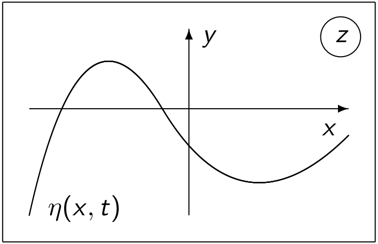
Нелинейные волновые процессы

ИТФ им. Л.Д.Ландау РАН
НИУ ВШЭ

Потенциальное течение 2D жидкости



$$\Delta\phi(x,y,t) = 0 \qquad \phi(x,y,t) \to 0|_{y\to-\infty}$$

$$\begin{aligned} &\Big[\dot{\phi} + \frac{1}{2}(\phi_x^2 + \phi_y^2)\Big]\Big|_{y=\eta(x,t)} = g\eta(x,t) \\ &\Big[\dot{\eta} + \phi_x\eta_x = \phi_y\Big]\Big|_{y=\eta(x,t)} \end{aligned} \tag{1}$$

Энергия и интегралы

Кинетическая и потенциальная энергии жидкости

$$K = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\eta(x,t)} dy \int (\phi_x^2 + \phi_y^2) dx$$
$$U = \frac{1}{2}\int \eta^2(x,t) dx$$

Импульс и масса

$$\vec{\mathcal{P}} = \int_{-\infty}^{\eta(x,t)} dy \int \nabla\phi dx$$
$$M = \int \eta(x,t) dx = 0$$

Гамильтоновы переменные

Гамильтониан

$$H = K + U$$

Гамильтоновы переменные

$$\underline{\psi(x,t)} = \phi(x, \eta(x,t), y) \qquad\qquad \underline{\eta(x,t)}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta}{\partial t} &= \frac{\partial H}{\partial \psi}, \\ \frac{\partial \psi}{\partial t} &= -\frac{\partial H}{\partial \eta}. \end{aligned} \tag{2}$$

Конформное преобразование $Z(W, t)$

область на Z-плоскости $Z = x + iy$,

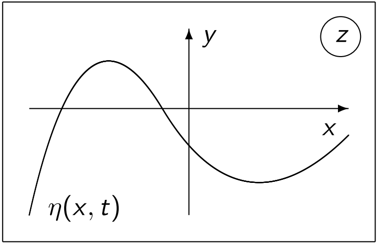
$$-\infty < x < \infty, \quad -\infty < y \le \eta(x,t)\,,$$

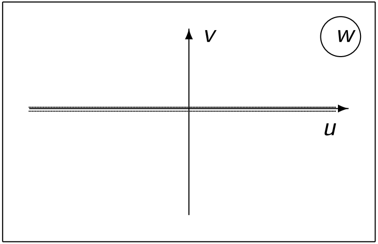
на нижнюю полуплоскость,

$$-\infty < u < \infty, \quad -\infty < v \le 0\,,$$

Z-плоскость

$W = u + iv$.





Конформное преобразование $Z(W,t)$

$$Z(W,t) = x(u,v,t) + iy(u,v,t)$$

$$Z(W,t) \to W \qquad W \to \infty$$

Условия Коши-Римана

$$x_u(u,v,t) = y_v(u,v,t) \qquad x_v(u,v,t) = -y_u(u,v,t).$$

Замена переменных:

$$\phi(x,y,t) = \phi(x(u,v,t), y(u,v,t), t) = \psi(u,v,t)$$

Двумерное интегрирование по $dxdy \to J(u,v,t)dudv$.

$$J = \left\|\begin{matrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{matrix}\right\| = x_u^2 + y_u^2 = x_v^2 + y_v^2$$

$$\psi_u = \phi_x x_u + \phi_y y_u, \quad \psi_v = \phi_x x_v + \phi_y y_v$$

$$\phi_x = \frac{1}{J}(\psi_u x_u - \psi_v y_u), \quad \phi_y = \frac{1}{J}(\psi_u y_u + \psi_v x_u)$$

