РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

ИНСТИТУТ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

имени Л. Д. ЛАНДАУ

На правах рукописи

КОРОТКЕВИЧ Александр Олегович

УДК 532.5:519.6

Численное моделирование слабой турбулентности

Специальность 01.04.02 - Теоретическая физика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Москва - 2003

Работа выполнена в Институте теоретической физики им. Л. Д. Ландау Российской Академии Наук.

Научный руководитель:	Академик РАН, профессор В. Е. Захаров
Официальные оппоненты:	Член-корреспондент РАН, профессор В. В. Лебедев, Кандидат физико-математических наук С. Ю. Анненков
Ведущая организация:	Институт вычислительной математики Российской Академии Наук

Защита состоится 27 июня 2003 года в 11 часов 30 минут на заседании Диссертационного Совета Д 002.207.01 Института теоретической физики им. Л. Д. Ландау по адресу: г. Черноголовка Ногинского района Московской области, Институт физики твердого тела РАН, конференц-зал.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института теоретической физики им. Л. Д. Ландау РАН.

Автореферат разослан: "_____" ____________ 2003 г.

Ученый секретарь

Диссертационного Совета,

Доктор физико-математических наук Л. А. Фальковский

Общая характеристика работы

Актуальность темы

Несмотря на долгую историю развития вопроса, нелинейные волны продолжают привлекать внимание экспериментаторов и теоретиков. Особенно значительный прогресс достигнут в исследовании слабонелинейных волн, в этом случае амплитуды волн много меньше характерной длины волны.

Для описания статистических свойств процессов такого рода в конце 60-х годом В. Е. Захаровым была предложена теория слабой турбулентности. Были найдены точные решения полученного в рамках этой теории кинетического уравнения Хассельмана-Захарова. Данные частные решения представляют собой Колмогоровские (степенные) спектры.

Теория слабой турбулентности нашла применение в широком спектре областей физики. Одной из важнейших областей, где она может быть применена, являются волны на поверхности жидкости. Особенно интересным представляется случай гравитационных волн на поверхности глубокой жидкости. Начиная с 70-х годов и в новейших наблюдениях за поверхностью океана, множество экспериментаторов получает спектры, предсказанные теорией слабой турбулентности. Однако эти эксперименты не могут трактоваться как полное и неопровержимое доказательство правоты теории, так как полученные в 1967 году спектры Захарова-Филоненко являются изотропными, тогда как наблюдаемые в эксперименте спектры существенно анизотропны. Кинетическое уравнение, являющееся одним из краеугольных камней теории слабой турбулентности, было выведено с использованием ряда предположений. Верность этих предположений априори не ясна.

Прямое численное моделирование может внести ясность в ситуацию. Но для случая гравитационных волн численное подтверждение верности теории отсутствовало, несмотря на значительные усилия в этом направлении. По нашему мнению, причина этого заключается в трудности правильного выбора параметров численной схемы. Численное моделирование этих уравнений чрезвычайно чувствительно к резонансному четырехволновому взаимодействию. Амплитуды гармоник должны быть не слишком малы (чтобы обеспечить достаточную ширину резонансной кривой), но и не слишком велики (так как в этом случае могут нарушиться условия применимости теории слабой турбулентности). Поэтому исследование влияния дискретности сетки волновых векторов на резонансные взаимодействия волн являлось важной задачей.

Представляло интерес разработать такую численную схему, которая сохраняет Гамильтониан системы, так как еще в конце 60-х было показано, что эта система является Гамильтоновой.

Кроме того, было необходимо проверить гипотезу о возможности интерпретации наблюдаемых спектров как спектров, полученных в конце 50-х годов О. Филлипсом и обусловленных обрушением волн, искаженных присутствием доплеровского эффекта, вызванного длинноволновым фоном.

Цели работы

Перечислим основные цели диссертации

- Проверка гипотезы М. Баннера о том, что наблюдаемые в эксперименте спектры есть не что иное, как спектры Филлипса, искаженные эффектом Доплера от длинноволнового фона.
- Детальное изучение влияния дискретной сетки волновых чисел на резонансные взаимодействия волн при моделировании динамических уравнений в случаях гравитационных и капиллярных волн на поверхности глубокой жидкости.
- Построение численной схемы для решения динамических уравнений волн на поверхности жидкости, сохраняющей Гамильтониан системы.
- Численное моделирование турбулентности гравитационных волн на поверхности глубокой жидкости. Получение слаботурбулентных Колмогоровских спектров, хорошо согласующихся с наблюдаемыми в эксперименте данными.

