

Нелинейные волновые процессы

ИТФ им. Л.Д.Ландау РАН
НИУ ВШЭ

Резонансы

$$i \frac{\partial A_n}{\partial t} - k_n^2 A_n + \sum A_{n_1}^* A_{n_2} A_{n_3} \delta_{n+n_1, n_2+n_3} = 0$$

$$\sum A_{n_1}^* A_{n_2} \delta_{k+k_1, k_2} + \sum A_{n_1} A_{n_2} \delta_{k, k_1+k_2} + \sum A_{n_1}^* A_{n_2}^* \delta_{k+k_1+k_2, 0}$$

Если нелинейности нет, волны не взаимодействуют:

$$A_n = A_0 e^{i\omega t} \quad \omega = k^2$$

Если уравнение нелинейное:

$$k + k_1 = k_2 + k_3 \quad \omega + \omega_1 = \omega_2 + \omega_3$$

$$k = k_1 + k_2 \quad \omega = \omega_1 + \omega_2$$

$$A_n(t) = A_0 e^{i\omega t}$$

$$\dot{A}_n = \sum A_{n_1}^* A_{n_2} A_{n_3} \delta_{n+n_1, n_2+n_3} e^{-i(\omega+\omega_1-\omega_2-\omega_3)t}$$

Канонические преобразования

Имеется гамильтонова система с Гамильтонианом H :

$$\dot{A} = i \frac{\delta H}{\delta A^*} \quad H(A, A^*)$$

Здесь

$A(x, t)$ — нормальная комплексная гамильтонова переменная.

Например - нелинейное уравнение Шредингера

$$i \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + |A|^2 A = 0$$

$$H = \int \left[|A_x|^2 - \frac{1}{2} |A|^4 \right] dx$$

Каноническое преобразование

$$\begin{array}{lll} A & \rightarrow & q \\ H(A, A^*) & \rightarrow & H(q, q^*) \\ \dot{A} = i \frac{\delta H}{\delta A^*} & \rightarrow & \dot{q} = i \frac{\delta H}{\delta q^*} \end{array}$$

Каноническое преобразование

Преобразование

$$A \rightarrow q$$

упрощает Гамильтониан (убирает "лишнее")

Как построить каноническое преобразование?

Рассмотрим вспомогательную гамильтонову систему $A(x, t)$ с гамильтонианом

$$\tilde{H}$$

$A(0)$ и $A(\tau)$ связаны каноническим преобразованием

$$A(0) \rightarrow A(\tau)$$

$$\tilde{H}(A(0)) \rightarrow \tilde{H}(A(\tau))$$

$$\dot{A} = i \left. \frac{\delta \tilde{H}}{\delta A^*} \right|_{t=0} \rightarrow \dot{A} = i \left. \frac{\delta \tilde{H}}{\delta A^*} \right|_{t=\tau}$$

Эти соотношения справедливы при всех τ .

Введем преобразование Фурье (рассмотрим периодические граничные условия)

$$A(x, t) = \sum A_n(t) e^{ik_n x}, \quad A_n(t) = \frac{1}{L} \int_0^L A(x, t) e^{-ik_n x}, \quad \text{здесь } k_n = \frac{2\pi n}{L}.$$

Каноническое преобразование

Запишем уравнение движения и Гамильтониан в Фурье-представлении:

$$H = \tilde{H}(A_n, A_n^*)$$

$$i\dot{A}_n + \frac{\partial \tilde{H}}{\partial A_n^*} = 0$$

Итак $A_n(0)$ и $A_n(\tau)$ связаны каноническим преобразованием. Разложим $A_n(\tau)$ в ряд Тейлора в окрестности $t = 0$:

$$A_n(\tau) = A_n(0) + \tau \dot{A}_n(0) + \frac{\tau^2}{2} \ddot{A}_n(0) + \dots$$

Here

$$\dot{A}_n(0) = -i \frac{\delta \tilde{H}}{\delta A_n^*} \quad \ddot{A}_n(0) = -i \frac{\partial}{\partial t} \frac{\delta \tilde{H}}{\delta A_n^*} \dots$$

Каноническое преобразование

Выбор вспомогательного Гамильтониана $\tilde{H}$ определяется:

- Уравнением (Гамильтонианом), к которому оно будет применено
- Целью преобразования

Пример - нелинейное уравнение Шредингера

$$i \frac{\partial A_n}{\partial t} - k_n^2 A_n + \sum A_{n_1}^* A_{n_2} A_{n_3} \delta_{n+n_1, n_2+n_3} = 0$$

$$H = - \sum k_n^2 A_n^* A_n + \frac{1}{2} \sum A_n^* A_{n_1}^* A_{n_2} A_{n_3} \delta_{n+n_1, n_2+n_3}$$

