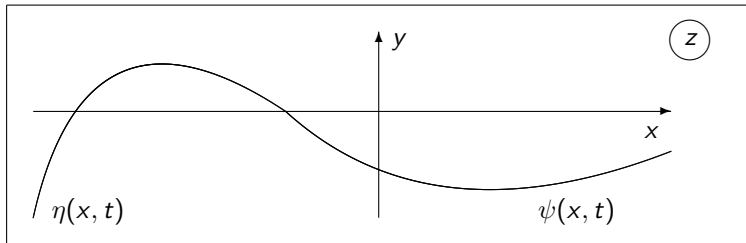


Нелинейные волновые процессы

ИТФ им. Л.Д.Ландау РАН
НИУ ВШЭ

Волны на поверхности глубокой воды



$$H = \frac{1}{2} \int dx \int_{-\infty}^{\eta} |\nabla \phi|^2 dy + \frac{g}{2} \int \eta^2 dx$$

$\eta(x, t)$ и $\psi(x, t) = \phi(x, \eta(x, t), t)$ – Гамильтоновы переменные

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\delta H}{\delta \eta}$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\delta H}{\delta \psi}$$

$$H = \frac{1}{2} \int g \eta^2 + \psi \hat{k} \psi dx - \frac{1}{2} \int \{ (\hat{k} \psi)^2 - (\psi_x)^2 \} \eta dx + \\ + \frac{1}{2} \int \{ \psi_{xx} \eta^2 \hat{k} \psi + \psi \hat{k} (\eta \hat{k} (\eta \hat{k} \psi)) \} dx + \dots$$

Преобразованное Фурье:

$$f_k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int f(x) e^{-ikx} dx, \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int f_k e^{+ikx} dk.$$

$$H = \frac{1}{2} \int g |\eta_k|^2 + |k| |\psi_k|^2 dk - \frac{1}{4\pi} \int L_{k_1 k_2} \psi_{k_1} \psi_{k_2} \eta_{k_3} \delta_{k_1+k_2+k_3} dk_1 dk_2 dk_3 + \\ + \frac{1}{16\pi^2} \int M_{k_1 k_2 k_3 k_4} \psi_{k_1} \psi_{k_2} \eta_{k_3} \eta_{k_4} \delta_{k_1+k_2+k_3+k_4} dk_1 dk_2 dk_3 dk_4 x + \dots$$

$$L_{kk_1} = (\vec{k} \vec{k}_1) + |k| |k_1|$$

$$M_{k_1 k_2}^{k_3 k_4} = |k_1 k_2|^{\frac{3}{4}} |k_3 k_4|^{\frac{1}{4}} (|k_1+k_3| + |k_1+k_4| + |k_2+k_3| + |k_2+k_4| - 2|k_1| - 2|k_2|).$$

Нормальные переменные

$$\eta_k = \sqrt{\frac{\omega_k}{2g}}(a_k + a_{-k}^*) \quad \psi_k = -i\sqrt{\frac{g}{2\omega_k}}(a_k - a_{-k}^*) \quad \omega_k = \sqrt{gk}$$

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_2(a_k, a_k^*) + \mathcal{H}_3(a_k, a_k^*) + \mathcal{H}_4(a_k, a_k^*) + \dots$$

$$H_2 = \int \omega_k a_k a_k^* dk,$$

$$H_3 = \int V_{k_1 k_2}^k \{a_k^* a_{k_1} a_{k_2} + a_k a_{k_1}^* a_{k_2}^*\} \delta_{k-k_1-k_2} dk dk_1 dk_2 \\ + \frac{1}{3} \int U_{kk_1 k_2} \{a_k a_{k_1} a_{k_2} + a_k^* a_{k_1}^* a_{k_2}^*\} \delta_{k+k_1+k_2} dk dk_1 dk_2$$

$$V_{k_1 k_2}^k = \frac{g^{\frac{1}{4}}}{8\sqrt{\pi}} \left(\left(\frac{k}{k_1 k_2} \right)^{\frac{1}{4}} L_{k_1 k_2} - \left(\frac{k_2}{k k_1} \right)^{\frac{1}{4}} L_{-k k_1} - \left(\frac{k_1}{k k_2} \right)^{\frac{1}{4}} L_{-k k_2} \right)$$

$$U_{kk_1 k_2} = \frac{g^{\frac{1}{4}}}{8\sqrt{\pi}} \left(\left(\frac{k}{k_1 k_2} \right)^{\frac{1}{4}} L_{k_1 k_2} + \left(\frac{k_2}{k k_1} \right)^{\frac{1}{4}} L_{k k_1} + \left(\frac{k_1}{k k_2} \right)^{\frac{1}{4}} L_{k k_2} \right)$$

