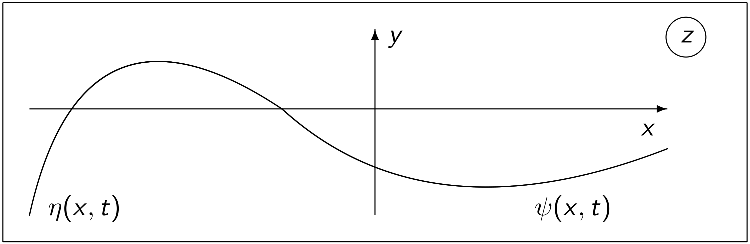
Нелинейные волновые процессы

ИТФ им. Л.Д.Ландау РАН
НИУ ВШЭ

Волны на поверхности глубокой воды



$$
\begin{aligned}
H &= \frac{1}{2}\int g\eta^2 + \psi\hat{k}\psi\, dx - \frac{1}{2}\int\{(\hat{k}\psi)^2 - (\psi_x)^2\}\eta\, dx + \\
&+ \frac{1}{2}\int\{\psi_{xx}\eta^2\hat{k}\psi + \psi\hat{k}(\eta\hat{k}(\eta\hat{k}\psi))\}dx + \ldots
\end{aligned}
$$

Нормальные переменные a_k

$$\eta_k = \sqrt{\frac{k}{2\omega_k}}(a_k + a^*_{-k}) \qquad \psi_k = -i\sqrt{\frac{\omega_k}{2k}}(a_k - a^*_{-k}) \qquad \omega_k = \sqrt{gk}$$

$$a_k = \sqrt{\frac{\omega_k}{2k}}\eta_k + i\sqrt{\frac{k}{2\omega_k}}\psi_k$$

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_2 + \mathcal{H}_3 + \mathcal{H}_4 + \dots$$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_2 &= \int \omega_k |a_k|^2 \\ \mathcal{H}_3 &= \mathcal{H}_3(a_k, a_k^*) - \text{трехволновые} \\ \mathcal{H}_4 &= \mathcal{H}_4(a_k, a_k^*) - \text{четырехволновые} \end{aligned}$$

Для a_k имеем уравнение $\dfrac{\partial a_k}{\partial t} + i\dfrac{\delta H}{\delta a_k^*} = 0$

Каноническое преобразование $a_k \to b_k$

$a_k \quad \to b_k$ - каноническое преобразование
$a_k \quad \to b_k$ - удаляет 3-х и 4-х волновые нерезонансные члены

Уравнение Захарова:

$$\mathcal{H} = \int \omega_k b_k b_k^* dk + \frac{1}{2}\int \mathrm{T}_{kk_1}^{k_2 k_3} b_k^* b_{k_1}^* b_{k_2} b_{k_3} \delta_{k+k_1-k_2-k_3} dk dk_1 dk_2 dk_3$$

$$i\dot{b}_k = \omega_k b_k + \int \mathrm{T}_{kk_1}^{k_2 k_3} b_{k_1}^* b_{k_2} b_{k_3} \delta_{k+k_1-k_2-k_3} dk_1 dk_2 dk_3$$

Канонические переменные b_k

$$b_k = c_k - i \int \widetilde{\mathrm{B}}^{\mathbf{k_2 k_3}}_{\mathbf{kk_1}} c^*_{k_1} c_{k_2} c_{k_3} \delta_{k+k_1-k_2-k_3} dk_1 dk_2 dk_3 + \dots$$

$$\widetilde{\mathrm{B}}^{kk_1}_{k_2 k_3} = \frac{\mathrm{T}^{k_2 k_3}_{kk_1} - \tilde{T}^{k_2 k_3}_{kk_1}}{\omega_k + \omega_{k_1} - \omega_{k_2} - \omega_{k_3}}$$

$$\tilde{T}^{k_2 k_3}_{kk_1} = \frac{(kk_1 k_2 k_3)^{\frac{1}{2}}}{2\pi} \min(k, k_1, k_2, k_3) \theta(kk_1 k_2 k_3).$$

or

$$\begin{aligned} \tilde{T}^{k_2 k_3}_{kk_1} &= \theta(kk_1 k_2 k_3) \frac{(kk_1 k_2 k_3)^{\frac{1}{2}}}{8\pi} (k + k_1 + k_2 + k_3 - \\ &- |k - k_2| - |k - k_3| - |k_1 - k_2| - |k_1 - k_3|) \end{aligned}$$

