

Нелинейные волновые процессы

ИТФ им. Л.Д.Ландау РАН
НИУ ВШЭ

Множитель Лагранжа

$$\begin{aligned}y_t x_u - x_t y_u &= -\hat{H}\Psi_u, \\ \Psi_t x_u - \Psi_u x_t + g y x_u &= F \\ \Psi_t y_u - \Psi_u y_t + g y y_u &= -\hat{H}F \\ -\Psi_u \hat{H}\Psi_u &= x_u \hat{H}F + y_u F \\ \Phi &= \Psi + i\hat{H}\Psi \\ -\frac{1}{2}Im\Phi_u^2 &= Im(Z_u(F + i\hat{F}))\end{aligned}\tag{1}$$

Множитель лагранжа

$$(F + i\hat{H}F) = -\frac{\Phi_u^2}{2Z_u}$$

Уравнения глубокой воды в конформных переменных

$$y_t x_u - x_t y_u = -\hat{H}\Psi_u,$$

$$\operatorname{Im}\left[(x_t + iy_t)(x_u - iy_u)\right] = -\hat{H}\Psi_u$$

$$\operatorname{Re}\left[-iZ_t\bar{Z}_u\right] = -\hat{H}\Psi_u$$

$$\operatorname{Re}\left[-i\frac{Z_t}{Z_u}\right] = -\frac{\hat{H}\Psi_u}{|Z_u|^2} - i\hat{H}\frac{\hat{H}\Psi_u}{|Z_u|^2}$$

$$Z_t = iUZ_u$$

$$U = -\frac{\hat{H}\Psi_u}{|Z_u|^2} - i\hat{H}\frac{\hat{H}\Psi_u}{|Z_u|^2}$$

Уравнения глубокой воды в конформных переменных

$$\Psi_t x_u - \Psi_u x_t + g y x_u = F \quad |x_u$$

$$\Psi_t y_u - \Psi_u y_t + g y y_u = -\hat{H}F |y_u$$

$$\Psi_t |Z_u|^2 - \Psi_u (x_u x_t + y_u y_t) + g y |Z_u|^2 = \text{Re}[Z_u (F + i\hat{H}F)]$$

$$\Psi_t - \Psi_u \text{Re}\left(\frac{Z_t}{Z_u}\right) + g y = -\text{Re}\left(\frac{\Phi_u^2}{2|Z_u|^2}\right)$$

$$\Psi_t = -\frac{\Psi_u^2 + \hat{H}\Psi_u^2}{2J} + \hat{H}\left(\frac{\hat{H}\Psi_u}{J}\right)\Psi_u + \frac{\hat{H}\Psi_u}{J}\hat{H}\Psi_u - g y \quad (2)$$

$$\Psi_t = -\frac{\Psi_u^2 + \hat{H}\Psi_u^2}{2J} + \text{Re}(i\Phi_u U) - g y \quad (3)$$

где J - якобиан конформного преобразования

$$J = x_u^2 + y_u^2.$$

Уравнения глубокой воды в конформных переменных

оператор проектирования $\hat{P}$

$$\hat{P}(f) = \frac{1}{2}(1 + i\hat{H})(f)$$

Тогда

$$U = -\frac{\hat{H}\Psi_u}{|Z_u|^2} - i\hat{H}\frac{\hat{H}\Psi_u}{|Z_u|^2} = 2\hat{P}\left(\frac{-\hat{H}\Psi_u}{|z_u|^2}\right).$$
$$z_t = iUz_u,$$
$$\Phi_t = iU\Phi_u - \hat{P}\left(\frac{|\Phi_u|^2}{|z_u|^2}\right) + ig(z - u). \quad (4)$$

Здесь U - это комплексная скорость переноса:

$$U = 2\hat{P}\left(\frac{-\hat{H}\Psi_u}{|z_u|^2}\right).$$

Оператор проектирования

$f(u)$ задана на вещественной оси и $f(u) \rightarrow 0$ при $|u| \rightarrow 0$. Тогда

$$\frac{1}{2}[f(u) + i\hat{H}(f(u))] = A^-(u)$$

является граничным значением функции $A^-(w)$, аналитичной в нижней полуплоскости.

Точно также

$$\frac{1}{2}[f(u) - i\hat{H}(f(u))] = A^+(u)$$

является граничным значением функции $A^+(w)$, аналитичной в верхней полуплоскости.

