Турбулентность и сингулярности в нелинейных волновых системах

А.И.Дьяченко

Институт теоретической физики им. Л.Д. Ландау РАН

Запись буя...

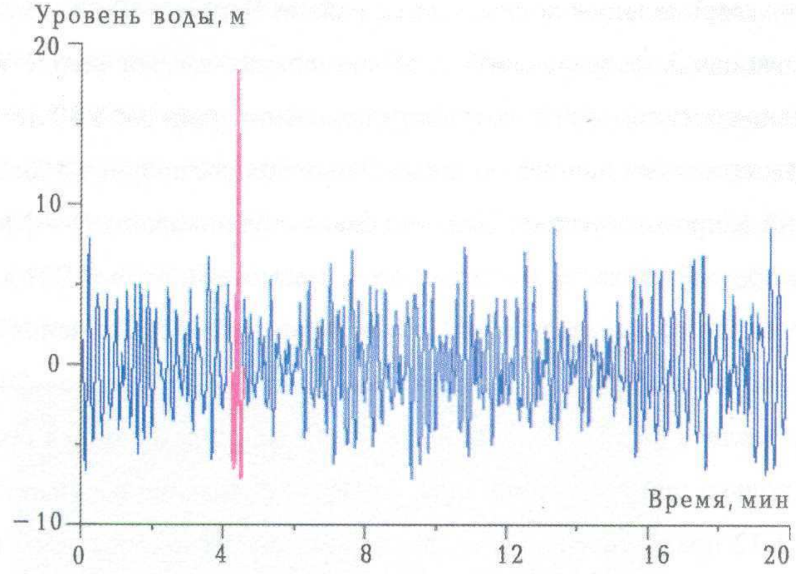


Рис. 1.9. «Новогодняя волна», зарегистрированная в Северном море 1 января 1995 г. [106]

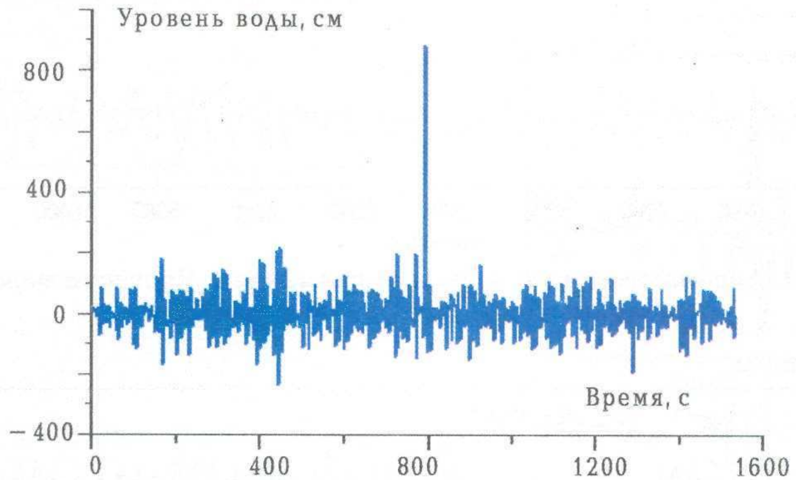
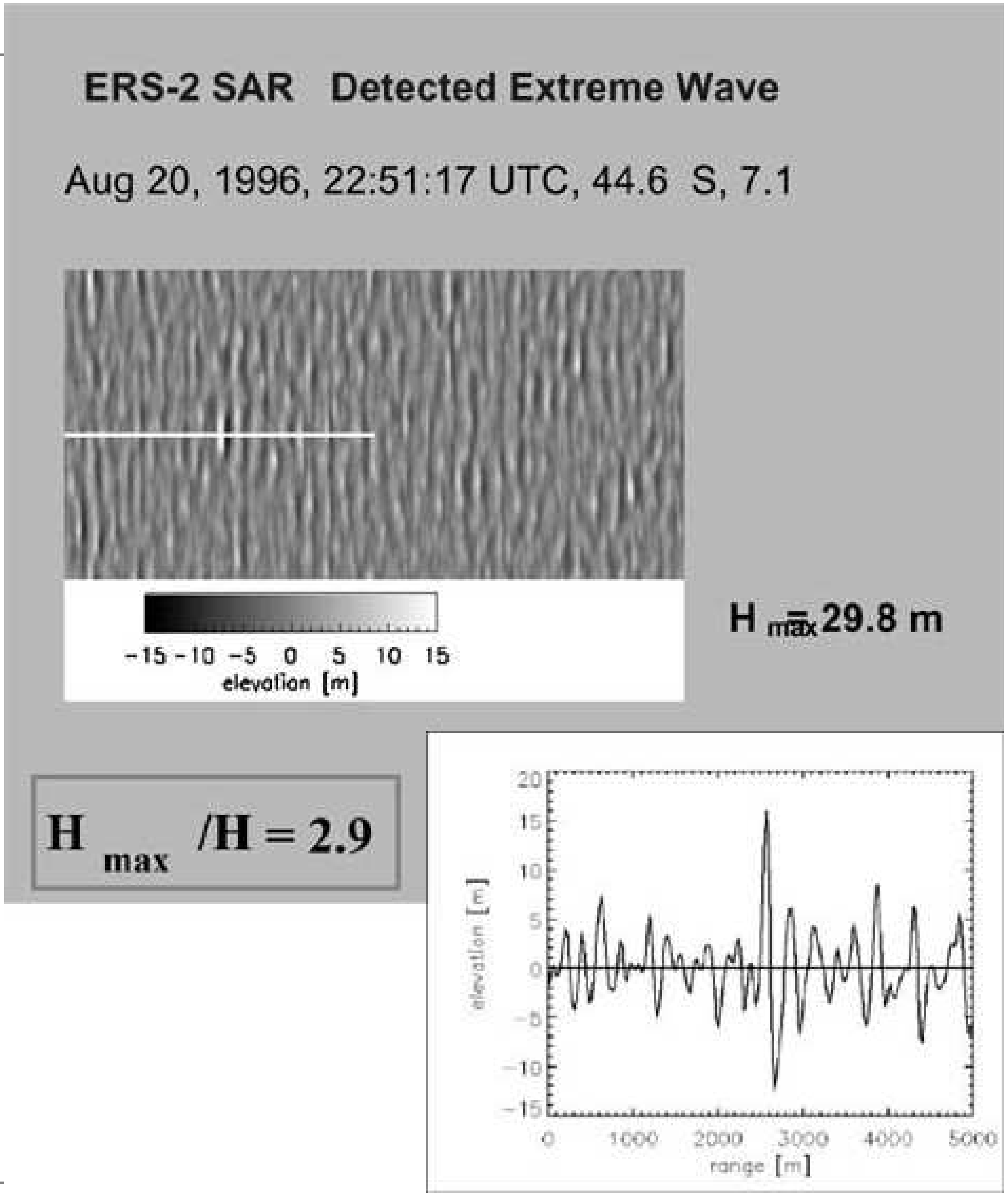


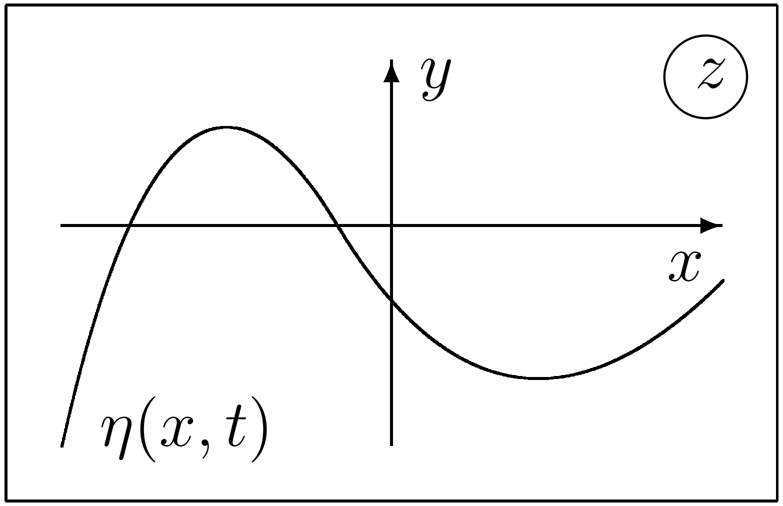
Рис. 1.10. Аномальная волна, зарегистрированная с буя в Черном море 22 ноября 2001 г. [12, 30]

Со спутника...



