Нелинейные волновые процессы

ИТФ им. Л.Д.Ландау РАН
НИУ ВШЭ

Уравнения глубокой воды

$$\begin{aligned}
\phi_{xx} + \phi_{zz} &= 0 \qquad\qquad (\phi_z \to 0, z \to -\infty), \\
\eta_t + \eta_x \phi_x &= \phi_z \Big|_{z=\eta} \\
\phi_t + \frac{1}{2}(\phi_x^2 + \phi_z^2) + g\eta &= 0 \Big|_{z=\eta};
\end{aligned}$$

здесь $\eta(x,t)$ - профиль поверхности, $\phi(x,z,t)$ - потенциал скорости потока.

$$H = \frac{1}{2}\int \Big[[g\eta^2 + \psi\hat{k}\psi] + [\psi_x^2 - (\hat{k}\psi)^2]\eta + [\psi_{xx}\eta^2\hat{k}\psi + \psi\hat{k}(\eta\hat{k}(\eta\hat{k}\psi))] \Big]\, dx$$

$$\eta(x,t) \qquad \psi(x,t) = \phi(x,z,t)\Big|_{z=\eta} \qquad \text{гамильтоновы переменные}$$

Каноническое преобразование

$$\eta_k = \sqrt{\frac{\omega_k}{2g}}(a_k + a^*_{-k}) \qquad \psi_k = -i\sqrt{\frac{g}{2\omega_k}}(a_k - a^*_{-k})$$

Каноническое преобразование $a_k \Rightarrow b_k$ удаляет все нерезонансные члены в Гамильтониане

Гамильтониан после преобразования:

$$H = \int \omega_k b_k b^*_k dk \quad + \quad \frac{1}{2}\int T^{kk_1}_{k_2k_3} b^*_k b^*_{k_1} b_{k_2} b_{k_3} \delta_{k+k_1-k_2-k_3} dk dk_1 dk_2 dk_3 + \ldots$$

$$i\dot{b}_k = \omega_k b_k + \int T^{k_2k_3}_{kk_1} b^*_{k_1} b_{k_2} b_{k_3} \delta_{k+k_1-k_2-k_3} dk_1 dk_2 dk_3.$$

Это важно!

$$\mathrm{T}^{kk_1}_{k_2k_3} = 0 \qquad \text{если } kk_1k_2k_3 < 0.$$

Расщепление уравнения движения

Специфическая структура $T_{k_2 k_3}^{k k_1}$ позволяет эффективно разделить комплексную функцию b на две аналитических функции:

$$b(x,t) = b^+(x,t) + b^-(x,t), \qquad b_k = b_k^+ + b_k^-,$$

$$b^+(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty b_k^+ e^{ikx} dk, \;\; b^-(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 b_k^- e^{ikx} dk$$

$$\begin{aligned} & i\dot{b}_k^+ + i\dot{b}_k^- = \omega_k b_k^+ + \omega_k b_k^- + \\ & + \int \left[b_{k_1}^{+*} b_{k_2}^+ b_{k_3}^+ + 2 b_{k_1}^{-*} b_{k_2}^+ b_{k_3}^- + b_{k_1}^{-*} b_{k_2}^- b_{k_3}^- + 2 b_{k_1}^{+*} b_{k_2}^+ b_{k_3}^- \right] \times \\ & \times T_{kk_1}^{k_2 k_3} \delta_{k+k_1-k_2-k_3} dk_1 dk_2 dk_3 + \\ & \cancel{+ \int \left[b_{k_1}^{-*} b_{k_2}^+ b_{k_3}^+ + b_{k_1}^{+*} b_{k_2}^- b_{k_3}^- \right] T_{kk_1}^{k_2 k_3} \delta_{k+k_1-k_2-k_3} dk_1 dk_2 dk_3} \end{aligned}$$