Энергия в конформных переменных

Кинетическая энергии жидкости

$$K = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\eta(x,t)} dy \int (\phi_x^2 + \phi_y^2) dx \quad \to \quad \frac{1}{2}\int\int (\psi_u^2 + \psi_v^2) du dv$$

Потенциальная энергии жидкости

$$U = \frac{1}{2}\int\int \eta^2(x,t) dx \quad \to \quad \frac{1}{2}\int y^2(u,0,t) x_u du$$

Функция тока

$$\Phi(W,t) = \psi(u,v,t) + i\theta(u,v,t)$$

Для Φ так же выполяются условия Коши-Римана:

$$\psi_u(u,v,t) = \theta_v(u,v,t) \qquad \psi_v(u,v,t) = -\theta_u(u,v,t).$$

Энергия в конформных переменных

$$\int du \int_{-\infty}^{0} (\psi_u^2 + \psi_v^2) dv = \int du \int_{-\infty}^{0} (\theta_v^2 + \psi_v^2) dv =$$

Проинтегрируем по частям по v: $(\psi_u = \theta_v)$

$$= \int du \Big[(\theta\theta_v + \psi\psi_v)|_{-\infty}^{0} - \int (\theta\theta_{vv} + \psi\psi_{vv}) dv \Big] =$$

Используем условия Коши-Римана:

$$= \int du \Big[(\theta\psi_u - \psi\theta_u)|_{v=0} - \int (\theta\psi_{uv} - \psi\theta_{uv}) dv \Big] =$$

Еще раз проинтегрируем по частям, но теперь по u:

$$= \int du \Big[-2\psi\theta_u|_{v=0} - \int (\theta_u\psi_v - \psi_u\theta_v) dv \Big] =$$

$$= -2 \int du \psi\theta_u|_{v=0} - \int \int (\psi_v^2 + \psi_u^2) du dv$$

Итого:

$$K = -\frac{1}{2} \int du \psi\theta_u|_{v=0}$$

Интегралы движения в конформных переменных

Аналогично можно вычислить и другие интегралы движения - импульсы и массу жидкости:

$$
\begin{aligned}
M &= \int_{-\infty}^{\infty} du\, y x_u |_{v=0}, \\
P_y &= \int_{-\infty}^{\infty} du\, \psi x_u |_{v=0}, \\
P_x &= \int_{-\infty}^{\infty} du\, \psi y_u |_{v=0}.
\end{aligned} \tag{3}
$$

Гамильтониан и интегралы движения определяются значениями функций только на вещественной оси ($v = 0$).

Преобразование Гильберта

Теорема Коши (частный случай): Пусть функция $f(w)$ аналитична в нижней полуплоскости и $f(w) \to 0 \quad$ если$|w| \to \infty, v < 0$.
Тогда

$$\oint f(w)dw = 0$$

Рассмотрим следующий интеграл:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(w')}{w' - w} dw'$$

в котором контур интегрирования - вещественная ось и $v \to -\infty$
и вычислим его на вещественной оси, т.е. при $v = 0$

$$\frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(w')}{w' - u} dw' =$$

$$\frac{1}{2\pi i} P.V. \int \frac{f(u')}{u' - u} du' + \frac{1}{2} f(u) = 0$$

$$\hat{H}(\psi(u)) = P.V. \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\psi(u')du'}{u' - u}.$$

Преобразование Гильберта

Для

$$f(u) = \psi(u) + i\theta(u)$$

имеем

$$\frac{1}{2\pi i} P.V. \int \frac{\psi(u') + i\theta(u')}{u' - u} du' + \frac{1}{2}(\psi(u) + i\theta(u)) = 0$$