Научная новизна работы

Рассмотрена гипотеза о возможности интерпретации наблюдаемых спектров ветрового волнения как спектров, обусловленных обрушением волн (спектры Филлипса), искаженных эффектом Доплера, вызванным длинноволновым фоном. Аналитически получена поправка к спектру Филлипса в присутствии эффекта Доплера. В результате численных расчетов показано, что в широком диапазоне частот данная поправка является малой и несущественной.

Исследовано влияние дискретной сетки волновых чисел на резонансное взаимодействие волн при численном моделировании. На частных случаях гравитационных и капиллярных волн на поверхности глубокой жидкости показана возможность осуществления таких взаимодействий при численном моделировании динамики поверхностных волн жидкости. Полученные данные могут быть использованы при выборе параметров модели при численном моделировании турбулентности поверхностных волн.

Построена численная схема для решения уравнений динамики поверхностных волн, сохраняющая главное свойство системы, а именно, сохранение ее Гамильтониана. Предложен эффективный метод оценки шага по времени при моделировании. Показан способ учета накачки и затухания в данной модели при моделировании турбулентности волн.

Проведено численное моделирование турбулентности гравитационных волн на поверхности глубокой жидкости. Получен Колмогоровский (степенной) спектр функции отклонения поверхности для нескольких уровней накачки и затухания. Показано уширение области степенного спектра при увеличении диапазона волновых чисел. Постоянство показателя степенной функции спектра при разлиных уровнях накачки и затухания позволяет заключить, что полученные спектры являются универсальными. Результаты численного моделирования хорошо согласуются с предсказаниями теории слабой турбулентности и экспериментальными данными.

Все полученные результаты являются новыми и выносятся на защиту.

Апробация работы

Работа выполнена в Институте теоретической физики им. Л. Д. Ландау Российской Академии Наук.

Основные результаты диссертации докладывались на международной научной конференции «Solitons, Collapses and Turbulence», г. Черноголовка, 2002, а также на научных семинарах Института теоретической физики им. Л. Д. Ландау РАН.

По теме диссертации опубликовано три работы, список которых приведен в конце реферата.

Объем и структура диссертации

Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения, двух приложений и списка литературы. Полный объем работы составляет 89 страниц, в том числе 25 рисунков. Список литературы содержит 37 наименований.

Краткое содержание работы

Введение

Во введении обоснована актуальность рассматриваемой темы, научная новизна исследований, а также сформулированы цели и приведены основные результаты работы. Кратко описана структура диссертации.

Глава I. Динамические уравнения для волн на поверхности жидкости

Первая глава носит обзорный характер. Здесь приведен вывод уравнений динамики слабонелинейных волн на поверхности жидкости, следуя работам В. Е. Захарова и Н. Н. Филоненко 60-х годов. Эти уравнения имеют вид:

$$\begin{aligned}
\dot{\eta} &= \hat{k}\psi - (\nabla(\eta\nabla\psi)) - \hat{k}[\eta\hat{k}\psi] + \hat{k}(\eta\hat{k}[\eta\hat{k}\psi]) + \\
&\quad + \tfrac{1}{2}\triangle[\eta^2\hat{k}\psi] + \tfrac{1}{2}\hat{k}[\eta^2\triangle\psi], \\
\dot{\psi} &= \sigma\triangle\eta - g\eta - \tfrac{1}{2}\left[(\nabla\psi)^2 - (\hat{k}\psi)^2\right] - [\hat{k}\psi]\hat{k}[\eta\hat{k}\psi] - [\eta\hat{k}\psi]\triangle\psi,
\end{aligned} \qquad (1)$$

Здесь $\eta = \eta(x, y; t)$ — это отклонение поверхности жидкости от положения равновесия, $\psi = \psi(x, y; t)$ — потенциал скорости на поверхности, оператор $\hat{k}$ соответствует умножению всех Фурье-гармоник функции на модуль волнового числа, а g и σ — это ускорение свободного падения и коэффициент поверхностного натяжения соответственно.

Глава II. Влияние эффекта Доплера на закон дисперсии волн

В этой главе рассматривается гипотеза М. Банера о том, что наблюдаемые спектры ветрового волнения можно интерпретировать как спектры, обусловленные обрушением волн, искаженные эффектом Доплера, вызванным длинноволновым фоном.

