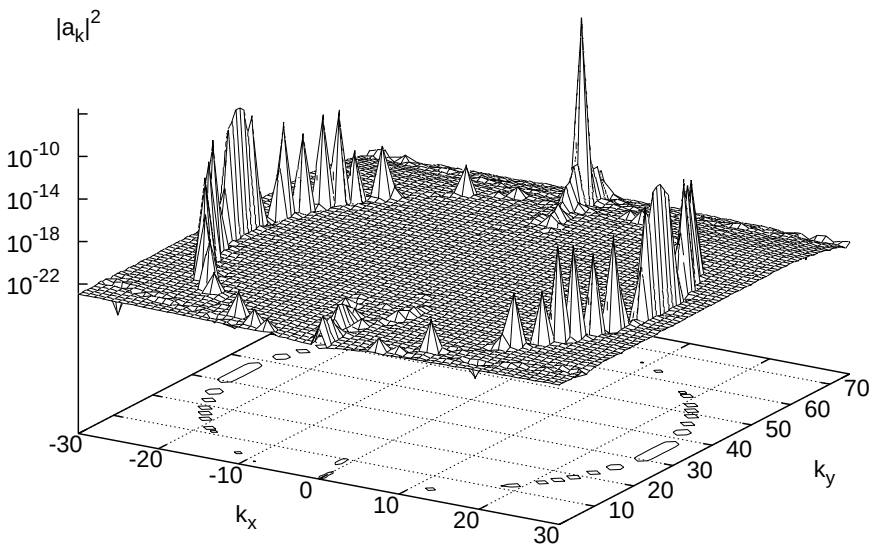


Рис. 4.5: Начинаются вторичные процессы распада. Момент времени t=11.

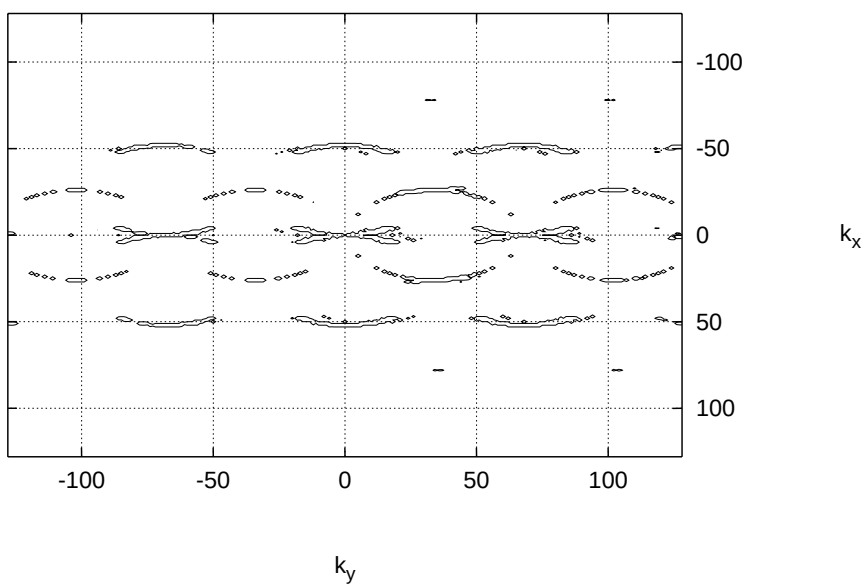


Рис. 4.6: Линии уровня поверхности $|a_k|^2$. Хорошо видны вторичные распады. Момент времени t=14.

Позже гармоники, являющиеся наиболее близкими к резонансной кривой (сравните с Рис. 4.2) и находящиеся в той ее части, где матричный элемент больше, достигают уровня, когда они сами могут служить источником так называемых «вторичных распадов».

Амплитуды волн становятся существенно различными. Наибольших амплитуд достигают волны, для которых инкремент (4.27) максимален. На Рис. 4.6 видна регулярная структура, порожденная начальной волной $a_{\vec{k}_0}$.

Некоторое время спустя вся k-плоскость заполнена распадающимися волнами, как показано на Рис.4.7.

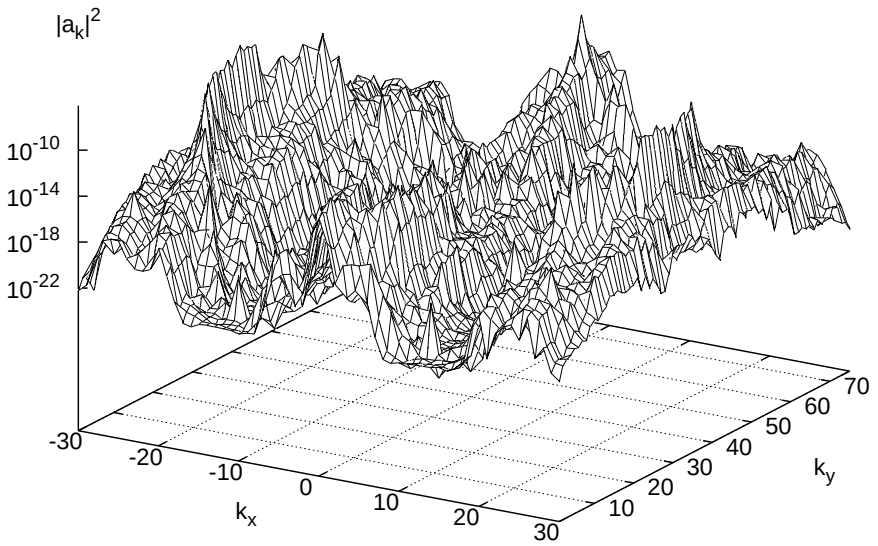


Рис. 4.7: Поверхность $|a_k|^2$ в момент времени t=57.

4.2.2 Гравитационные волны

В случае гравитационных волн на поверхности бесконечно глубокой жидкости закон дисперсии принимает вид:

$$\omega_k = \sqrt{gk}, \tag{4.29}$$

здесь g — ускорение свободного падения. Здесь и далее для удобства положим $g = 1$. В этом случае условия (4.23 не могут быть выполнены, так как данная система не имеет действительных нетривиальных решений. Следовательно, можно подобрать преобразование, которое исключит члены третьего порядка, отвечающие этому распаду. Поэтому, если в случае капиллярных волн нам можно было ограничиться членами третьего порядка в Гамильтониане, то в случае гравитационных этого не достаточно. И это именно та причина, по которой мы всюду рассматривали Гамильтониан с точностью до членов четвертого порядка.

Член, отвечающий генерации третьей гармоники, снова не является резонансным. Если мы рассмотрим начальные условия, аналогичные случаю капиллярных волн, то есть одна монохроматическая волна и случайный шум малой амплитуды, то очевидно, что главными будут процессы, в которые амплитуда начальной волны входит наибольшее количество раз. Процессы распада одной волны в три и обратный ему, при условии что начальная волна встречается в уравнениях два раза, не являются резонансными. Поэтому главным будет процесс, который подразумевает рассеяние двух волн с одинаковыми волновыми векторами в две другие волны. Условия резонанса

такого процесса, следующие из (4.21), выражаются так:

$$\omega_{k_1} + \omega_{k_2} = 2\omega_{k_0}, \quad \vec{k}_1 + \vec{k}_2 = 2\vec{k}_0. \tag{4.30}$$

Резонансная кривая для условий (4.30) приведена на Рис.4.8. Эта кривая

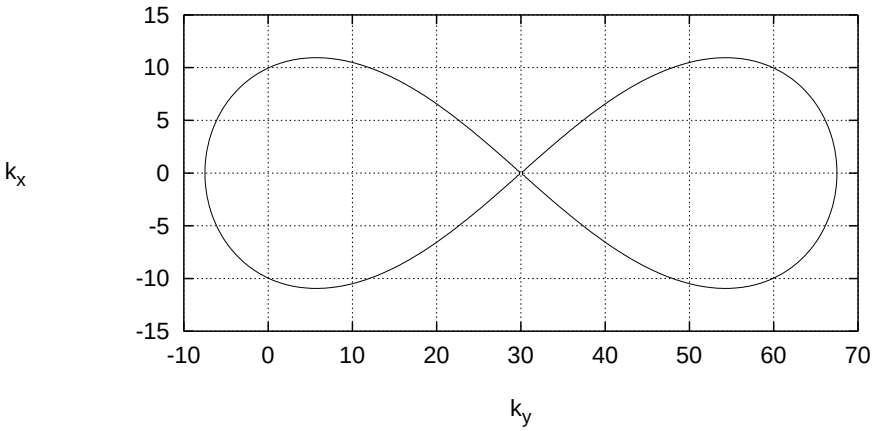


Рис. 4.8: Резонансная кривая для $\vec{k}_0 = (0; 30)$.

иногда называется кривой Филлипса, по имени ее первооткрывателя. Система (4.9) решалась в области с линейными размерами $L_x = L_y = 2\pi$. Ускорение свободного падения $g = 1$. Число точек 512×512. В качестве начальных условий была взята монохроматическая волна с волновым вектором $\vec{k}_0 = (0; 30)$ и амплитудой $|a_{\vec{k}_0}| = 2.5 \times 10^{-4}$. Все остальные гармоники имели малую амплитуду $|a_{\vec{k}}| \sim 10^{-9}$ и случайную фазу. В начале процесса ситуация развивается схожим со случаем капиллярных волн образом. Наблюдается экспоненциальный рост нескольких гармоник, находящихся вблизи от резонансной кривой (Рис. 4.9). Данная ситуация показана на Рис. 4.10. Матричный элемент процесса имеет наибольшие значения в окрестности начальных волн. Этим обуславливается картина начального роста гармоник:

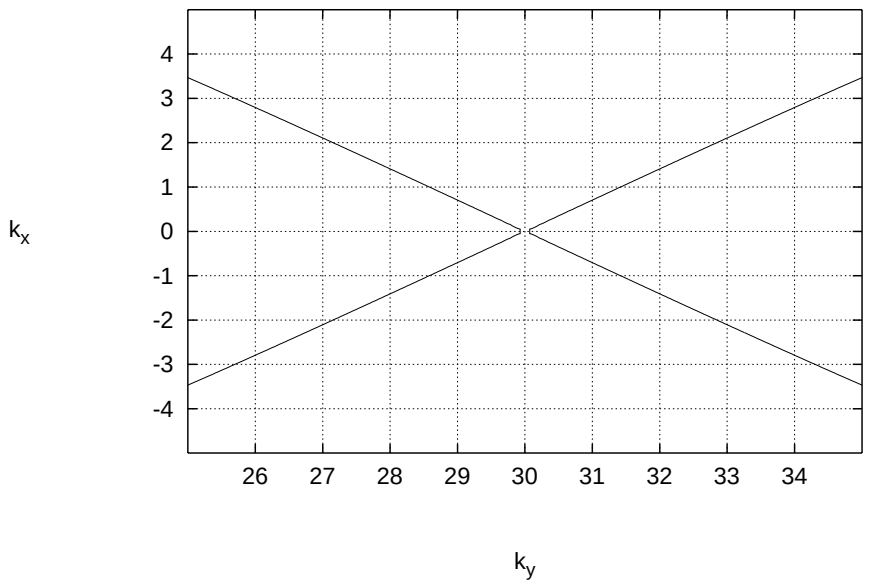


Рис. 4.9: Фрагмент резонансной кривой. Хорошо заметна разная расстройка для разных узлов сетки.

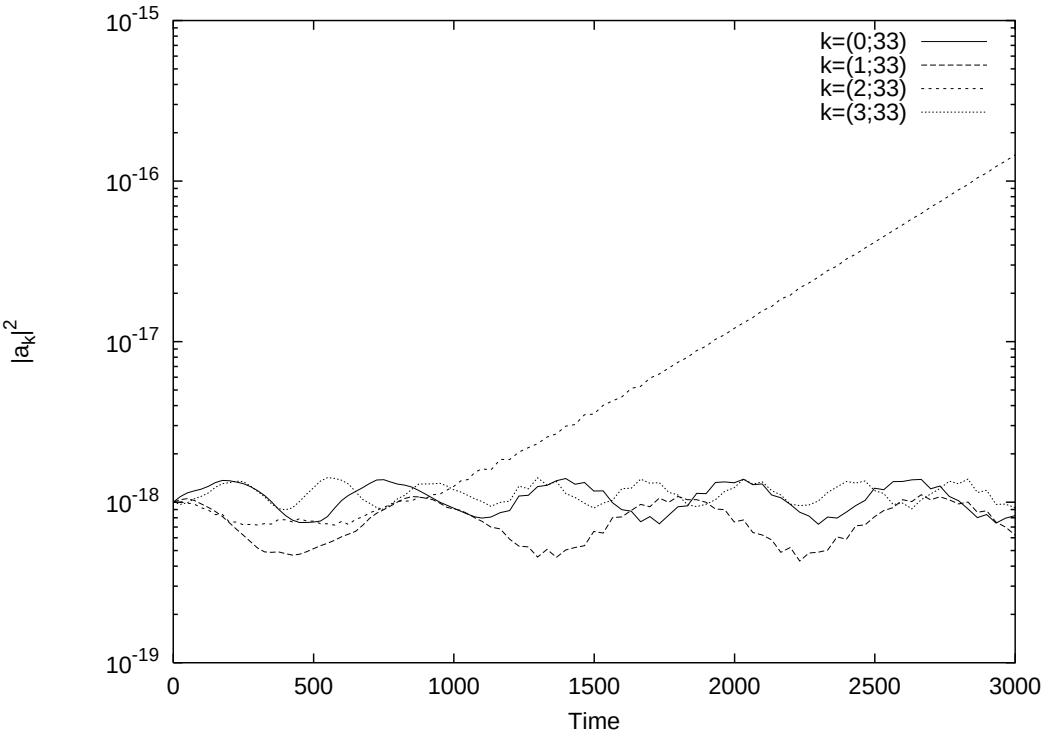


Рис. 4.10: Рост гармоник как функция времени. Видно, что есть резонансные и не резонансные гармоники.

рост наблюдается только около «перекрестья» резонансного множества (Рисунок 4.11). Наиболее удобным для анализа картины роста гармоник явля-

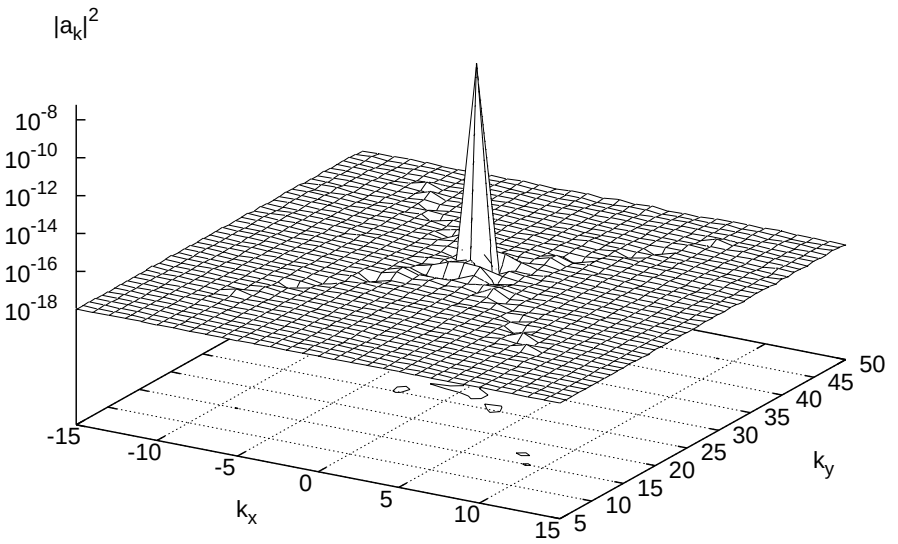


Рис. 4.11: Начало роста гармоник при $\vec{k}_0 = (0; 30)$.

ется представление поверхности $|a_{\vec{k}}|^2$ в виде линий уровня. Таким образом, Рисунок 4.11 может быть представлен в ином, более понятном виде (Рисунок 4.12).

Дальнейшая эволюция сводится к росту гармоник (Рис. 4.13 и Рисунке 4.14) и началу вторичных распадов, выражающемся в «заплывании» начальных гармоник окружающими (Рисунок 4.15 и Рис. 4.16).

Несколько менее интересным, но не менее поучительным, является случай, когда мы изначально имее две большие волны $a_{\vec{k}_0}$ и $a_{-\vec{k}_0}$. В этом случае резонансной кривой является окружность с центром в нуле и радиусом $|\vec{k}_0|$. Причем, нетрудно заметить, что такая же картина будет наблюдаться и в

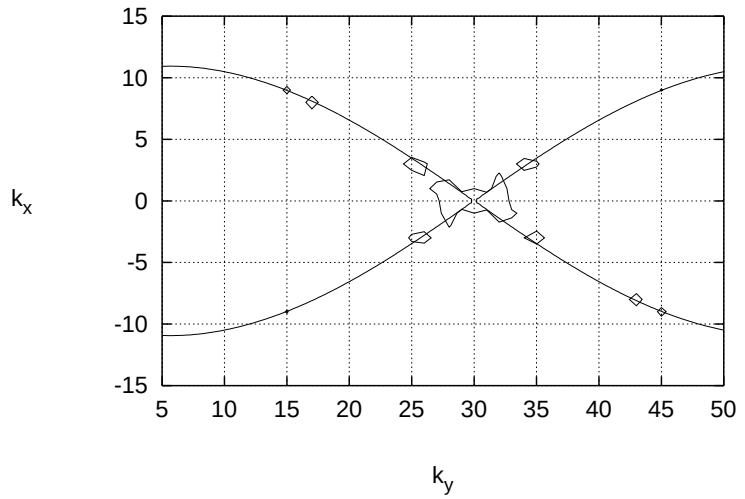


Рис. 4.12: Начало роста гармоник. Линии уровня $|a_{\vec{k}}|^2 = 1.5 \times 10^{-18}$.

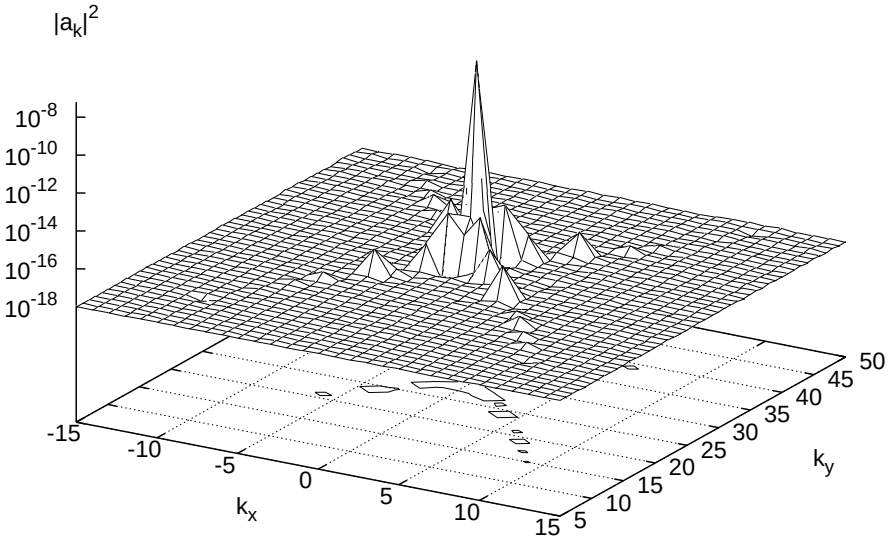


Рис. 4.13: Продолжение роста гармоник.