ERS-2 SAR Detected Extreme Wave
Aug 20, 1996, 22:51:17 UTC, 44.6 S, 7.1
−15 −10 −5 0 5 10 15
elevation [m]
H max 29.8 m
H max /H = 2.9
20 15 10 5 0 −5 −10 −15
elevation [m]
0 1000 2000 3000 4000 5000
range [m]

Уравнения...



безвихревое течение

$$\triangle\phi(x,y,t)=0$$

Граничные условия: $\left[\begin{array}{l} \dfrac{\partial\phi}{\partial t}+\frac{1}{2}|\nabla\phi|^2+g\eta=\dfrac{P}{\rho}, \\ \dfrac{\partial\eta}{\partial t}+\eta_x\phi_x=\phi_y \end{array}\right|$ при $y=\eta(x,t)$.

$$\frac{\partial\phi}{\partial y} = 0, y\rightarrow-\infty,$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = 0, |x|\rightarrow\infty,$$ или периодические

Конформное отображение

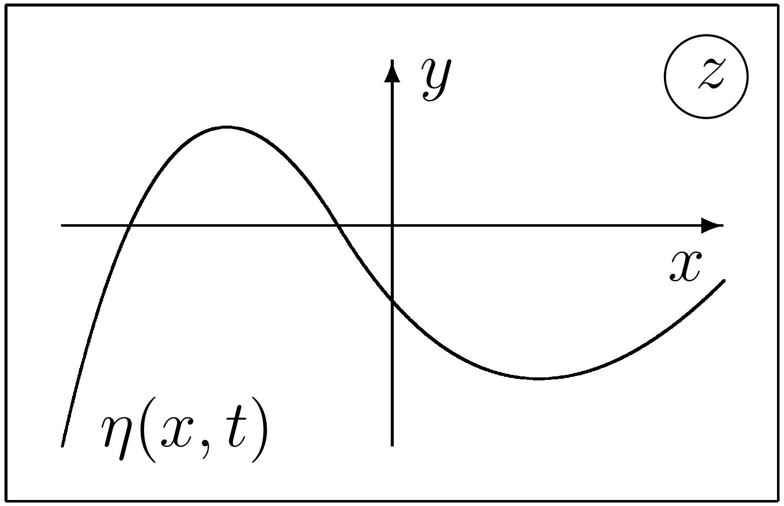
область на плоскости $Z = x + iy$,

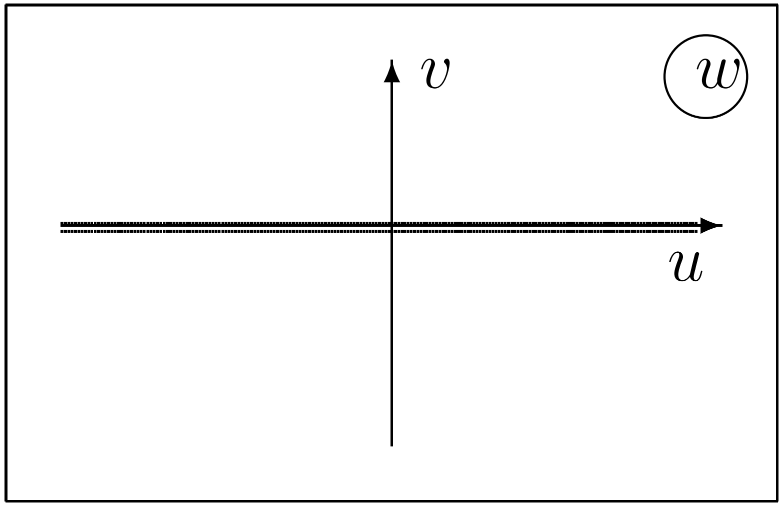
$$-\infty < x < \infty, \quad -\infty < y \le \eta(x,t)\,,$$

на нижнюю полуплоскость,

$$-\infty < u < \infty, \quad -\infty < v \le 0\,,$$

плоскости $\omega = u + iv$.





Конформное отображение

Теперь граница жидкости задается параметрически

$$(\text{при} \quad v = 0) \quad y = y(u,t), \quad x = u + \tilde{x}(u,t)\,.$$

Мнимая y и вещественная $\tilde{x}$ части Z связаны преобразованием:

$$y = \hat{H}\tilde{x} \qquad\qquad \tilde{x} = -\hat{H}y\,.$$

Здесь $\hat{H}$ преобразование Гильберта,

$$\hat{H}f(u) = \frac{1}{\pi} P.V. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(u')}{(u'-u)} du'\,.$$

Для фурье-гармоник имеем: $y_k = i\,\text{sign}(k) x_k$.

Уравнения для Z и Φ

После *конформного преобразования* получаются уравнения для аналитеческих функций

$Z = x + iy,$ и комплексного потенциала скорости $\Phi = \Psi + \hat{H}\Psi.$

$$
\begin{aligned}
Z_t &= iUZ_u, \\
\Phi_t &= iU\Phi_u - \hat{P}\left(\frac{|\Phi_u|^2}{|Z_u|^2}\right) + ig(Z - u).
\end{aligned}
$$

U комплексная скорость переноса:

$$
U = \hat{P}\left(\frac{-\hat{H}\Psi_u}{|Z_u|^2}\right). \qquad u \to w
$$

$\hat{P}(f) = \frac{1}{2}(1 + i\hat{H})(f)$ – оператор проектирования.

Кубические уравнения для R и V

Введём вместо $Z(w,t)$ и $\Phi(w,t)$ другие переменные, также аналитические функции $R(w,t)$ and $V(w,t)$

$$R = \frac{1}{Z_w}, \qquad \Phi_w = -iVZ_w.$$

Для них уравнения принимают предельно простой вид:

$$\begin{aligned} R_t &= i\left[UR' - U'R\right], \\ V_t &= i\left[UV' - R\hat{P}(V\bar{V})'\right] + g(R-1). \end{aligned}$$

Комплексная скорость переноса U определяется как

$$U = \hat{P}(V\bar{R} + \bar{V}R).$$

Образование волны-убийцы

- Волна Стокса - решение стационарного уравнения:

$$y = \frac{c^2}{2g}\left(1 - \frac{1}{|Z_u|^2}\right),$$

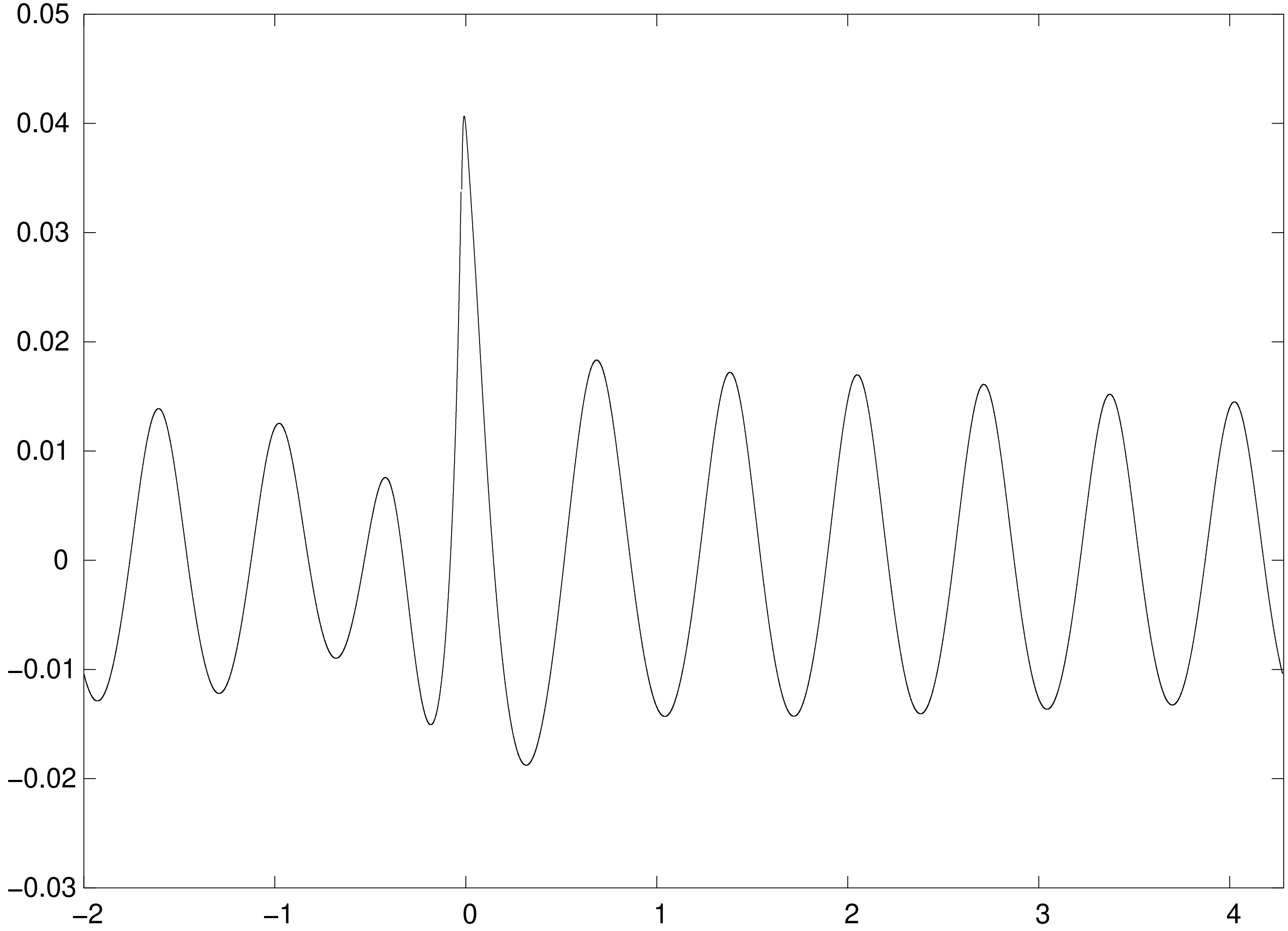
Потенциал Φ связан с конформным преобразованием