В разделе II.1 вводятся общие обозначения (следуя статье О. Филлипса 1958 года) и формулируется задача. Как, зная пространственный спектр волнения $\Phi(\mathbf{k})$, вычислить частотный спектр $F(\omega)$ в присутствии эффекта Доплера?

В разделе II.2 выведена общая формула для спектра в присутствии эффекта Доплера. Однако, чтобы получить конкретный вид степенного спектра, необходимо рассмотреть соответствующий случай закона дисперсии.

Более удобный для дальнейших выкладок набор безразмерных переменных введен в II.3. Эти переменные таковы:

$$\zeta = \frac{kv^2}{g},\ \lambda = \frac{v\omega}{g}. \tag{2}$$

Здесь k — это модуль волнового вектора, v — амплитуда скорости периодического фонового тока, вызывающего эффект Доплера, g — ускорение свободного падения.

В разделе II.4 исследется важный случай дисперсионного закона $\omega^2 = gk$ («гравитационные волны на глубокой воде»); здесь g — ускорение свободного падения, k — волновое число. Рассмотрены два частных случая зависимости спектра от направления:

- изотропный спектр $\Phi(k, \theta) = \Phi(k)$;
- сильно анизотропный спектр $\Phi(k, \theta) = \Phi(k)\delta(\theta)$.

В обоих случаях для спектра Филлипса аналитически получен частотный спектр в присутствии эффекта Доплера. Для случая изотропного спектра формула такова:

$$F_i(\lambda) = F_{i0}(1 + \frac{1}{4}\lambda^2 + ...), \tag{3}$$

здесь F_{i0} — спектр Филлипса для изотропного случая в отсутствии эффекта Доплера. Для сильно анизотропного случая получен такой результат:

$$F_a(\lambda) = F_{a0}(1 + \frac{1}{2}\lambda^2 + ...), \tag{4}$$

здесь F_{a0} — спектр Филлипса в сильно анизотропном случае в отсутствии эффекта Доплера.

Данные результаты применимы при $\omega \leq 5\omega_p$, здесь ω_p — частота спектрального пика.

В разделе II.5 помещены численные результаты. Расчеты показывают, что вплоть до $\omega \simeq 20\omega_p$ влияние эффекта Доплера мало и не может изменить спектр существенным образом.

Глава III. Моделирование резонансных взаимодействий на дискретной сетке

Одним из краеугольных камней в теории слабой турбулентности является резонансное взаимодействие волн. Отправной точкой здесь служит то, что условия резонанса на характерной для численных эксприметов дискретной сетке не могут быть выполнены точно. Однако в настоящий момент прямое численное моделирование динамических уравнений является важной задачей. Это один из основных инструментов проверки правильности предположений и допущений, в рамках которых была получена теория слабой турбулентности. Поэтому перед нами с очевидностью встают следующие вопросы:

- Как дискретная сетка волновых чисел в численном моделировании влияет на резонансное взаимодействие?
- Может ли нелинейный сдвиг частоты уширить резонансное множество таким образом, чтобы дискретность перестала быть важной?

В данной главе изучаются эти вопросы для капиллярных и гравитационных волн на поверхности несжимаемой жидкости бесконечной глубины.

В разделе III.1 записаны динамические уравнения на дискретной сетке. При этом в уравнениях появляется расстройка по частотам в каждом члене. Дальнейшее рассмотрение зависит в каждом конкретном случае от закона дисперсии волн.

Случай капиллярных волн на поверхности глубокой воды рассмотрен в разделе III.2. В этом случае закон дисперсии имеет вид $\omega_k = \sqrt{\sigma k^3}$, здесь σ — это коэффициент поверхностного натяжения рассматриваемой жидкости. Главным процессом взаимодействия волн являются трехволновые распады-слияния. Условия резонанса при этом таковы:

$$\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}_3, \quad \omega_{k_1} + \omega_{k_2} = \omega_{k_3}. \tag{5}$$

Несмотря на отсутствие точных резонансов на дискретной сетке, при численном моделировании можно получить картину, близкую к реальной, за счет нелинейного сдвига частоты, приводящего к появлению у резонансной кривой конечной ширины.

Было произведено численное моделирование резонансного распада монохроматической капиллярной волны. Результаты показывают рост гармоник, близких к резонансной кривой. В начальный момент инкременты роста хорошо согласуются со значениями, полученными из линеаризованной модели взаимодействия трех волн. Получена картина вторичных распадов, формирующих Колмогоровский каскад.