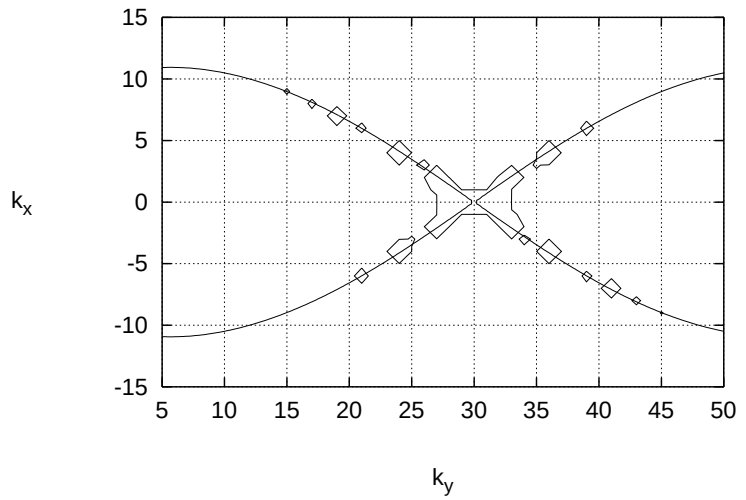


Рис. 4.14: Продолжение роста гармоник. Линии уровня $|a_{\vec{k}}|^2 = 1.5 \times 10^{-18}$.

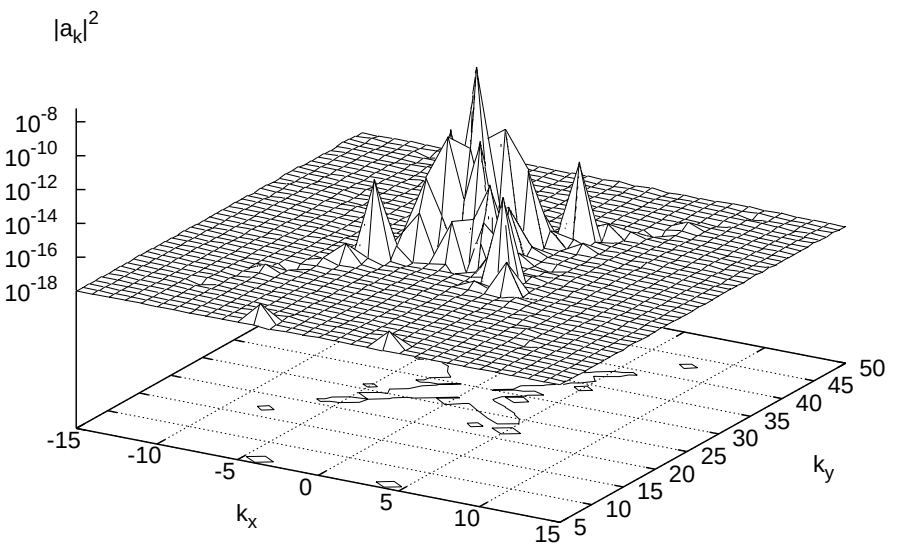


Рис. 4.15: Начальная волна окружена порожденными вторичными распадами волн гармониками.

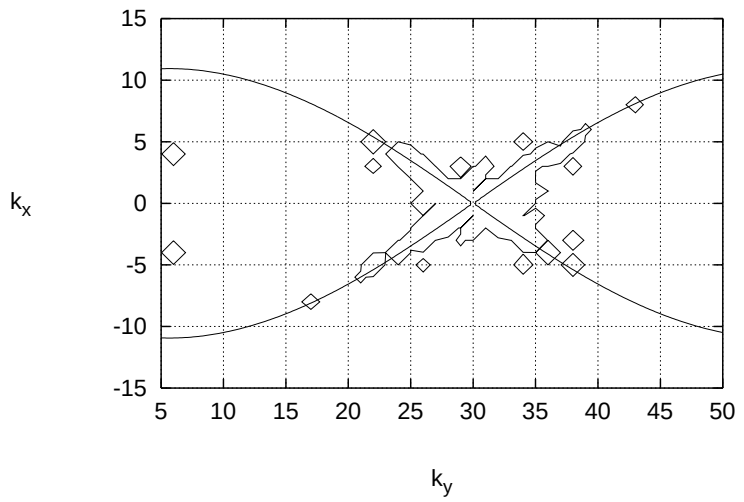


Рис. 4.16: Начальная волна окружена порожденными вторичными распадами гармониками. Линии уровня $|a_{\vec{k}}|^2 = 1.5 \times 10^{-18}$.

случае капиллярных волн. Результаты моделирования такого процесса представленны на Рисунке 4.17. Начальные условия были такими:

$$\vec{k}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 30 \end{pmatrix}; |a_{\vec{k}_0}| = |a_{-\vec{k}_0}| = 10^{-3}; \vec{k} \neq \vec{k}_0, |a_{\vec{k}}| = 10^{-9}.$$

Очевидно, что при моделировании процессов распада и рассеяния скорость роста гармоник напрямую связана с амплитудой начальной гармоники (по крайней мере на начальной стадии процесса). Казалось бы, логично взять эту амплитуду как можно больше. Однако в этом предположении кроется серьезная ошибка. Взяв слишком большую амплитуду начальной волны, мы можем «открыть» нерезонансный процесс. В самом деле, уравнение $\Omega^{k_0}_{k_1 k_2} = \omega_{k_1} + \omega_{k_2} - \omega_{k_0}$ в случае гравитационных волн не имеет нетривиальных ре-

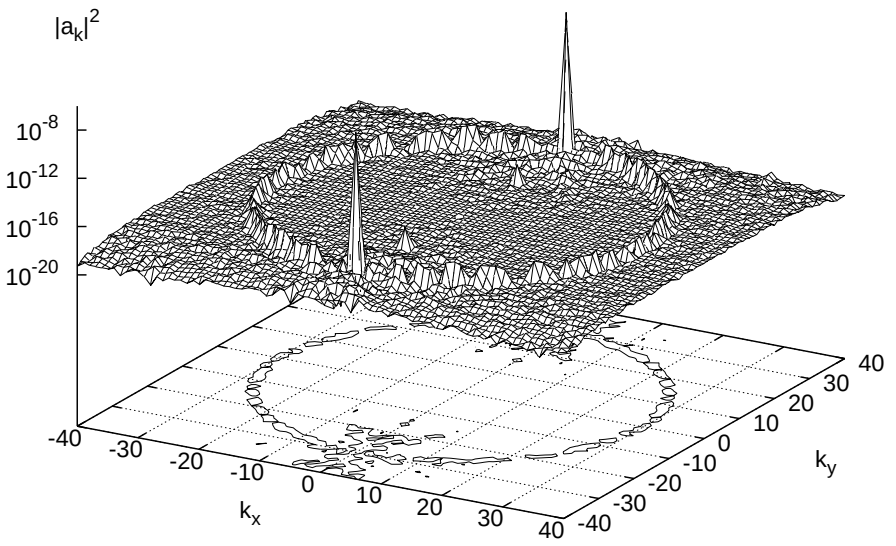


Рис. 4.17: Рост гармоник в случае начальных условий в виде двух волн с противоположными волновыми векторами.

шений при $\Omega^{k_0}_{k_1k_2} = 0$, но если положить $\Omega^{k_0}_{k_1k_2} > 0$, то решения появляются. Остается только достаточно большой амплитудой $A_{\vec{k}_0}$ сделать подкоренное выражение в (4.27) положительным, и мы получим «квази-резонансное» трехволновое взаимодействие. Надо понимать, что такая возможность появляется только на дискретной сетке и в случае непрерывной среды такие процессы проигрывают действительно резонансным. Таким образом, если выбрать слишком большую амплитуду, то в моделируемый процесс будет внесен артефакт, искажающий истинную физическую картину. На Рис. 4.18 приведена «квази-резонансная» кривая для трехволнового взаимодействия

при $\Omega_{k_1k_2}^{k_0} = 2.3$ и волновых векторах.

$$\vec{k}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 30 \end{pmatrix}, \quad \vec{k}_1 = \begin{pmatrix} -k_x \\ 30 - k_y \end{pmatrix}, \; \vec{k}_2 = \begin{pmatrix} k_x \\ 30 + k_y \end{pmatrix}. \tag{4.31}$$

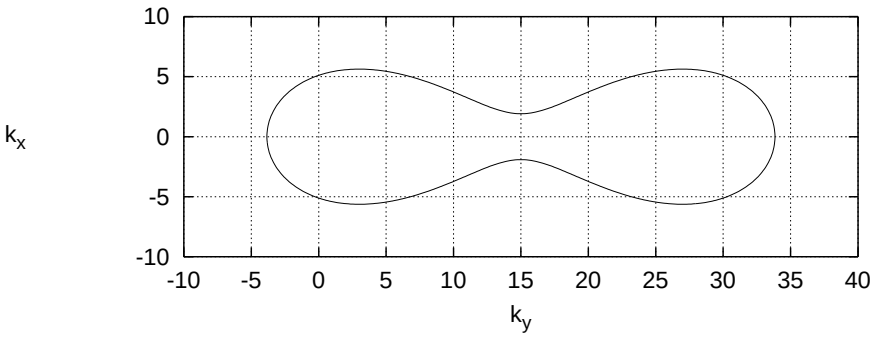


Рис. 4.18: «Квази-резонансная» кривая для трехволнового взаимодействия гравитационных волн. $\vec{k}_0 = (0; 30)$.

4.3 Колмогоровские спектры в турбулентности гравитационных волн

Теория слабой турбулентности многократно проверялась в численных экспериментах [174, 127, 75, 50, 187]. Однако единственным успешным экспериментом по численному моделированию турбулентности волн на поверхности трехмерной жидкости следует признать [132], где моделировалась турбулентность капиллярных волн. Несмотря на значительные затраченные усилия, в случае гравитационных волн на поверхности добиться прогресса не

удавалось. По нашему мнению, причина этого заключалась в трудности правильного выбора параметров численной схемы.

Эта глава построена следующим образом: в разделе 4.3.1 вводится статистическое описание волнового поля на поверхности жидкости для случая гравитационных волн на глубокой воде; в разделе 4.3.2 приведены параметры численной схемы и результаты расчетов; в заключении обсуждаются полученные результаты.

4.3.1 Введение. Решения кинетического уравнения.

Как было отмечено в параграфе 4.2.2, дисперсионный закон для гравитационных волн на поверхности глубокой жидкости относится к так называемому «нераспадному» случаю. Уравнения:

$$\omega_{k_1} = \omega_{k_2} + \omega_{k_3}, \quad \vec{k}_1 = \vec{k}_2 + \vec{k}_3 \tag{4.32}$$

не имеют нетривиальных вещественных решений. Это означает, что кубические члены в Гамильтониане могут быть исключены соответствующим каноническим преобразованием $a(\vec{k},t) \longrightarrow b(\vec{k},t)$ [167]. Формула этого преобразования довольно громоздка и хорошо известна [167, 162], поэтому не буудем здесь вдаваться в детали.

Для статистического описания волнового поля используется корреляционная функция:

$$< a_{\vec{k}} a^*_{\vec{k}'} >= n_k \delta(\vec{k} - \vec{k}'). \tag{4.33}$$

Величина $n_{\vec{k}}$ непосредственно связана с наблюдаемыми корреляционными функциями и может быть получена из экспериментальных данных. Напри-

мер, из (4.13) можно получить:

$$I_k =< |\eta_{\vec{k}}|^2 >= \frac{1}{2}\frac{\omega_k}{g}(n_k + n_{-k}). \tag{4.34}$$

В случае гравитационных волн удобнее пользоваться другой корреляционной функцией:

$$< b_{\vec{k}} b^*_{\vec{k}'} >= N_k \delta(\vec{k} - \vec{k}'). \tag{4.35}$$

Функция N_k не может быть измерена напрямую. В общем случае связь между n_k и N_k довольно сложна [162], но в случае глубокой воды все становится проще:

$$\frac{n_k - N_k}{n_k} \simeq \mu, \tag{4.36}$$

здесь $\mu = (ka)^2$, где a — характерное отклонение поверхности. В случае слабой турбулентности $\mu << 1$. Корреляционная функция N_k подчиняется кинетическому уравнению [17]:

$$\frac{\partial N_k}{\partial t} = st(N, N, N) + f_p(k) - f_d(k), \tag{4.37}$$

Здесь:

$$\begin{aligned} st(N,N,N) &= 4\pi \int \left| T_{\vec{k},\vec{k}_1,\vec{k}_2,\vec{k}_3} \right|^2 \times \\ &\times (N_{k_1} N_{k_2} N_{k_3} + N_k N_{k_2} N_{k_3} - N_k N_{k_1} N_{k_2} - \\ &- N_k N_{k_1} N_{k_3}) \delta(\vec{k} + \vec{k}_1 - \vec{k}_2 - \vec{k}_3) d\vec{k}_1 d\vec{k}_2 d\vec{k}_3. \end{aligned} \tag{4.38}$$

Подробная форма матричного элемента $T_{\vec{k},\vec{k}_1,\vec{k}_2,\vec{k}_3}$ может быть найдена во множестве источников [17, 164, 162]. Функция $f_p(k)$ в (4.37) соответствует накачке волн, например, ветром. Обычно накачка сосредоточена на больших масштабах. Функция $f_d(k)$ представляет собой затухание волн благодаря вязкости и обрушению волн. Эти функции известны лишь приблизительно. Однако существует интервал между масштабами, в котором действие

накачки и затухания можно считать слабым и в котором и наблюдают Колмогоровские спектры в эксперименте.

Рассмотрим стационарное решение уравнения (4.37), предполагая, что выполнены следующие утверждения:

- Среда изотропна по отношению к поворотам;
- Дисперсионное соотношение является степенной функцией $\omega = ak^{\alpha}$;
- $T_{\vec{k},\vec{k}_1,\vec{k}_2,\vec{k}_3}$ — однородная функция: $T_{\epsilon\vec{k},\epsilon\vec{k}_1,\epsilon\vec{k}_2,\epsilon\vec{k}_3} = \epsilon^{\beta} T_{\vec{k},\vec{k}_1,\vec{k}_2,\vec{k}_3}$.

В этих предположениях можно найти Колмогоровские решения [167]:

$$\begin{aligned} n_k^{(1)} &= C_1 P^{1/3} k^{-\frac{2\beta}{3}-d}, \\ n_k^{(2)} &= C_2 Q^{1/3} k^{-\frac{2\beta-\alpha}{3}-d}. \end{aligned} \tag{4.39}$$

Здесь d — это число измерений пространства ($d = 2$ в случае гравитационных поверхностных волн). Первое выражение представляет собой Колмогоровский спектр, соответствующий постоянному потоку энергии P в область малых масштабов (прямой каскад энергии). Второе выражение — это Колмогоровский спектр, описывающий каскад волнового действия на большие масштабы, и Q — это поток действия. В обоих случаях C_1 и C_2 — это безразмерные «Колмогоровские константы».

В случае гравитационных волн на глубокой воде $\omega = \sqrt{gk}$, а $\beta = 3$. Из работы [17] стало известно, что:

$$n_k^{(1)} = C_1 P^{1/3} k^{-4}. \tag{4.40}$$

Действуя таким же образом [170], получаем второй спектр:

$$n_k^{(2)} = C_2 Q^{1/3} k^{-23/6}. \tag{4.41}$$

Эта глава посвящена исследованию спектра, отвечающего потоку энергии (4.40). Используя (4.34), можно вычислить:

$$I_k = \frac{C_1 g^{1/2} P^{1/3}}{k^{7/2}}. \tag{4.42}$$

4.3.2 Численное моделирование

Для моделирования турбулентности поверхностных волн в уравнения (4.9) необходимо ввести члены, отвечающие накачке и затуханию. Например, это можно сделать таким образом:

$$\begin{aligned} \dot{\eta}_{\vec{k}} &= ... + \gamma_k \eta_{\vec{k}}, \\ \dot{\psi}_{\vec{k}} &= ... + \gamma_k \psi_{\vec{k}} + f_k. \end{aligned} \tag{4.43}$$

Такая модификация дает экспоненциальное затухание гармоник и линейную по времени накачку. Модифицированные динамические уравнения (4.9) решались с использованием численной схемы, описанной в главе .5. Конкретный вид функций, определяющих накачку и затухание, был таков:

$$\begin{aligned} F_k &= f_k e^{iR_{\vec{k}}(t)}, \\ f_k &= 4F_0 \frac{(k-k_{p1})(k_{p2}-k)}{(k_{p2}-k_{p1})^2}; \\ D_{\vec{k}} &= \gamma_k \psi_{\vec{k}}, \\ \gamma_k &= -\gamma_1, k \le k_{p1}, \\ \gamma_k &= -\gamma_2 (k-k_d)^2, k > k_d. \end{aligned} \tag{4.44}$$

Здесь $R_{\vec{k}}(t)$ — это равномерно распределенное случайное число в интервале $(0, 2\pi)$. Вычисления производились в области $L_x = L_y = 2\pi$ с периодическими граничными условиями. Параметры накачки были такими: $k_{p1} = 5,\ k_{p2} = 10,\ k_d = 64$.

Как было показано в параграфе 4.2.2, при решении надо особо обратить внимание на уровень гармоник, так как от этого зависит степень достоверности моделирования резонансных взаимодействий волн. Экспериментально были найдены несколько подходящих уровней накачки. Наилучшие результаты при приемлемом времени рассчетов получены для значений $F_0 = 2 \times 10^{-4}$ и $F_0 = 3 \times 10^{-4}$.

Значения параметров затухания адаптировались при рассчетах по следующим алгоритмам. Для сохранения приемлемого качества решения, требовалось, чтобы в спектре наибольшая гармоника отличалась от наименьшей в $10^6 - 10^7$ раз. Обеспечивалось это посредством изменения параметра γ_2. При таких условиях удалось избежать эффекта «бутылочного горлышка», описанного в [83].

Так как нас интересовал только спектр, соответствующий прямому Колмогоровскому каскаду (перенос энергии в область с большими k), то единственное требование, предъявлявшееся к спектру при $k \leq k_{p1}$, сотояло в том, чтобы данные гармоники были не больше, чем пиковая гармоника спектра. С этой целью проверялось выполнение данного условия и при необходимости включалось затухание γ_1. В остальное время затухания в области малых волновых чисел k не было.

Получение стационарного состояния (то есть состояния, в котором спектр в целом не меняется) производилось в несколько этапов. Очевидно, что наибольшее время занимает установление равновесия в области относительно небольших волновых чисел, то есть в окрестности накачки. В таких условиях считать на «большой» сетке было бы расточительно. Поэтому расчет

начинался на сетке 128×128, при этом $k_d = 32$ до получения стационарного состояния. Затем происходил переход на сетку 256×256, при этом $k_d = 64$. Недостающие гармоники заполнялись нулями. После установления равновесия был произведен переход на сетку 512×512, при этом $k_d = 100$. После установления равновесия и в этом режиме, было произведено усреднение проинтегрированного по углу квадрата спектра (в силу симметрии системы) для получения коррелятора $< |\eta_{\vec{k}}|^2 >$.

