

Нелинейные волновые процессы

ИТФ им. Л.Д.Ландау РАН
НИУ ВШЭ

Нелинейное уравнение Шредингера

$$i\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + |A|^2 A = 0$$

Здесь

$A(x, t)$ — нормальная комплексная гамильтонова переменная.

Гамильтониан:

$$H = \int \left[|A_x|^2 - \frac{1}{2} |A|^4 \right] dx$$

НУШ как вариация Гамильтониана:

$$\dot{A} = i \frac{\delta H}{\delta A^*} \quad \left[\frac{\delta H}{\delta A^*} = -\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} - |A|^2 A \right]$$

Интегралы движения:

$$N = \int |A|^2 dx \quad \text{Число волн}$$
$$P = \frac{i}{2} \int (AA_x^* - A^* A_x) dx \quad \text{Импульс}$$

Нелинейное уравнение Шредингера

$$i\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + |A|^2 A = 0$$

Электрическое поле может быть восстановлено:

$$E = A(x, t)e^{i(kx - \omega t)} + \text{к.с.}$$

Простейшее решение (конденсат)

$$A = A_0 e^{i\Omega t}$$

$$\Omega = |A_0|^2$$

Электрическое поле:

$$E = |A_0| \cos(kx - \omega t + \Omega t + \phi_0)$$

Ω — нелинейный сдвиг частоты

$$A = e^{i\Omega t} \Psi(x)$$
$$-\Omega \Psi + \Psi_{xx} + \Psi^3 = 0$$

$$-\Omega \Psi + \Psi_{xx} + \Psi^3 = 0 \quad | \Psi_x$$

Интегрируем

$$-\Omega \Psi^2 + \Psi_x^2 + \frac{1}{2} \Psi^4 = C^2 \quad \text{в точке, где } \Psi = 0 \quad \Psi_x^2 = C^2$$

Если $C = 0$, то $\Psi_x \rightarrow 0$, $\Psi \rightarrow 0$ на бесконечности.

Это - солитон

Электрическое поле:

$$E = \Psi(x) i(kx - \omega t + \Omega t) + \text{к.с.} = \Psi(x) \cos(kx - \omega t + \Omega t + \phi_0)$$

$$-\Omega\Psi^2 + \Psi_x^2 + \frac{1}{2}\Psi^4 = 0$$

$$\Psi_x = \sqrt{\Omega\Psi^2 - \frac{1}{2}\Psi^4} \quad \rightarrow \quad dx = \frac{d\Psi}{\sqrt{\Omega\Psi^2 - \frac{1}{2}\Psi^4}}$$

$$\Psi = \frac{\sqrt{2\Omega}}{\cosh(\sqrt{2\Omega}(x - x_0))}$$

Электрическое поле

$$E = \Psi(x)e^{i(kx - \omega t + \Omega t)} + \text{к.с} = \frac{\sqrt{2\Omega}}{\cosh(\sqrt{2\Omega}(x - x_0))} \cos(kx - \omega t + \Omega t + \phi_0)$$

Солитон НУШ и вариационный принцип

Солитон обеспечивает минимум гамильтониана при фиксированном числе волн:

$$F = H + \Omega N \rightarrow \min$$

$$\frac{\delta F}{\delta \Psi} = 0$$

$$H = \int \left[|\Psi_x|^2 - \frac{1}{2} \Psi^4 \right] dx$$

$$N = \int \Psi^2 dx \quad \rightarrow \quad \text{Число волн}$$

$$\frac{\delta F}{\delta \Psi} = 0$$

$$\Omega \Psi^2 - \Psi_x^2 - \frac{1}{2} \Psi^4 = 0$$

Солитон НУШ и импульс

Если рассмотреть ненулевой импульс (интеграл движения)

$$P = \frac{i}{2} \int (AA_x^* - A^*A_x) dx \quad \text{Импульс}$$

то для уравнения

$$i \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + |A|^2 A = 0$$

$$A = \frac{\sqrt{2\Omega}}{\cosh(\sqrt{2\Omega}(x - Vt))} e^{i(\tilde{k}x - \tilde{\omega}t)}$$