Операторы проектирования в нижнюю и верхнюю полуплоскости $\hat{P}^-$

$$\hat{P}^-(f) = \frac{1}{2}(1 + i\hat{H})(f) \qquad \hat{P}^+(f) = \frac{1}{2}(1 - i\hat{H})(f)$$

Таким образом, граничное значение $f(u)$ является суммой двух функций

$$A^-(u) = \frac{1}{2}[f(u) + i\hat{H}(f(u))]$$

$$A^+(u) = \frac{1}{2}[f(u) - i\hat{H}(f(u))]$$

Оператор проектирования в периодическом случае

$f(u)$ периодична с периодом 2π :

$$f(u + 2\pi n) = f(u)$$

Тогда преобразование Гильберта

$$\begin{aligned}\hat{H}(f(u)) &= P.V. \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(u') du'}{u' - u} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi} P.V. \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(u' + 2\pi n) du'}{u' + 2\pi n - u} = \\ &= \frac{1}{2\pi} P.V. \int_{-\pi}^{\pi} f(u') \cot\left(\frac{u' - u}{2}\right) du'\end{aligned}$$

Использовали

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{u' + 2\pi n - u} = \frac{1}{2} \cot\left(\frac{u' - u}{2}\right)$$

Оператор проектирования в периодическом случае

Сделаем Фурье-преобразование $\hat{H}(f(u))$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \hat{H}(f(u)) e^{-iku} du &= \frac{1}{(2\pi)^2} P.V. \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u') \cot\left(\frac{u' - u}{2}\right) e^{-iku} du du' \\&= \frac{1}{(2\pi)^2} P.V. \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u') \cot\left(\frac{u' - u}{2}\right) e^{-ik(u-u')} e^{-iku'} du' du = \\&= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u') e^{-iku'} du' [i \operatorname{sign}(k)] = i \operatorname{sign}(k) f_k\end{aligned}$$

Проектор

$$\hat{P}^- = \frac{1}{2}(1 + i\hat{H}) \quad \rightarrow \quad \frac{1}{2}(1 - \operatorname{sign}(k))$$

Волна Стокса

Рассмотрим уравнения для глубокой воды:

$$y_t x_u - x_t y_u = -\hat{H}\Psi_u, \quad (5)$$

$$\Psi_t = -\frac{\Psi_u^2 + \hat{H}\Psi_u^2}{2J} + \operatorname{Re}(i\Phi_u U) - gy \quad (6)$$

Вспомним асимптотику $Z(W)$:

$$Z(W) \rightarrow \underline{W} + \tilde{Z}.$$

Тогда

$$x(u, t) = u + \tilde{x}(u, t) \quad W \text{ не дает вклада в } y, \quad v = 0$$

Будем искать решений уравнений (5-6) в виде бегущей волны с постоянным профилем:

$$\tilde{x}(u, t) = \tilde{x}(u - ct), \quad y(u, t) = y(u - ct), \quad \Psi(u, t) = \Psi(u - ct). \quad (7)$$

Волна Стокса

Тогда из уравнения (5) (кинематическое условие) следует:

$$-y'(\tilde{x}' + 1) + c\tilde{x}'y' = -\hat{H}\Psi',$$

или

$$cy' = \hat{H}\Psi' \quad \Psi' = c\tilde{x}', \quad (8)$$

Уравнение Бернулли принимает вид:

$$-\tilde{x}' = \frac{y'^2 - \tilde{x}'^2}{2J} + \tilde{x}'\hat{H}\frac{y'}{J} - \frac{g}{c^2}y \quad (9)$$

Заметим, что аналитическая функция

$$\frac{1}{Z'} - 1 = \frac{1}{x' + iy'} - 1 = \frac{x'}{J} - 1 - i\frac{y'}{J}.$$

Т.е.

$$H\frac{y'}{J} = \frac{x'}{J} - 1$$

В результате получим уравнение для профиля волны Стокса:

$$y = \frac{c^2}{2g}\left(1 - \frac{1}{J}\right). \quad (10)$$

Предельная волна Стокса

Предельная волна Стокса получается при касании вещественной оси особой точки из верхней полуплоскости:

$$Z(w) \sim w^\alpha \quad (u^\alpha), \quad y - \frac{c^2}{2g} \sim u^\alpha \quad \alpha < 1$$

А для якобиана J имеем:

$$Z'(u) \sim u^{\alpha-1}, \quad \frac{1}{|Z'(u)|^2} \sim u^{2-2\alpha} \quad (11)$$

Таким образом

$$\alpha = 2 - 2\alpha \quad \underline{\alpha = \frac{2}{3}} \quad (12)$$

Асимптотика касания

$$Z(w) \sim i(W - ia)^{\frac{2}{3}} \quad (13)$$

Это следует из того, что при $W = 0$:

$$x(0) = 0$$

Пределная волна Стокса

Вычислим зависимости $y(u)$ и $x(u)$ вблизи точки ветвления. В начале вычислим кубический корень. Рассмотрим случай $u > 0$ и выберем "правильный" корень.

$$u^{\frac{1}{3}} \rightarrow u^{\frac{1}{3}} e^{i\frac{2\pi}{3}} \quad (14)$$

Таким образом

$$Z(u) \sim i u^{\frac{2}{3}} e^{i\frac{4\pi}{3}}$$

Т.е.

$$x(u) \sim u^{\frac{2}{3}} \sin\left(\frac{\pi}{3}\right), \quad y(u) \sim -u^{\frac{2}{3}} \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$y(x) = -\frac{1}{\sqrt{3}} x$$