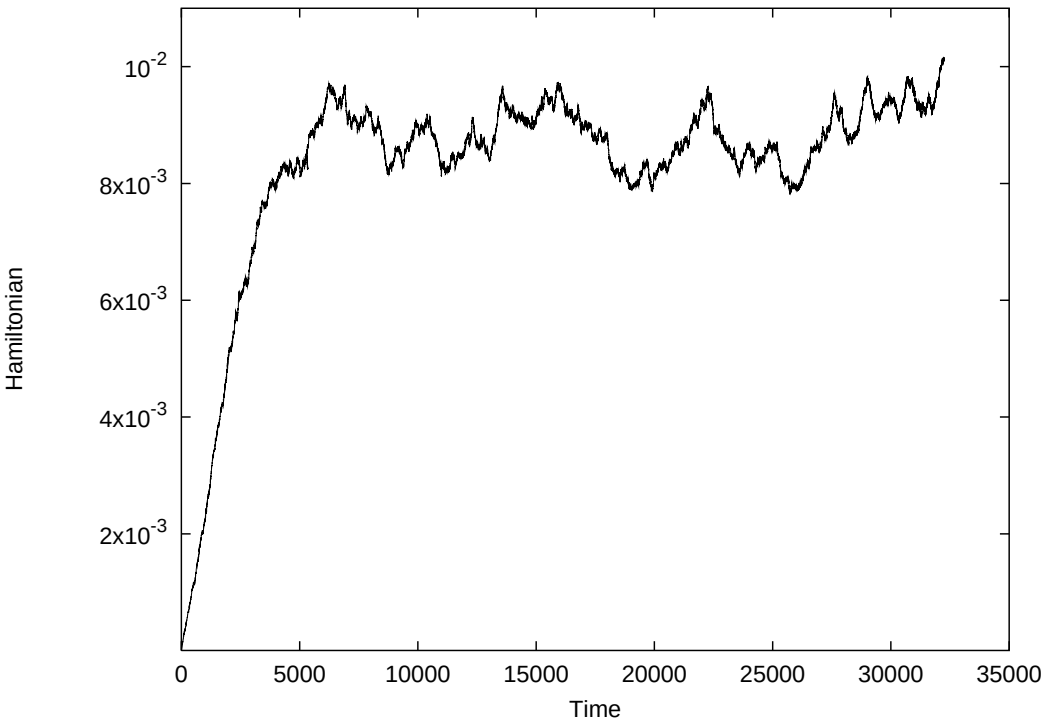


Рис. 4.19: Гамильтониан системы как функция времени.

На Рисунке 4.3.2 приведен график Гамильтониана как функции времени для таких параметров модели: $F_0 = 2 \times 10^{-4}, \gamma_1 = 10^{-3}, \gamma_2 \simeq 512, g = 1$.

Корреляционная функция оказалась степенной в значительной части инерционного интервала, который составлял область от $k_{p2} = 10$ до $k_d = 100$. Коррелятор показан на Рис. 4.3.2.

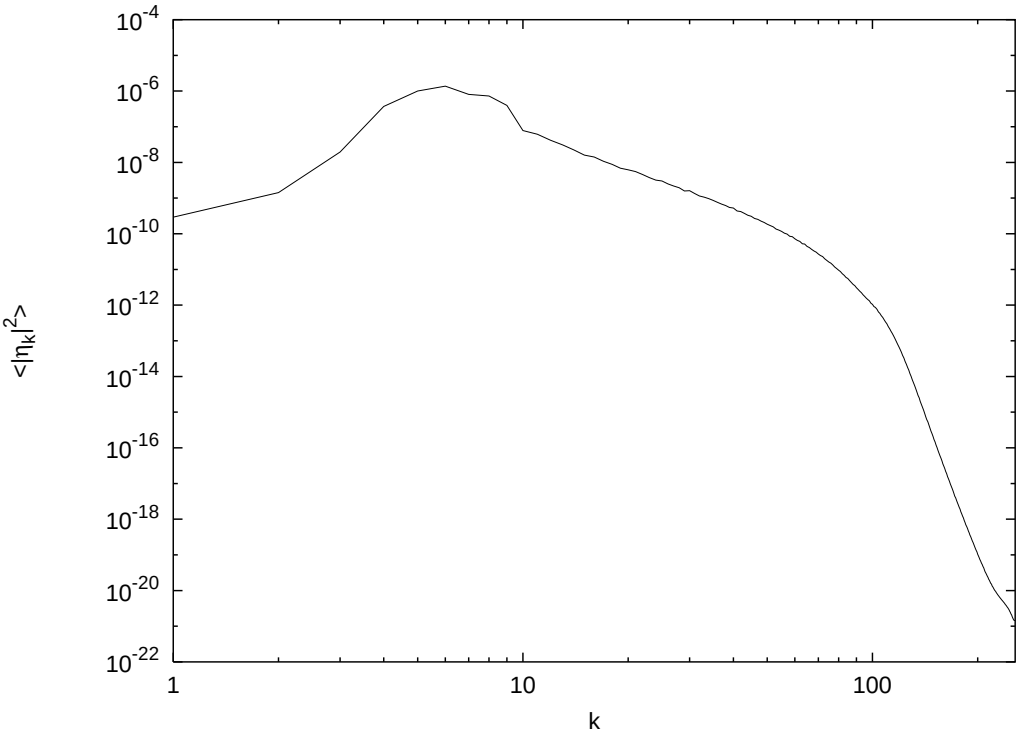


Рис. 4.20: Корреляционная функция отклонения поверхности в двойном логарифмическом масштабе.

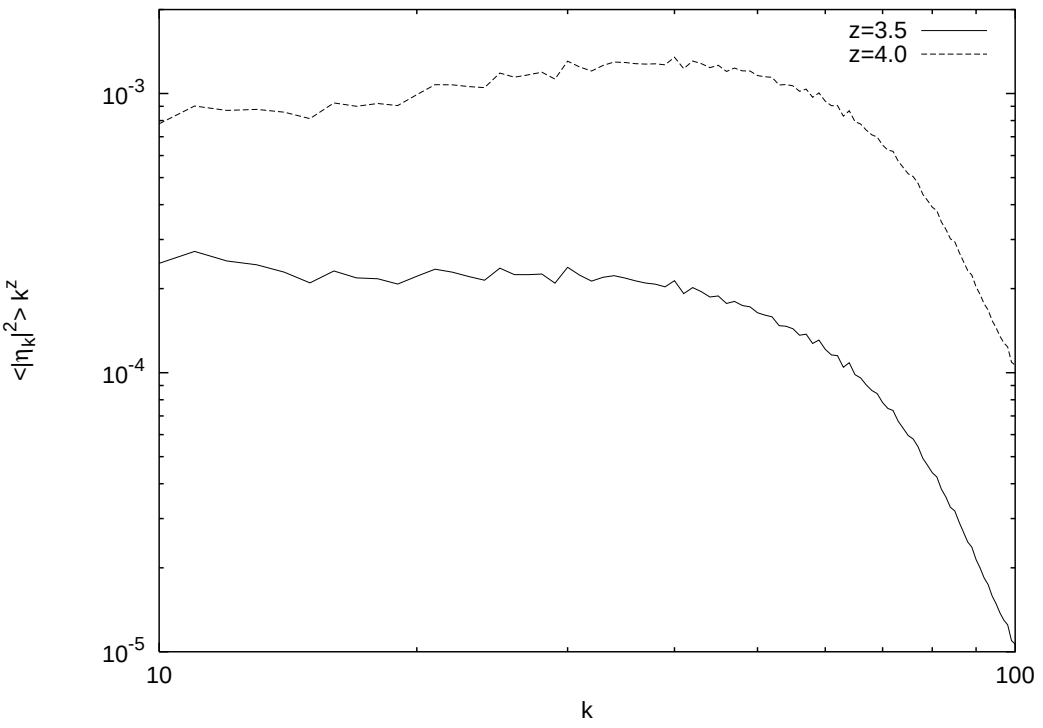


Рис. 4.21: Скомпенсированный коррелятор отклонения поверхности при различных степенях компенсации: $z = 3.5$ сплошная линия (теория слабой турбулентности), $z = 4.0$ прерывистая линия (теория Филлипса).

Можно оценить показатель этой степенной функции. Скомпенсированные спектры (для сравнения мы привели спектр Филлипса) показаны на Рисунке 4.3.2. Видно, что спектр, предсказанный теорией слабой турбулентности, лучше подходит к результатам численного эксперимента.

На Рисунке 4.3.2 видно уширение области, в которой наблюдается степенной спектр в результате увеличения инерционного интервала при переходе на большую сетку. Также представляет интерес проверить, существует ли

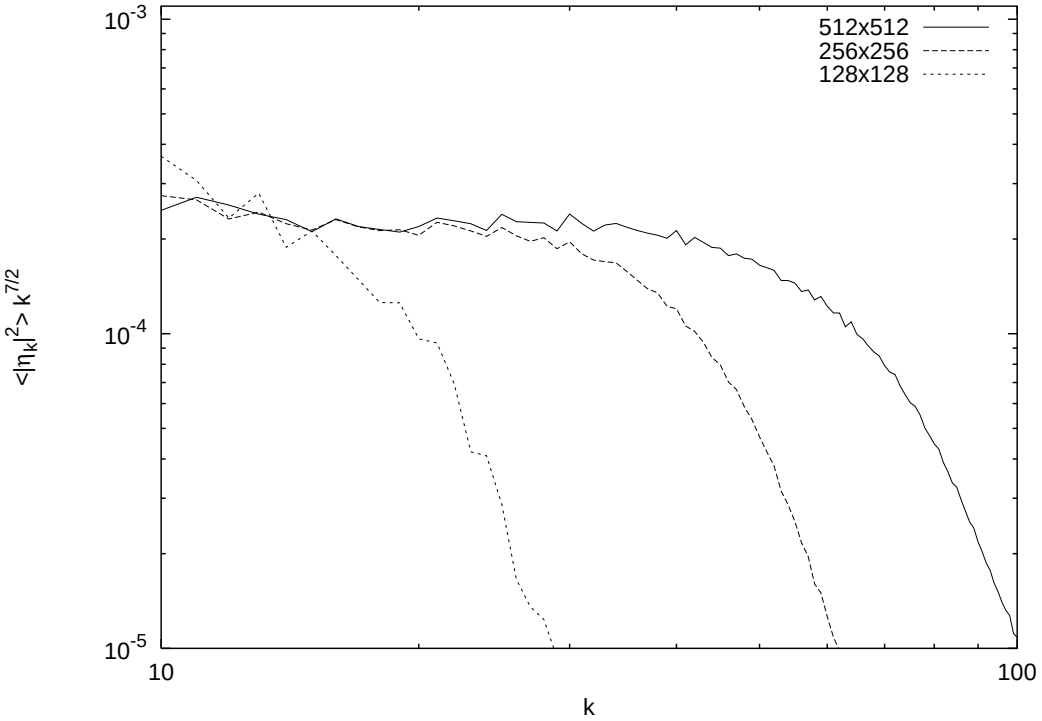


Рис. 4.22: Уширение области степенного спектра при увеличении количества точек на сетке.

зависимость показателя в полученном степенном спектре от уровня накачки. Для этого был выполнен расчет при уровне накачки $F_0 = 3 \times 10^{-4}$ на сетке размером 256×256. На Рис. 4.3.2 хорошо видно, что отличия показателей не наблюдается. Как и следовало ожидать, наблюдается отличие потока P в формуле (4.42), что приводит лишь к параллельному смещению кривой.

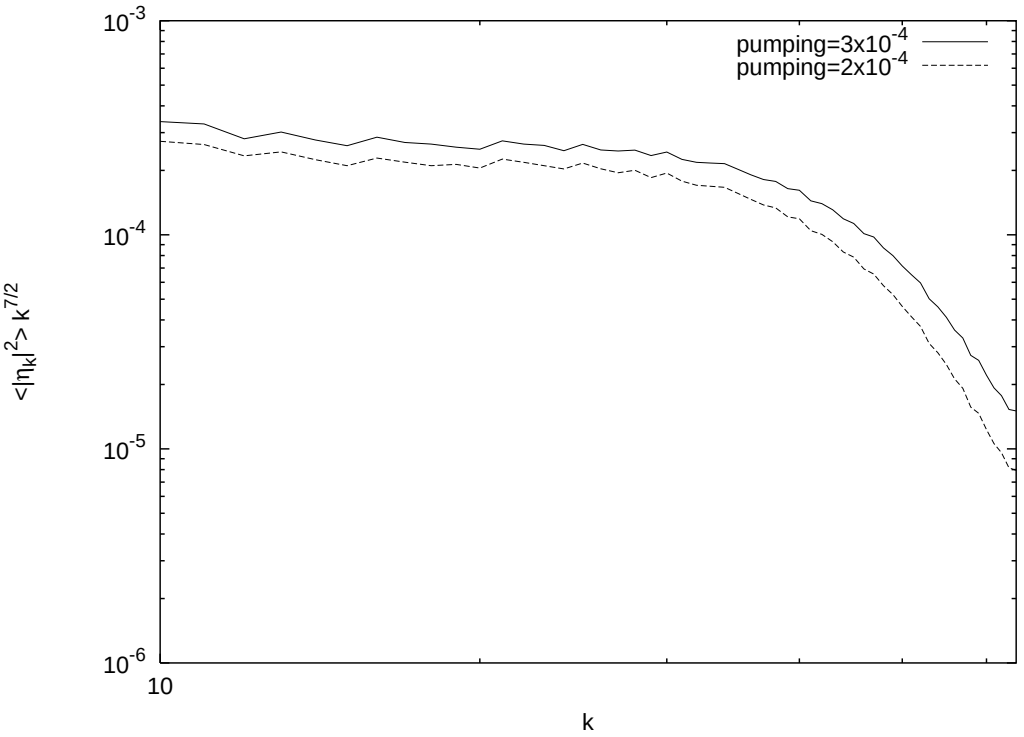


Рис. 4.23: Инерционный интервал спектра при различных уровнях накачки.

4.3.3 Заключение

Произведенное численное моделирование динамических уравнений волн на поверхности жидкости в случае гравитационных волн на глубокой воде показало, что в существенной области инерционного интервала для корреляционной функции отклонения поверхности наблюдается Колмогоровский (степенной) спектр, подтверждающий предсказания теории слабой турбулентности. Произведенные дополнительные численные эксперименты продемонстрировали, что степень убывания спектра не зависит от уровня накачки и затухания в модели, что позволяет считать данный спектр универсальным. Таким образом, можно заключить, что предположения, в рамках которых получена теория слабой турбулентности, являются верными и в случае гравитационных волн на поверхности глубокой жидкости.

Заключение

Основные результаты диссертации состоят в следующем.

Используя канонический формализм для описания динамики свободной поверхности двумерной идеальной жидкости произвольной глубины и конформное отображение в горизонтальную полосу, получена простая система псевдо-дифференциальных уравнений на форму поверхности и гидродинамический потенциал скорости. Эта система может быть эффективно изучена аналитически в случае, когда якобиан конформного отображения принимает большие значения в окрестности некоторой точки поверхности. Применяя разложение по обратным степеням якобиана, система может быть сведена к одному уравнению, которое совпадает с хорошо известным уравнением лапласовского роста. В рамках этой модели найден ряд точных решений, которые описывают образование конфигураций типа "пальцев". Получены точные конформные уравнения, кубически нелинейные, для формы поверхности и гидродинамической скорости. Уравнения допускают эффективное численное моделирование. Они описывают перенос особенностей конформного преобразования в верхней полуплоскости. Проведено численное иссле-

дование волн-убийц на поверхности жидкости, исследован механизм их образования, мдуляционная неустойчивость, её нелинейная стадия.

Доказана неинтегрируемость двумерной идеальной гидродинамики со свободной границей. С помощью конформных канонических переменные получены явные выражения для матричных элементов резонансного взаимодействия волн четвертого (который оказался равным нулю) и пятого порядков. Получено кинетическое уравнение для волн, учитывающее 5-ти волновое резонансное взаимодействие. Получены его стационарные решения, Колмогоровские спектры.

Предложена модифицированная ММТ-модель одномерной волновой турбулентности, позволяющая избавиться от когерентных структур в слаботурбулентных режимах. Проведено численное моделирование, продемострировано существование степенных Колмогоровских спектров.

Аналитически и численно исследована солитонная турбулентность для неинтегрируемого уравнения типа НУШ, показано, что система асимптотически приближается к состоянию солитонного газа. Показывается, что "солитонный"и "коллапсный"варианты волновой турбулентности качественно отличаются друг от друга не слишком сильно.

Численно исследована турбулентность в модели НУШ с отталкиванием, турбулентность конденсата. Наблюдалось две качественно различных компоненты в турбулентности неравновесного Бозе-конденсата: обратный каскад производит линейно растущий конденсат, который стабилизирует внеконденсатные флуктуации, (включая кинки) т.е. служит стоком в турбулентности. Посроены корреляционные функции высших порядков, которые

оказались близки к гауссовой статистике.

Численно и аналитически исследована возможность коллапса двумерном обобщении уравнения Бенджамина-Оно (уравнение Шриры). Найдена точная верхняя граница для полной энергии возмущений, когда коллапс все еще невозможен, и когда любое возмущение асимптотически исчезает с течением времени. Теоретические предсказания находятся в качественном согласии с экспериментами.

Исследовано влияние дискретности (в численных экспериментах) на резонансное взаимодействие волн для капиллярных и гравитационных волн на поверхности жидкости. Получены некоторые критерии на правильный выбор параметров моделирования. Разработана численная схема для решения динамических уравнений трехмерной потенциальной гидродинамики, сохраняющая гамильтониан. Проведено численное моделирование слабой турбулентности гравитационных волн. В значительной части области инерционного интервала наблюдалось степенной спектр, совпадающий с теоретическим.

Автор также благодарен членам Ученого Совета ИТФ им. Л. Д. Ландау РАН за полезные замечания.

Приложения

.1 Стационарные волны

Перепишем неявные уравнения для формы поверхности и гидродинамического потенциала Ψ:

$$y_t(1+\tilde{x}_u) - x_t y_u = -\hat{R}\Psi_u\,, \tag{.45}$$

$$\Psi_t y_u - \Psi_u y_t + g y y_u + \hat{R}\left(\Psi_t(1+\tilde{x}_u) - x_t\Psi_u + g y(1+\tilde{x}_u)\right) = 0\,. \tag{.46}$$

Последнее уравнение имеет частное решение:

$$\begin{aligned} y &= y(u-ct), \tilde{x} = \tilde{x}(u-ct)\,, \\ \Psi &= \Psi(u-ct) - g b_0 t\,, \end{aligned} \tag{.47}$$

которое описывает стационарные волны, распространяющиеся с постоянной скоростью c.

Подставляя (.47) в (.45), приходим к равенству:

$$c y_u = \hat{R}\Psi_u\,. \tag{.48}$$

Если воспользоваться (.48) и подставить (.47) в (.46), можно получить:

$$-(c^2 + 2g b_0) y_u + g y y_u + g\hat{R}(y(1+\tilde{x}_u)) = 0\,. \tag{.49}$$

Далее мы будем педполагать все функции периодическими с периодом $L = \frac{2\pi}{k}$. В этом случае полное сохранение массы жидкости предполагает равенство

$$< y(1 + \hat{x}_u) >= 0\,, \tag{.50}$$

где скобки означают усреднение по периоду.