$$\Phi = -c(Z - u), \qquad V = ic(R - 1).$$

Крутизна волны $\mu = ak_0$ - параметр начального условия

- Цуг из 100 волн Стокса в периодической области 2π
- и длинноволновое возмущение

100 волн $\mu = 0.095$



100 waves $\mu = 0.095$

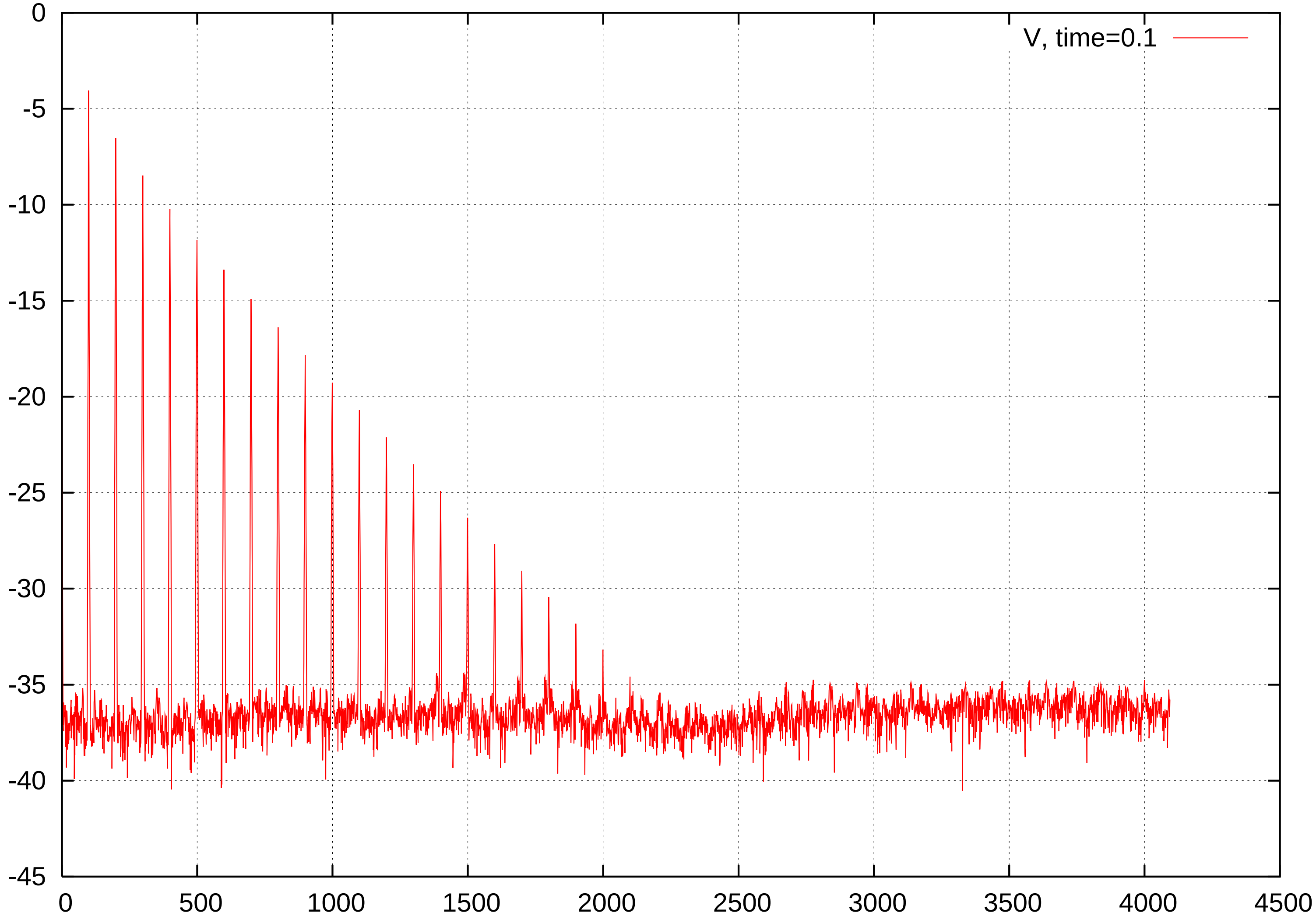


Рис. 1. Профиль поверхности

100 waves $\mu = 0.095$

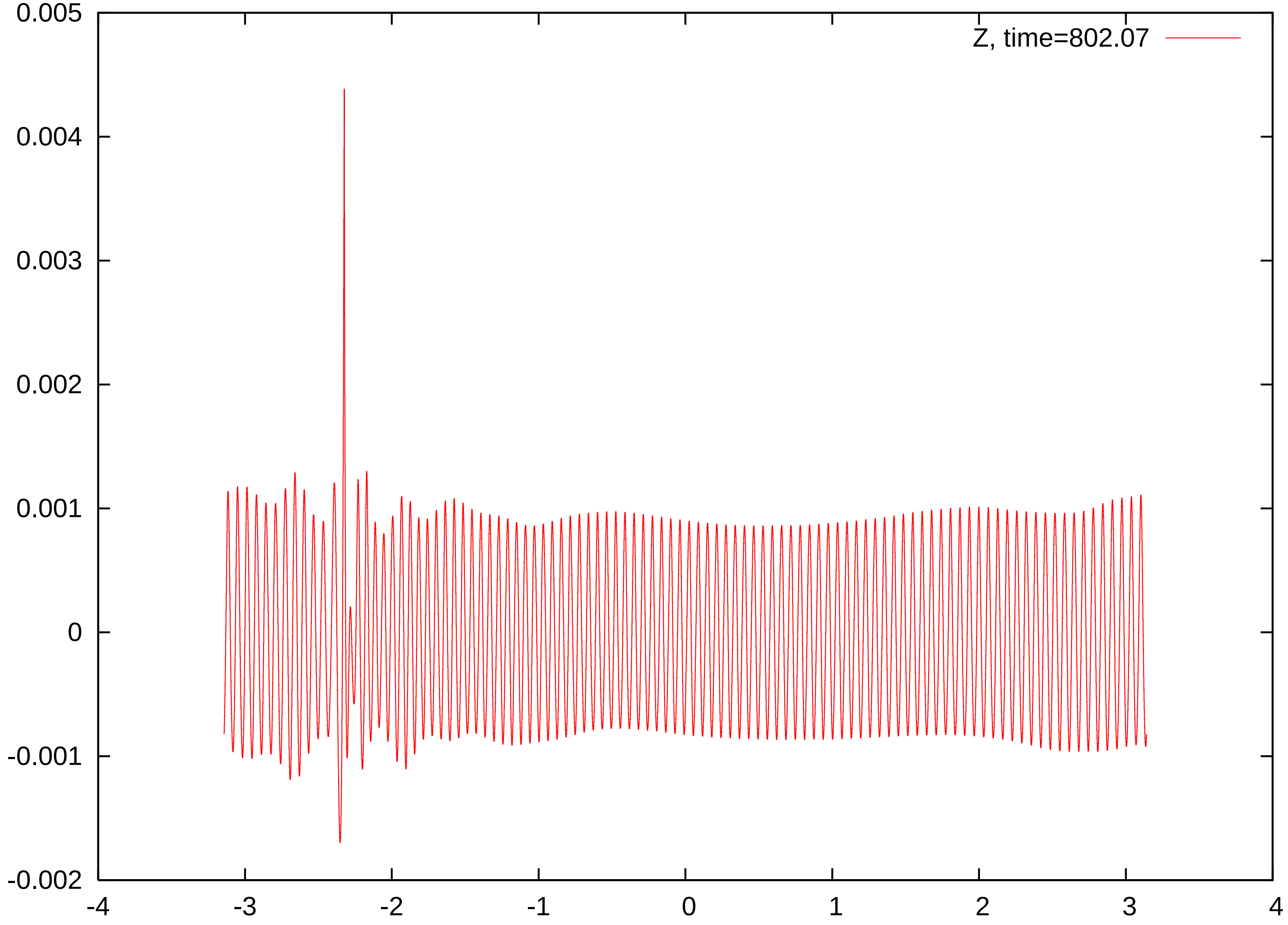


Рис. 2. Surface profile

100 waves $\mu = 0.095$

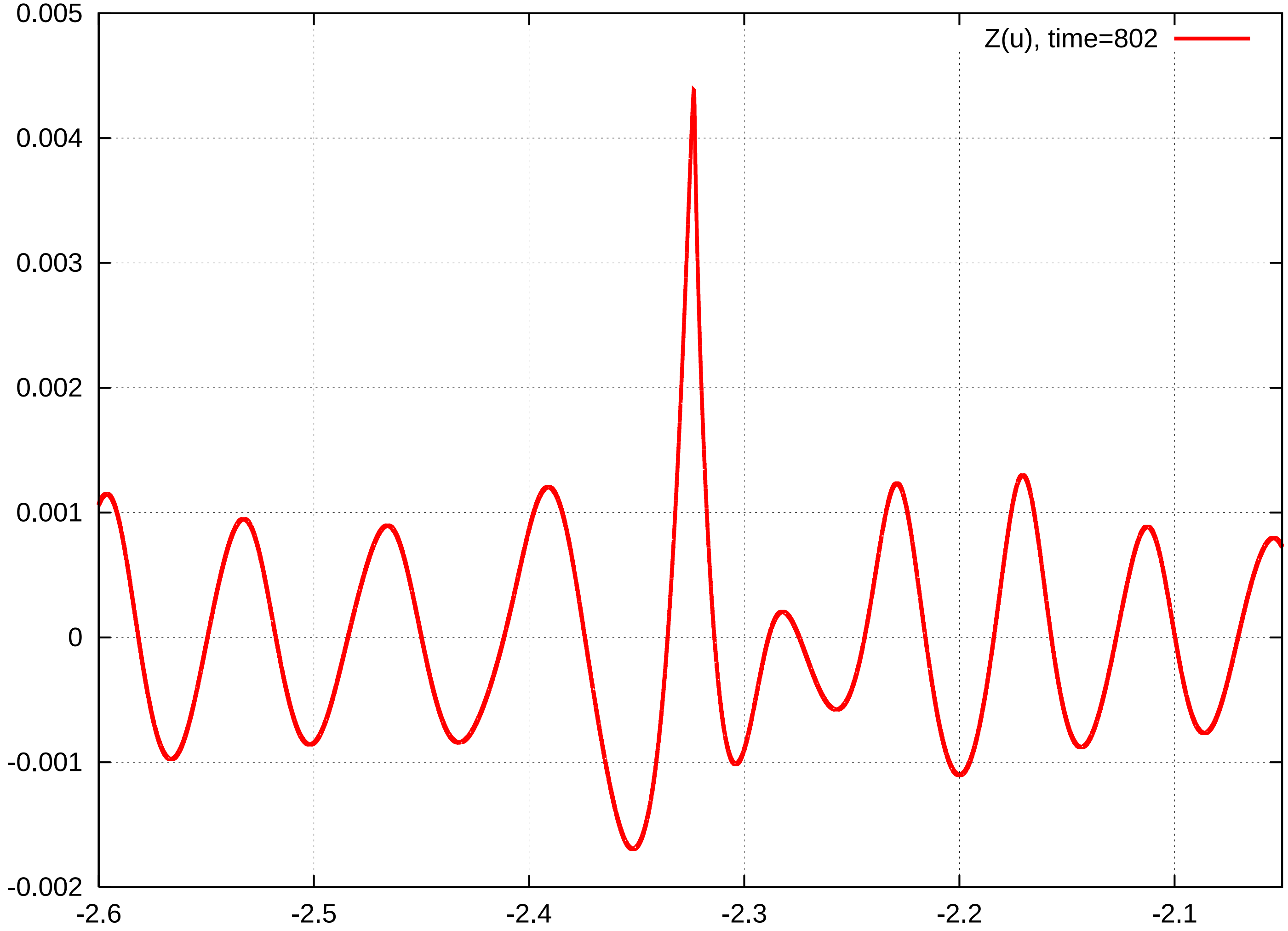


