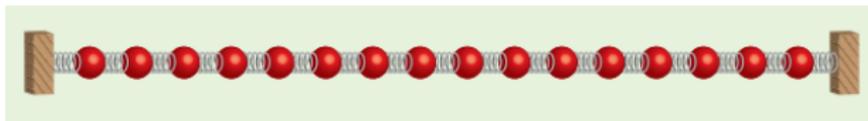


# Нелинейные волновые процессы

ИТФ им. Л.Д.Ландау РАН  
НИУ ВШЭ

# Ферми, Паста, Улам и Цингоу

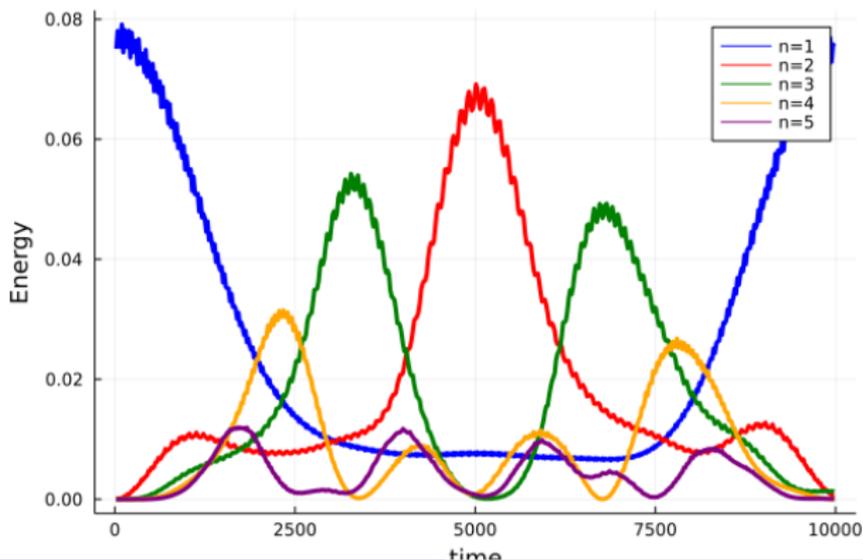
Они работали в Лос-Аламосе в начале 1950-х годов, у них был доступ к одному из самых ранних цифровых компьютеров. В Лос-Аламосе в шутку его называли MANIAC (MAtheMatical Numerical Integrator And Computer). На нем решались задачи (в основном связанные с секретными исследованиями ядерного оружия), Парадокс Ферми-Паста-Улама-Цингоу (FPUT) был одним из первых не секретных научных исследований, проведённых с помощью MANIAC, и он положил начало эпохе того, что иногда называют экспериментальной математикой или вычислительной физикой.



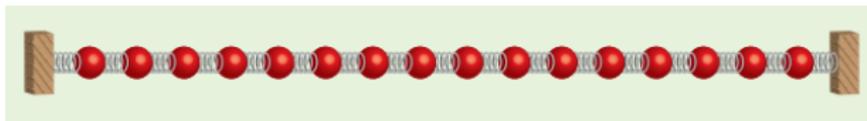
Ферми, Паста, Улам и Цингоу смоделировали поведение шариков (масс), соединённых друг с другом пружинами. Шарики движутся влево и вправо согласно закону движения Ньютона. Новизна и увлекательность исследования заключается в том, что упругая сила нелинейно зависела от степени сжатия или растяжения пружины.

# Квазипериодичность vs термализация

Они обнаружили, что поведение системы сильно отличается от того, что подсказывала им интуиция. Ферми считал, что после многих итераций система будет демонстрировать термализацию, при этом влияние начального условия исчезает, и система становится более или менее случайной. Вместо этого система демонстрировала очень сложное квазипериодическое поведение.



# Гамильтониан FPUT



Пусть существует  $N$  осцилляторов с положениями равновесия

$$x = jh, \quad j = 0, \dots, N - 1$$

где  $h = L/N$  Тогда положение  $j$ -го осциллятора как функция времени определяется смещением  $q_j$  от положения равновесия. Тогда Гамильтониан FPUT имеет следующий вид:

$$H = \sum_{j=0}^{N-1} \frac{p_j^2}{2m} + U = \sum_0^{N-1} m \frac{\dot{q}_j^2}{2} + U$$

$$p_j = m\dot{q}$$

# Потенциальная энергия $U$

Ангармоническая потенциальная энергия:

$$U = \sum_{j=0}^{N-1} \left[ \frac{U_2}{2} (q_{j+1} - q_j)^2 + \frac{U_3}{3} (q_{j+1} - q_j)^3 + \frac{U_4}{4} (q_{j+1} - q_j)^4 \right]$$