Решение уравнения (.49) можно искать в виде ряда

$$y = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nku\,. \tag{.51}$$

Удобно ввести оператор

$$\hat{S} = \hat{R}\partial^{-1}\,,$$

действие которого на y дает:

$$\hat{S}^{-1}y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n} \cos nku\,,$$

где

$$S_n = \frac{\tanh knh}{kn}\,.$$

С помощью S_n из (.50) a_0 определяется:

$$a_0 = -\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2}{S_n} = \bar{h} - h\,. \tag{.52}$$

Для b_0 имеем соотношение, следующее из (1.47),

$$b_0 = a_0 - \frac{c^2}{g} < 1 - \frac{1}{|z_u|^2} > \tag{.53}$$

Все другие коэффициенты a_n удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$(\tilde{c}^2 - gS_1)a_1 = \frac{g}{2}\sum_{m=1}^{\infty}\left(1 + \frac{S_1(S_m + S_{m+1})}{S_m S_{m+1}}\right) a_m a_{m+1}\,, \tag{.54}$$

$$\begin{aligned}(\tilde{c}^2 - gS_n)a_n &= \frac{g}{2}\sum_{m=1}^{\infty}\left(1 + \frac{S_n(S_m + S_{n+m})}{S_m S_{n+m}}\right) a_m a_{n+m} \\ &+ \frac{g}{4}\sum_{m=1}^{n-1}\left(1 + \frac{S_n(S_m + S_{n-m})}{S_m S_{n-m}}\right) a_m a_{n-m}\,.\end{aligned} \tag{.55}$$

Здесь $\tilde{c}^2 = c^2 - 2g(a_0 - b_0)$. В этих уравнениях амплитуда первой гармоники a_1 произвольна. Полагая ее малой, в главном порядке имеем в соответствии с линейной теорией:

$$a_0 = 0, b_0 = 0 \quad \text{и} \quad c^2 = \tilde{c}^2 = \frac{g}{k} \tanh kh \,, \tag{.56}$$

В первом нетривиальном приближении коэффициенты a_2 и c^2 равны:

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1^2 k \frac{3 + \tanh^2 kh}{4 \tanh^3 kh} \,, \\ c^2 &= \frac{g}{k} \tanh kh \left(1 + \left[\frac{9 - 6 \tanh^2 kh + 5 \tanh^4 kh}{8 \tanh^4 kh} \right] (ka_1)^2 \right) . \end{aligned} \tag{.57}$$

Если вернуться к физической глубине $\bar{h}$, дисперсионное соотношение (.57) совпадает с точностью с полученным в [155]:

$$c^2 = \frac{g}{k} \tanh k\bar{h} \left(1 + \left[\frac{9 - 10 \tanh^2 k\bar{h} + 9 \tanh^4 k\bar{h}}{8 \tanh^4 k\bar{h}} \right] (ka_1)^2 \right) . \tag{.58}$$

В пределе глубокой воды отсюда следует результат Стокса [144]:

$$c^2 = \frac{g}{k}(1 + (ka_1)^2) \,. \tag{.59}$$

Для мелкой воды

$$\hat{S} \simeq h(1 - \frac{h^2}{3} \frac{\partial^2}{\partial x^2}) \,,$$

и уравнение (.49) превращается в дифференциальное, описывающее солитоны КДВ типа.

.2 Гамильтониан 4-го и 5-го порядков

В этом приложении получаем члены разложения Гамильтониана до 5-го порядка включительно. Первая часть гамильтониана $\mathcal{H}_4$ равна

$$\mathcal{H}_4{}^{1st} = -\frac{1}{2} \int 2\Psi^{(3)} H \Psi^{(1)\prime} du =$$

$$
\begin{aligned}
&= -\int \mathcal{P}(x'^2 - y'^2) H \mathcal{P}' du + 2\int x' H(y'\mathcal{P}) H\mathcal{P}' du = \\
&= \frac{1}{2\pi}\int |k_3|(|k_1 k_2| + k_1 k_2) z_{k_1} z_{k_2} \mathcal{P}_{k_3}\mathcal{P}_{k_4}\delta_{k_1+k_2+k_3+k_4} dk_1 dk_2 dk_3 dk_4 + \\
&+ \frac{1}{\pi}\int |k_1|k_2|k_3| s_{k_2+k_4} z_{k_1} z_{k_2}\mathcal{P}_{k_3}\mathcal{P}_{k_4}\delta_{k_1+k_2+k_3+k_4} dk_1 dk_2 dk_3 dk_4
\end{aligned}
$$

Вторая часть $\mathcal{H}_4$ может быть записана так:

$$
\begin{aligned}
{\mathcal{H}_4}^{2nd} &= -\frac{1}{2}\int \Psi^{(2)} H {\Psi^{(2)}}' du = \\
&= -\frac{1}{2}\int (y'\mathcal{P}) H (y'\mathcal{P})' + (x'\mathcal{P}) H (x'\mathcal{P})' + 2(x'\mathcal{P})(y'\mathcal{P})' du
\end{aligned}
$$

В k-пространстве она принимает вид:

$$
\begin{aligned}
{\mathcal{H}_4}^{2nd} = \frac{1}{4\pi} &\int \{(|k_1 k_2| - k_1 k_2)|k_2 + k_4| + (|k_1|k_2 - k_1|k_2|)(k_2 + k_4)\}\times \\
&z_{k_1} z_{k_2}\mathcal{P}_{k_3}\mathcal{P}_{k_4}\delta_{k_1+k_2+k_3+k_4} dk_1 dk_2 dk_3 dk_4 \qquad (.1)
\end{aligned}
$$

Первая часть $\mathcal{H}_5$ равна

$$
\begin{aligned}
{\mathcal{H}_5}^{1st} = - &\int \Psi^{(4)} H {\Psi^{(1)}}' du = \\
\frac{-1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} &\int |k_4|\{(3k_1 k_2 + |k_1 k_2|)|k_3| + (3|k_1 k_2| + k_1 k_2) s_{k_3+k_5} k_3\}\times \\
&z_{k_1} z_{k_2} z_{k_3}\mathcal{P}_{k_4}\mathcal{P}_{k_5}\delta_{k_1+k_2+k_3+k_4+k_5} dk_1 dk_2 dk_3 dk_4 dk_5
\end{aligned}
$$

Вторая часть $\mathcal{H}_5$ имеет вид

$$
\begin{aligned}
{\mathcal{H}_5}^{2nd} = - &\int \Psi^{(3)} H {\Psi^{(2)}}' du = \\
&\int \mathcal{P}(x'^2 - y'^2)(z'\mathcal{P})' du + \int \mathcal{P}(x'^2 - z'^2) H(x'\mathcal{P})' du - \\
-2 &\int x' H(z'\mathcal{P})(z'\mathcal{P}')' du - 2\int x' H(z'\mathcal{P}) H(x'\mathcal{P})' du = \\
-\frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} &\int \{(|k_1 k_2| + k_1 k_2)(k_3(k_3 + k_4) + |k_3||k_3 + k_4|)\}\times \\
&z_{k_1} z_{k_2} z_{k_3}\mathcal{P}_{k_4}\mathcal{P}_{k_5}\delta_{k_1+k_2+k_3+k_4+k_5} dk_1 dk_2 dk_3 dk_4 dk_5 - \\
-\frac{2}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} &\int |k_1| k_3 s_{k_3+k_4}(k_2(k_2 + k_5) + |k_2||k_2 + k_5|)\times \\
&z_{k_1} z_{k_2} z_{k_3}\mathcal{P}_{k_4}\mathcal{P}_{k_5}\delta_{k_1+k_2+k_3+k_4+k_5} dk_1 dk_2 dk_3 dk_4 dk_5
\end{aligned}
$$

Гамильтониаи может быть запмсан в симметричной форме:

$$\begin{aligned}
\mathcal{H} = \frac{1}{2} &\int (g|z_k|^2 + |k||\mathcal{P}_k|^2)dk + \\
+\frac{1}{2\sqrt{2\pi}} &\int \{S_{k_1k_2k_3} z_{k_1} z_{k_2} z_{k_3} - F^{k_1}_{k_2k_3} z_{k_1} \mathcal{P}_{k_2} \mathcal{P}_{k_3}\} \delta_{k_1+k_2+k_3} dk_1 dk_2 dk_3 + \\
+\frac{1}{4\pi} &\int M^{k_1k_2}_{k_3k_4} z_{k_1} z_{k_2} \mathcal{P}_{k_3} \mathcal{P}_{k_4} \delta_{k_1+k_2+k_3+k_4} dk_1 dk_2 dk_3 dk_4 + \\
+\frac{1}{2(2\pi)^{\frac{3}{2}}} &\int N^{k_1k_2k_3}_{k_4k_5} z_{k_1} z_{k_2} z_{k_3} \mathcal{P}_{k_4} \mathcal{P}_{k_5} \delta_{k_1+k_2+k_3+k_4+k_5} dk_1 dk_2 dk_3 dk_4 dk_5
\end{aligned}$$

где $S_{k_1k_2k_3}$, $L_{k_1k_2}$ и $F^{k_1}_{k_2k_3}$ определены в (2.30), и

$$\begin{aligned}
M^{k_1k_2}_{k_3k_4} &= (|k_3| + |k_4|)(k_1k_2 + |k_1k_2|) + \\
&+ \frac{1}{4} L_{-k_1k_2}(|k_1 + k_3| + |k_1 + k_4| + |k_2 + k_3| + |k_2 + k_4|) + \\
&+ \frac{1}{2}(|k_1|k_2(2k_2 + k_3 + k_4) + k_1|k_2|(2k_1 + k_3 + k_4)) + \\
&+ |k_1|k_2(|k_3|s_{k_2+k_4} + |k_4|s_{k_2+k_3}) + k_1|k_2|(|k_3|s_{k_1+k_4} + |k_4|s_{k_1+k_3})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N^{k_1k_2k_3}_{k_4k_5} &= \\
&- \{(|k_1k_2k_3| + |k_1|k_2k_3 + k_1|k_2|k_3 + k_1k_2|k_3|)(|k_4| + |k_5|) + \\
&+ \frac{k_1k_2k_3}{3}(|k_4|(s_{k_1+k_5} + s_{k_2+k_5} + s_{k_3+k_5}) + \\
&+ |k_5|(s_{k_1+k_4} + s_{k_2+k_4} + s_{k_3+k_4})) + \\
&+ |k_4|(k_1|k_2||k_3|s_{k_1+k_5} + |k_1|k_2|k_3|s_{k_2+k_5} + |k_1||k_2|k_3 s_{k_3+k_5}) + \\
&+ |k_5|(k_1|k_2||k_3|s_{k_1+k_4} + |k_1|k_2|k_3|s_{k_2+k_4} + |k_1||k_2|k_3 s_{k_3+k_4})\}
\end{aligned}$$

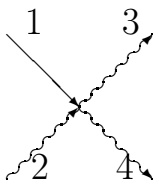
$$\begin{aligned}
&- \frac{1}{3}\{L_{k_1,k_2} L_{k_3,k_3+k_4} + L_{k_3,k_2} L_{k_1,k_1+k_4} + L_{k_1,k_3} L_{k_2,k_2+k_4} + \\
&+ L_{k_1,k_2} L_{k_3,k_3+k_5} + L_{k_3,k_2} L_{k_1,k_1+k_5} + L_{k_1,k_3} L_{k_2,k_2+k_5}\} - \\
-\frac{1}{3}\{|k_1| &\quad (\quad k_3(L_{k_2,k_2+k_4} s_{k_3+k_5} + L_{k_2,k_2+k_5} s_{k_3+k_4}) + \\
&+ k_2(L_{k_3,k_3+k_4} s_{k_2+k_5} + L_{k_3,k_3+k_5} s_{k_2+k_4})) + \\
|k_2| &\quad (\quad k_3(L_{k_1,k_1+k_4} s_{k_3+k_5} + L_{k_1,k_1+k_5} s_{k_3+k_4}) +
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& + \quad k_1(L_{k_3,k_3+k_4}s_{k_1+k_5} + L_{k_3,k_3+k_5}s_{k_1+k_4}))+ \\
|k_3| \quad & (\quad k_2(L_{k_1,k_1+k_4}s_{k_2+k_5} + L_{k_1,k_1+k_5}s_{k_2+k_4})+ \\
& + \quad k_1(L_{k_2,k_2+k_4}s_{k_1+k_5} + L_{k_2,k_2+k_5}s_{k_1+k_4}))\}
\end{aligned}
$$

.3 Элементы диаграммной техники

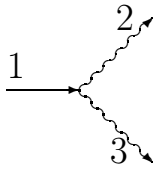
Введем базовые объекты диаграммной техники, которые понадобятся нам в Приложении .4.

1. Четырёхволновая вершина с 2 входящими и 2 выходящими волновыми векторами:

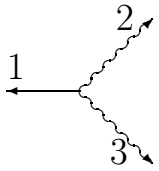


$$W_{k_3 k_4}^{k_1 k_2}$$

2. Трёхволновые вершины U и V:

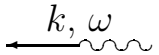


$$V_{k_2 k_3}^{k_1}$$



$$U_{k_1 k_2 k_3}$$

3. Функция Грина $G(k, \omega)$.

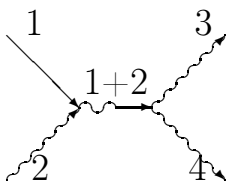


$$G(k, \omega) = \frac{1}{\omega - \omega_k}$$

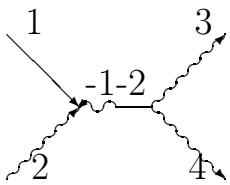
Заметим, что каждая вершина имеет одну прямую линию, остальный - волнистые.

Для того, чтобы вычислить полный матричный элемент четвертого порядка, необходимо сложить с собственно четырехволновой вершиной все возможные комбинации вершин более низкого порядка (трёхволновых в данном случае), связанных функцией Грина, таким способом, чтобы результирующие диаграммы имели 2 входящих и 2 выходящих волновых вектора. Кроме того они не должны иметь петель.

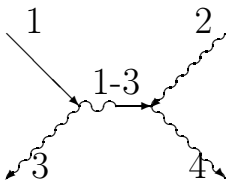
Легко видеть, что единственный способ удовлетворить этим требованиям - это соединить две трёхволновые вершины одной функцией Грина. В результате мы имеем 6 топологически разных конфигурации. Аргументы k и ω внутренней функции Грина должны удовлетворять резонансным условиям (2.21). Поскольку мы находимся на резонансном многообразии, не имеет значения вычисляем ли мы аргументы k и ω функции Грина по левой или правой вершине, так как они оба дают один и тот же результат. Это отражается в том, что два слагаемых в каждой квадратной скобке (2.35) равны. Это позволяет убрать коэффициент $1/2$.



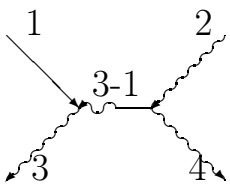
$$-V_{k_1k_2}^{k_1+k_2}V_{k_3k_4}^{k_3+k_4}\left[\frac{1}{\omega_{k_1+k_2}-\omega_{k_1}-\omega_{k_2}}\right]$$



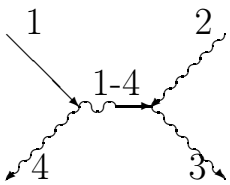
$$-U_{-k_1-k_2k_1k_2}U_{-k_3-k_4k_3k_4}\left[\frac{1}{\omega_{k_1+k_2}+\omega_{k_1}+\omega_{k_2}}\right]$$



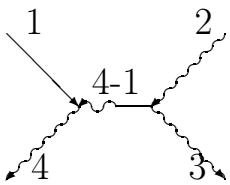
$$-V^{k_1}_{k_3 k_1 - k_3} V^{k_4}_{k_2 k_4 - k_2} \left[\frac{1}{\omega_{k_3} + \omega_{k_1 - k_3} - \omega_{k_1}} \right]$$



$$-V^{k_2}_{k_4 k_2 - k_4} V^{k_3}_{k_1 k_3 - k_1} \left[\frac{1}{\omega_{k_4} + \omega_{k_2 - k_4} - \omega_{k_2}} \right]$$



$$-V^{k_1}_{k_4 k_1 - k_4} V^{k_3}_{k_2 k_3 - k_2} \left[\frac{1}{\omega_{k_4} + \omega_{k_1 - k_4} - \omega_{k_1}} \right]$$



$$-V^{k_2}_{k_3 k_2 - k_3} V^{k_4}_{k_1 k_4 - k_1} \left[\frac{1}{\omega_{k_3} + \omega_{k_2 - k_3} - \omega_{k_2}} \right]$$

.4 5-ти волновые диаграммы

Здесь мы будем строить диаграммы 5-ти волновых процессов.

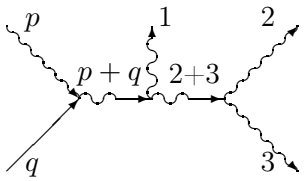
Деействуя аналогично Приложению .3, .3, мы можем написать серию диаграмм для матричного элемента пятого порядка $T^{kk_1k_2}_{k_3k_4}$. Нам необходимо использовать трёх и четырёх волновые вершины таким образом, чтобы имелось 2 входящих и 3 исходящих волновых вектора. Результат, разумеется, будет таким же, если мы рассмотрим 3 входящих и 2 исходящих волновых вектора. Учитывая все топологически разные комбинации, а также определение функции Грина и отсутствие петель, получаем, что

- имеется 60 диаграмм, сконтруированных только из трёхволновых вершин и двух функций Грина,
- и 20 диаграмм, сконструированных из одной трёхволновой вершины, одной четырёхволновой вершины и одной функции Грина.

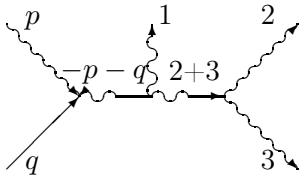
Мы назовем эти группы соответственно "3+3+3"и "4+3".

Далее приведены *все* диаграммы и соответствующие аналитические выражения для "3+3+3"и "4+3"групп.

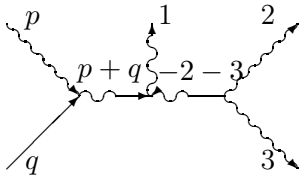
Вместе с собственно пятиволновой вершиной $Q^{k_1k_2k_3}_{pq}$ эта сумма даёт полный 5-ти волновой матричный элемент $T^{k_1k_2k_3}_{pq}$ или $T^{pq}_{k_1k_2k_3}$. Это выражение вычислялось с помощью программы "Matematica"[156].