Рис. 3. Zoom in surface profile

100 waves $\mu = 0.095$

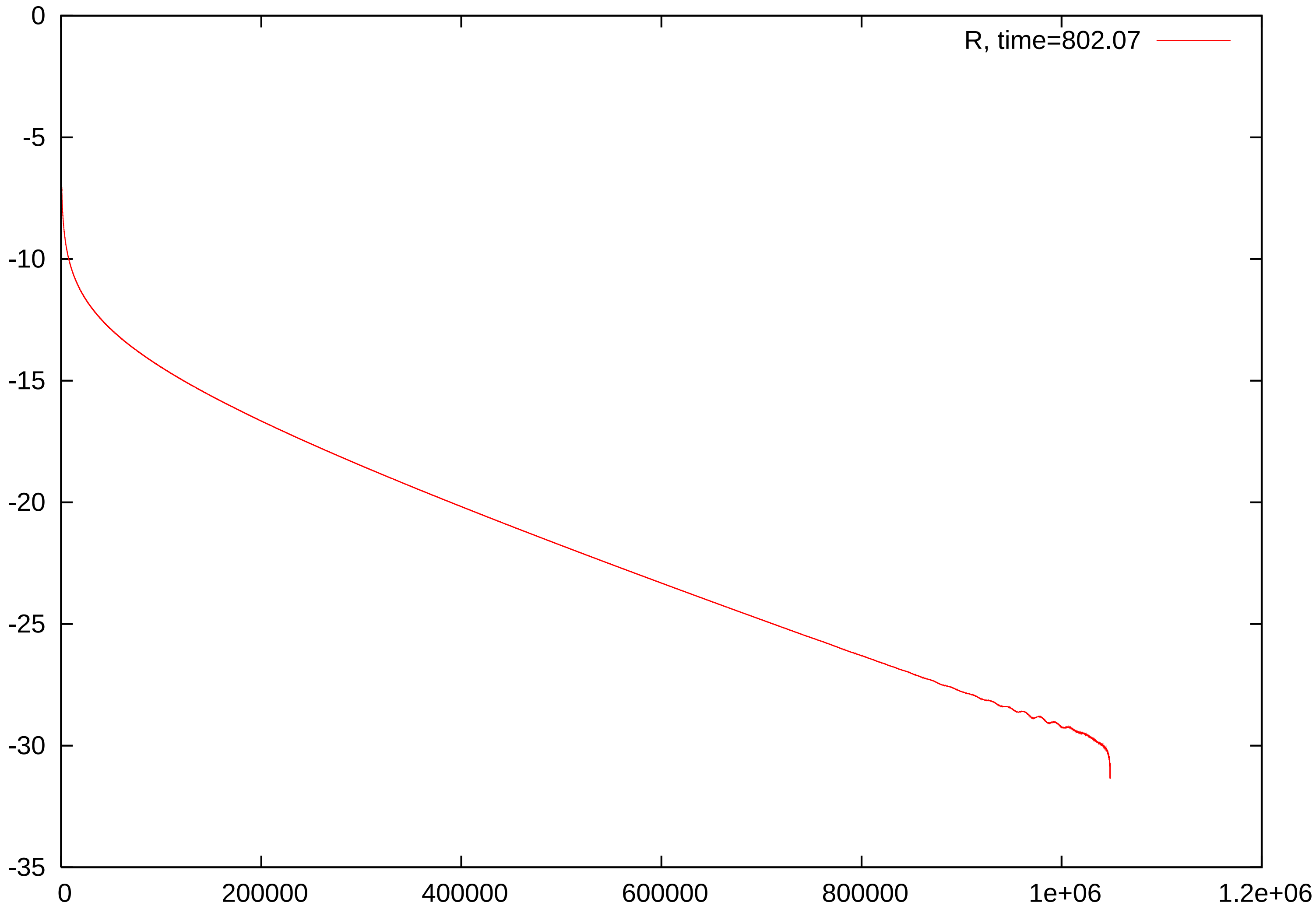


Рис. 4. Fourier coefficients $|R_k|^2$.

Wave breaks

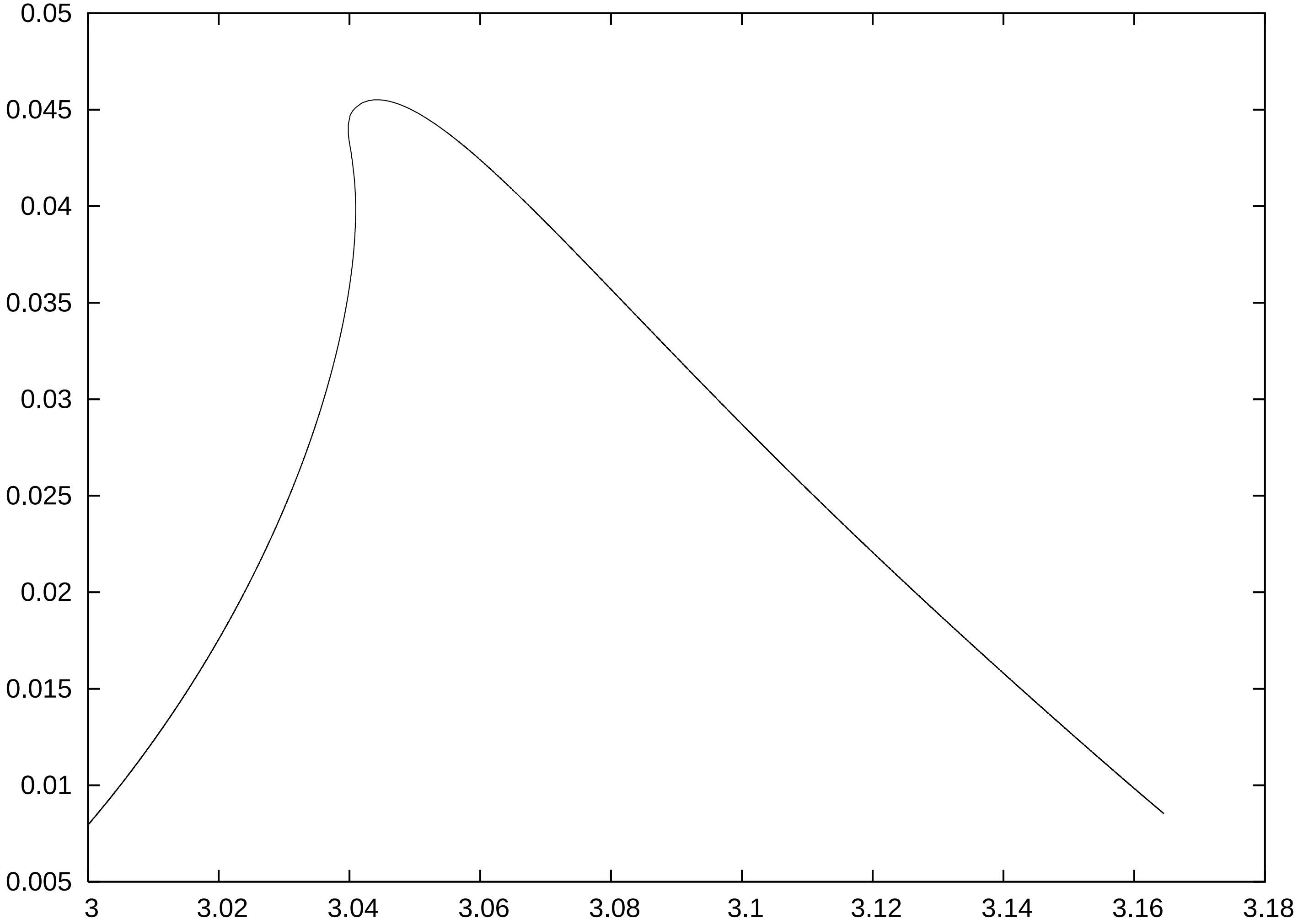
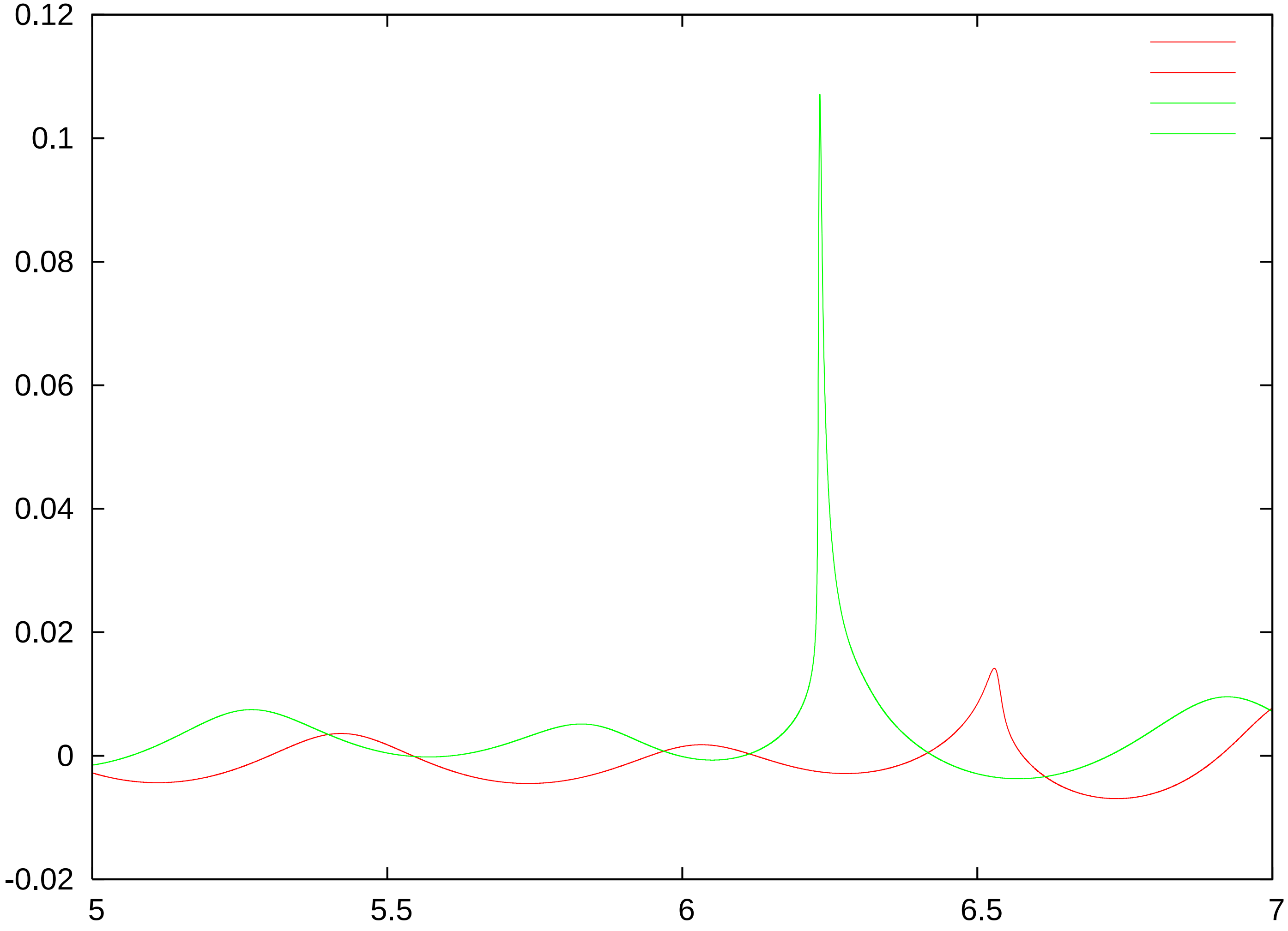