$$\frac{\partial a_k}{\partial t} = -i \frac{\delta H}{\delta a_k^*}$$

Нормальные переменные

Четвертый порядок:

$$\begin{aligned} H_4 = & \frac{1}{2} \int W_{k_1 k_2}^{k_3 k_4} a_{k_1}^* a_{k_2}^* a_{k_3} a_{k_4} \delta_{k_1+k_2-k_3-k_4} dk_1 dk_2 dk_3 dk_4 + \\ & + \frac{1}{3} \int G_{k_1 k_2 k_3}^{k_4} (a_{k_1}^* a_{k_2}^* a_{k_3}^* a_{k_4} + a_{k_1} a_{k_2} a_{k_3} a_{k_4}^* \delta_{k_1+k_2+k_3-k_4} dk_1 dk_2 dk_3 dk_4 + \\ & + \frac{1}{12} \int R_{k_1 k_2 k_3 k_4} (a_{k_1}^* a_{k_2}^* a_{k_3}^* a_{k_4}^* + a_{k_1} a_{k_2} a_{k_3} a_{k_4}) \delta_{k_1+k_2+k_3+k_4} dk_1 dk_2 dk_3 dk_4 \end{aligned}$$

Here $W_{k_1 k_2}^{k_3 k_4}$, $G_{k_1 k_2 k_3}^{k_4}$ and $R_{k_1 k_2 k_3 k_4}$ are equal to:

$$\begin{aligned} W_{k_1 k_2}^{k_3 k_4} &= \frac{-1}{32\pi} \left[M_{-k_3-k_4}^{k_1 k_2} + M_{k_1 k_2}^{-k_3-k_4} - M_{k_2-k_4}^{k_1-k_3} - M_{k_1-k_4}^{k_2-k_3} - M_{k_2-k_3}^{k_1-k_4} - M_{k_1-k_3}^{k_2-k_4} \right] \\ G_{k_1 k_2 k_3}^{k_4} &= \frac{-1}{32\pi} \left[M_{k_1 k_2}^{k_3-k_4} + M_{k_1 k_3}^{k_2-k_4} + M_{k_2 k_3}^{k_1-k_4} - M_{k_3-k_4}^{k_1 k_2} - M_{k_2-k_4}^{k_1 k_3} - M_{k_1-k_4}^{k_2 k_3} \right] \\ R_{k_1 k_2 k_3 k_4} &= \frac{-1}{32\pi} \left[M_{k_1 k_2}^{k_3 k_4} + M_{k_1 k_3}^{k_2 k_4} + M_{k_1 k_4}^{k_2 k_3} + M_{k_2 k_3}^{k_1 k_4} + M_{k_2 k_4}^{k_1 k_3} + M_{k_3 k_4}^{k_1 k_2} \right]. \end{aligned}$$

Условия симметрии.

Каноническое преобразование

$a_k \rightarrow b_k$ Каноническое преобразование.
 $a_k \rightarrow b_k$ Сокращает нерезонансные члены.
 $3 \Leftrightarrow 0 \quad 2 \Leftrightarrow 1 \quad 4 \Leftrightarrow 0 \quad 3 \Leftrightarrow 1$

$$\begin{aligned} k + k_1 &= k_2, \\ \omega_k + \omega_{k_1} &= \omega_{k_2}, \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} k + k_1 &= k_2 + k_3, \\ \omega_k + \omega_{k_1} &= \omega_{k_2} + \omega_{k_3}, \end{aligned}$$

Вспомогательный Гамильтониан $\tilde{H}$

Итак

$a_k(0)$ и $a_k(\tau)$ связаны каноническим преобразованием. Разложим $a_k(\tau)$ в ряд Тейлора в окрестности $t = 0$:

$$a_k(\tau) = a_k(0) + \tau \dot{a}_k(0) + \frac{\tau^2}{2} \ddot{a}_k(0) + \dots$$

Здесь

$$\dot{a}_k(0) = -i \frac{\delta \tilde{H}}{\delta a_k^*} \quad \ddot{a}_k(0) = -i \frac{\partial}{\partial t} \frac{\delta \tilde{H}}{\delta a_k^*} \dots$$