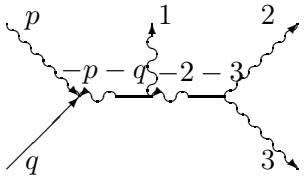
$$\frac{V(k2+k3,k2,k3)\,V(p+q,k1,k2+k3)\,V(p+q,p,q)}{(\omega(k2)+\omega(k3)-\omega(k2+k3))\;(\omega(p)+\omega(q)-\omega(p+q))}$$



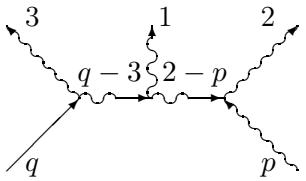
$$-\frac{U(k1,-p-q,k2+k3)\,U(p,q,-p-q)\,V(k2+k3,k2,k3)}{(\omega(k2)+\omega(k3)-\omega(k2+k3))\;(\omega(p)+\omega(q)+\omega(p+q))}$$



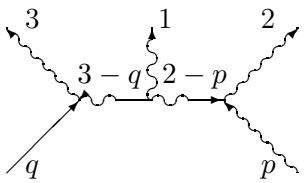
$$-\frac{U(k2,k3,-k2-k3)\,V(k1,p+q,-k2-k3)\,V(p+q,p,q)}{(\omega(k2)+\omega(k3)+\omega(k2+k3))\;(\omega(p)+\omega(q)-\omega(p+q))}$$



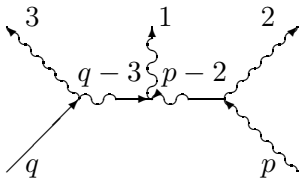
$$\frac{U(k2,k3,-k2-k3)\,U(p,q,-p-q)\,V(-k2-k3,k1,-p-q)}{(\omega(k2)+\omega(k3)+\omega(k2+k3))\;(\omega(p)+\omega(q)+\omega(p+q))}$$



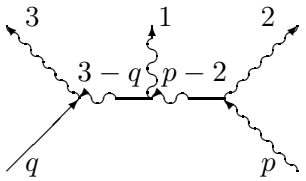
$$\frac{V(k2,p,k2-p)\,V(q,k3,-k3+q)\,V(-k3+q,k1,k2-p)}{(\omega(k2)-\omega(k2-p)-\omega(p))\;(-\omega(k3)-\omega(k3-q)+\omega(q))}$$



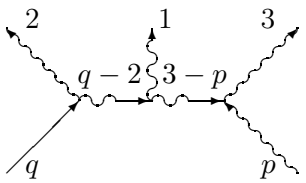
$$\frac{U(k1,k3-q,k2-p)\,V(k2,p,k2-p)\,V(k3,q,k3-q)}{(\omega(k2)-\omega(k2-p)-\omega(p))\;(\omega(k3)-\omega(k3-q)-\omega(q))}$$



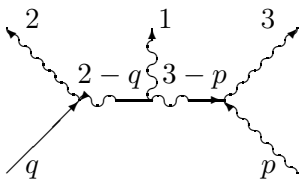
$$\frac{V(k1,-k3+q,-k2+p)\,V(p,k2,-k2+p)\,V(q,k3,-k3+q)}{(-\omega(k2)-\omega(k2-p)+\omega(p))\;(-\omega(k3)-\omega(k3-q)+\omega(q))}$$



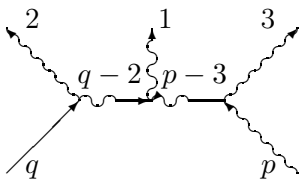
$$\frac{V(k3,q,k3-q)\,V(p,k2,-k2+p)\,V(-k2+p,k1,k3-q)}{(-\omega(k2)-\omega(k2-p)+\omega(p))\;(\omega(k3)-\omega(k3-q)-\omega(q))}$$



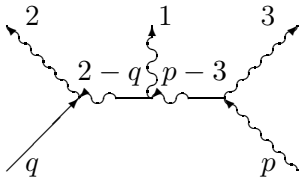
$$\frac{V(k3,p,k3-p)\,V(q,k2,-k2+q)\,V(-k2+q,k1,k3-p)}{(\omega(k3)-\omega(k3-p)-\omega(p))\;(-\omega(k2)-\omega(k2-q)+\omega(q))}$$



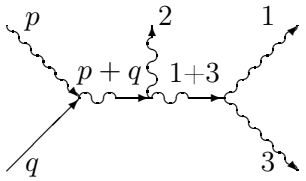
$$\frac{U(k1,k2-q,k3-p)\,V(k2,q,k2-q)\,V(k3,p,k3-p)}{(\omega(k3)-\omega(k3-p)-\omega(p))\;(\omega(k2)-\omega(k2-q)-\omega(q))}$$



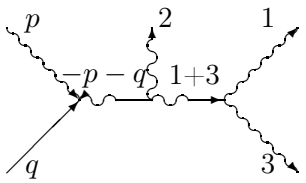
$$\frac{V(k1,-k2+q,-k3+p)\,V(p,k3,-k3+p)\,V(q,k2,-k2+q)}{(-\omega(k3)-\omega(k3-p)+\omega(p))\;(-\omega(k2)-\omega(k2-q)+\omega(q))}$$



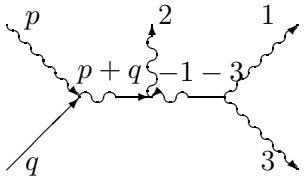
$$\frac{V(k2,q,k2-q)\,V(p,k3,-k3+p)\,V(-k3+p,k1,k2-q)}{(-\omega(k3)-\omega(k3-p)+\omega(p))\;(\omega(k2)-\omega(k2-q)-\omega(q))}$$



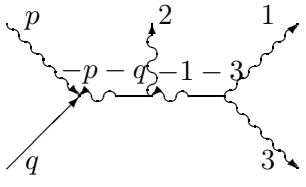
$$\frac{V(k1+k3,k1,k3)\,V(p+q,k2,k1+k3)\,V(p+q,p,q)}{(\omega(k1)+\omega(k3)-\omega(k1+k3))\;(\omega(p)+\omega(q)-\omega(p+q))}$$



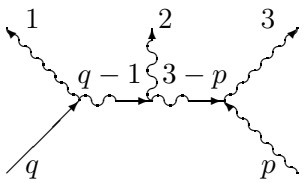
$$\frac{U(k2,k1+k3,-p-q)\,U(p,q,-p-q)\,V(k1+k3,k1,k3)}{(\omega(k1)+\omega(k3)-\omega(k1+k3))\;(-\omega(p)-\omega(q)-\omega(p+q))}$$



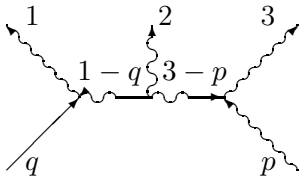
$$\frac{U(k1,k3,-k1-k3)\,V(k2,p+q,-k1-k3)\,V(p+q,p,q)}{(-\omega(k1)-\omega(k3)-\omega(k1+k3))\;(\omega(p)+\omega(q)-\omega(p+q))}$$



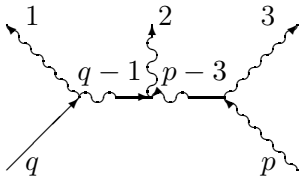
$$\frac{U(-k1-k3,k1,k3)\,U(p,q,-p-q)\,V(-k1-k3,k2,-p-q)}{(-\omega(k1)-\omega(k3)-\omega(k1+k3))\;(-\omega(p)-\omega(q)-\omega(p+q))}$$



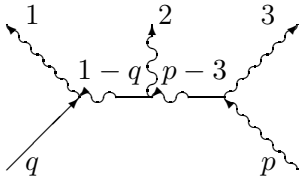
$$\frac{V(k3,p,k3-p)\,V(q,k1,-k1+q)\,V(-k1+q,k2,k3-p)}{(\omega(k3)-\omega(k3-p)-\omega(p))\;(-\omega(k1)+\omega(q)-\omega(-k1+q))}$$



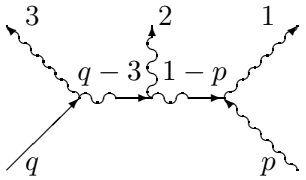
$$\frac{U(k2,k1-q,k3-p)\,V(k1,q,k1-q)\,V(k3,p,k3-p)}{(\omega(k3)-\omega(k3-p)-\omega(p))\;(\omega(k1)-\omega(q)-\omega(-k1+q))}$$



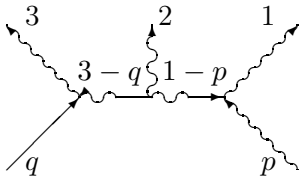
$$\frac{V(k2,-k1+q,-k3+p)\,V(p,k3,-k3+p)\,V(q,k1,-k1+q)}{(-\omega(k3)-\omega(k3-p)+\omega(p))\;(-\omega(k1)+\omega(q)-\omega(-k1+q))}$$



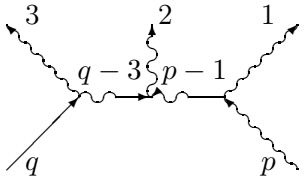
$$\frac{V(k1,q,k1-q)\,V(p,k3,-k3+p)\,V(-k3+p,k2,k1-q)}{(-\omega(k3)-\omega(k3-p)+\omega(p))\;(\omega(k1)-\omega(q)-\omega(-k1+q))}$$



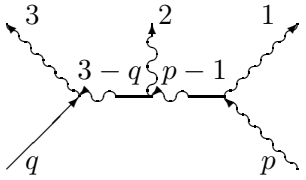
$$\frac{V(k1,p,k1-p)\,V(q,k3,-k3+q)\,V(-k3+q,k2,k1-p)}{(\omega(k1)-\omega(k1-p)-\omega(p))\;(-\omega(k3)-\omega(k3-q)+\omega(q))}$$



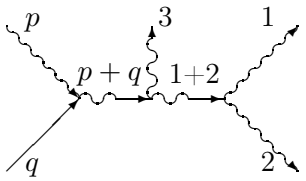
$$\frac{U(k2,k3-q,k1-p)\,V(k1,p,k1-p)\,V(k3,k3-q,q)}{(\omega(k1)-\omega(k1-p)-\omega(p))\;(\omega(k3)-\omega(k3-q)-\omega(q))}$$



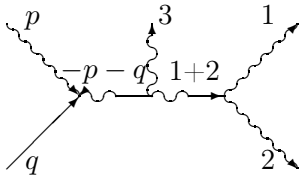
$$\frac{V(k2,-k3+q,-k1+p)\,V(p,k1,-k1+p)\,V(q,k3,-k3+q)}{(-\omega(k1)-\omega(k1-p)+\omega(p))\;(-\omega(k3)-\omega(k3-q)+\omega(q))}$$



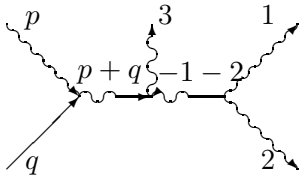
$$\frac{V(k3,k3-q,q)\,V(p,k1,-k1+p)\,V(-k1+p,k3-q,k2)}{(-\omega(k1)-\omega(k1-p)+\omega(p))\;(\omega(k3)-\omega(k3-q)-\omega(q))}$$



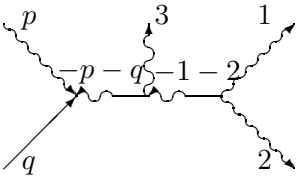
$$\frac{V(k1+k2,k1,k2)\,V(p+q,k3,k1+k2)\,V(p+q,p,q)}{(\omega(k1)+\omega(k2)-\omega(k1+k2))\;(\omega(p)+\omega(q)-\omega(p+q))}$$



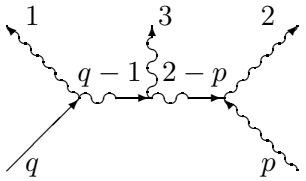
$$\frac{U(k3,k1+k2,-p-q)\,U(p,q,-p-q)\,V(k1+k2,k1,k2)}{(\omega(k1)+\omega(k2)-\omega(k1+k2))\;(-\omega(p)-\omega(q)-\omega(p+q))}$$



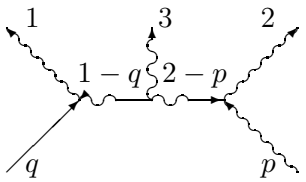
$$\frac{U(k1,k2,-k1-k2)\,V(k3,p+q,-k1-k2)\,V(p+q,p,q)}{(-\omega(k1)-\omega(k2)-\omega(k1+k2))\;(\omega(p)+\omega(q)-\omega(p+q))}$$



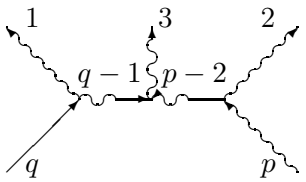
$$\frac{U(k1,k2,-k1-k2)\,U(p,q,-p-q)\,V(-k1-k2,k3,-p-q)}{(-\omega(k1)-\omega(k2)-\omega(k1+k2))\;(-\omega(p)-\omega(q)-\omega(p+q))}$$



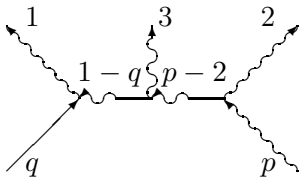
$$\frac{V(k2,p,k2-p)\,V(q,k1,-k1+q)\,V(-k1+q,k3,k2-p)}{(\omega(k2)-\omega(k2-p)-\omega(p))\;(-\omega(k1)+\omega(q)-\omega(-k1+q))}$$



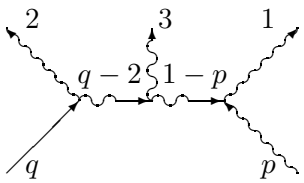
$$\frac{U(k1-q,k3,k2-p)\,V(k1,q,k1-q)\,V(k2,p,k2-p)}{(\omega(k2)-\omega(k2-p)-\omega(p))\;(\omega(k1)-\omega(q)-\omega(-k1+q))}$$



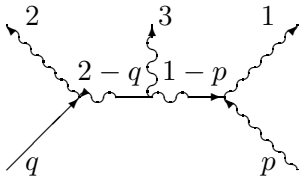
$$\frac{V(k3,-k1+q,-k2+p)\,V(p,k2,-k2+p)\,V(q,k1,-k1+q)}{(-\omega(k2)-\omega(k2-p)+\omega(p))\;(-\omega(k1)+\omega(q)-\omega(-k1+q))}$$



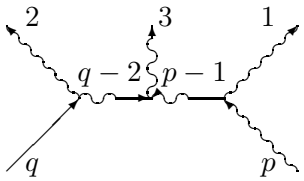
$$\frac{V(k1,q,k1-q)\,V(p,k2,-k2+p)\,V(-k2+p,k3,k1-q)}{(-\omega(k2)-\omega(k2-p)+\omega(p))\;(\omega(k1)-\omega(q)-\omega(-k1+q))}$$



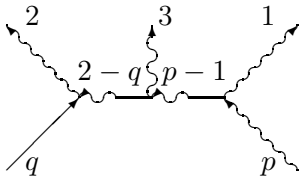
$$\frac{V(k1,p,k1-p)\,V(q,k2,-k2+q)\,V(-k2+q,k3,k1-p)}{(\omega(k1)-\omega(k1-p)-\omega(p))\;(-\omega(k2)-\omega(k2-q)+\omega(q))}$$



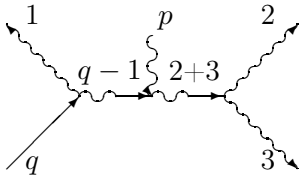
$$\frac{U(k3,k2-q,k1-p)\,V(k1,p,k1-p)\,V(k2,q,k2-q)}{(\omega(k1)-\omega(k1-p)-\omega(p))\;(\omega(k2)-\omega(k2-q)-\omega(q))}$$



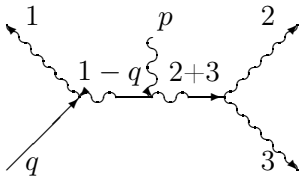
$$\frac{V(k3,-k2+q,-k1+p)\,V(p,k1,-k1+p)\,V(q,k2,-k2+q)}{(-\omega(k1)-\omega(k1-p)+\omega(p))\;(-\omega(k2)-\omega(k2-q)+\omega(q))}$$



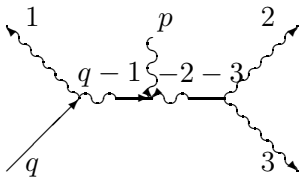
$$\frac{V(k2,q,k2-q)\,V(p,k1,-k1+p)\,V(-k1+p,k3,k2-q)}{(-\omega(k1)-\omega(k1-p)+\omega(p))\;(\omega(k2)-\omega(k2-q)-\omega(q))}$$



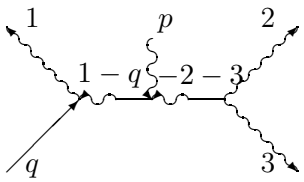
$$\frac{V(k2+k3,k2,k3)\,V(k2+k3,p,-k1+q)\,V(q,k1,-k1+q)}{(\omega(k2)+\omega(k3)-\omega(k2+k3))\;(-\omega(k1)+\omega(q)-\omega(-k1+q))}$$



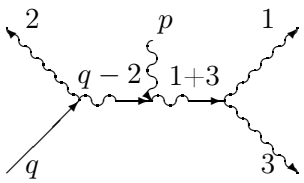
$$\frac{V(k1,q,k1-q)\,V(k2+k3,k2,k3)\,V(p,k1-q,k2+k3)}{(\omega(k2)+\omega(k3)-\omega(k2+k3))\;(\omega(k1)-\omega(q)-\omega(-k1+q))}$$



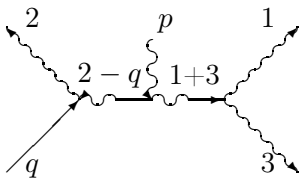
$$\frac{U(k2,k3,-k2-k3)\,U(p,-k1+q,-k2-k3)\,V(q,k1,-k1+q)}{(-\omega(k2)-\omega(k3)-\omega(k2+k3))\;(-\omega(k1)+\omega(q)-\omega(-k1+q))}$$



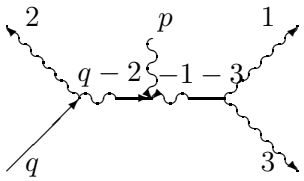
$$\frac{U(k2,k3,-k2-k3)\,V(k1,q,k1-q)\,V(k1-q,p,-k2-k3)}{(-\omega(k2)-\omega(k3)-\omega(k2+k3))\;(\omega(k1)-\omega(q)-\omega(-k1+q))}$$



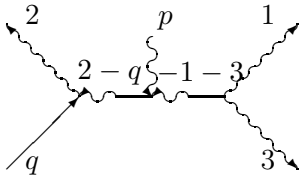
$$\frac{V(k1+k3,k1,k3)\,V(k1+k3,p,-k2+q)\,V(q,k2,-k2+q)}{(\omega(k1)+\omega(k3)-\omega(k1+k3))\;(-\omega(k2)-\omega(k2-q)+\omega(q))}$$



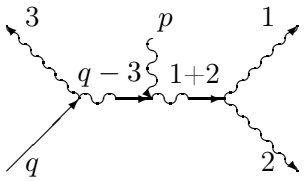
$$\frac{V(k2,q,k2-q)\,V(k1+k3,k1,k3)\,V(p,k2-q,k1+k3)}{(\omega(k1)+\omega(k3)-\omega(k1+k3))\;(\omega(k2)-\omega(k2-q)-\omega(q))}$$



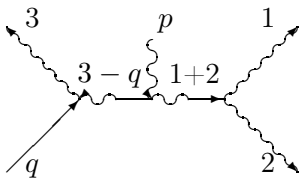
$$\frac{U(k1,k3,-k1-k3)\,U(p,-k2+q,-k1-k3)\,V(q,k2,-k2+q)}{(-\omega(k1)-\omega(k3)-\omega(k1+k3))\;(-\omega(k2)-\omega(k2-q)+\omega(q))}$$



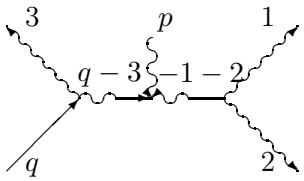
$$-\frac{U(k1,k3,-k1-k3)\,V(k2,q,k2-q)\,V(k2-q,p,-k1-k3)}{(\omega(k1)+\omega(k3)+\omega(k1+k3))\;(\omega(k2)-\omega(k2-q)-\omega(q))}$$