Рис. 5. Overturning

Wave breaks. Momentum



NLSE Soliton $\mu = 0.1$

$$R(u) = 1 + \mu \frac{e^{-ik_0 u}}{\cosh(L_0 k_0 u)}, \qquad V(u) = -i\sqrt{\frac{g}{k_0}}\mu \frac{e^{-ik_0 u}}{\cosh(L_0 k_0 u)},$$

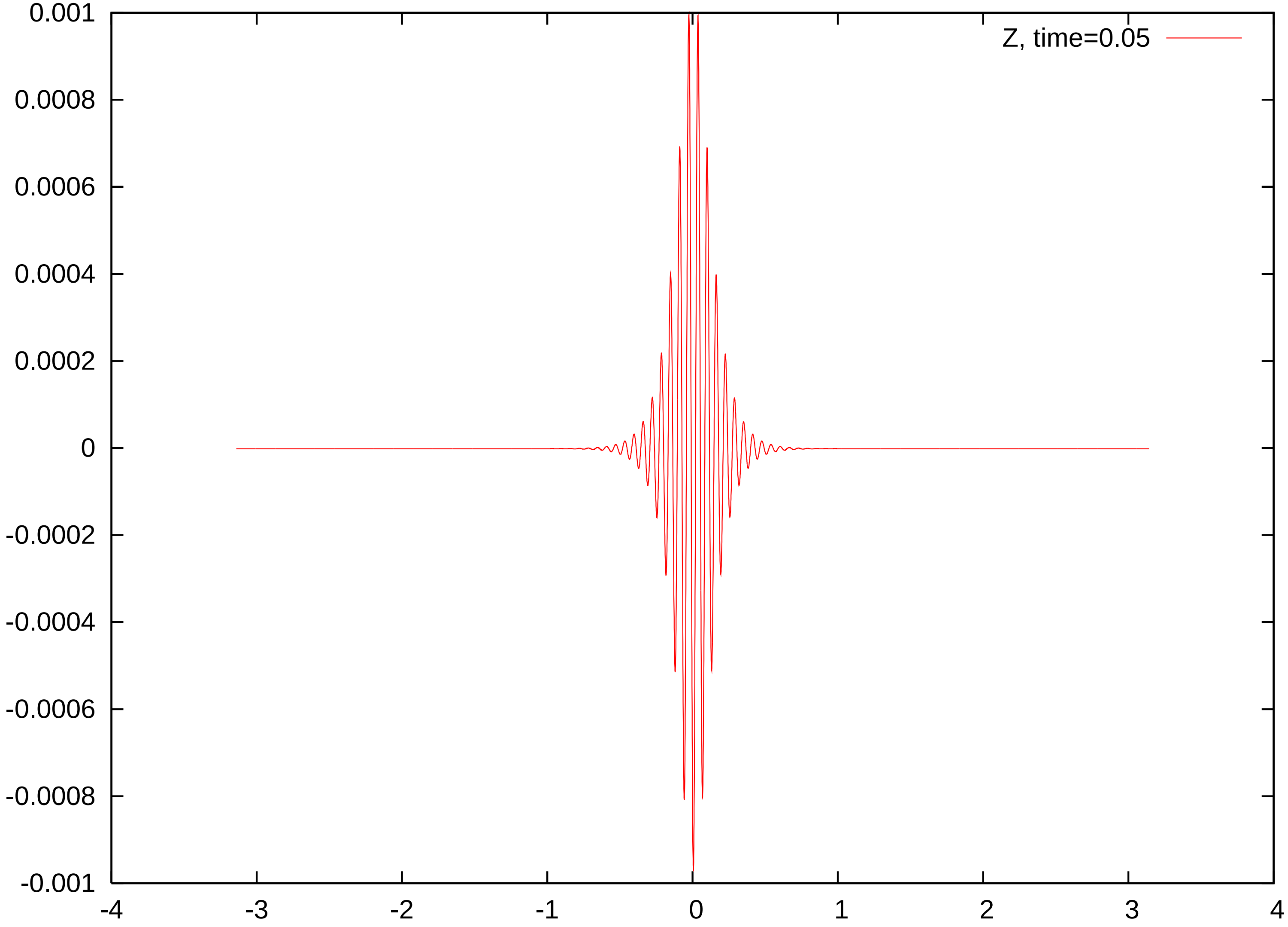


Рис. 6. Initial soliton. $k_0 = 100$, $L_0 = 0.1$.

NLSE Soliton $\mu = 0.1$

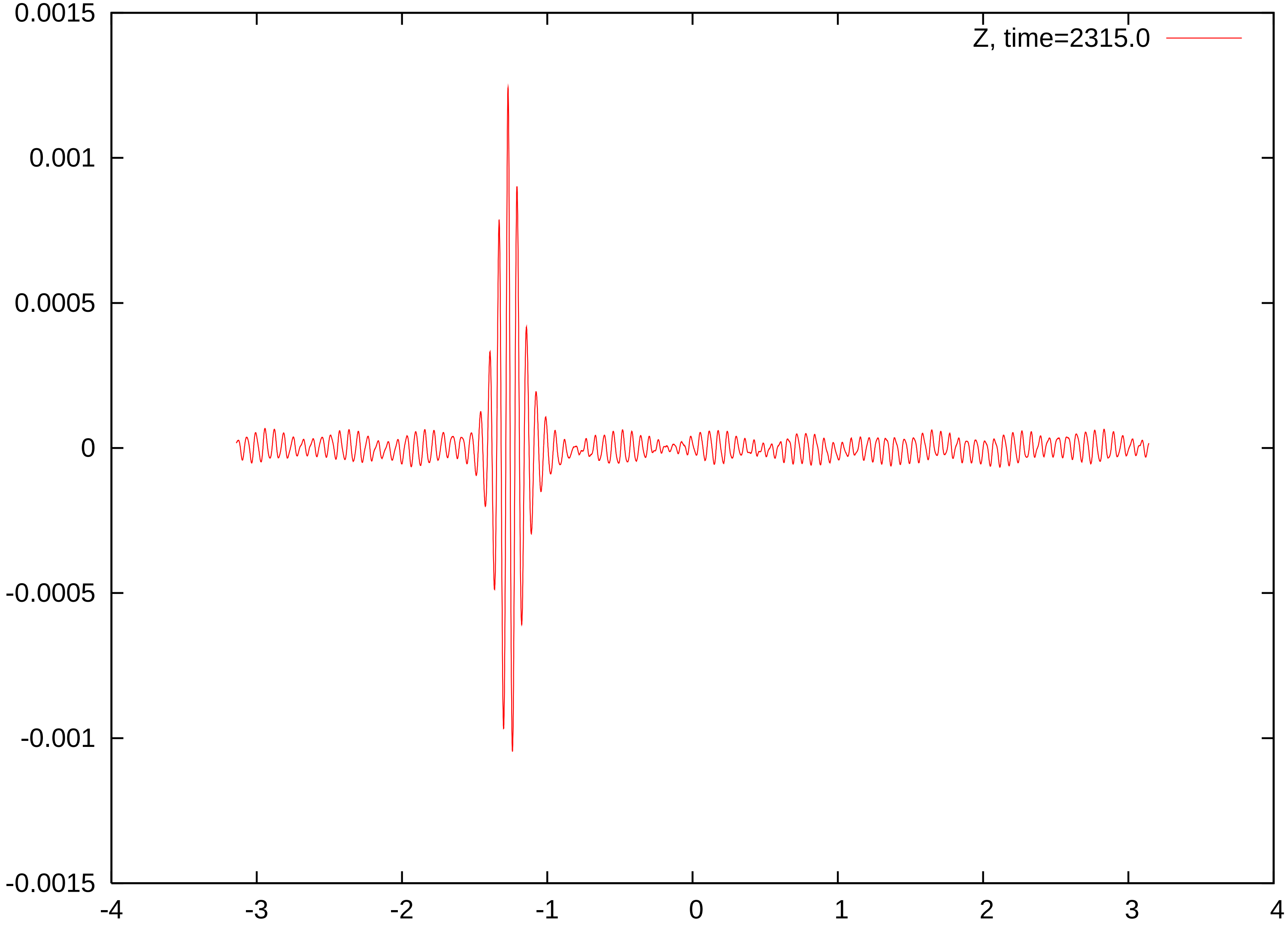


Рис. 7. After 4000 periods (movie)