$$k_1 < 0, \quad k_2 > 0, \quad k_3 > 0$$
$$k = -k_1 + k_2 + k_3 > 0$$

$$kk_1 k_2 k_3 < 0 \;\; \Rightarrow \;\; T_{kk_1}^{k_2 k_3} \equiv 0$$

Два гамильтоновых уравнения

$$
\begin{aligned}
i\dot{b}_k^+ = \omega_k b_k^+ \quad &+ \quad \int \left[b_{k_1}^{+^*} b_{k_2}^+ b_{k_3}^+ + 2(b_{k_1}^{-^*} b_{k_2}^-)\, b_{k_3}^+ \right] \times \\
&\times \mathrm{T}_{k_2 k_3}^{k k_1} \delta(k + k_1 - k_2 - k_3) dk_1 dk_2 dk_3, \\
i\dot{b}_k^- = \omega_k b_k^- \quad &+ \quad \int \left[b_{k_1}^{-^*} b_{k_2}^- b_{k_3}^- + 2(b_{k_1}^{+^*} b_{k_2}^+)\, b_{k_3}^- \right] \times \\
&\times \mathrm{T}_{k_2 k_3}^{k k_1} \delta(k + k_1 - k_2 - k_3) dk_1 dk_2 dk_3.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
H \quad = \quad & \int \omega_k \left[|b_k^+|^2 + |b_k^-|^2 \right] dk + \\
+ \quad & \frac{1}{2} \int \left[b_k^{+^*} b_{k_1}^{+^*} b_{k_2}^+ b_{k_3}^+ + 4 b_k^{+^*} b_{k_1}^{-^*} b_{k_2}^+ b_{k_3}^- + b_k^{-^*} b_{k_1}^{-^*} b_{k_2}^- b_{k_3}^- \right] \times \\
& \times \mathrm{T}_{k_2 k_3}^{k k_1} \delta(k + k_1 - k_2 - k_3) dk_1 dk_2 dk_3.
\end{aligned}
$$

$$
i \frac{\partial b_k^+}{\partial t} = \frac{\delta H}{\delta b_k^{+^*}}, \qquad i \frac{\partial b_k^-}{\partial t} = \frac{\delta H}{\delta b_k^{-^*}},
$$

Сохранение числа волн

"Число волн" N^+ движущихся вправо - $\int |b^+|^2 dk$

$$\frac{\partial}{\partial t}\int |b^+|^2 dk = \int \left[b^+ \dot{b}_k^{+^*} + \dot{b}^+ b_k^{+^*}\right] dk = i\int \left[b_k^{+^*}\omega_k b_k^+ - b_k^+ \omega_k b_k^{+^*}\right] dk +$$

$$+i\int \left[b_k^{+^*} b_{k_1}^{+^*} b_{k_2}^+ b_{k_3}^+ - b_k^+ b_{k_1}^+ b_{k_2}^{+^*} b_{k_3}^{+^*}\right] T_{kk_1}^{k_2k_3}\delta_{k+k_1-k_2-k_3} dk dk_1 dk_2 dk_3 +$$

$$+2i\int \left[b_k^{+^*} b_{k_1}^{-^*} b_{k_2}^+ b_{k_3}^- - b_k^+ b_{k_1}^- b_{k_2}^{+^*} b_{k_3}^{-^*}\right] T_{kk_1}^{k_2k_3}\delta_{k+k_1-k_2-k_3} dk dk_1 dk_2 dk_3 \equiv 0$$

условия симметрии

$$T_{kk_1}^{k_2k_3} = T_{k_2k_3}^{k_1k} = T_{kk_1}^{k_2k_3} = T_{kk_1}^{k_3k_2}.$$

N^+ - интеграл движения, также как и N^-.

$$N = N^+ + N^-$$

Импульс

$$M = \int_{-\infty}^{\infty} k\left[|b_k^+|^2 + |b_k^-|^2\right] dk$$

также сохраняеся.

Две встречных волны

Две почти монохроматических волны

$$
\begin{aligned}
b^{+}(x,t) &= B^{+}(x,t)\mathrm{e}^{i(k^{+}x-\omega_{k^{+}}t)} \\
b^{-}(x,t) &= B^{-}(x,t)\mathrm{e}^{i(k^{-}x-\omega_{k^{-}}t)},
\end{aligned}
$$

или

$$
\begin{aligned}
b_k^{+} &= B^{+}(k-k^{+})\mathrm{e}^{i(k^{+}x-\omega_{k^{+}}t)}, \quad |k-k^{+}| << |k^{+}| \\
b_k^{-} &= B^{-}(k-k^{-})\mathrm{e}^{i(k^{-}x-\omega_{k^{-}}t)}. \quad |k-k^{-}| << |k^{-}|. \qquad (1)
\end{aligned}
$$