. выделяя вещественную и мнимую части, получаем:

$$\theta(u) = \hat{H}\psi(u), \quad \psi(u) = -\hat{H}\theta(u)$$

Такие же соотношения справедливы и для вещественной и мнимой части конформного преобразования (при $v = 0$)

$$y(u,t) = \hat{H}(x(u,t) - u), \quad x(u,t) - u = -\hat{H}y(u,t)$$

Лагранжиан и конформные переменные

Лагранжиан для глубокой воды имеет вид:

$$L = \int \psi(x,t)\frac{\partial\eta}{\partial t}dx - H\,. \tag{4}$$

Экстремум действия

$$\delta S = 0\,, \qquad S = \int L dt\,, \tag{5}$$

определяет уравнения движения, (Бернулли и кинематическое условие)
После замены переменных вычислим $\dot\eta$ или $\dot y$ при $dx = 0$:

$$dx = x_u du + \dot x dt, \quad dy = y_u du + \dot y dt$$

$$0 = x_u du + \dot x dt, \qquad dy = -\frac{\dot x}{x_u}dt + \dot y dt \quad \dot y|_{x=const} = -\frac{\dot x}{x_u} + \dot y$$

dx и $\psi(x,t)$ в Лагранжиане переходят в

$$dx \to x_u\, du \qquad \psi(x,t) \to \psi(u,0,t)$$

Обозначим потенциал на вещественной оси $\psi(u,0,t)$

$$\Psi(u,t).$$

Лагранжиан и конформные переменные

Кинетическая и потенциальная энергии

$$K = -\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \psi\theta_u du \quad \rightarrow \quad -\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \psi\hat{H}\Psi_u du$$
$$U = \frac{g}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \eta^2 x_u du \tag{6}$$

Лагранжиан принимает следующий вид,

$$L = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(u)(y_t x_u - x_t y_u) du + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \Psi\hat{H}\Psi_u du - \frac{g}{2}\int_{-\infty}^{\infty} y^2 x_u du + \int_{-\infty}^{\infty} F(y - \hat{H}\tilde{x}) \tag{7}$$

Здесь F - множитель лагранжа для условия $y = \hat{H}\tilde{x} = \hat{H}(x - u)$.

Лагранжиан и конформные переменные

Принцип Гамильтона,

$$\frac{\delta S}{\delta \Psi} = 0, \quad \frac{\delta S}{\delta y} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\delta S}{\delta x} = 0\,.$$

дает следующие ТРИ уравнения,

$$y_t x_u - x_t y_u = -\hat{H}\Psi_u\,, \tag{8}$$

$$\Psi_t x_u - \Psi_u x_t + g y x_u = F\,, \tag{9}$$

$$\Psi_t y_u - \Psi_u y_t + g y y_u = -\hat{H}F\,, \tag{10}$$

Можно вычислить множитель лагранжа F:

$$\Psi_u(y_t x_u - x_t y_u) = x_u \hat{H}F + y_u F$$

$$-\Psi_u \hat{H}\Psi_u = x_u \hat{H}F + y_u F$$

Множитель Лагранжа

$$-\Psi_u \hat{H} \Psi_u = x_u \hat{H} F + y_u F$$

Вычислим множитель лагранжа

$$-\frac{1}{2}(\Psi_u + i\hat{H}\Psi_u)^2 = (x_u + iy_u)(F + i\hat{H}F)$$

Уравнения глубокой воды в конформных переменных

$$y_t x_u - x_t y_u = -\hat{H}\Psi_u\,, \tag{11}$$

$$Im\Big[(x_t + iy_t)(x_u - iy_u)\Big] = -Im\Big[\Psi + i\hat{H}\Psi_u\Big]\,, \tag{12}$$

Уравнения глубокой воды в конформных переменных

$$\Psi_t y_u - \Psi_u y_t + g y y_u + \hat{H}(\Psi_t x_u - \Psi_u x_t + g y x_u) = 0\,. \tag{13}$$

$y(u,t)$ и $\Psi(u,t)$ удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$y_t = (y_u \hat{H} - x_u)\frac{\hat{H}\Psi_u}{J} \tag{14}$$

$$\Psi_t = -\frac{\Psi_u^2 + \hat{H}\Psi_u^2}{2J} + \hat{H}\left(\frac{\hat{H}\Psi_u}{J}\right)\Psi_u + \frac{\hat{H}\Psi_u}{J}\hat{H}\Psi_u - gy \tag{15}$$

где J - якобиан конформного преобразования

$$J = x_u^2 + y_u^2 = (1 + \tilde{x}_u)^2 + y_u^2. \tag{16}$$