Нелинейные волновые процессы

ИТФ им. Л.Д.Ландау РАН
НИУ ВШЭ

Предельная волна Стокса:

$$
\begin{aligned}
Z_t &= iUZ_u, \\
\Phi_t &= iU\Phi_u - \hat{P}\left(\frac{|\Phi_u|^2}{|Z_u|^2}\right) + ig(Z-u).
\end{aligned}
$$

Уравнение для профиля волны Стокса:

$$y = \frac{c^2}{2g}\left(1 - \frac{1}{|Z_u|^2}\right).$$

Асимптотика предельной волны:

$$Z(w) \sim i(W - i\,a)^{\frac{2}{3}}$$

Предельная волна Стокса:

$$y = \frac{c^2}{2g}(1 - \frac{1}{|Z_u|^2}).$$

Умножим его на x_u и y_u

$$y\,x_u = \frac{c^2}{2g}(x_u - \frac{x_u}{|Z_u|^2}) = \frac{c^2}{2g}Re(Z_u - \frac{1}{Z_u})$$

$$y\,y_u = \frac{c^2}{2g}(y_u - \frac{y_u}{|Z_u|^2}) = \frac{c^2}{2g}Im(Z_u + \frac{1}{Z_u}) = \frac{c^2}{2g}Im(Z_u + \frac{1}{Z_u}\ \ \underline{-2})$$

$$y\,y_u = -\frac{c^2}{2g}Re(iZ_u + \frac{i}{Z_u} - 2i)$$

$$\frac{1}{Z_u} = \frac{x_u - iy_u}{|Z_u|^2}$$

$$\hat{P}(y\,x_u) = \frac{c^2}{2g}(Z_u - \frac{1}{Z_u}) \qquad \hat{P}(y\,y_u) = -i\frac{c^2}{2g}Re(Z_u + \frac{1}{Z_u} - 2)$$

$$\hat{P}(y\,Z_u) = \frac{c^2}{g}(Z_u - 1)$$

Уравнения глубокой воды в конформных переменных

$$
\begin{aligned}
z_t &= iUz_u, \\
\Phi_t &= iU\Phi_u - B + ig(z - u).
\end{aligned}
\qquad (1)
$$

Здесь

$$U = 2\hat{P}(\frac{-\hat{H}\Psi_u}{|Z_u|^2}),$$

$$B = \hat{P}(\frac{|\Phi_u|^2}{|z_u|^2})$$

оператор проектирования $\hat{P}$

$$\hat{P}(f) = \frac{1}{2}(1 + i\hat{H})(f)$$

Комплексный потенциал Φ:

$$\Phi_u = \Psi_u + i\hat{H}\Psi_u$$

U - комплексная скорость переноса.

Уравнения глубокой воды в конформных переменных

$$\begin{aligned} Z_t &= iUZ_u, \\ \Phi_t &= iU\Phi_u - B + ig(Z-u). \end{aligned} \tag{2}$$

Поработаем над U

$$U = 2\hat{P}(\frac{-\hat{H}\Psi_u}{|Z_u|^2}),$$

Заметим, что

$$\Phi_u = \Psi_u + i\hat{H}\Psi_u \qquad \rightarrow \qquad -\hat{H}\Psi_u = \frac{i\Phi_u - i\bar{\Phi}_u}{2}$$

Тогда для U имеет место быть:

$$U = \hat{P}(\frac{i\Phi_u}{Z_u}\frac{1}{\bar{Z}_u} + \frac{-i\bar{\Phi}_u}{\bar{Z}_u}\frac{1}{Z_u})$$

Заметим еще, что

$$\Phi(w) = \tilde{\Phi}(Z).$$

Стало быть

$$\Phi_u = \tilde{\Phi}_Z Z_u$$

Уравнения глубокой воды в конформных переменных

Итак:

$$U = \hat{P}\left(\frac{i\Phi_u}{Z_u}\frac{1}{\bar{Z}_u} + \frac{-i\bar{\Phi}_u}{\bar{Z}_u}\frac{1}{Z_u}\right)$$

$$\Phi_u = \tilde{\Phi}_Z Z_u$$

Теперь очевидно, что вместо потенциала $\Phi(w)$ следует ввести новую переменную

$$V = i\tilde{\Phi}_Z.$$

Тогда

$$\frac{i\Phi_u}{Z_u} = V$$

и для U справедливо

$$U = \hat{P}\left(V\frac{1}{\bar{Z}_u} + \bar{V}\frac{1}{Z_u}\right)$$

Уравнения глубокой воды в конформных переменных

Еще одна естественная замена:

$$\frac{1}{Z_u} = R$$

Тогда для U имеет место

$$U = \hat{P}(V\bar{R} + \bar{V}R)$$

а для B

$$B = \hat{P}(V\bar{V})$$

Перейдем от Z и Φ к V и V:

$$\frac{1}{Z_u^2}\frac{\partial}{\partial u}\Big[Z_t = iUZ_u\Big] \quad \to \quad R_t = i[UR_u - U_u R]$$

$$\frac{1}{Z_u}\frac{\partial}{\partial u}\Big[\Phi_t = iU\Phi_u - B + ig(Z-u)\Big]\Big] \quad \to \quad V_t = i(UV_u - R\hat{B}_u) + g(R-1)$$

Итог

Уравнение Эйлера

$$\dot{\vec{v}} + (\vec{v}\nabla)\vec{v} = g - \frac{1}{\rho}\nabla P$$

Конформные уравнения

$$R_t = i[UR_u - U_u R]$$

$$V_t = i(UV_u - R\hat{B}_u) + g(R-1)$$

$$\frac{1}{Z_u} = R$$

$$\frac{i\Phi_u}{Z_u} = V$$