

Нелинейные волновые процессы

ИТФ им. Л.Д.Ландау РАН
НИУ ВШЭ

Волны на поверхности глубокой воды

Уравнение Эйлера

$$\dot{\vec{v}} + (\vec{v}\nabla)\vec{v} = g - \frac{1}{\rho}\nabla P$$

$\vec{v}(x, y, z)$ — скорость жидкости

$P(x, y, z)$ — давление в жидкости

ρ — плотность жидкости

g — напряженность гравитационного поля

Граница (поверхность) жидкости

$$z \leq \eta(x, y, t)$$

Потенциальное течение

$$\vec{v} = \nabla\phi, \quad \Delta\phi = 0$$

Потенциальное течение

Уравнение Эйлера

$$\nabla \dot{\phi} + (\nabla \phi \nabla) \nabla \phi = g - \frac{1}{\rho} \nabla P$$

$$\phi(x, y, z, t) \rightarrow 0, \quad z \rightarrow -\infty$$

Интегрируем $\phi_z(x, y, z, t)$ по z от $-\infty$ до $\eta(x, y, t)$

$$\int_{-\infty}^{\eta(x, y, t)} [\dot{\phi}_z + (\nabla \phi \nabla) \phi_z] dz = g\eta(x, y, t)$$

$$gz - \frac{1}{\rho} P|_{z \rightarrow -\infty} = 0, \quad P = 0 \quad \text{на границе}$$

Уравнение Бернулли

$$[\dot{\phi} + \frac{1}{2} |\nabla \phi|^2]|_{z=\eta(x, y, t)} = g\eta(x, y, t)$$

Потенциальное течение

Кинематическое условие

Каждая частица жидкости на границе движется вместе с границей

$$[\dot{\eta} + \phi_x \eta_x + \phi_y \eta_y = \phi_z]_{z=\eta(x,y,t)}$$

Уравнения глубокой воды

$$\Delta \phi(x, y, z, t) = 0 \quad \phi(x, y, z, t) \rightarrow 0|_{z \rightarrow -\infty}$$

$$\begin{aligned} [\dot{\phi} + \frac{1}{2} |\nabla \phi|^2]_{z=\eta(x,y,t)} &= g \eta(x, y, t) \\ [\dot{\eta} + \phi_x \eta_x + \phi_y \eta_y = \phi_z]_{z=\eta(x,y,t)} & \end{aligned} \quad (1)$$

Кинетическая и потенциальная энергии жидкости

$$K = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\eta(x,y,t)} dz \int \int |\nabla \phi|^2 dx dy$$
$$U = \frac{1}{2} \int \int \eta^2(x, y, t) dx dy$$

Импульс и масса

$$\vec{P} = \int_{-\infty}^{\eta(x,y,t)} dz \int \int \nabla \phi dx dy$$
$$M = \int \int \eta(x, y, t) dx dy = 0$$

Гамильтоновы переменные

Гамильтониан

$$H = K + U$$

Гамильтоновы переменные

$$\psi(x, y, t) = \phi(x, y, \eta(x, y, t), y) \quad \eta(x, y, t)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta}{\partial t} &= \frac{\partial H}{\partial \psi}, \\ \frac{\partial \psi}{\partial t} &= -\frac{\partial H}{\partial \eta}. \end{aligned} \quad (2)$$

В.Е Захаров. Прикл. Мех. Тех. Физ. 2 (1968) 190

Двумерная жидкость

ТФКП (конформные преобразования)

y - вертикальная координата, x - горизонтальная, $z = x + iy$.

Сделаем конформное преобразование области на z -плоскости, занимаемой жидкостью, на нижнюю полуплоскость комплексной переменной $w = u + iv$

$$-\infty < u < \infty, \quad -\infty < v < 0.$$

После такого преобразования граница жидкости будет задаваться параметрически действительной и мнимой частями конформного преобразования, взятого на вещественной оси $v = 0$:

$$y = y(u, t), \quad x = x(u, t) = u + \tilde{x}(u, t), \quad (3)$$

здесь вещественная и мнимая части $\tilde{x}(u, t)$ и $y(u, t)$ связаны между собой преобразованием Гильберта

$$y = \hat{H}\tilde{x}, \quad \tilde{x} = -\hat{H}y, \quad \hat{H}^2 = -1$$

и

$$\hat{H}(f(u)) = P.V. \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(u') du'}{u' - u}.$$