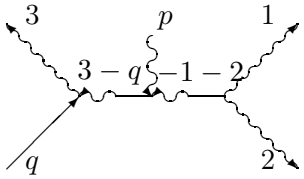
$$\frac{V(k1+k2,k1,k2)\,V(k1+k2,p,-k3+q)\,V(q,k3,-k3+q)}{(\omega(k1)+\omega(k2)-\omega(k1+k2))\;(-\omega(k3)-\omega(k3-q)+\omega(q))}$$



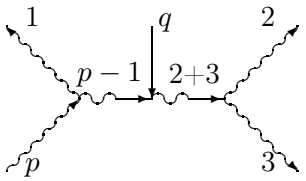
$$\frac{V(k1+k2,k1,k2)\,V(k3,q,k3-q)\,V(p,k3-q,k1+k2)}{(\omega(k1)+\omega(k2)-\omega(k1+k2))\;(\omega(k3)-\omega(k3-q)-\omega(q))}$$



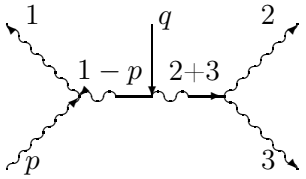
$$\frac{U(-k1-k2,k1,k2)\,U(-k3+q,-k1-k2,p)\,V(q,k3,-k3+q)}{(-\omega(k1)-\omega(k2)-\omega(k1+k2))\;(-\omega(k3)-\omega(k3-q)+\omega(q))}$$



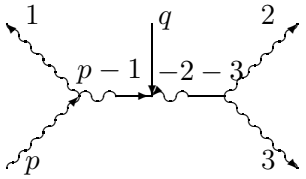
$$-\frac{U(k1,k2,-k1-k2)\,V(k3,q,k3-q)\,V(k3-q,p,-k1-k2)}{(\omega(k1)+\omega(k2)+\omega(k1+k2))\;(\omega(k3)-\omega(k3-q)-\omega(q))}$$



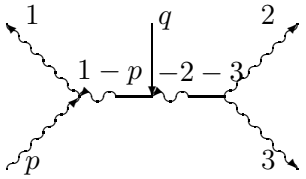
$$\frac{V(k2+k3,k2,k3)\,V(k2+k3,q,-k1+p)\,V(p,k1,-k1+p)}{(\omega(k2)+\omega(k3)-\omega(k2+k3))\;(-\omega(k1)-\omega(k1-p)+\omega(p))}$$



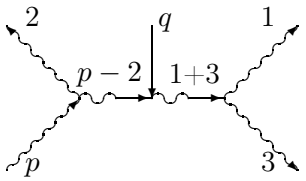
$$\frac{V(k1,p,k1-p)\,V(k2+k3,k2,k3)\,V(q,k1-p,k2+k3)}{(\omega(k2)+\omega(k3)-\omega(k2+k3))\;(\omega(k1)-\omega(k1-p)-\omega(p))}$$



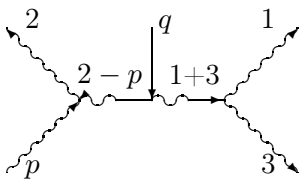
$$\frac{U(k2,k3,-k2-k3)\,U(q,-k1+p,-k2-k3)\,V(p,k1,-k1+p)}{(-\omega(k2)-\omega(k3)-\omega(k2+k3))\;(-\omega(k1)-\omega(k1-p)+\omega(p))}$$



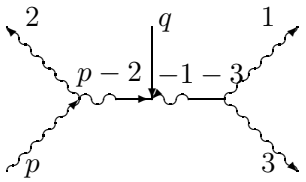
$$\frac{U(-k2-k3,k2,k3)\,V(k1,p,k1-p)\,V(k1-p,q,-k2-k3)}{(-\omega(k2)-\omega(k3)-\omega(k2+k3))\;(\omega(k1)-\omega(k1-p)-\omega(p))}$$



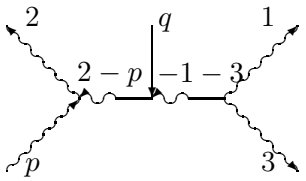
$$\frac{V(k1+k3,k1,k3)\,V(k1+k3,q,-k2+p)\,V(p,k2,-k2+p)}{(\omega(k1)+\omega(k3)-\omega(k1+k3))\;(-\omega(k2)-\omega(k2-p)+\omega(p))}$$



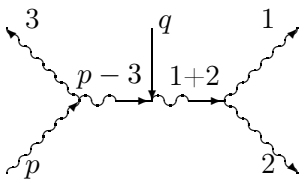
$$\frac{V(k2,p,k2-p)\,V(k1+k3,k1,k3)\,V(q,k2-p,k1+k3)}{(\omega(k1)+\omega(k3)-\omega(k1+k3))\;(\omega(k2)-\omega(k2-p)-\omega(p))}$$



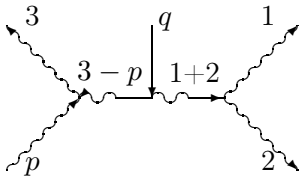
$$\frac{U(-k1-k3,k1,k3)\,U(-k2+p,q,-k1-k3)\,V(p,k2,-k2+p)}{(-\omega(k1)-\omega(k3)-\omega(k1+k3))\;(-\omega(k2)-\omega(k2-p)+\omega(p))}$$



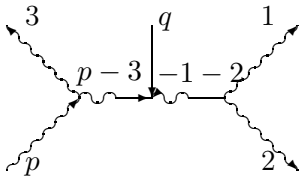
$$\frac{U(k1,k3,-k1-k3)\,V(k2,p,k2-p)\,V(k2-p,q,-k1-k3)}{(-\omega(k1)-\omega(k3)-\omega(k1+k3))\;(\omega(k2)-\omega(k2-p)-\omega(p))}$$



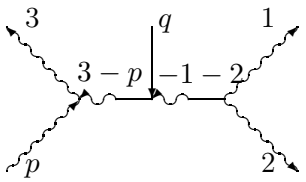
$$\frac{V(k1+k2,k1,k2)\,V(k1+k2,q,-k3+p)\,V(p,k3,-k3+p)}{(\omega(k1)+\omega(k2)-\omega(k1+k2))\;(-\omega(k3)-\omega(k3-p)+\omega(p))}$$



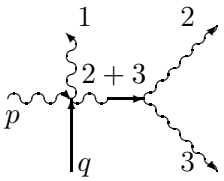
$$\frac{V(k3,p,k3-p)\,V(q,k3-p,k1+k2)\,V(k1+k2,k1,k2)}{(\omega(k1)+\omega(k2)-\omega(k1+k2))\;(\omega(k3)-\omega(k3-p)-\omega(p))}$$



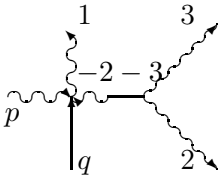
$$\frac{U(k1,k2,-k1-k2)\,U(q,-k3+p,-k1-k2)\,V(p,k3,-k3+p)}{(-\omega(k1)-\omega(k2)-\omega(k1+k2))\;(-\omega(k3)-\omega(k3-p)+\omega(p))}$$



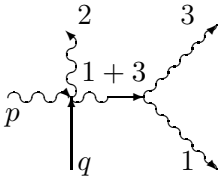
$$\frac{V(k3,p,k3-p)\,V(k3-p,q,-k1-k2)\,U(k1,k2,-k1-k2)}{(-\omega(k1)-\omega(k2)-\omega(k1+k2))\;(\omega(k3)-\omega(k3-p)-\omega(p))}$$



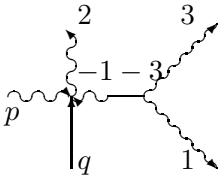
$$\frac{V(k2+k3,k2,k3)\,W(p,q,k1,k2+k3)}{\omega(k2)+\omega(k3)-\omega(k2+k3)}$$



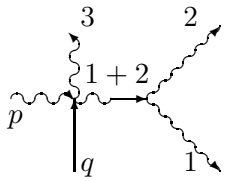
$$-\frac{G(k1,p,q,-k2-k3)\,U(k2,k3,-k2-k3)}{\omega(k2)+\omega(k3)+\omega(k2+k3)}$$



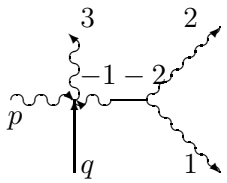
$$\frac{V(k1+k3,k1,k3)\,W(p,q,k2,k1+k3)}{\omega(k1)+\omega(k3)-\omega(k1+k3)}$$



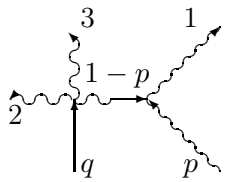
$$-\frac{G(k2,p,q,-k1-k3)\,U(k1,k3,-k1-k3)}{\omega(k1)+\omega(k3)+\omega(k1+k3)}$$



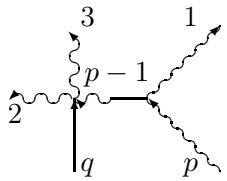
$$\frac{V(k1+k2,k1,k2)\,W(p,q,k3,k1+k2)}{\omega(k1)+\omega(k2)-\omega(k1+k2)}$$



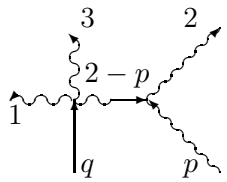
$$-\frac{G(k3,p,q,-k1-k2)\,U(-k1-k2,k1,k2)}{\omega(k1)+\omega(k2)+\omega(k1+k2)}$$



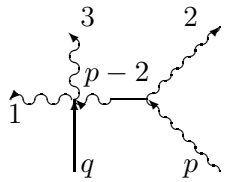
$$\frac{G(q,k1-p,k2,k3)\,V(k1,p,k1-p)}{\omega(k1)-\omega(k1-p)-\omega(p)}$$



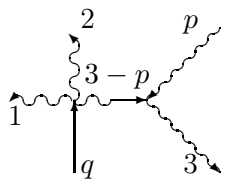
$$\frac{V(p,k1,-k1+p)\,W(q,-k1+p,k2,k3)}{-\omega(k1)-\omega(k1-p)+\omega(p)}$$



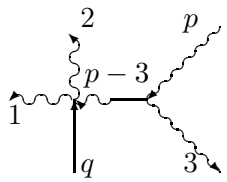
$$\frac{G(q,k2-p,k1,k3)\,V(k2,p,k2-p)}{\omega(k2)-\omega(k2-p)-\omega(p)}$$



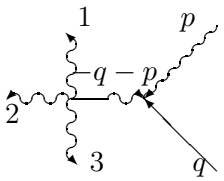
$$\frac{V(p,k2,-k2+p)\,W(q,-k2+p,k1,k3)}{-\omega(k2)-\omega(k2-p)+\omega(p)}$$



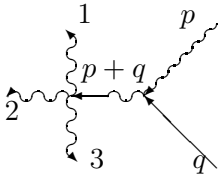
$$\frac{G(q,k3-p,k1,k2)\,V(k3,p,k3-p)}{\omega(k3)-\omega(k3-p)-\omega(p)}$$



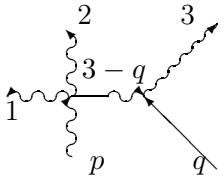
$$\frac{V(p,k3,-k3+p)\,W(q,-k3+p,k2,k1)}{-\omega(k3)-\omega(k3-p)+\omega(p)}$$



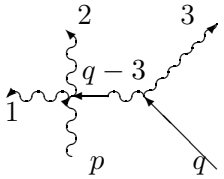
$$-\frac{R(k1,k2,k3,-p-q)\,U(-p-q,p,q)}{\omega(p)+\omega(q)+\omega(p+q)}$$



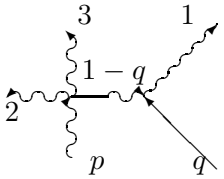
$$\frac{G(p+q,k1,k2,k3)\,V(p+q,p,q)}{\omega(p)+\omega(q)-\omega(p+q)}$$



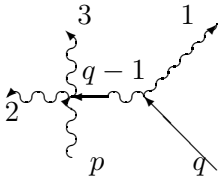
$$\frac{G(p,k1,k2,k3-q)\,V(k3,q,k3-q)}{\omega(k3)-\omega(k3-q)-\omega(q)}$$



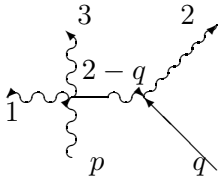
$$\frac{V(q,k3,-k3+q)\,W(p,-k3+q,k1,k2)}{-\omega(k3)-\omega(k3-q)+\omega(q)}$$



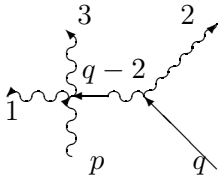
$$\frac{G(p,k2,k3,k1-q)\,V(k1,q,k1-q)}{\omega(k1)-\omega(q)-\omega(-k1+q)}$$



$$\frac{V(q,k1,-k1+q)\,W(p,-k1+q,k2,k3)}{-\omega(k1)+\omega(q)-\omega(-k1+q)}$$



$$\frac{G(p,k1,k3,k2-q)\,V(k2,q,k2-q)}{\omega(k2)-\omega(k2-q)-\omega(q)}$$



$$\frac{V(q,k2,-k2+q)\,W(p,-k2+q,k1,k3)}{-\omega(k2)-\omega(k2-q)+\omega(q)}$$

.5 Численная схема моделирования гравитационных и капиллярных поверхностных волн

Численное моделирование уравнений (4.9) представляет собой довольно сложную задачу. В основном это обусловлено наличием в уравнениях нелокального оператора $\hat{k}$. Однако если написать уравнения в представлении Фурье-гармоник, то этот оператор сведется к действию, аналогичному взятию производной. Поэтому вычисление правых частей, очевидно, будет основываться на последовательном применении алгоритма быстрого преобразования Фурье. В то же время, выбор метода численного интегрирования по времени уравнений (4.9) не столь очевиден. Часто применяется метод Рунге-Кутты четвертого порядка [42]. Он, однако, не лишен некоторых недостатков. Например, данный метод не сохраняет Гамильтониан, что, в случае моделирования Гамильтоновской системы, не слишком хорошо. Если бы удалось построить численную схему, сохраняющую Гамильтониан, то это дало бы прекрасный инструмент для контроля за многими параметрами численного интегрирования. Например, за шагом по времени.

Это Приложение построенщ следующим образом: в части .5.1 последовательно строится схема интегрирования уравнений (4.9), сохраняющая Гамильтониан; удобный на практике метод выбора шага по времени описывается в разделе .5.2; некоторые приемы, обощающие полученную численную схему, приведены в части .5.3; в заключении .5.4 обсуждаются полученные результаты.

.5.1 Построение численной схемы, сохраняющей Гамильтониан

Будем действовать в духе работы [174]. Рассмотрим изменение Гамильтониана (4.8) на одном шаге по времени $H^n \longrightarrow H^{n+1}$, величиной τ:

$$\delta H = H^{n+1} - H^n. \tag{.1}$$

Так как Гамильтониан есть функция только от переменных η и ψ, то попробуем выразить данное изменение как линейную функцию от:

$$\delta\eta = \eta^{n+1} - \eta^n, \quad \delta\psi = \psi^{n+1} - \psi^n. \tag{.2}$$

При этом потребуем, чтобы Гамильтониан на этом шаге по времени оставался постоянным:

$$\delta H = \frac{\partial H}{\partial \psi}\delta\psi + \frac{\partial H}{\partial \eta}\delta\eta = 0. \tag{.3}$$

Разделим данное равенство на шаг по времени τ:

$$\frac{\partial H}{\partial \psi}\frac{\delta\psi}{\tau} + \frac{\partial H}{\partial \eta}\frac{\delta\eta}{\tau} = 0. \tag{.4}$$

Такое равенство может быть выполнено, например, при следующих условиях:

$$\begin{aligned} \frac{\delta\eta}{\tau} &= \frac{\partial H}{\partial \psi}, \\ \frac{\delta\psi}{\tau} &= -\frac{\partial H}{\partial \eta}. \end{aligned} \tag{.5}$$

Это не что иное, как разностный аналог уравнений Гамильтона (4.7). Таким образом, найдя (.1) как линейную функцию (.2), мы получаем правые части уравнений (.5).

Как было упомянуто выше, разностную схему удобно записать для Фурье-гармоник. Для сокращения записи введем оператор преобразования Фурье

$\hat{F}$, соответствующий (4.10). Пользуясь результатами приведенными в Приложении .6, получаем:

$$\begin{aligned}
\frac{\eta_{\vec{k}}^{n+1}-\eta_{\vec{k}}^{n}}{\tau} &= \tfrac{1}{2}|\vec{k}|\left(\psi_{\vec{k}}^{n+1}+\psi_{\vec{k}}^{n}\right)- \\
&-\tfrac{1}{4}\hat{F}\left(\nabla,(\eta^{n+1}+\eta^{n})\nabla(\psi^{n+1}+\psi^{n})\right)- \\
&-\tfrac{1}{4}|\vec{k}|\hat{F}\left((\eta^{n+1}+\eta^{n})\hat{k}(\psi^{n+1}+\psi^{n})\right)+ \\
&+\tfrac{1}{4}|\vec{k}|\hat{F}\left[\left(\eta^{n+1}+\eta^{n}\right)\hat{k}\left(\eta^{n+1}\hat{k}\psi^{n+1}+\eta^{n}\hat{k}\psi^{n}\right)\right]- \\
&-\tfrac{1}{8}|\vec{k}|^{2}\hat{F}\left[((\eta^{n+1})^{2}+(\eta^{n})^{2})\hat{k}(\psi^{n+1}+\psi^{n})\right]+ \\
&+\tfrac{1}{8}|\vec{k}|\hat{F}\left[((\eta^{n+1})^{2}+(\eta^{n})^{2})\triangle(\psi^{n+1}+\psi^{n})\right].
\end{aligned} \tag{.6}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\psi_{\vec{k}}^{n+1}-\psi_{\vec{k}}^{n}}{\tau} &= -\tfrac{1}{2}\tfrac{\omega_{k}^{2}}{|\vec{k}|}\left(\eta_{\vec{k}}^{n+1}+\eta_{\vec{k}}^{n}\right)- \\
&-\tfrac{1}{4}\hat{F}\left(\left|\nabla\psi^{n+1}\right|^{2}+|\nabla\psi^{n}|^{2}\right)+ \\
&+\tfrac{1}{4}\hat{F}\left((\hat{k}\psi^{n+1})^{2}+(\hat{k}\psi^{n})^{2}\right)- \\
&-\tfrac{1}{4}\hat{F}\left[\hat{k}\left(\psi^{n+1}+\psi^{n}\right)\hat{k}\left(\eta^{n+1}\hat{k}\psi^{n+1}+\eta^{n}\hat{k}\psi^{n}\right)\right]- \\
&-\tfrac{1}{4}\hat{F}\left[(\eta^{n+1}+\eta^{n})(\triangle\psi^{n+1}\hat{k}\psi^{n+1}+\triangle\psi^{n}\hat{k}\psi^{n})\right].
\end{aligned} \tag{.7}$$