Каноническое преобразование

$$\begin{aligned}
 a_k = & b_k + \int \Gamma_{k_1 k_2}^k b_{k_1} b_{k_2} \delta_{k-k_1-k_2} dk_1 dk_2 - 2 \int \Gamma_{kk_1}^{k_2} b_{k_1}^* b_{k_2} \delta_{k+k_1-k_2} dk_1 dk_2 + \\
 & + \int \Gamma_{kk_1 k_2} b_{k_1}^* b_{k_2}^* \delta_{k+k_1+k_2} dk_1 dk_2 + \int B_{kk_1}^{k_2 k_3} b_{k_1}^* b_{k_2} b_{k_3} \delta_{k+k_1-k_2-k_3} dk_1 dk_2 dk_3 \\
 & + \int C_{kk_1 k_2}^{k_3} b_{k_1}^* b_{k_2}^* b_{k_3} \delta_{k+k_1+k_2-k_3} dk_1 dk_2 dk_3 + \int S_{kk_1 k_2 k_3} b_{k_1}^* b_{k_2}^* b_{k_3}^* \delta_{k+k_1+k_2+k_3} dk_1 dk_2 dk_3
 \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
 B_{kk_1}^{k_2 k_3} = & \Gamma_{k_1-k_2}^{k_1} \Gamma_{kk_3-k}^{k_3} + \Gamma_{k_3 k_1-k_3}^{k_1} \Gamma_{kk_2-k}^{k_2} - \Gamma_{k_2 k-k_2}^k \Gamma_{k_1 k_3-k_1}^{k_3} - \Gamma_{k_3 k_1-k_3}^{k_1} \Gamma_{k_1 k_2-k_1}^{k_2} \\
 & - \Gamma_{kk_1}^{k+k_1} \Gamma_{k_2 k_3}^{k_2+k_3} + \Gamma_{-k-k_1 k k_1} \Gamma_{-k_2-k_3 k_2 k_3} + \tilde{B}_{k_2 k_3}^{kk_1},
 \end{aligned}$$

$$\Gamma_{k_1 k_2}^k = -\frac{V_{k_1 k_2}^k}{\omega_k - \omega_{k_1} - \omega_{k_2}}, \quad \Gamma_{kk_1 k_2} = -\frac{U_{kk_1 k_2}}{\omega_k + \omega_{k_1} + \omega_{k_2}}$$

$\tilde{B}_{k_2 k_3}^{kk_1}$ произвольная функция, удовлетворяющая условиям симметрии:

$$\tilde{B}_{k_2 k_3}^{kk_1} = \tilde{B}_{k_2 k_3}^{k_1 k} = \tilde{B}_{k_3 k_2}^{kk_1} = -(\tilde{B}_{kk_1}^{k_2 k_3})^*.$$

Коэффициенты $C_{kk_1 k_2}^{k_3}$ и $S_{kk_1 k_2 k_3}$ обеспечивают сокращение Нерезонансных четырех-волновых взаимодействий.

Уравнение Захарова

После канонического преобразования Гамильтониан имеет вид:

$$H = \int \omega_k b_k b_k^* dk + \frac{1}{2} \int (T_{kk_1}^{k_2 k_3} - (\omega_k + \omega_{k_1} - \omega_{k_2} - \omega_{k_3}) \tilde{B}_{kk_1}^{k_2 k_3}) b_k^* b_{k_1}^* b_{k_2} b_{k_3} \delta_{k+k_1-k_2-k_3} dk \quad (3)$$

Если $\tilde{B}_{kk_1}^{k_2 k_3} = 0$, это уравнение называется уравнение Захарова. Here $T_{kk_1, k_2 k_3}$ satisfies the symmetry conditions:

$$T_{kk_1}^{k_2 k_3} = T_{k_1 k}^{k_2 k_3} = T_{kk_1}^{k_3 k_2} = T_{k_2 k_3}^{kk_1}$$

и имеет вид:

$$T_{kk_1}^{k_2 k_3} = W_{k_1 k}^{k_2 k_3} + \text{составные четырех волновые взаимодействия} \quad (4)$$