Мы рассматриваем волновые системы, т.е. в гамильтониане ОБЯЗАТЕЛЬНО присутствует слагаемое

$$H = \sum \omega_n A_n A_n^* + \dots \quad \omega_n = k_n^2$$

чему соответствует решение

$$A_n \simeq e^{-i\omega_n t}$$

Каноническое преобразование

$$A_n \simeq e^{-i\omega_n t}$$

Это решение линейного уравнения, а

$$\frac{1}{2} \sum A_n^* A_{n_1}^* A_{n_2} A_{n_3} \delta_{n+n_1, n_2+n_3} = \underline{H_{int}(A^n, A_n^*)}$$

является малой добавкой в Гамильтониан:

$$\sum \omega_n A_n A_n^* \gg H_{int}(A^n, A_n^*)$$

Вспомогательный Гамильтониан для НУШ

$$\begin{aligned}\tilde{H} = & \frac{i}{2} \sum_{n, n_1, n_2, n_3} B_{n_2 n_3}^{nn_1} q_n^* q_{n_1}^* q_{n_2} q_{n_3} \delta_{n+n_1, n_2+n_3} + \\ & + \frac{i}{3} \sum_{n, n_1, n_2, n_3, n_4, n_5} C_{n_3 n_4 n_5}^{nn_1 n_2} q_n^* q_{n_1}^* q_{n_2}^* q_{n_3} q_{n_4} q_{n_5} \delta_{n+n_1+n_2, n_3+n_4+n_5} + \dots\end{aligned}$$

Коэффициенты должны обеспечить вещественность вспомогательного Гамильтониана:

- 1 Перестановки нижних и верхних индексов не должны менять их значения

2

$$B_{n_2 n_3}^{nn_1} = B_{n_2 n_3}^{n_1 n} = B_{n_3 n_2}^{nn_1} = -B_{nn_1}^{n_2 n_3} \quad C_{n_3 n_4 n_5}^{nn_1 n_2} = \dots = -C_{nn_1 n_2}^{n_3 n_4 n_5}$$

3

$$B_{nn_1}^{nn_1} = 0 \quad C_{nn_1 n_2}^{nn_1 n_2} = 0$$

Вспомогательный Гамильтониан для НУШ

$$A_n(\tau) = q_n(0) + \tau \dot{q}_n(0) + \frac{\tau^2}{2} \ddot{q}_n(0) + \dots$$

Here

$$\dot{q}_n(0) = -i \frac{\delta \tilde{H}}{\delta q_n^*} \quad \ddot{q}_n(0) = -i \frac{\partial}{\partial t} \frac{\delta \tilde{H}}{\delta q_n^*} \dots$$

$A_n(\tau)$ старая переменная

$q_n(0)$ новая переменная.

$$\begin{aligned} A_n = q_n + \sum_{n_1, n_2, n_3} B_{n_2 n_3}^{nn_1} q_{n_1}^* q_{n_2} q_{n_3} \delta_{n+n_1, n_2+n_3} + \\ + \sum_{n_1, n_2, n_3, n_4+n_5} (\dots) q_{n_1}^* q_{n_2}^* q_{n_3} q_{n_4} q_{n_5} \delta_{n+n_1+n_2, n_3+n_4+n_5} + \dots \quad (1) \end{aligned}$$

Новый Гамильтониан для НУШ

После подстановки преобразования в Гамильтониан:

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2} \sum_n |q_n|^2 - \\ &- \frac{1}{2} \sum_{n_i \in R_4} T_{n_2 n_3}^{n n_1} q_n^* q_{n_1}^* q_{n_2} q_{n_3} - \\ &- \frac{1}{2} \sum_{n_i \in \bar{R}_4} T_{n_2 n_3}^{n n_1} q_n^* q_{n_1}^* q_{n_2} q_{n_3} + \dots \end{aligned} \quad (2)$$

$$R_4 \Leftarrow \begin{cases} k_n^2 + k_{n_1}^2 - k_{n_2}^2 - k_{n_3}^2 = 0 \\ n + n_1 - n_2 - n_3 = 0. \end{cases}$$

$$\bar{R}_4 \Leftarrow \begin{cases} k_n^2 + k_{n_1}^2 - k_{n_2}^2 - k_{n_3}^2 \neq 0 \\ n + n_1 - n_2 - n_3 = 0. \end{cases}$$