Тогда можно считать $T_{kk_1}^{k_2k_3}$ константами

$$
T_{k^{+}k^{+}}^{k^{+}k^{+}} = a^{+}, \quad T_{k^{-}k^{-}}^{k^{-}k^{-}} = a^{-} \quad T_{k^{+}k^{-}}^{k^{+}k^{-}} = \underline{-a_{-}^{+}}
$$

$$
T_{kk_1}^{kk_1} = \frac{1}{2\pi}kk_1 \min(|k|,|k_1|)
$$

Два НУШа

$$i(\dot{B}^{+} + v_g^{+} B^{+\prime}) = \frac{\omega_k{}^{+}}{8{k^{+}}^{2}} B^{+\prime\prime} + \left[a^{+}|B^{+}|^{2} - 2a_{-}^{+}|B^{-}|^{2}\right] B^{+}$$

$$i(\dot{B}^{-} + v_g^{-} B^{-\prime}) = \frac{\omega_k{}^{-}}{8{k^{-}}^{2}} B^{-\prime\prime} + \left[a^{-}|B^{-}|^{2} - 2a_{-}^{+}|B^{+}|^{2}\right] B^{-}$$

Здесь

$$v_g^{+} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{k^{+}}}, \qquad v_g^{-} = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{|k^{-}|}}.$$

Простейшее решение - два конденсата:

$$B^{+} \Rightarrow B^{+} \mathrm{e}^{-i\omega^{+} t}, \qquad B^{-} \Rightarrow B^{-} \mathrm{e}^{-i\omega^{-} t}$$

$$\omega^{+} = \omega_{k^{+}} + a^{+}|B^{+}|^{2} - 2a_{-}^{+}|B^{-}|^{2} \qquad \omega^{-} = \omega_{k^{-}} + a^{-}|B^{-}|^{2} - 2a_{-}^{+}|B^{+}|^{2}.$$

Резюме $\quad kk_1k_2k_3 < 0 \quad \Rightarrow \quad T_{kk_1}^{k_2k_3} \equiv 0$

Было

$$i\dot{b}_k = \omega_k b_k + \int T_{kk_1}^{k_2k_3} b_{k_1}^* b_{k_2} b_{k_3} \delta_{k+k_1-k_2-k_3} dk_1 dk_2 dk_3.$$

$$N = \int |b_k|^2 dk \quad \text{интеграл движения}$$

Стало

$$\begin{aligned} i\dot{b}_k^+ = \omega_k b_k^+ \quad &+ \quad \int \left[b_{k_1}^{+^*} b_{k_2}^+ b_{k_3}^+ + 2(b_{k_1}^{-^*} b_{k_2}^-)\, b_{k_3}^+ \right] \times \\ &\times \mathrm{T}_{k_2k_3}^{kk_1} \delta(k + k_1 - k_2 - k_3) dk_1 dk_2 dk_3, \\ i\dot{b}_k^- = \omega_k b_k^- \quad &+ \quad \int \left[b_{k_1}^{-^*} b_{k_2}^- b_{k_3}^- + 2(b_{k_1}^{+^*} b_{k_2}^+)\, b_{k_3}^- \right] \times \\ &\times \mathrm{T}_{k_2k_3}^{kk_1} \delta(k + k_1 - k_2 - k_3) dk_1 dk_2 dk_3. \end{aligned}$$

$$N^+ = \int |b_k^+|^2 dk \qquad N^- = \int |b_k^-|^2 dk \quad \text{интегралы движения.}$$

$$N = N^+ + N^-$$

Два НУШа для слабомодулированных волн

$$c^+ = C^+(x,t)e^{ik_+x - i\omega_+ t}, \qquad c^- = C^-(x,t)e^{ik_-x - i\omega_- t}$$