NLSE Soliton $\mu = 0.14$

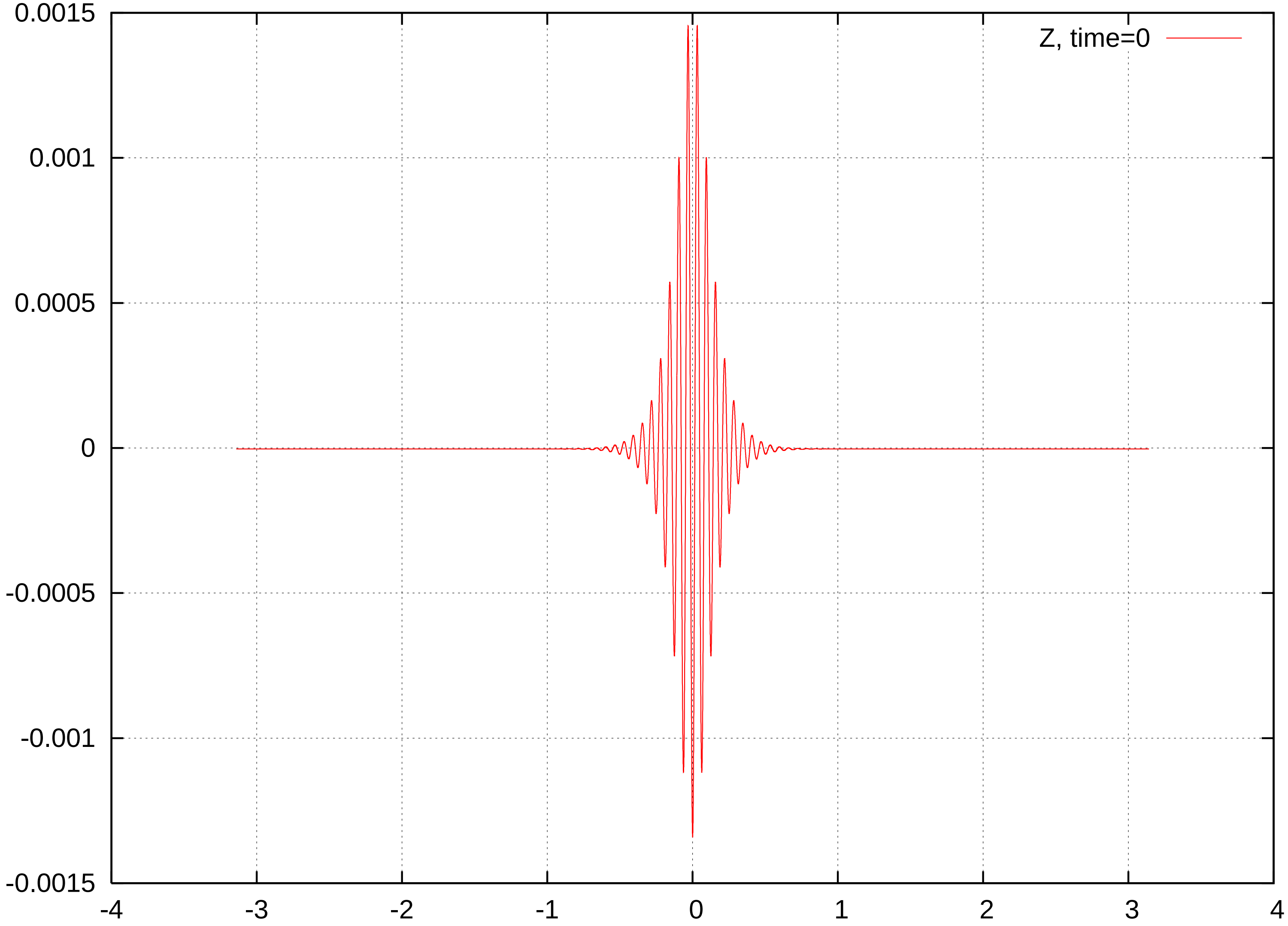


Рис. 8. Initial soliton. $k_0 = 100$, $L_0 = 0.1$.

NLSE Soliton $\mu = 0.14$

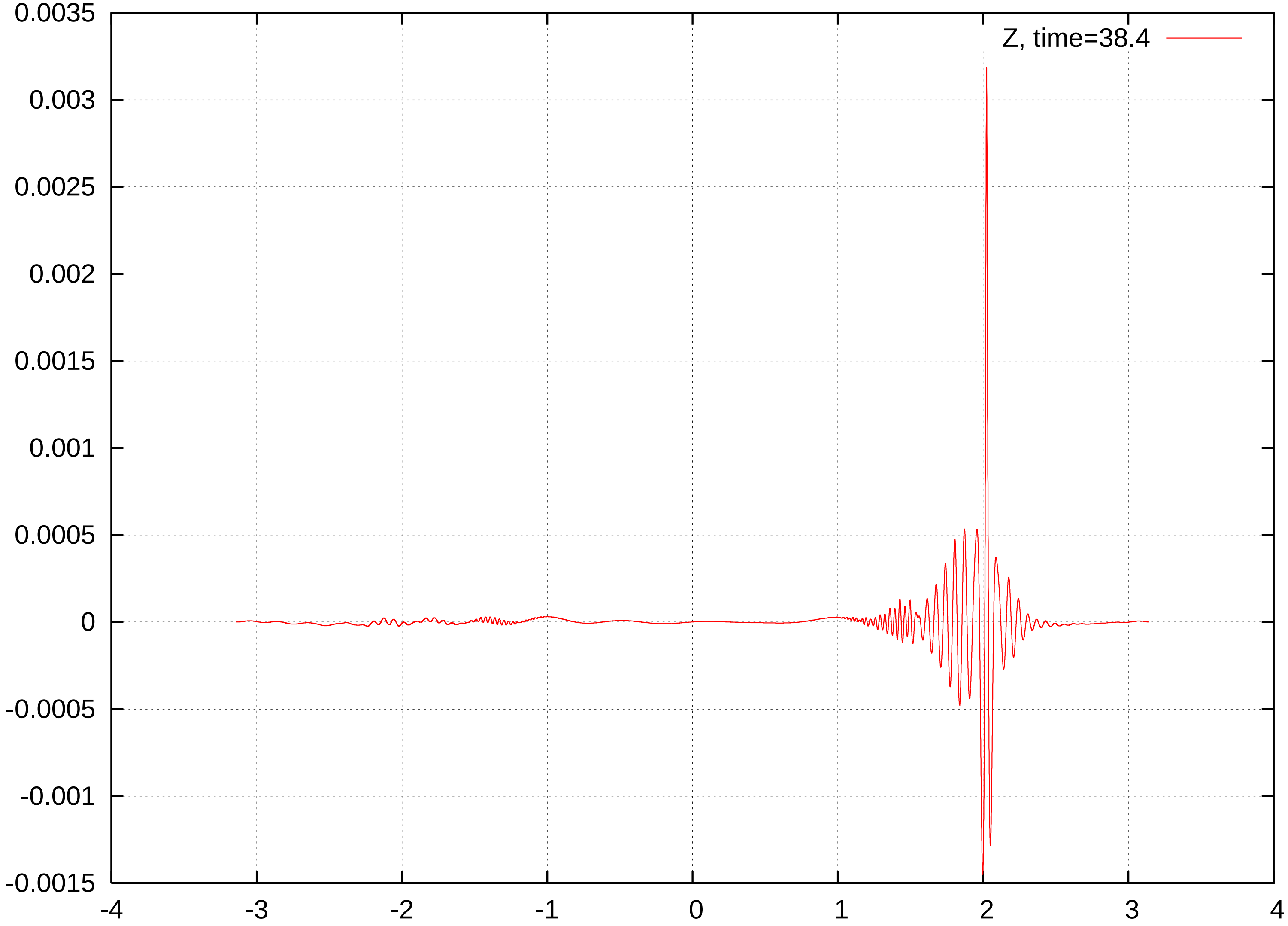


Рис. 9. After 65 periods (movie)