$U_2, U_3, U_4$  - коэффициенты второго, третьего и четвертого порядка, полученные из разложения Тейлора потенциала общего вида для парного взаимодействия:

$$U = U(q_{j+1} - q_j)$$

Предполагается, что  $U_2 > 0$ , т.е.  $U$  имеет минимум при  $q_{j+1} = q_j$ .  $U$  также не имеет линейной части,  $U'(0) = 0$ . И кроме того  $U(0) = 0$ .  $U_3$  и  $U_4$  отвечают за ангармоничность цепочки осцилляторов.

# Потенциальная энергия $U$ . $\alpha$ и $\beta$ модели

Граничные условия для цепочки:

- фиксированные

$$q_0 = q_N \equiv 0, \quad p_0 = p_N \equiv 0$$

- периодические

$$q_0 = q_N, \quad p_0 = p_N$$

Mary Tsingou

Исторически вместо  $U_3$  использовалось  $\alpha$ , а вместо  $U_4$  -  $\beta$

- $\alpha$  - модель

$$U_4 = 0, \quad U_3 = \alpha$$

- $\beta$  - модель

$$U_3 = 0, \quad U_4 = \beta$$

# Нелинейность

Для Гамильтониана

$$H = \sum_{j=0}^{N-1} \frac{p_j^2}{2m} + U = \sum_0^{N-1} m \frac{\dot{q}_j^2}{2} + U$$

и потенциальной энергии

$$U = \sum_{j=0}^{N-1} \left[ \frac{U_2}{2} (q_{j+1} - q_j)^2 + \frac{U_3}{3} (q_{j+1} - q_j)^3 + \frac{U_4}{4} (q_{j+1} - q_j)^4 \right]$$

уравнения движения имеют вид:

$$m\ddot{q}_j = U_2(q_{j+1} - 2q_j + q_{j-1}) + U_3 \left[ (q_{j+1} - q_j)^2 - (q_j - q_{j-1})^2 \right] + U_4 \left[ (q_{j+1} - q_j)^3 - (q_j - q_{j-1})^3 \right]$$

Если  $U_3 = 0$ ,  $U_4 = 0$ , имеем известную цепочку линейных осцилляторов:

$$m\ddot{q}_j = U_2(q_{j+1} - 2q_j + q_{j-1})$$

# Нелинейность

Решение цепочки линейных осцилляторов имеет вид:

$$q_j(t) = \sum_{n=0}^{N-1} q_n(t) \exp(i \frac{2\pi nj}{N}) \quad q_n(t) = Q_n \exp(i\omega_n t) \quad \omega_n^2 = 4 \sin^2 \frac{\pi n}{N}$$

здесь каждая  $n$ -ая Фурье-гармоника не меняет своей абсолютной величины. Меняется лишь фаза. Обмен энергией между Фурье-гармониками обеспечивает нелинейность.

Enrico Fermi, John Pasta, Stanislaw Ulam вместе с Mary Tsingou выполнили в 1953 моделирование нелинейной цепочки осцилляторов с нулевыми граничными условиями для двух случаев

$$U_4 = 0, U_3 \neq 0, \quad U_4 \neq 0, U_3 = 0$$

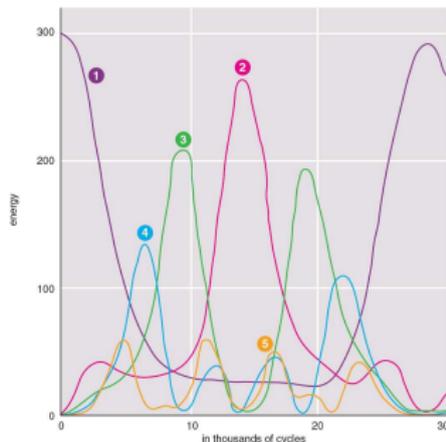
Они ожидали увидеть термализацию энергии из-за нелинейного взаимодействия.

Начальное условие - одна гармоника с  $n = 1$ , остальные все были равны нулю.