Здесь

$$V = 2\tilde{k}$$

$$\tilde{\omega} = \tilde{k} - \Omega$$

Электрическое поле может быть восстановлено:

$$E = \frac{\sqrt{2\Omega}}{\cosh(\sqrt{2\Omega}(x - Vt))} e^{i(kx - \omega t)} e^{i(\tilde{k}x - \tilde{\omega}t)} + \text{к.с.}$$

Солитон НУШ в периодическом случае

Если рассмотреть ненулевой импульс (интеграл движения)

$$-\Omega\Psi + \Psi_{xx} + \Psi^3 = 0 \quad | \quad \Psi_x$$

Интегрируем

$$-\Omega\Psi^2 + \Psi_x^2 + \frac{1}{2}\Psi^4 = C^2 \quad \text{в точке, где } \Psi = 0 \quad \Psi_x^2 = C^2$$

Если $C \neq 0$, то Ψ_x - периодическая функция.

Это - кноидальная волна

Кноидальная волна

$$-\Omega\Psi^2 + \Psi_x^2 + \frac{1}{2}\Psi^4 = C^2$$

$$\Psi_x = \sqrt{C^2 + \Omega\Psi^2 - \frac{1}{2}\Psi^4} \quad \rightarrow \quad dx = \frac{d\Psi}{\sqrt{C^2 + \Omega\Psi^2 - \frac{1}{2}\Psi^4}}$$

Это эллиптический интеграл первого рода:

$$\Psi = \alpha cn(\sqrt{\beta}x, m)$$

$$\alpha \lim_{m \rightarrow 1} cn(\sqrt{\beta}x, m) = \frac{\sqrt{2\Omega}}{\cosh(\sqrt{2\Omega}(x))}$$

$$i\dot{\Psi} + \frac{1}{2}\Psi_{xx} + |\Psi|^2\Psi = 0$$

Замена для удобства

$$\Psi = ue^{it}$$

$$i\dot{u} + \frac{1}{2}u_{xx} - u + |u|^2u = 0$$

Это уравнение имеет решение в виде "конденсата" $u = e^{i\phi}$

Разделим уравнение на действительную и мнимую части:

$$u = v + iw$$

тогда

$$\begin{aligned} \dot{v} - w + \frac{1}{2}w_{xx} + (v^2 + w^2)^2w &= 0 \\ -\dot{w} - v + \frac{1}{2}v_{xx} + (v^2 + w^2)^2v &= 0 \end{aligned}$$

Предположим, что v и w связаны простым линейным соотношением:

$$v = \eta w + \mu$$

и η и μ зависят только от времени. Рассмотрим только один случай:

$$\eta = \mu = -th(t)$$

Тогда

$$v = -th(t)(w + 1)$$

Эта подстановка в уравнения

$$\begin{aligned}\dot{v} - w + \frac{1}{2}w_{xx} + (v^2 + w^2)^2 w &= 0 \\ -\dot{w} - v + \frac{1}{2}v_{xx} + (v^2 + w^2)^2 v &= 0\end{aligned}$$

должна приводить к двум эквивалентным уравнениям на w

Бризер Ахмедиева

Исключая v_{xx} получаем уравнение первого порядка по t (уравнение Бернулли):

$$\dot{w} + w^2 th(t) + wwth(t) = 0$$

Его общее решение:

$$w = \frac{C}{ch(t) - C} \quad C - \text{некая функция } x$$

Подставив это w в исходные уравнения, получим два одинаковых уравнения:

$$C_{xx} + \frac{C_x^2}{ch(t) - C} - 2 \frac{1 - C^2 - Cch(t)}{ch(t) - C} = 0$$

Его решение:

$$C = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos(\sqrt{2}(x - x_0))$$

А для исходной комплексной функции u имеем:

$$u = \frac{-\sqrt{2}sh(t) + i \cos(\sqrt{2}(x - x_0))}{\sqrt{2}ch(t) - \cos(\sqrt{2}(x - x_0))}$$