Двумерная жидкость

Конформное преобразование

$z \leftrightarrow w$ аналитическая функция в нижней полуплоскости

$$z(w, t) = w + \tilde{x}(u, v, t) + iy(u, v, t)$$

Потенциал и функция тока

$$\Phi(x, y, t) = \phi(x, y, t) + i\theta(x, y, t) \rightarrow \phi(u, v, t) + i\theta(u, v, t)$$

Φ - аналитическая функция в нижней полуплоскости

Справедливы условия Коши-Римана

$$\phi_u = \theta_v, \quad \phi_v = \theta_u$$

$$\phi(u, 0, t) = \Psi(u, t)$$

$$y = y(u, t), \quad x = x(u, t) = u + \tilde{x}(u, t),$$

На вещественной оси $\tilde{x}(u, t)$ и $y(u, t)$ связаны между собой

Лагранжиан и конформные переменные

Уравнения (2) определяют экстремум действия,

$$\delta S = 0, \quad S = \int L dt, \quad (4)$$

$$L = \int \Psi \frac{\partial \eta}{\partial t} dx - H. \quad (5)$$

После замены переменных

$$dx = x_u du, \quad \psi(x, y, t) \rightarrow \psi(x(u, v, t), y(u, v, t), t) \rightarrow \Psi(u, v, t)$$

Здесь кинетическая и потенциальная энергии

$$K = -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi \hat{H} \Psi_u du \quad U = \frac{g}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \eta^2 x_u du \quad (6)$$

$$\Psi(u, v, t) \rightarrow \Psi(u, 0, t) \rightarrow \Psi(u, t).$$

$$\eta_t dx = (y_t x_u - x_t y_u) du, \quad (7)$$

$\hat{H}\Psi$ — функция тока на поверхности

Лагранжиан и конформные переменные

Лагранжиан принимает следующий вид,

$$L = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(y_t x_u - x_t y_u) du + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi \hat{H} \Psi_u du - \frac{g}{2} \int_{-\infty}^{\infty} y^2 x_u du + \int_{-\infty}^{\infty} f(y - \hat{H} \tilde{x}) du \quad (8)$$

Здесь f - множитель лагранжа для условия $y = \hat{H} \tilde{x}$.

Принцип Гамильтона,

$$\frac{\delta S}{\delta \Psi} = 0, \quad \frac{\delta S}{\delta y} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\delta S}{\delta x} = 0.$$

дает следующие ТРИ уравнения,

$$y_t x_u - x_t y_u = -\hat{H} \Psi_u, \quad (9)$$

$$\Psi_t x_u - \Psi_u x_t + g y x_u = f, \quad (10)$$

$$\Psi_t y_u - \Psi_u y_t + g y y_u = -\hat{H} f, \quad (11)$$

исключая f , получим:

$$\Psi_t y_u - \Psi_u y_t + g y y_u + \hat{H}(\Psi_t x_u - \Psi_u x_t + g y x_u) = 0. \quad (12)$$

Интегралы движения в конформных переменных

Интегралы движения приобретают следующий вид:

$$\begin{aligned} H &= - \int_{-\infty}^{\infty} \Psi \hat{H} \Psi_u du + \frac{g}{2} \int_{-\infty}^{\infty} y^2 x_u du, \\ M &= \int_{-\infty}^{\infty} y x_u du, \\ P_y &= \int_{-\infty}^{\infty} \Psi x_u du, \\ P_x &= \int_{-\infty}^{\infty} \Psi y_u du. \end{aligned} \tag{13}$$

Уравнения глубокой воды в конформных переменных

$y(u, t)$ и $\Psi(u, t)$ удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$y_t = (y_u \hat{H} - x_u) \frac{\hat{H} \Psi_u}{J} \quad (14)$$

$$\Psi_t = -\frac{\Psi_u^2 + \hat{H} \Psi_u^2}{2J} + \hat{H} \left(\frac{\hat{H} \Psi_u}{J} \right) \Psi_u + \frac{\hat{H} \Psi_u}{J} \hat{H} \Psi_u - gy \quad (15)$$

где J - якобиан конформного преобразования

$$J = x_u^2 + y_u^2 = (1 + \tilde{x}_u)^2 + y_u^2. \quad (16)$$