

Нелинейные волновые процессы

ИТФ им. Л.Д.Ландау РАН
НИУ ВШЭ

Уравнения Максвелла для оптической среды

Уравнения Максвелла с изотропной, однородной среде
(в отсутствии зарядов и токов) :

$$\begin{aligned}\frac{\epsilon\mu}{c^2} \frac{\partial E}{\partial t} &= \nabla \times B \\ \frac{\partial B}{\partial t} &= -\nabla \times E \\ \nabla \cdot E &= 0 \\ \nabla \cdot B &= 0\end{aligned}$$

E — напряженность электрического поля

B — индукция магнитного поля

ϵ — диэлектрическая проницаемость

μ — магнитная проницаемость

В оптической среде

$$\sqrt{\epsilon\mu} = n \quad \text{— коэффициент преломления}$$

Нелинейное уравнение Шредингера

$$\begin{aligned}\frac{n^2}{c^2} \frac{\partial E}{\partial t} &= \nabla \times B \\ \frac{\partial B}{\partial t} &= -\nabla \times E \quad \nabla \cdot E = 0\end{aligned}$$

Коэффициент преломления зависит от длины волны и интенсивности

$$n = n_0 + n_2 |E|^2 \quad \text{Керровская нелинейность}$$

Рассмотрим одномерный случай, что типично для оптического волокна. Будем искать решение в виде слабо модулированной монохроматической волны (как сигналы оптических волокнах)

$$E = A(x, t) e^{i(kx - \omega t)} + \text{к.с.}$$

Тогда для A можно получить следующее уравнение:

$$i \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} + |A|^2 A = 0 \quad \text{НУШ}$$

Нелинейное уравнение Шредингера

Более распространенная запись $x \leftrightarrow t$

$$i \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + |A|^2 A = 0$$

Здесь

$A(x, t)$ — нормальная комплексная гамильтонова переменная.

Гамильтониан:

$$H = \int \left[|A_x|^2 - \frac{1}{2} |A|^4 \right] dx$$

НУШ как вариация Гамильтониана:

$$\dot{A} = i \frac{\delta H}{\delta A^*} \quad \left[\frac{\delta H}{\delta A^*} = -\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} - |A|^2 A \right]$$

Интегралы движения:

$$N = \int |A|^2 dx \quad \text{Число волн}$$
$$P = \frac{i}{2} \int (A A_x^* - A^* A_x) dx \quad \text{Импульс}$$

Нелинейное уравнение Шредингера

$$i\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + |A|^2 A = 0$$

Электрическое поле может быть восстановлено:

$$E = A(x, t)e^{i(kx - \omega t)} + \text{к.с.}$$

Простейшее решение (конденсат)

$$A = A_0 e^{i\Omega t}$$

$$\Omega = |A_0|^2$$

Электрическое поле:

$$E = |A_0| \cos(\Omega t + \phi_0)$$

Неустойчивость конденсата

$$A = e^{i\Omega t}(A_0 + \delta A(x, t))$$

$$A = e^{i\Omega t} \psi(x)$$
$$-\Omega \psi + \psi_{xx} + \psi^3 = 0$$

$$-\Omega \psi + \psi_{xx} + \psi^3 = 0 \mid \psi_x$$