$$T_{kk_1}^{k_2 k_3}$$

$$\begin{aligned}
 T_{kk_1}^{k_2 k_3} = & W_{k_1 k}^{k_2 k_3} - \\
 & - V_{k_2 k - k_2}^k V_{k_1 k_3 - k_1}^{k_3} \left[\frac{1}{\omega_{k_2} + \omega_{k - k_2} - \omega_k} + \frac{1}{\omega_{k_1} + \omega_{k_3 - k_1} - \omega_{k_3}} \right] - \\
 & - V_{k_2 k_1 - k_2}^{k_1} V_{k k_3 - k}^{k_3} \left[\frac{1}{\omega_{k_2} + \omega_{k_1 - k_2} - \omega_{k_1}} + \frac{1}{\omega_k + \omega_{k_3 - k} - \omega_{k_3}} \right] - \\
 & - V_{k_3 k - k_3}^k V_{k_1 k_2 - k_1}^{k_2} \left[\frac{1}{\omega_{k_3} + \omega_{k - k_3} - \omega_k} + \frac{1}{\omega_{k_1} + \omega_{k_2 - k_1} - \omega_{k_2}} \right] - \\
 & - V_{k_3 k_1 - k_3}^{k_1} V_{k k_2 - k}^{k_2} \left[\frac{1}{\omega_{k_3} + \omega_{k_1 - k_3} - \omega_{k_1}} + \frac{1}{\omega_k + \omega_{k_2 - k} - \omega_{k_2}} \right] - \\
 & - V_{k k_1}^{k+k_1} V_{k_2 k_3}^{k_2+k_3} \left[\frac{1}{\omega_{k+k_1} - \omega_k - \omega_{k_1}} + \frac{1}{\omega_{k_2+k_3} - \omega_{k_2} - \omega_{k_3}} \right] - \\
 & - U_{-k-k_1 k k_1} U_{-k_2-k_3 k_2 k_3} \left[\frac{1}{\omega_{k+k_1} + \omega_k + \omega_{k_1}} + \frac{1}{\omega_{k_2+k_3} + \omega_{k_2} + \omega_{k_3}} \right]
 \end{aligned}$$

Одномерные волны

$$H = \int \omega_k b_k b_k^* dk + \\ + \frac{1}{2} \int (T_{kk_1}^{k_2 k_3} - (\omega_k + \omega_{k_1} - \omega_{k_2} - \omega_{k_3}) \tilde{B}_{kk_1}^{k_2 k_3}) b_k^* b_{k_1}^* b_{k_2} b_{k_3} \delta_{k+k_1-k_2-k_3} dk dk_1 dk_2 dk_3$$

On the resonant manifold

$$\begin{aligned} k + k_1 &= k_2 + k_3, \\ k &= a(1 + \zeta)^2 \\ k_1 &= a(1 + \zeta)^2 \zeta^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \omega_k + \omega_{k_1} &= \omega_{k_2} + \omega_{k_3}, \\ k_2 &= -a\zeta^2 \\ k_3 &= a(1 + \zeta + \zeta^2)^2 \\ T_{kk_1}^{k_2 k_3} &= 0 \end{aligned}$$

здесь $0 < \zeta < 1$ и $a > 0$.

На тривиальном резонансе

$$k_2 = k_1, \quad k_3 = k, \quad \text{or} \quad k_2 = k, \quad k_3 = k_1,$$

$$T_{kk_1}^{kk_1} = \frac{|k||k_1|}{2\pi} \min(|k|, |k_1|)$$

Одномерные волны

Более того, $T_{kk_1}^{k_2 k_3} \equiv 0$ если произведение $kk_1 k_2 k_3 \leq 0$.

$T_{kk_1}^{k_2 k_3}$ имеет простой вид:

$$T_{k_2 k_3}^{kk_1} = \theta(kk_1 k_2 k_3) \frac{(kk_1 k_2 k_3)^{\frac{1}{2}}}{4\pi} \left[\left(\frac{\omega \omega_1}{\omega_2 \omega_3} \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{\omega_2 \omega_3}{\omega \omega_1} \right)^{\frac{1}{2}} \right] \min(k, k_1, k_2, k_3)$$

$\min(k, k_1, k_2, k_3)$ это минимум из четырех k : (k, k_1, k_2, k_3) .

Здесь, $\theta(x)$

$$\theta(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x \leq 0, \\ 1 & \text{if } x > 0. \end{cases}$$

Суперкомпактное уравнение

$T_{kk_1}^{k_2 k_3} \equiv 0$ если произведение $kk_1 k_2 k_3 \leq 0$ означает, что если в начальный момент все k были положительны, то волны с $k < 0$ не появятся:

$$i \frac{\partial b_k}{\partial t} = \omega_k b_k + \int T_{kk_1}^{k_2 k_3} b_{k_1}^* b_{k_2} b_{k_3} \delta_{k+k_1-k_2-k_3} dk_1 dk_2 dk_3$$

Гамильтониан

$$H = \int \omega_k b_k b_k^* dk + \frac{1}{2} \int (T_{kk_1}^{k_2 k_3} - (\omega_k + \omega_{k_1} - \omega_{k_2} - \omega_{k_3}) \tilde{B}_{kk_1}^{k_2 k_3}) b_k^* b_{k_1}^* b_{k_2} b_{k_3} \delta_{k+k_1-k_2-k_3} dk dk_1 dk_2 dk_3$$

Можно еще упростить, выбирая $\tilde{B}_{kk_1}^{k_2 k_3}$

$$\tilde{B}_{kk_1}^{k_2 k_3} = \frac{T_{kk_1}^{k_2 k_3} - \tilde{T}_{kk_1}^{k_2 k_3}}{\omega_k + \omega_{k_1} - \omega_{k_2} - \omega_{k_3}}. \quad (6)$$

$$\tilde{T}_{kk_1}^{k_2 k_3} = T_{kk_1}^{k_2 k_3}$$

на резонансе.