Два уравнения на огибающие

$$\frac{\partial C^+}{\partial t} + v_g^+ C_x^+ + i\frac{\omega_+}{8k_+^2} C_{xx}^+ + i\left[k_+^2|C^+|^2 - 2k_+k|C^-|^2\right]C^+ = 0$$
$$\frac{\partial C^-}{\partial t} + v_g^- C_x^- + i\frac{\omega_-}{8k_-^2} C_{xx}^- + i\left[k_-^2|C^-|^2 - 2k|k_-||C^+|^2\right]C^- = 0$$

$$k_+ > 0, \qquad k_- < 0, \qquad \omega_k = \sqrt{g|k|}$$
$$v_g^+ = \left.\frac{\partial \omega_k}{\partial k}\right|_{k=k_+} > 0, \quad v_g^- = \left.\frac{\partial \omega_k}{\partial k}\right|_{k=k_-} < 0$$

???

$$
\begin{aligned}
H \;&=\; \int \omega_k \left[|b_k^+|^2 + |b_k^-|^2\right] dk + \\
&+\; \frac{1}{2}\int \left[b_k^{+^*} b_{k_1}^{+^*} b_{k_2}^{+} b_{k_3}^{+} + 4 b_k^{+^*} b_{k_1}^{-^*} b_{k_2}^{+} b_{k_3}^{-} + b_k^{-^*} b_{k_1}^{-^*} b_{k_2}^{-} b_{k_3}^{-} \right] \times \\
&\times \mathrm{T}_{k_2 k_3}^{k k_1} \delta(k + k_1 - k_2 - k_3) dk_1 dk_2 dk_3 .
\end{aligned}
$$

$$
T_{kk_1}^{kk_1} = \frac{kk_1}{2\pi}\min(|k|,|k_1|) \qquad \Rightarrow \qquad \frac{|k||k_1|}{2\pi}\min(|k|,|k_1|)
$$

$$
T_{kk_1}^{k_2 k_3} = \frac{|kk_1 k_2 k_3|^{\frac{1}{2}}}{2\pi}\min(|k|,|k_1|,k_2|,k_3|)
$$

???

1D уравнение Захарова

$$\begin{aligned}
\frac{\partial c^+}{\partial t} + i\hat{\omega}c^+ &= \partial_x^+\Big[i(|c^+|^2 - |c^-|^2)c_x^+ + c^+k(|c^+|^2 - |c^-|^2) - \\
&\quad -ic^+c^-{c_x^-}^* - {c^-}^*\hat{k}(c^+c^-)\Big] \\
\frac{\partial c^-}{\partial t} + i\hat{\omega}c^- &= \partial_x^-\Big[i(|c^-|^2 - |c^+|^2)c_x^- - c^-k(|c^-|^2 - |c^+|^2) - \\
&\quad -ic^-c^+{c_x^+}^* + {c^+}^*\hat{k}(c^+c^-)\Big]
\end{aligned}$$

$$H = \frac{1}{2}\int\Big[[g\eta^2 + \psi\hat{k}\psi] + [\psi_x^2 - (\hat{k}\psi)^2]\eta + [\psi_{xx}\eta^2\hat{k}\psi + \psi\hat{k}(\eta\hat{k}(\eta\hat{k}\psi))]\Big]\,dx$$

Уравнение для волн, бегущих в одну сторону

Пусть $c^- = 0$. Тогда

Суперкомпактное уравнение

$$\frac{\partial c^+}{\partial t} + i\hat{\omega} c^+ - i\partial_x^+ \left(|c^+|^2 \frac{\partial c^+}{\partial x} \right) = \partial_x^+ (\mathcal{U} c^+) \qquad \mathcal{U} = \hat{k}|c^+|^2.$$

x space

$$
\begin{aligned}
H = & \int c^{+^*} \hat{V} c^+ dx + \frac{i}{4} \int c^{+^{*2}} \frac{\partial}{\partial x} [c^{+^2}] dx - \frac{1}{2} \int |c^+|^2 \hat{k} |c^+|^2 dx + \\
& + \int c^{-^*} \hat{V} c^- dx + \frac{i}{4} \int c^{-^{*2}} \frac{\partial}{\partial x} [c^{-^2}] dx - \frac{1}{2} \int |c^-|^2 \hat{k} |c^-|^2 dx + \\
& + \int \left[c^+ c^- \hat{k} (c^{+^*} c^{-^*}) + |c^-|^2 \hat{k} |c^+|^2 + i c^{+^*} c^- \frac{\partial}{\partial x} (c^+ c^{-^*}) \right] dx
\end{aligned}
$$