В разделе III.3 рассмотрен случай гравитационных волн на поверхности глубокой жидкости. Закон дисперсии для таких волн имеет вид $\omega_k = \sqrt{gk}$, здесь g — это ускорение свободного падения. В этом случае главным являются четырехволновые процессы взаимодействия волн. Уравнения (5) в этом случае нетривиальных решений не имеют. Для четырехволновых процессов условия резонанса таковы:

$$\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4, \quad \omega_{k_1} + \omega_{k_2} = \omega_{k_3} + \omega_{k_4}. \tag{6}$$

Было проведено моделирование распада монохроматической гравитационной волны на поверхности бесконечно глубокой идеальной жидкости. Получен рост близких к резонансной кривой гармоник в соответствии с теорией.

Важно понимать, что слишком малые амплитуды волн при численном эксперименте могут привести к отсутствию резонансного взаимодействия на дискретной сетке. В то же время слишком большая амплитуда волн может привести к нарушению условий применимости теории слабой турбулентности.

Полученные данные могут быть использованы при подборе параметров моделей, использующихся в экспериментах по численному моделированию турбулентности волн на поверхности жидкости.

Глава IV. Численная схема моделирования гравитационных и капиллярных поверхностных волн

Численное моделирование уравнений (1) представляет собой довольно сложную задачу. Одной из сложностей является присутствие в уравнениях нелокального оператора $\hat{k}$. Однако если написать данные уравнения в представлении фурье-гармоник, то данный оператор сведется к действиям, аналогичным взятию производной. Поэтому вычисление правых частей, очевидно, будет основываться на последовательном применении алгоритма быстрого преобразования Фурье. В то же время выбор метода численного интегрирования уравнений (1) не столь очевиден. В настоящее время широко применяется метод Рунге-Кутты четвертого порядка. Он, однако, не лишен некоторых недостатков. Например, данный метод не сохраняет Гамильтониан, что, в случае моделирования Гамильтоновской системы, не слишком удобно. Если бы удалось построить численную схему, сохраняющую Гамильтониан, то это дало бы прекрасный инструмент для контроля за многими параметрами интегрирования. Например, за шагом по времени.

Данная глава построена следующим образом: в части IV.1 последовательно строится схема интегрирования уравнений (1), сохраняющая Гамильтониан. Для этого записывается изменение Гамильтониана на одном шаге по времени как линейная функция от изменения гамильтоновых переменных η и ψ. Далее, считая Гамильтониан постоянным и пользуясь аналогией с уравнениями Гамильтона, можно выписать абсолютно неявную разностную схему, которая может быть использована для интегрирования уравнений динамики (1). Для собственно интегрирования можно использовать, например, метод простых итераций.

Метод простых итераций к тому же дает удобный на практике метод выбора шага по времени, описанный в разделе IV.2. Данный метод сводится к контролю за скоростью сходимости итерационного процесса. Если число итераций меньше некоторого минимального числа, то шаг по времени можно увеличить. И наоборот. Если число итераций стало слишком большим, то шаг по времени надо уменьшить. Пороги для такого алгоритма легко подобрать экспериментальным путем.

В части IV.3 приведены некоторые приемы, помогающие обобщить разработанную численную схему интегрирования уравнений динамики слабонелинейных волн на поверхности жидкости на случай присутствия в модели накачки и затухания. При моделировании турбулентности обычно рассматривают модель, в которой есть накачка (как правило сосредоточенная на больших масштабах) и затухание (на малых масштабах), а между ними инерционный интервал, влияние в котором накачки и затухания мало. Обычно спектр волн именно в этом интервале и представляет интерес. В этом случае мы можем применить упрощенные методы учета накачки и затухания. Здесь нашли применение приемы, широко используемые при моделировании, например, распространения световых импульсов в оптоволокне. Это так называемый метод расщепления (в иностранной литературе часто встречается название split-step). Данный прием позволяет существенно ослабить требования на величину шага по времени.

Глава V. Турбулентность гравитационных волн

Теория слабой турбулентности многократно проверялась в численных экспериментах. Однако единственным успешным экспериментом по численному моделированию турбулентности волн на поверхности трехмерной жидкости следует признать работу А. Пушкарева и В. Захарова 1996 года, где моделировалась турбулентность капиллярных волн. Несмотря на значительные затраченные усилия, в случае гравитационных волн на поверхности жидкости добиться прогресса не удавалось. По нашему мнению, причина этого заключалась в трудности правильного выбора параметров численной схемы.

