Нелинейные волновые процессы

ИТФ им. Л.Д.Ландау РАН
НИУ ВШЭ

Линейный осциллятор

Гамильтониан

$$H = \frac{1}{2}(\frac{p^2}{m} + kx^2)$$

и уравнения движения:

$$\dot{x} = \frac{\delta H}{\delta p} = \frac{p}{m}$$
$$\dot{p} = -\frac{\delta H}{\delta x} = -kx$$

(Вариация Гамильтониана здесь совпадает с производной)
Уравнение линейного осциллятора

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \qquad \boxed{\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}}$$

Цель - вместо x и p ввести новую <u>комплексную</u> переменную a

$$a = A(\sqrt{k}x + i\frac{p}{\sqrt{m}})$$

Линейный осциллятор

$x, p- > a$

$$a = A(\sqrt{k}x + i\frac{p}{\sqrt{m}})$$

Такая замена дает:

$$\dot{a} + i\omega a = 0 \qquad \boxed{\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}}$$

и

$$x, p, H(x,p) \to a, H(a, a^*)$$

Тогда

$$\dot{a} = A(\sqrt{k}\dot{x} + i\frac{\dot{p}}{\sqrt{m}}) \xrightarrow{\text{уравнения движения}} \dot{a} = A(\sqrt{k}\frac{\delta H}{\delta p} - \frac{i}{\sqrt{m}}\frac{\delta H}{\delta x})$$

Вычислим

$$\frac{\delta H}{\delta p} \quad \text{и} \quad \frac{\delta H}{\delta x}$$

в терминах комплексной переменной $\underline{a}$

Линейный осциллятор

Вычислим вариации Гамильтониана.

$$\frac{\delta H}{\delta p} = \frac{\delta H}{\delta a}\frac{\partial a}{\partial p} + \frac{\delta H}{\delta a^*}\frac{\partial a*}{\partial p}$$
$$\frac{\delta H}{\delta x} = \frac{\delta H}{\delta a}\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\delta H}{\delta a^*}\frac{\partial a*}{\partial x}$$

Поскольку

$$a = A(\sqrt{k}x + i\frac{p}{\sqrt{m}})$$

$$a^* = A(\sqrt{k}x - i\frac{p}{\sqrt{m}})$$

вычислим их производные по x и p:

$$\frac{\partial a}{\partial x} = A\sqrt{k}, \quad \frac{\partial a^*}{\partial x} = A\sqrt{k}$$

$$\frac{\partial a}{\partial p} = iA\frac{1}{\sqrt{m}}, \quad \frac{\partial a^*}{\partial p} = -iA\frac{1}{\sqrt{m}}$$

Линейный осциллятор

Тогда

$$\frac{\delta H}{\delta p} = iA\frac{\delta H}{\delta a}\frac{1}{\sqrt{m}} - iA\frac{\delta H}{\delta a^*}\frac{1}{\sqrt{m}}$$
$$\frac{\delta H}{\delta x} = A\frac{\delta H}{\delta a}\sqrt{k} + A\frac{\delta H}{\delta a^*}\sqrt{k}$$

$$\dot{a} = A(\sqrt{k}\frac{\delta H}{\delta p} - \frac{i}{\sqrt{m}}\frac{\delta H}{\delta x})$$

$$\dot{a} + i2A^2\sqrt{\frac{k}{m}}\frac{\delta H}{\delta a^*} = 0$$

Вычислим Гамильтониан:

$$x = \frac{1}{2A\sqrt{k}}(a + a^*) \qquad p = -i\frac{\sqrt{m}}{2A}(a - a^*)$$

$$H = \frac{1}{2A^2}aa^*$$

Линейный осциллятор

$$\dot{a} + i2A^2\sqrt{\frac{k}{m}}\frac{\delta H}{\delta a^*} = 0 \qquad \dot{a} + i\omega a = 0$$

$$H = \frac{1}{2A^2}aa^*$$

$$\boxed{2A^2 = \frac{1}{\omega}}$$

$$\dot{a} + i\frac{\delta H}{\delta a^*} = 0$$

$$H = \omega aa^*$$

Нелинейный осциллятор

Гамильтоновы переменные p и q
Гамильтониан

$$H = \frac{1}{2}(\frac{p^2}{m} + \alpha q^2 + \beta q^3 + \dots)$$

$$a = \frac{1}{2\omega}(\sqrt{\alpha}q + i\frac{p}{\sqrt{m}})$$

$$\boxed{\omega^2 = \frac{\alpha}{m}}$$

Гамильтониан как функция a и a^*

$$H = \omega a a^* + \alpha q^2 + \frac{U}{3}(a^3 + a^{*3}) + V(|a|^2 a^* + |a|^2 a) + \dots$$

и уравнение движения:

$$\dot{a} + i\frac{\delta H}{\delta a^*} = 0$$

$$\dot{a} + i\omega a = -iUa^{*2} - iVa^2 - 2iV|a|^2 + \dots$$

Набор осцилляторов

Линейка "осцилляторов":

$$H = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}\left(\frac{p_j^2}{m} + U_2(q_{j+1} - q_j)^2\right) =$$

$$\boxed{\omega^2 = \frac{U_2}{m}}$$

$$a_k = \frac{1}{2\omega_k}(\sqrt{k}x_k + i\frac{p_k}{\sqrt{m_k}})$$

$$\dot{a}_k + i\omega_k\frac{\delta H}{\delta a_k^*} = 0 \qquad \dot{a}_k + i\omega_k a_k = 0$$

$$H = \sum \omega_k |a_k|^2$$

Непрерывная среда

Непрерывная среда "осцилляторов":

$$H = \frac{1}{2}\int (p\frac{\hat{1}}{m}p + q\hat{k}q)dx = \frac{1}{2}\int ((\frac{1}{m})_k |p|^2 + k_k|q|^2)dk =$$

$$\boxed{\omega_k^2 = \frac{k_k}{m_k}}$$

$$a_k = \frac{1}{2\omega_k}(\sqrt{k}x_k + i\frac{p_k}{\sqrt{m_k}})$$

$$\dot{a}_k + i\omega_k\frac{\delta H}{\delta a_k^*} = 0 \qquad \dot{a}_k + i\omega_k a_k = 0$$

$$H = \int \omega_k |a_k|^2 dk$$