Нелинейные волновые процессы

ИТФ им. Л.Д.Ландау РАН
НИУ ВШЭ

НУШ

Здесь

$A(x,t)$ — нормальная комплексная гамильтонова переменная.

Нелинейное уравнение Шредингера

$$i\frac{\partial A}{\partial t}+\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}+|A|^2A=0$$

Гамильтониан:

$$H=\int\left[|A_x|^2-\frac{1}{2}|A|^4\right]dx$$

Каноническое преобразование

$$\begin{array}{ccc} A & \to & q \\ H(A,A^*) & \to & H(q,q^*) \\ \dot{A}=i\dfrac{\delta H}{\delta A^*} & \to & \dot{q}=i\dfrac{\delta H}{\delta q^*} \end{array}$$

$$A_n=q_n+\sum_{n_1,n_2,n_3}B^{nn_1}_{n_2n_3}q^*_{n_1}q_{n_2}q_{n_3}\delta_{n+n_1,n_2+n_3}+\dots$$

Вспомогательный Гамильтониан для НУШ

$$\tilde{H} = \frac{i}{2} \sum_{n,n_1,n_2,n_3} B^{nn_1}_{n_2 n_3} q^*_n q^*_{n_1} q_{n_2} q_{n_3} \delta_{n+n_1, n_2+n_3} +$$
$$+ \frac{i}{3} \sum_{n,n_1,n_2,n_3,n_4,n_5} C^{nn_1 n_2}_{n_3 n_4 n_5} q^*_n q^*_{n_1} q^*_{n_2} q_{n_3} q_{n_4} q_{n_5} \delta_{n+n_1+n_2, n_3+n_4+n_5} + \dots$$

Коэффициенты должны обеспечить вещественность вспомогательного Гамильтониана:

1. Перестановки нижних и верхних индексов не должны менять их значения
2. $$B^{nn_1}_{n_2 n_3} = -B^{n_2 n_3}_{nn_1} \qquad C^{nn_1 n_2}_{n_3 n_4 n_5} = -C^{n_3 n_4 n_5}_{nn_1 n_2}$$
3. $$B^{nn_1}_{nn_1} = 0 \qquad C^{nn_1 n_2}_{nn_1 n_2} = 0$$

Гамильтониан

После подстановки преобразования в Гамильтониан:

$$
\begin{aligned}
H &= \sum_n \omega_n |q_n|^2 - \\
&- \frac{1}{2} \sum T^{nn_1}_{n_2 n_3} q^*_n q^*_{n_1} q_{n_2} q_{n_3} \delta_{n+n_1, n_2+n_3} + \dots
\end{aligned}
$$

Здесь

$$
T^{nn_1}_{n_2 n_3} = 1 - \frac{1}{2}(\omega_n + \omega_{n_1} - \omega_{n_2} - \omega_{n_3}) B^{nn_1}_{n_2 n_3}
$$

$$
\omega_n = k_n^2
$$

$$
R_4 \Leftarrow \begin{cases} k_n^2 + k_{n_1}^2 - k_{n_2}^2 - k_{n_3}^2 = 0 \\ n + n_1 - n_2 - n_3 = 0. \end{cases}
$$

$$
\bar{R}_4 \Leftarrow \begin{cases} k_n^2 + k_{n_1}^2 - k_{n_2}^2 - k_{n_3}^2 \neq 0 \\ n + n_1 - n_2 - n_3 = 0. \end{cases}
$$

$T^{nn_1}_{n_2 n_3} = 1 - \frac{1}{2}(k_n^2 + k_{n_1}^2 - k_{n_2}^2 - k_{n_3}^2) B^{nn_1}_{n_2 n_3}$

$$\sum_{n,n_1,n_2,n_3} T^{nn_1}_{n_2 n_3} q_n^* q_{n_1}^* q_{n_2} q_{n_3} = \sum_{n_i \in R^4} T^{nn_1}_{n_2 n_3} q_n^* q_{n_1}^* q_{n_2} q_{n_3} + \cancel{\sum_{n_i \notin R^4} T^{nn_1}_{n_2 n_3} q_n^* q_{n_1}^* q_{n_2} q_{n_3}}$$

Лучший выбор для $B^{nn_1}_{n_2 n_3}$:

$$B^{nn_1}_{n_2 n_3} = \frac{2}{k_n^2 + k_{n_1}^2 - k_{n_2}^2 - k_{n_3}^2} \qquad \text{if } n_i \notin R^4,$$
$$B^{nn_1}_{n_2 n_3} = 0 \qquad \text{if } n_i \in R^4$$

R^4 имеет только тривиальные решения:

$$n = n_2, \quad n_1 = n_3 \qquad\qquad n = n_3, \quad n_1 = n_2$$

$$T^{nn_1}_{n_2 n_3} \quad \Rightarrow D_{nn_1} \quad = \begin{cases} 2 & \text{if } n \neq n_1 \leq 0, \\ 1 & \text{if } n = n_1. \end{cases}$$

Новый Гамильтониан

$$H = \sum_n k_n^2 |q_n|^2 - \frac{1}{2} \sum_{n,n_1} D_{nn_1} |q_n|^2 |q_{n_1}|^2 + \dots$$

и уравнение для q:

$$i\dot{q}_n - k_n^2 q_n + \Big[\sum_{n_1} D_{nn_1} |q_{n_1}|^2 \Big] q_n = 0$$

Здесь

$$\sum_{n_1} D_{nn_1} |q_{n_1}|^2 = \lambda_n$$

НЕ зависит t и определяется ТОЛЬКО начальными условиями.

Решение этого уравнения - тривиально:

$$q_n(t) = q_n(0) e^{i(\lambda_n - k_n^2)t}$$

λ_n - нелинейный сдвиг частоты