Эта глава построена следующим образом: в разделе V.1 вводится статистическое описание волнового поля на поверхности жидкости для случая гравитационных волн на глубокой воде. При этом мы придерживаемся идей, изложенных в работах В. Е. Захарова и Н. Н. Филоненко конца 60-х годов.

Данная глава посвящена исследованию спектра, отвечающего потоку энергии с больших масштабов на малые (прямой Колмогоровский каскад). Теория слабой турбулентности дает такой спектр для этого процесса:

$$< |\eta_{\mathbf{k}}|^2 >= \frac{C_1 g^{1/2} P^{1/3}}{k^{7/2}}, \tag{7}$$

здесь P — это поток энергии в область малых масштабов, g — ускорение

Рис. 1: Турбулентность гравитационных волн. Корреляционная функция отклонения поверхности в двойном логарифмическом масштабе.

свободного падения, C_1 — безразмерная Колмогоровская константа.

В разделе V.2 приведены параметры численной схемы и результаты расчетов. Было произведено численное моделирование уравнений (1) в присутствии накачки и затухания. Для этого применялась численная схема, описанная в Главе IV. Было получено состояние динамического равновесия, т.е. состояние, в котором получаемая в области накачки энергия посредством прямого Колмогоровского каскада переносилась в область затухания и там поглощалась. В этом состоянии был вычислен коррелятор отклонения поверхности от состояния равновесия. При этом в значительной области инерционного интервала наблюдалось степенное убывание полученного спектра. Показатель этого степенного закона хорошо согласуется с предсказанным теорией слабой турбулентности значением (7).

Было продемонстрировано уширение области степенного спектра при увеличении инерционного интервала при переходе на большую сетку. Также была показана независимость показателя степенного закона убывания спектра от уровней накачки и затухания. Это позволяет сделать вывод об универсальности данного спектра.

Рис. 2: Турбулентность гравитационных волн. Уширение области степенного спектра при увеличении количества точек на сетке.

Заключение

В заключении сформулированы результаты работы.

Приложения

В приложения вынесен подробный вывод некоторых формул, приведение которых в основном тексте прерывало бы связность изложения из-за их излишней громоздкости.

Основные результаты

Проверена гипотеза о возможности интерпретации наблюдаемых спектров поверхностных волн как спектров, обусловленных обрушениями и возникновением острых гребней, искаженных Доплеровским эффектом от длинноволнового фона. Показано, что в случаях изотропного и сильно анизотропного спектров доплеровский сдвиг частоты не может объяснить наблюдаемого расхождения с экспериментальными данными.

Исследовано влияние дискретности сетки волновых векторов на возможность осуществления резонансных взаимодействий волн. Для случая капиллярных волн промоделирован распад монохроматической волны и начальная стадия перераспределения энергии между различными масштабами.

В случае гравитационных волн продемонстрировано рассеяние двух волн с одинаковым волновым вектором в гармоники, расположенные на резонансной кривой. Наблюдалось постепенное расширение области роста, вызванное дальнейшими взаимодействиями волн.

Построена численная схема для решения уравнений динамики поверхностных слабонелинейных волн, сохраняющая Гамильтониан системы. Продемонстрирован способ обобщения данной схемы на случай присутствия накачки и затухания, важный при моделировании турбулентности поверхностных волн.

Произведено численное моделирование поверхностных гравитационных волн в случае глубокой воды. В случаях накачки разной величины получены слаботурбулентные Колмогоровские спектры, соответствующие потоку энергии в область малых масштабов. Результаты получены на сетках 256×256 и 512×512 точек. Полученные спектры поверхностных волн хорошо согласуются как с предсказаниями теории слабой турбулентности, так и с экспериментальными наблюдениями.

Публикации автора по теме диссертации

1. A. I. Dyachenko, A. O. Korotkevich and V. E. Zakharov, *Decay of the monochromatic capillary wave*, Письма в ЖЭТФ **77**, 9, 572 (2003).

2. A. I. Dyachenko, A. O. Korotkevich and V. E. Zakharov, *Weak turbulence of gravity waves*, Письма в ЖЭТФ **77**, 10, 649 (2003).

3. A. O. Korotkevich, *On the Doppler Distortion of the sea-wave spectra*, arXiv:physics/0110009 (submitted to Nonlin. Proc. in Geophys.).