Для практических вычислений полезно разрешить уравнения (.6-.7) относительно значений на $n+1$-вом шаге (имеются в виду линейные члены). В целях сокращения записи введем обозначения для нелиненых членов в

правых частях уравнений (.6-.7):

$$\begin{aligned}
R_\eta &= -\tfrac{1}{4}\hat{F}\left(\nabla,(\eta^{n+1}+\eta^n)\nabla(\psi^{n+1}+\psi^n)\right)- \\
&\quad -\tfrac{1}{4}|\vec{k}|\hat{F}\left((\eta^{n+1}+\eta^n)\hat{k}(\psi^{n+1}+\psi^n)\right)+ \\
&\quad +\tfrac{1}{4}|\vec{k}|\hat{F}\left[\left(\eta^{n+1}+\eta^n\right)\hat{k}\left(\eta^{n+1}\hat{k}\psi^{n+1}+\eta^n\hat{k}\psi^n\right)\right]- \\
&\quad -\tfrac{1}{8}|\vec{k}|^2\hat{F}\left[((\eta^{n+1})^2+(\eta^n)^2)\hat{k}(\psi^{n+1}+\psi^n)\right]+ \\
&\quad +\tfrac{1}{8}|\vec{k}|\hat{F}\left[((\eta^{n+1})^2+(\eta^n)^2)\triangle(\psi^{n+1}+\psi^n)\right], \qquad (.8)\\
R_\psi &= -\tfrac{1}{4}\hat{F}\left(\left|\nabla\psi^{n+1}\right|^2+|\nabla\psi^n|^2\right)+ \\
&\quad +\tfrac{1}{4}\hat{F}\left((\hat{k}\psi^{n+1})^2+(\hat{k}\psi^n)^2\right)- \\
&\quad -\tfrac{1}{4}\hat{F}\left[\hat{k}\left(\psi^{n+1}+\psi^n\right)\hat{k}\left(\eta^{n+1}\hat{k}\psi^{n+1}+\eta^n\hat{k}\psi^n\right)\right]- \\
&\quad -\tfrac{1}{4}\hat{F}\left[(\eta^{n+1}+\eta^n)(\triangle\psi^{n+1}\hat{k}\psi^{n+1}+\triangle\psi^n\hat{k}\psi^n)\right].
\end{aligned}$$

Разрешая (.6-.7) относительно $\eta_{\vec{k}}^{n+1}$ и $\psi_{\vec{k}}^{n+1}$, получаем:

$$\begin{aligned}
\eta_{\vec{k}}^{n+1} &= A(k,\tau)\eta_{\vec{k}}^n+B(k,\tau)\psi_{\vec{k}}^n+C(k,\tau)R_\eta+D(k,\tau)R_\psi, \\
\psi_{\vec{k}}^{n+1} &= E(k,\tau)\eta_{\vec{k}}^n+A(k,\tau)\psi_{\vec{k}}^n+F(k,\tau)R_\eta+C(k,\tau)R_\psi,
\end{aligned} \qquad (.9)$$

здесь введены обозначения:

$$\begin{aligned}
&A(k,\tau)=\frac{1-\frac{1}{4}\omega_k^2\tau^2}{1+\frac{1}{4}\omega_k^2\tau^2},\quad B(k,\tau)=\frac{\tau k}{1+\frac{1}{4}\omega_k^2\tau^2}, \\
&C(k,\tau)=\frac{\tau}{1+\frac{1}{4}\omega_k^2\tau^2},\quad D(k,\tau)=\frac{1}{2}\tau B(k,\tau), \qquad (.10)\\
&E(k,\tau)=-\frac{\omega_k^2}{k}C(k,\tau),\quad F(k,\tau)=\frac{1}{2}\tau E(k,\tau).
\end{aligned}$$

Таким образом, мы получили неявную (в члены R_η и R_ψ входят значения $\eta_{\vec{k}}^{n+1}$ и $\eta_{\vec{k}}^{n+1}$) численную схему, сохраняющую Гамильтониан (4.8).

.5.2 Выбор шага по времени

Полученную неявную численную схему (.9) можно решать методом простых итераций. Запишем эту процедуру для $\eta_{\vec{k}}^{n+1,s}$, где s — это номер итерации,

подразумевая аналогичные действия для $\psi_{\vec{k}}^{n+1,s}$.

- $s = 0 : \eta_{\vec{k}}^{n}$;
- $s = 1 : (\eta_{\vec{k}}^{n+1} := \eta_{\vec{k}}^{n}) \longrightarrow \eta_{\vec{k}}^{n+1,1}$;
- $s = 2 : (\eta_{\vec{k}}^{n+1} := \eta_{\vec{k}}^{n+1,1}) \longrightarrow \eta_{\vec{k}}^{n+1,2}$;
- ...

Процесс продолжается, пока не будет достигнута требуемая точность ϵ сохранения Гамильтониана. Однако операция вычисления Гамильтониана является довольно «дорогой». В большинстве случаев достаточно потребовать, чтобы выполнялось следующее соотношение:

$$\frac{\sum\limits_{\vec{k}} \left|\eta_{\vec{k}}^{n+1,s+1}\right|^2 - \sum\limits_{\vec{k}} \left|\eta_{\vec{k}}^{n+1,s}\right|^2}{\sum\limits_{\vec{k}} \left|\eta_{\vec{k}}^{n+1,s}\right|^2} < \epsilon, \tag{.11}$$

в случае гравитационных волн. Это, практически, требование к вычислению потенциальной энергии с нужной точностью, а в приближении слабой нелинейности квадратичная часть Гамильтониана доминирует над остальными. В случае капиллярных волн можно соответствующим образом модифицировать выражение под знаком суммы. Но, как показывает практика, даже условия (.11) оказывается достаточно.

В процессе вычислений можно контролировать шаг по времени, требуя сходимости итерационного процесса за число шагов не большее чем заданное, N_{max}, но и не меньшее, чем N_{min}, и соответствующим образом корректируя шаг по времени.

.5.3 Обобщение численной схемы в присутствии затухания и накачки

Приведенная в предыдущем параграфе численная схема может быть применена для моделирования турбулентности волн, которое требует присутствия в модели накачки и затухания. Например, добавим в уравнение (.7) член вида:

$$\dot{\psi}_{\vec{k}} = ... - \gamma_k \psi_{\vec{k}}, \tag{.12}$$

соответствующий экспоненциальному затуханию гармоник. Учесть такую добавку можно практически не меняя схему вычислений. Используем для этого метод расщепления («split-step»), широко применяемый, например, для моделирования распространения волн в оптоволокне. Для этого вычисляем решение уравнений (4.9) на текущем шаге без учета затухания. Обозначим это решение $\tilde{\psi}_{\vec{k}}^{n+1}$. Тогда решение полной системы можем вычислить по формуле:

$$\psi_{\vec{k}}^{n+1} = \tilde{\psi}_{\vec{k}}^{n+1} \exp(-\gamma_k \tau). \tag{.13}$$

Надо отметить, что при моделировании турбулентности волн, нас интересует поведение системы в области, где влияние накачки и затухания незначительно («инерционный интервал»). Поэтому нет необходимости применять методы, обеспечивающие слишком высокую точность в рассчете влияния затухания. Кроме того, применяя метод расщепления, мы избавляемся от ограничения на величину шага по времени, вносимого затуханием:

$$\max(|\gamma_k|)\tau < 1. \tag{.14}$$

Аналогичным способом можно учесть и накачку.

.5.4 Заключение

Вычисляя дискретную вариацию Гамильтониана, нам удалось построить численную схему для решения динамических уравнений (4.9), сохраняющую Гамильтониан. В этом случае мы получаем удобный инструмент для контроля за величиной шага по времени. Данная схема легко обобщается на случай наличия в уравнениях накачки и затухания. Это позволяет использовать полученную схему при моделировании турбулентности, а так же при рассчете свободной эволюции поверхностных волн.

.6 Дискретная вариация Гамильтониана

Выпишем почленно разность Гамильтонианов $H^{n+1} - H^n$, пользуясь свойством оператора $\hat{k}$:

$$\int g\hat{k}f\, d^2r = \int f\hat{k}g\, d^2r. \tag{.15}$$

Далее, для краткомти, опустим знаки интегралов.

Квадратичные члены:

$$\delta\left(\frac{1}{2}\int \psi\hat{k}\psi d^2r\right) \;\longrightarrow\; \tfrac{1}{2}\delta\psi\hat{k}\left(\psi^{n+1}+\psi^n\right); \tag{.16}$$

$$\delta\left(\frac{1}{2}\int \frac{\omega_k^2}{|\vec{k}|}\left|\eta_{\vec{k}}\right|^2 d\vec{k}\right) \;\longrightarrow\; \tfrac{1}{2}\delta\eta_{\vec{k}}\tfrac{\omega_k^2}{|\vec{k}|}\left(\eta_{\vec{k}}^{n+1}+\eta_{\vec{k}}^n\right). \tag{.17}$$

Кубические члены:

$$\begin{aligned}\delta\left(\frac{1}{2}\int \eta\left|\nabla\psi\right|^2 d^2r\right) \;\longrightarrow\; & -\tfrac{1}{4}\delta\psi\left(\nabla,(\eta^{n+1}+\eta^n)\nabla(\psi^{n+1}+\psi^n)\right)+\\ & +\tfrac{1}{4}\delta\eta\left(\left|\nabla\psi^{n+1}\right|^2+\left|\nabla\psi^n\right|^2\right);\end{aligned} \tag{.18}$$

$$\delta\left(\frac{1}{2}\int\eta\left(\hat{k}\psi\right)^2 d^2r\right) \longrightarrow -\tfrac{1}{4}\delta\psi\hat{k}\left(\eta^{n+1}+\eta^n)\hat{k}(\psi^{n+1}+\psi^n)\right) - \\ -\tfrac{1}{4}\delta\eta\left((\hat{k}\psi^{n+1})^2+(\hat{k}\psi^n)^2\right). \tag{.19}$$

Члены четвертого порядка:

$$\delta\left(\frac{1}{2}\int\left(\eta\hat{k}\psi\right)\hat{k}\left(\eta\hat{k}\psi\right)d^2r\right) \longrightarrow \tfrac{1}{4}\delta\psi\hat{k}\left[\left(\eta^{n+1}+\eta^n\right)\times\right. \\ \left.\times\,\hat{k}\left(\eta^{n+1}\hat{k}\psi^{n+1}+\eta^n\hat{k}\psi^n\right)\right]+ \\ +\tfrac{1}{4}\delta\eta\hat{k}\left[\left(\psi^{n+1}+\psi^n\right)\times\right. \\ \left.\times\,\hat{k}\left(\eta^{n+1}\hat{k}\psi^{n+1}+\eta^n\hat{k}\psi^n\right)\right]; \tag{.20}$$

$$\delta\left(\frac{1}{2}\int(\triangle\psi)(\hat{k}\psi)\eta^2 d^2r\right) \longrightarrow \tfrac{1}{8}\delta\psi\triangle\left[((\eta^{n+1})^2+(\eta^n)^2)\times\right. \\ \left.\times\,\hat{k}(\psi^{n+1}+\psi^n)\right]+ \\ +\tfrac{1}{8}\delta\psi\hat{k}\left[((\eta^{n+1})^2+(\eta^n)^2)\times\right. \\ \left.\times\,\triangle(\psi^{n+1}+\psi^n)\right]+ \\ +\tfrac{1}{4}\delta\eta(\eta^{n+1}+\eta^n)\times \\ \times(\triangle\psi^{n+1}\hat{k}\psi^{n+1}+\triangle\psi^n\hat{k}\psi^n). \tag{.21}$$

Литература

[1] Абрамян Л.А, Степанянц Ю.А., Шрира В.И., ДАН СССР, **327**, (1992), No. 4-6, стр. 460-466;

[2] Барышев М.Ю., Юнаковский А.Д., Препринт No. 105, ИПФ АН СССР, Горький, (1984).

[3] Галин Л.А., ДАН СССР т. **47** (1945) стр. 246.

[4] Гинзбург В.Л. Питаевский Л.П., ЖЭТФ **34**, (1958), 85;
Gross E., J. Math. Physics **4**, (1963), 195.

[5] Дегтярев Л.М., Маханьков В.Г., Рудаков Л.И., ЖЭТФ, **67**, (1974), стр. 533.

[6] Дивинский Б.В., Левин Б.В., Лопатухин Л.И., Пелиновский Е.Н., Слюняев А.В. Доклады РАН, **395**, (2004), 438.

[7] Жук В.И., Рыжов О.С., ДАН СССР, **263**, (1982), стр. 56;
Sov. Phys. Doklady, **27**, No. 3, (1982), pp. 177-179.
Рыжов О.С., ЖВМиМФ, **29**, (1990), стр. 1804.

[8] Захаров В.Е., ЖЭТФ **51**, 668 (1966)

[9] Захаров В.Е., Журнал прикл. мех. и техн. физики, **2**, (1968), 190

[10] Захаров В.Е.,, ЖЭТФ
Sov. Phys. JETP, **35**, (1972), p. 908.

[11] Захаров,В.Е., Изв. Высших учеб. завед., **17**, (1974) 431.

[12] Захаров В.Е., "Основы физики плазмы", Том 3, под ред. А. Галеева и Р. Судана, Энергоатомиздат, Москва, (1984).

[13] Захаров В.Е., Кузнецов Е.А., ЖЭТФ, **91**, (1986);
Sov. Phys. JETP, **64**, (1986), p. 773-780.

[14] Захаров В.Е., Кузнецов Е.А., ЖЭТФ, **86**, (1998), 1035.

[15] Захаров В.Е., Манаков С.В. ЖЭТФ, **69**, (1975), 1654-1673.

[16] Захаров В.Е., Пушкарев А.Н., Швец В.Ф., Яньков В.В., Письма в ЖЭТФ, т. **48**, (1988), стр. 79.

[17] Захаров В.Е., Филоненко Н.Н., ДАН СССР **170**, (1966), 1292-1295.

[18] Захаров В.Е. и Шабат А.Б, ЖЭТФ , **61**, (1971), 118-134.
Soviet Physics JETP **34** (1972), no. 1, 62-69.

[19] Захаров В.Е. и Шабат А.Б., Функц. анализ и прил.., **8**, No. 3, (1974), стр. 43-53.

[20] Кадомцев Б.Б., "Коллективные явления в плазме", изд Наука, Москва, (1976);
Кадомцев Б.Б., Петвиашвили В.И., Sov. Phys. Doklady, **15**, (1970), p. 539.

[21] Качанов Ю.С., Козлов В.В., Левченко В. Я., Рамазанов П.М., Изв. СО АН СССР, **2**, (1989), стр. 124-158.

[22] Качанов Ю.С., Рыжов О.С., Сиб. физ.-техн. журнал, **1**, (1992), стр. 34-52;
Kachanov Yu.S., Ryzhov O.S. and Smith F.T., J. Fluid Mech., **251**, (1993), p. 273.

[23] Коган В., Кузнецов Е.А., Захаров В.Е., Письма в ЖЭТФ.

[24] Красицкий,В.П., ЖЭТФ, **71**,(1990), стр. 921.

[25] Крылов С.Ф., Яньков В.В., ЖЭТФ, **79**, (1980), стр. 82.

[26] Кузнецов Е.А., Мушер С.Л., ЖЭТФ, **91**, (1986), стр. 1605;
Sov. Phys. JETP, **64**, (1986), p. 947.

[27] Кузнецов Е.А, Мушер С.Л., Шафаренко А.В., Письма в ЖЭТФ, **37**, (1983), стр. 204; JETP Lett. **37**, (1983), p. 241.

[28] Кузнецов Е.А, Спектор М.Д., ЖЭТФ, **44**,(1976), стр. 136.

[29] Кузнецов Е.А, Турицын С.К., ЖЭТФ, **82**, (1982), стр. 1457.

[30] Куркин, А.А., Пелиновский, Е.Н., *Волны-убийцы: факты, теория и моделирование.* Нижегородский государственный университет, (2004).

[31] Лаврова О.Ю., Захаров В.Е. (Неопубликовано).

[32] Ламб Г., Гидродинамикаю М.: ОГИЗ, (1947)

[33] Ландау Л.Д. и Лифшиц Е.М., Гидродинамика. Том 6, Москва, Физматлит, (2003).

[34] Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П. Статистическая физика, Т.2

[35] Налимов, В. И. Динамика сплошной среды, Вып.18. Новосибирск, (1974), 104-210.

[36] Некрасов А.И. О волнах установившегося вида., Изв. Иваново-Вознесенского политехнического ин-та, **3**, (1921).

[37] Овсянников Л.В., Динамика сплошной среды, Изд. ИГ им. М.А. Лаврентьева СОАН СССР, вып.15, (1973), 104.

[38] Петвиашвили В.И., Яньков В.В., Вопросы теории плазмы, **14**, Под редакцией Б.Б. Кадомцева. М.:Энергоатомиздат, 1985, стр. 5.

[39] Плотников П.И. ДАН, **269**, (1983), 80.

[40] Полубаринова-Кочина П.Я., ДАН СССР т. **47** (1945), 254;
ПММ т. **164** (1945) стр. 383.

[41] Протогенов А.П., Фрайман Г.М., ЖЭТФ, **92**, (1987), 1658.

[42] Самарский А.А., *Введение в численные методы*, (М.: Наука, 1982).

[43] Таланов В.И., Sov.Phys JETP **1**, (1965), p. 218.
Dawes E., Marburger J.H., Phys. Rev. **179**, (1969), p. 862.

[44] Фрайман Г.М., ЖЭТФ, **88**, (1985), стр. 390-400;
Sov. Phys. JETP, **61**, (1985), pp. 228-233.

[45] Чукбар К.В., Яньков В.В., Физика плазмы, **7**, (1981), стр. 653.

[46] Ширa В.И., ДАН СССР, **308**, (1989), стр. 732.

[47] Ablovitz, M.I., Hammack, D., Henderson, J. and Scholder, C.M., Phys. Rev. Lett. **84**, (2000), 887;
Ablovitz, M.I., Hammack, D., Henderson, J. and Scholder, C.M., Physica D **152-153**, (2001), 416.

[48] Akhmanov S., Sukhorukhov A. and Khokhlov R., Sov. Phys. Usp **10**, (1968), 609;
Rasmussen I. and Rypdal K., Phys. Scripta **33**, (1987), 498–504.

[49] Amick C.J., Fraenkel L.J. and Toland J.F., Acta Math. **148**, (1982), 193.

[50] Annenkov S.Y., and Shrira V.I., J. Fluid Mech. **449**, (2001), 341.

[51] Baker G.R., Caflish R.E., and Siegel M., Preprint UCLA 1992, J.F.M.(1993).

[52] Baker G.R., Meiron D.I. and Orzag S.A., J. Fluid Mech. **123** (1982) p. 477.

[53] Batchelor G.K. and Proudman I., Philos. Trans., **268**, (1956), p. 369.

[54] Balk, A., A Lagrangian for water waves, Phys. Fluids, 8 (1996) pp. 416-420.

[55] Bayly B.J., Phys. Rev. Lett., **57**, (1986), pp. 2160-2163;
Bayly B.J., Orszag S.A. and Herbert T., Ann. Rev. Fluid Mech., **20**, (1988).

[56] Bellman R., Stability Theory of doifferential Equations, (Dover, New York, 1972).

[57] Benjamin, T.B. and Feir, J.E., J. Fluid Mech. **27**, (1967), 417.