Collision of solitons $\mu = 0.12$

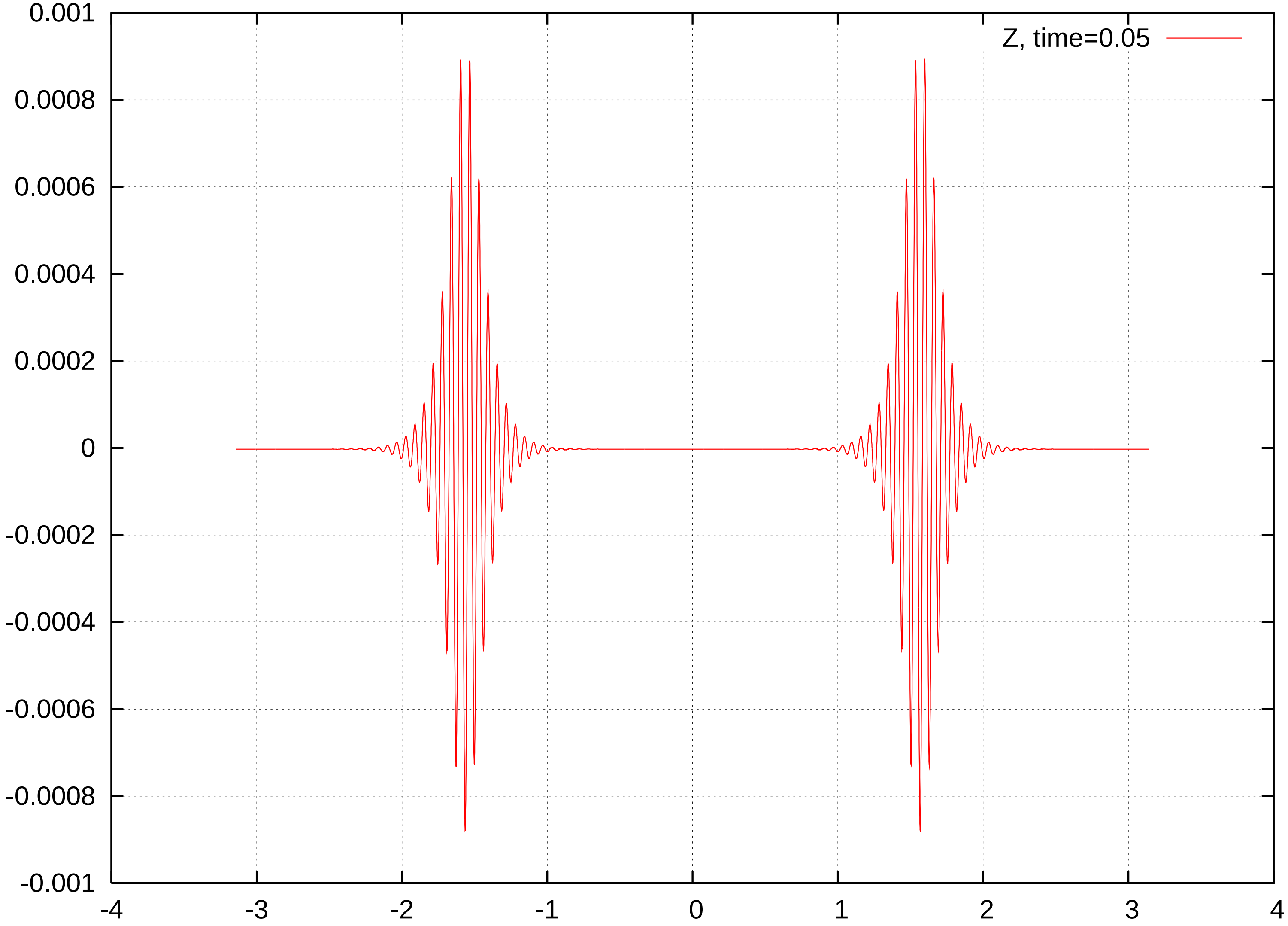


Рис. 10. Initial solitons

Collision of solitons $\mu = 0.12$

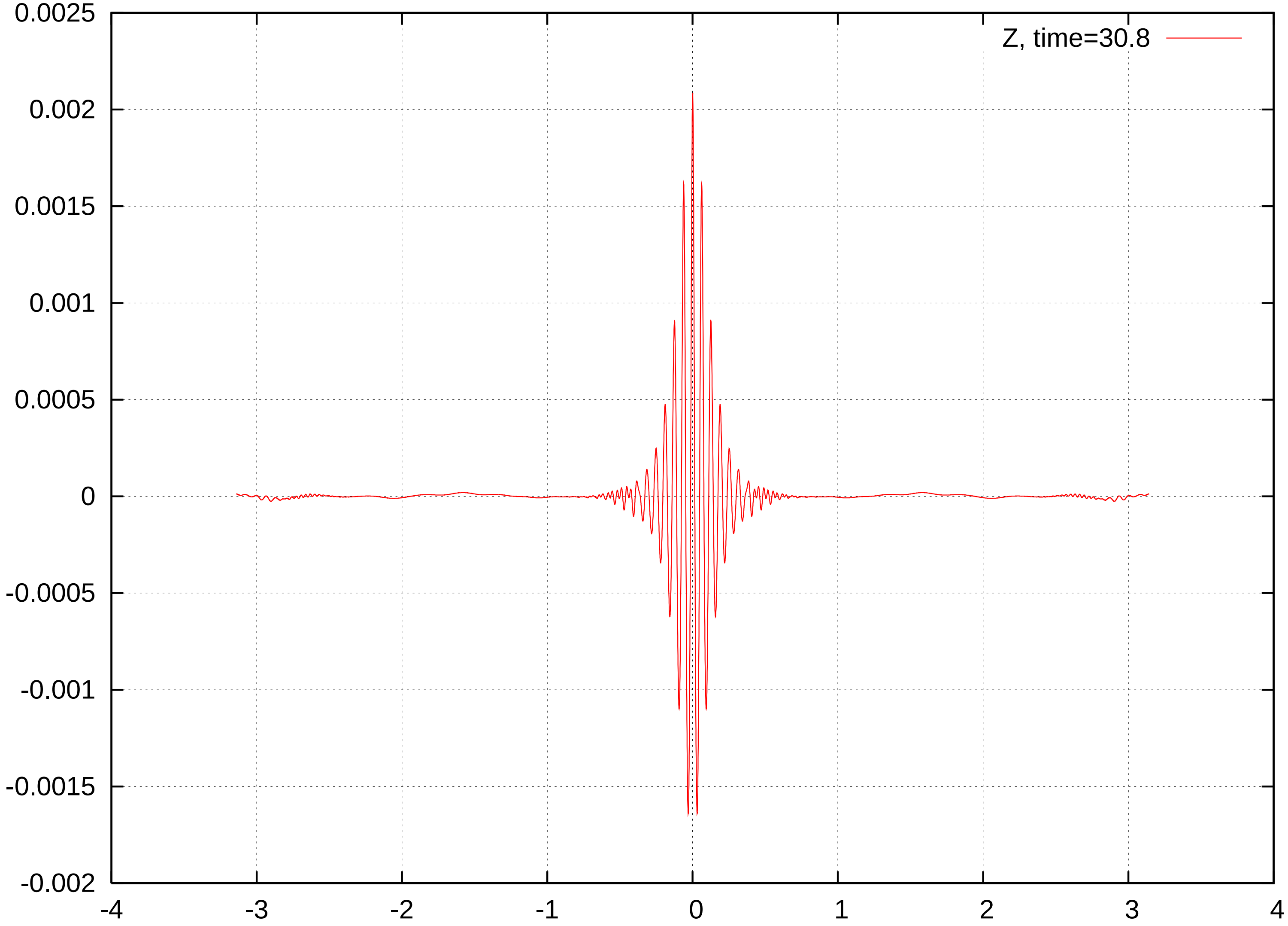


Рис. 11. Collision (movie)