Суперкомпактное уравнение

$$T_{k_2 k_3}^{kk_1} = \theta(k k_1 k_2 k_3) \frac{(k k_1 k_2 k_3)^{\frac{1}{2}}}{4\pi} \left[\left(\frac{\omega \omega_1}{\omega_2 \omega_3} \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{\omega_2 \omega_3}{\omega \omega_1} \right)^{\frac{1}{2}} \right] \min(k, k_1, k_2, k_3)$$

$$T_{kk_1}^{kk_1} = \frac{|k||k_1|}{2\pi} \min(|k|, |k_1|)$$

$$\tilde{T}_{k_2 k_3}^{kk_1} = \theta(k k_1 k_2 k_3) \frac{(k k_1 k_2 k_3)^{\frac{1}{2}}}{2\pi} \min(k, k_1, k_2, k_3)$$

$$b_k \rightarrow \tilde{c}_k$$

Гамильтониан

$$H = \int \omega_k \tilde{c}_k \tilde{c}_k^* dk + \\ + \frac{1}{4\pi} \int \tilde{T}_{kk_1}^{k_2 k_3} \tilde{c}_k^* \tilde{c}_{k_1}^* \tilde{c}_{k_2} \tilde{c}_{k_3} \delta_{k+k_1-k_2-k_3} dk dk_1 dk_2 dk_3 + \dots$$

$$c_k = k^{\frac{1}{2}} \theta_k \tilde{c}_k. \quad (7)$$

Суперкомпактное уравнение

Гамильтониан

$$H = \int \frac{\omega_k}{k} c_k c_k^* dk + \\ + \frac{1}{4\pi} \int c_k^* c_{k_1}^* c_{k_2} c_{k_3} \min(k, k_1, k_2, k_3) \delta_{k+k_1-k_2-k_3} dk dk_1 dk_2 dk_3 + \dots$$

$$D_{kk_1}^{k_2 k_3} = \begin{cases} \min(k, k_1, k_2, k_3) & k k_1 k_2 k_3 > 0, \\ 0 & k k_1 k_2 k_3 < 0. \end{cases}$$

$$D_{kk_1}^{k_2 k_3} = \frac{1}{2}(k+k_1+k_2+k_3) - \frac{1}{4}(|k+k_1|+|k_2+k_3|+|k-k_2|+|k-k_3|+|k_1-k_2|+|k_1-k_3|)$$

Используем соотношения между k и x пространствами,

$$k c_k^* \Leftrightarrow i \frac{\partial}{\partial x} c^*(x), \quad k c_k \Leftrightarrow -i \frac{\partial}{\partial x} c(x),$$

$$|k - k_2| c_k^* c_{k_2} \Leftrightarrow \hat{k}(|c(x)|^2), \quad (k + k_1) c_k c_{k_1} \Leftrightarrow -i \frac{\partial}{\partial x} (c(x)^2),$$

новый Гамильтониан может быть записан компактно в x -пространстве:

$$H = \int c^* \hat{V} c dx + \frac{1}{4} \int \left[i \left(c^2 \frac{\partial}{\partial x} c^{*2} - c^{*2} \frac{\partial}{\partial x} c^2 \right) - |c|^2 \hat{k} (|c|^2) \right] dx$$

Суперкомпактное уравнение

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \partial_x^+ \frac{\delta H}{\delta c^*} = 0.$$

$$\partial_x^+ \Leftrightarrow ik\theta_k$$

$$\frac{\partial c}{\partial t} + i\hat{\omega}c - i\partial_x^+ \left(|c|^2 \frac{\partial c}{\partial x} \right) = \partial_x^+ (\mathcal{U}c). \quad (8)$$

$$\mathcal{U} = \hat{k}|c|^2, \quad (9)$$

Имеется два члена в уравнении:

- нелинейный волновой член: $i\hat{\omega}c - i\partial_x^+ \left(|c|^2 \frac{\partial c}{\partial x} \right)$
- переносной член: $\partial_x^+ (\mathcal{U}c)$.