[58] Benney D.J. and Newell A.C., J. Mat. Phys. (now Stud. Appl. Math.), **46**, (1967), pp. 113-139.

[59] Birkhoff G., In: Proc.Sympos.Appl.Maths. **XII**, Providence, R.I.: AMS (1962).

[60] Borodulin V.N. and Kachanov Yu.S., Izv. Sib. Branch USSR Ac. Sci., **18**, (1988), p. 65.

[61] Bryant P.J. and Stiassnie M., JFM **272**, (1994), 135;
Bryant P.J. and Stiassnie M., JFM **302**, (1995), 65.

[62] Caflish R.E., Orellana O.F., and Siegel M., SIAM J. Appl.Math., **50**, 1517 (1990).

[63] Cai D., Maida A.J., McLaughlin D.W. and Tabak E.G., Proc.Nat.Acad.Sci., **96**, 14216 (1999).

[64] Chalikov, D. and Sheinin, D., Numerical modeling of surface waves based on principal equations of potential wave dynamics. Technical Note. NOAA/NCEP/OMB, 54 pp.

[65] Chalikov, D. and Sheinin, D., Direct modeling of one-dimensional nonlinear potential waves, in *Nonlinear Ocean Waves*, ed. W. Perrie, Advances in Fluid Mechanics, Vol 17, Computation Mechanics Publications, 1998, 89-110.

[66] Chase, G.A., Big wave, (2003),
http://bell.mma.edu/ achase/NS-221-Big-Wave.html

[67] Clamond, D. and Grue, J. C.R. Mecanique **330**, (2002), 575.

[68] Connaughton C., Nazarenko S. and Pushkarev A., Phys. Rev. E, **63**, (2001), 046306.

[69] Craig W. and Worfolk P.A., Physica D, 84 (1995) 513.

[70] Crapper G.D., J. Fluid Mech., **2**, (1957), 532-540.

[71] Crawford D.E., Yuen H.G. and Saffman P.G., Wave Motion, **2**, (1980), 1-16.

[72] Daves E. and Marburger J.H., Phys.Rev. **179**, 862 (1969).

[73] Dawson S.P. and Mineev M.B., Physica D, **73** (1994) 373.

[74] Dean, R.G., in *Water Wave Kinetics* (ed. A. Torum and O. T. Gudmestad), Kluwer, (1990), 609.

[75] Dias F., Guyenne P., and Zakharov V.E., Physics Lett. A **291**, (2001), 139-145.

[76] Dold, J.W., J. Computat. Phys. **103**, (1992), 90.

[77] Dold, J.W. and Peregrine, D.H. , in *Proc. 20th Intl Conf. on Coastal Engng.*, Vol. 1, Chap. 13, (1986), 163.

[78] Dommermuth, D.G. and Yue, D.K.P. J. Fluid Mech. **184**, (1987), 267.

[79] Donnelly R.J., *Quantized Vortices in Helium II* (Cambridge Univ. Press, Cambridge 1991)

[80] Douady S., Couder Y. and Brachet M.E., Phys. Rev. Lett., **67**, (1991), pp. 983-986.

[81] Dyachenko, A.I., in: *Proceedings of the II International conference* "Frontiers of Nonlinear Physics", Nizhny Novgorod-St.Petersburg, Russia, July 5-12, 2004.

[82] Dysthe, K.B., Proc. Roy. **Ser. A 369**, (1979), 105.

[83] Falkovich G., Phys. Fluids **6**, (1994), 1411.

[84] Falkovich G. and Ryzhenkova I., Phys. Fluids B4, (1992), 594.

[85] Feir, J.E. Proc. R. Soc. Lond. **A 299**, (1967), 54.

[86] Gardner,C.S., Greene,J.M., Kruskal,M.D. and Miura,R.M., Phys. Rev. Lett., **19**, (1967), p. 1095.

[87] Guyenne P., Zakharov V.E, Pushkarev A.N. and Dias F., Turbulence d'ondes dans des modeles unidimensionnels, C. R. Acad. Sci. Paris **328**, (2000), 757-762.

[88] Hasselmann K., J. Fluid Mech., **12**, (1962), pp. 481-500, (Part I);
Hasselmann K., J. Fluid Mech., **15**, (1963), pp. 273-281, (Part II).

[89] Holm D., Camassa R., Phys. Rev. Lett., **71**, (1993), 1671

[90] Hossain M., Matthaeus W.H. and Montgomery D., length scale, J. Plasma Phys. **30**, (1983), 479–493.

[91] John F., Comm. Pure App. Math. 6, (1953) 497.

[92] Kartasheva E., in Nonlinear Waves and Weak Turbulence, A.M.S. Translations - Series 2, edited by V. Zakharov (AMS, Providence, RI, 1998), pp. 95-129.

[93] Kaup D.J., Prog. Theor. Physics (Japan), **54**, (1975), 396

[94] Kharif, C., and Pelinovsky, E., Europ. J. Mech. B/Fluids, **22**, (2003), 603.

[95] Kingsep A.S., Rudakov L.I. and Sudan R.N., Phys. Rev. Lett., **31**, (1973), pp. 1482.

[96] Kolmogorov A.N., C. R. (Dokl.) Acad. Sci. URSS, Ser. **32**, (1941), pp.16-18.

[97] Kosmatov N.E., Shvets V.F., Zakharov V.E., Physica D, **52**, (1991), pp. 16-35.

[98] Kraichnan R.H., Phys. Fluids, **10**, (1967), 1417–1423.

[99] Kraichnan R.H., Phys. Rev. Lett. **18**, (1967), 202.

[100] Kraichnan R.N., Phys. Rev. Lett., **65**, (1990), p. 575.

[101] Krasitskii V.P., J. Fluid Mech. **272**, (1994), 1.

[102] Kuznetsov E.A., Newell A.C. and Zakharov V.E., Phys. Rev. Lett., **67**, (1991), pp. 3243-3246.

[103] Kuznetsov E.A., Rubenchik A.M. and Zakharov V.E., Phys. Rep., **142**, (1986), p. 103.

[104] Kuznetsov E.A., Spector M.D. and Zakharov V.E., Phys. Rev. E, **49** # 2, (1994), pp. 1283-1290 .

[105] Kuznetsov E.A., Spector M.D. and Zakharov V.E., Phys.Lett. A 182 (1993) 387; Phys.Rev. E **49** (1994) pp. 1283-1290.

[106] Kuznetsov E.A., Spector M.D. and Zakharov V.E., Preprint of Weizmann Inst.of Sci.: WIS-93/30/Apr.-PH.

[107] Landman K., Papanicolaou G.C., Sulem C. and Sulem P.L., Phys. Rev. A, **34**, (1988), p. 1200.

[108] Lavrenov, I.V., Natural Hazards **17**, (1998), 117.

[109] Lebowitz J., Rose H., Speer E., Journal of Statist. Phys., **50**, (1988), p. 657.

[110] LeMesurier B.J., Papanicolaou G.C., Sulem C. and Sulem P.L., Physica D, **32**, (1988), p. 210.

[111] Levi-Civita T., Mathematische Annalen 93 (1925) 264.

[112] Lighthill, M.J., J. Inst. Math. Appl. **1**, (1965), 269.

[113] Lin R., Huang N. and Perrie W., (Private communication)

[114] M.S. Longuet-Higgins. J. Fluid Mech. **73** (1976) 603.

[115] Longuet-Higgins M.S., In: Nonlinear Water Waves, ed. L.Denath., Academic Press, Boston, (1994) (Cambridge Univ. Press 1983) pp.1-24.

[116] L'vov Y.V., Phys. Letters A, **230**, (1997), 38.

[117] Majda, A., McLaughlin, D. and Tabak, E., J. Nonlinear Science **7**, (1997), 9.

[118] Meison, D., Orzag, S. and Izraely, M. J. Computational Physics, **40**, (1981), 345.

[119] Mineev M.B. and Dawson S.P., Phys. Rev. E, **50** (1994) 24.

[120] Moore D. W., Proc.Roy.Soc. **A365**, 105 (1979).

[121] Neirenberg L., Ann. Sci. Norm. Sup. Pisa, **20** No. 4, (1966), p.733.

[122] Newell A.C., Rev. Geophys., **6**, (1968), pp. 1-31;
Benney D.J. and Newell A.C., Stud. Appl. Math., **48**, (1969), pp. 29-53.

[123] Newell A.C., Rand D. and Russel D., Physica D, **33**, (1988), p. 281.

[124] Onorato, M., Osborne, A.R., Serio, M. and Damiani, T., in: *Rogue waves 2000: Brest, France, November 2000*, eds. M. Olagnon and G.A. Athanassoulis, Ifremer, (2001), 181-192.

[125] Onorato, M., Osborne, A.R. and Serio, M., Phys. Lett. **A 275**, (2000), 386.

[126] Onorato, M., Osborne, A.R., Serio, M. and Bertone, S., Phys. Rev. Letters **86**, (2001), 5831.

[127] Onorato M., Osborne A.R., Serio M. at al., Phys. Rev. Lett. **89**, 14, (2002), 144501.

[128] Onorato, M., Osborne, A.R. and Serio, M., Phys. of Fluids **14**, (2002), L25.

[129] Peregrine, D.H., J. Austral. Math. Soc. **B 25**, (1983), 16.

[130] Peregrine, D.H., Skyner, D., Stiassnie, M. and Dold, N., in: *Proc. 21th Intl. Conf. on Coastal Engng.* Vol. 1, Chap. 54, (1988), 732.

[131] Pomeau Y., Physica D, **61**, (1992), pp. 227-239.

[132] Pushkarev A.N. and Zakharov V.E., Phys.Rev.Lett., **76**, (1996) 3320

[133] Rasmussen J.J., Rypdal K., Phys. Scripta, **33**, (1986), p. 481.

[134] Safffman P.G., J. Fluid Mech., **27**, (1967), pp. 581-593;
Phys. Fluids **19**, (1967), p. 1349.

[135] Saffman P.G. and Taylor G.I., Proc. Roy. Soc. A 245 (1958) 312.

[136] She Z.-S., Phys. Rev. Lett., **66**, (1991), p. 600.

[137] Sheinin D., Chalikov D., Proc. ONR Ocean Waves Workshop, (1994)

[138] Shelly J., J. Fluid Mech., **244**, 493 (1992).

[139] Silveria I.and Walraven J.T.M., Prog. Low Temp. Phys.**10**, (1986), 139;

[140] Smith L. and Yakhot V., J. FLuid Mech. (1994)

[141] Smith, R., J. Fluid Mech. **77**,(1976), 417.

[142] Song, J. and M. L. Banner, J. Phys. Oceanogr. **32**, (2002), 2541.

[143] Stoker J.J., Water Waves. (Interscience Publ., London, 1957).

[144] Stokes G.G.,. Mathematical and Physical Papers, Vol. 1 p. 197, 317. (Cambridge University Press, 1880).

[145] Tanveer S., Proc.R.Soc.Lond. A **435** (1991) 137.

[146] Tanveer S., Proc.R.Soc.Lond. A **441** (1993) 501.

[147] Trulsen, K. and Dysthe, K.B., Wave Motion **24**, (1996), 281.

[148] Toland J.F., Proc.R.Soc.Lond. A **363**, (1978), 469.

[149] Trulsen, K. and Dysthe, K.B., in: *Proc. 21st Symposium on Naval Hydrodynamics*, (1997),550;
http://www.nap.edu/books/0309058791/html/550.html

[150] Trulsen, K., in *Rogue waves 2000: Brest, France*, November 2000, eds. M. Olagnon and G.A. Athanassoulis, Ifremer, (2001), 265.

[151] Trulsen, K., Kliakhandler, I., Dysthe, K.B. and Velarde, M.G., Phys. Fluids, **24** (2000), 32.

[152] Tsai W. and Yue, D. Annu. Rev. Fluid Mech. **28**, (1996), 249.

[153] Vlasov S.N., Petrishchev V.A. and Talanov V.I., Izv. VUZ. Radiofizika, **12**, (1970), p. 1353;
Radiophys. Quantum Electr., **14**, (1974), p. 1062.

[154] Weinstein M., Comm. Partial Diff. Eq., **12**(10), (1978), p. 1133.

[155] Whitham G.B., Linear and Nonlinear Waves. (A Wiley-Interscience Publication, New York, 1974).

[156] Wolfram V.P., Mathematica, Addison-Wesley Pub.Comp., (1988)

[157] S. Wu, J. Amer. Math. Soc. **12** 445-495 (1999).

[158] Youngs D.L., Physica **37D**, (1989), p. 270.

[159] Zakharov V.E. 'Breaking Waves', IUTAM Procedings, Springer-Verlag, Sydney, (1992), pp. 69-91.

[160] Zakharov, V.E., Amer. Math. Soc. **Ser. 2 182**,(1998),167.

[161] Zakharov V.E., Sov.Phys.JETP, **38**, (1974), p. 108.

[162] Zakharov V.E., Eur. J. Mech. B **18**, 3, (1999), 327.

[163] Zakharov, V.E., Dias, F. and Pushkarev, A.N., Phys. Reports **398**,(2004), 1.

[164] Zakharov V.E. and Filonenko N.N., J. Appl. Mech. Tech. Phys. **4**, 506-515 (1967),506-515.

[165] Zakharov V.E., Guyenne P., Pushkarev A.N. and Dias F., Wave turbulence in one-dimensional models, Physica D **152-153**, (2001), 573-619.

[166] Zakharov V.E. and Kuznetsov E.A., Sov.Phys.JETP, **39**, (1974), p. 285.

[167] Zakharov V.E., L'vov V.S., Falkovich G., Kolmogorov spectra of turbulence I, v.1, Springer-Verlag, 1992.

[168] Zakharov V.E., Musher S.L., Rubenchik A.M., Phys. Rep., **129**, (1985), p. 285.

[169] Zakharov V.E., Shulman E., in 'What is Integrability?', Edtr. V.E.Zakharov, Springer-Verlag, (1991).

[170] Zakharov V.E. and Zaslavskii M.M., Izv. Atm.Ocean.Phys. **18**, (1982), 747.

[171] Zufiria J.A. and Saffman, P.G. Stud. Appl. Maths. bf 74, (1986), 259.

Публикации автора по теме диссертации

[172] А.И. Дьяченко, В.Е. Захаров, А.Н. Пушкарев, В.Ф. Швец, В.В. Яньков, *Солитонная турбулентность в неинтегрируемых волновых системах*, *ЖЭТФ*, **96**, Вып. 6(12), стр. 2026-2031, (1989).
Sov. Phys. JETP, **69**(6), pp. 1144-1147 (1989).

[173] Dyachenko A.I., Pushkarev A.N., Shvets V.F., et al. Proc IV Int. Workshop "Nonlinear and Turbulent processes in physics", Kiev, 1989.

[174] A.I.Dyachenko, A.C.Newell, A.N.Pushkarev, and V.E.Zakharov, *Optical Turbulence*, *Physica* D, **57**, pp. 96-160 (1992)

[175] A.I.Dyachenko, S.V.Nazarenko, and V.E.Zakharov, *Wave-Vortex Dynamics in the Drift and β-Plane Turbulence*, *Phys. Lett.* A, **165**, pp. 330-334 (1992)

[176] A.I.Dyachenko, E.A.Kuznetsov, *Instability and Self-Focusing of Solitons in the Boundary Layer*, *Письма в ЖЭТФ*, **59**, Вып. 2, стр. 103-108 (1994).
JETP Lett., **59**, pp. 108-113 (1994).

[177] A.I.Dyachenko, V.E.Zakharov, *Is the free-surface hydrodynamics an integrable system? Phys. Lett. A* **190**, pp. 144-148 (1994).

[178] A.I.Dyachenko, Y.V.L'vov, *On the Hasselmann's and Zakharov's approaches to the kinetic equations for the gravity waves J.Phys. Oceanography* **25** N12, pp. 3237-3238 (1995)

[179] A.I.Dyachenko, Y.V.L'vov and V.E.Zakharov, *Five-wave interaction on the surface of deep fluid*, *Physica D* **87**, pp. 233-261 (1995)

[180] A.I.Dyachenko, E.A.Kuznetsov, *Two-Dimentional Wave Collapse in The Boundary Layer*, *Physica D* **87**, pp. 301-313 (1995)

[181] A.I.Dyachenko, E.A.Kuznetsov, M.D.Spector and V.E.Zakharov, *Analytical Description of the Free Surface Dynamics of an Ideal Fluid*, *Phys. Lett. A*, **221**, pp. 73-79 (1996).

[182] A.I.Dyachenko, V.E.Zakharov, *Toward an Integrable Model of Deep Water*, *Phys. Lett. A*, **221** pp. 80-87 (1996).

[183] А.И. Дьяченко, В.Е. Захаров, Е.А. Кузнецов, *Нелинейная динамика свободной поверхности идеальной жидкости*, *Физика плазмы*, **22**, Вып. 10, стр. 916-928 (1996)
Plasma Physics Reports, **22** No. 10, pp. 829-840 (1996).

[184] A.I.Dyachenko, G.Fal'kovich, *Condensate Turbulence in Two Dimensions*, *Physical Review E*, **54**, No. 5, pp. 5095-5099, (1996).

[185] V.E.Zakharov, A.I.Dyachenko, *High-Jacobian approximation in the free surface dynamics of an ideal fluid*, *Physica D* **98**, pp. 652-664 (1996).

[186] А.И. Дьяченко, *О динамике идеальной жидкости со свободной поверхностью*, *Доклады Академии Наук*, **376**, Вып. 1, стр. 27-29 (2001).
Doklady Mathematics, **63**, No. 1, pp. 115-118 (2001).

[187] V.E. Zakharov, O.A. Vasilyev and A.I. Dyachenko, *Kolmogorov spectra in one-dimensional weak turbulence*, *Письма в ЖЭТФ*, **73**, Вып. 2, стр. 68-70 (2001).
JETP Letters, **73**, No. 2, pp. 63-65 (2001).

[188] V.E. Zakharov, A.I. Dyachenko and O.A. Vasilyev, *New method for numerical simulation of a nonstationary potential flow of incompressible fluid with a free surface*, *European Journal of Mechanics B-Fluids*, **21**, No. 3, pp. 283-291 (2002).

[189] M. Chertkov, Y.-J. Chung, A. Dyachenko, I. Gabitov, I. Kolokolov, and V. Lebedev, *Shedding and interaction of solitons in weakly disordered optical fibers*, *Phys. Rev. E*, **67**, No. 3, 036615, (2003).

[190] A.I. Dyachenko, A.O. Korotkevich, V.E. Zakharov, *Decay of the monochromatic capillary wave*, *Письма в ЖЭТФ*, **77**, Вып. 9-10, стр. 572-576 (2003)

[191] A.I. Dyachenko, A.O. Korotkevich, V.E. Zakharov, *Weak turbulence of gravity waves*, *Письма в ЖЭТФ*, **77**, Вып. 9-10, стр. 649-653 (2003).

[192] A.I. Dyachenko, A.O. Korotkevich, V.E. Zakharov, *Weak Turbulent Kolmogorov Spectrum for Surface Gravity Waves*, *Phys. Rev. Lett.*, **92**, No. 13, pp. 134501-1–134501-4 (2004).

[193] A.I. Dyachenko, V.E. Zakharov, *Modulation Instability of Stokes Wave → Freak Wave*, *Письма в ЖЭТФ*, **81**, Вып. 6, стр. 318-322 (2005).