# Рекурсия FPUT

К большому удивлению термализация не происходила. Хотя в промежуточные времена энергия и перераспределялась, однако через какое-то время энергия опять возвращалась в первую гармонику. Это явление называется рекурсией FPUT. Объяснение этой рекурсии впервые было дано в работе

Zabusky and M.Kruskal, Interaction of "solitons" in a collisionless plasma and the recurrence of initial states, Phys. Rev. Lett. 15 (1965), 240-243



## Длинноволновой предел

Длинноволновой предел:  $q_j$  - медленная функция  $j$ . Тогда возможна непрерывная аппроксимация  $q(x)$  для  $q_j$ :

$$q_j = q(jh)$$

и для  $q_{j\pm 1}$  справедливо разложение Тейлора:

$$q_{j\pm 1} = q(x \pm h) = q(x) \pm hq'(x) + \frac{h^2}{2}q''(x) \pm \frac{h^3}{6}q'''(x) + \dots$$

Рассмотрим случай

$$U_4 = 0, U_3 \neq 0,$$

Тогда уравнение

$$m\ddot{q}_j = U_2(q_{j+1} - 2q_j + q_{j-1}) + U_3 \left[ (q_{j+1} - q_j)^2 - (q_j - q_{j-1})^2 \right] + U_4 \left[ (q_{j+1} - q_j)^3 - (q_j - q_{j-1})^3 \right]$$

принимает вид:

$$mq_{tt} - U_2h^2q_{xx} = U_2\frac{h^4}{12}q_{xxxx} + 2h^3U_3q_{xx}q_x + \mathcal{O}(U_2h^6q_{xxxxxx}) + \dots$$

# Длинноволновой предел

$$mq_{tt} - U_2 h^2 q_{xx} = U_2 \frac{h^4}{12} q_{xxxx} + 2h^3 U_3 q_{xx} q_x$$

Левая часть - это линейное волновое уравнение. Волны бегут со скоростью

$$c^2 = \frac{h^2 U_2}{m}$$

Введем безразмерные величины:

$$\tilde{t} = \frac{ct}{L}, \quad \tilde{x} = \frac{x}{L}, \quad \tilde{q} = \frac{q}{h}.$$

Здесь  $L$  - длина системы (цепочки осцилляторов). Или характерная длина, на которой существенно меняется  $q(x)$ .

## Длинноволновой предел. Безразмерное уравнение

После обезразмеривания наше уравнение принимает вид:

$$\tilde{q}_{\tilde{t}\tilde{t}} - \tilde{q}_{\tilde{x}\tilde{x}} = \frac{h^2}{12L^2} \tilde{q}_{\tilde{x}\tilde{x}\tilde{x}\tilde{x}} + \frac{2h^4 U_3}{Lmc^2} \tilde{q}_{\tilde{x}\tilde{x}} \tilde{q}_{\tilde{x}}$$

Отметим, что

$$\frac{h}{L} = \epsilon \quad - \quad \text{малый параметр}$$

Рассмотрим слабонелинейные решения этого уравнения. Иными словами - решения близкие к решению линейного уравнения (левая часть):

$$\tilde{q} \simeq f(\tilde{x} - \tilde{t}) + g(\tilde{x} + \tilde{t})$$

На таких решениях правая часть мала по сравнению с левой. Предположим, что  $f(\tilde{x} - \tilde{t})$  и  $g(\tilde{x} + \tilde{t})$  локализованы в пространстве. Тогда они "разбегутся" в разные стороны, и там где будет  $f(\tilde{x} - \tilde{t})$  можно пренебречь  $g(\tilde{x} + \tilde{t})$ .

Рассмотрим

$$f(\tilde{x} - \tilde{t}).$$

# Длинноволновой предел. Безразмерное уравнение

Рассмотрим

$$f(\tilde{x} - \tilde{t}).$$

С учетом правой части

$$f(\tilde{x} - \tilde{t}) \Rightarrow f(\tilde{x} - \tilde{t}, \tau).$$

$$\begin{aligned} \tau &= \epsilon \tilde{t} & \epsilon &= \frac{h^2}{24l^2} \ll 1 \\ y &= \tilde{x} - \tilde{t} \end{aligned}$$

Тогда

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{t}} = -\frac{\partial}{\partial y} + \epsilon \frac{\partial}{\partial \tau}$$

$$\tilde{q}_{\tau y} + \tilde{q}_{yyyy} + 6\tilde{q}_{yy}\tilde{q}_y = 0$$

$$q_y = u$$

$$u_\tau + u_{yyy} + 6u_y u = 0$$