Уравнение движения

$$\mathcal{H} = \int c^* \hat{V} c \, dx + \frac{1}{2} \int |c|^2 \left[\frac{i}{2}(cc'^* - c^* c') - \hat{K}|c|^2 \right] dx.$$

$$V_k = \frac{\omega_k}{k} \qquad c \simeq e^{i(kx - \omega t)}, k > 0, \omega > 0$$

$$\dot{c} + \hat{P}^+ \frac{\partial}{\partial x} \frac{\delta H}{\delta c^*} = 0 \qquad \hat{P}^+_k = \theta(k)$$

Скобка Гарднера-Захарова-Фаддеева:

$$\frac{\partial}{\partial x}$$

Суперкомпактое и полностью нелинейные уравнения

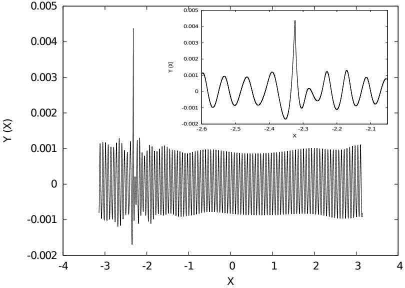


Figure: Образование волны-убийцы при t=802 (полностью нелинейные уравнения)

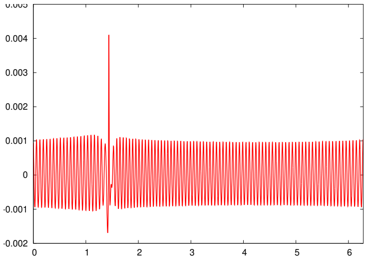


Figure: Образование волны-убийцы при t=874 (суперкомпактое уравнение)

Фурье преобразование по x и t

$$\frac{\partial c}{\partial t} + i\hat{\omega}c - i\hat{P}^{+}\frac{\partial}{\partial x}\left(|c|^2\frac{\partial c}{\partial x}\right) = \hat{P}^{+}\frac{\partial}{\partial x}(\mathcal{U}c)$$

$$\mathcal{U} = \hat{K}|c|^2 \qquad T_{kk_1}^{k_2k_3} = \min(k, k_1, k_2, k_3)\theta(kk_1k_2k_3)$$

$$i\dot{c}_k = \sqrt{gk}c_k + \frac{k\theta_k}{2\pi}\int T_{k_2k_3}^{kk_1} c_{k_1}^{*} c_{k_2} c_{k_3} \delta_{k+k_1-k_2-k_3} dk_1 dk_2 dk_3$$

После Фурье преобразования по времени и умножения на $(\omega + \sqrt{gk})$ получаем:

$$(\omega^2 - gk)c_{k\omega} = \frac{(\omega+\omega_k)k\theta_k}{(2\pi)^2}\int T_{k_2k_3}^{kk_1} c_{k_1\omega_1}^{*} c_{k_2\omega_2} c_{k_3\omega_3} \times$$
$$\times \quad \delta_{k+k_1-k_2-k_3}\delta_{\omega+\omega_1-\omega_2-\omega_3} dk_1 dk_2 dk_3 d\omega_1 d\omega_2 d\omega_3$$

Пространственное уравнение (Spatial Equation)

Для волн малой амплитуды в R.H.S. gk можно заменить на ω^2, так что:

$$
\begin{aligned}
(\omega^2 - gk) c_{k\omega} = \frac{2\omega^3 \theta_\omega}{g^2} \frac{1}{(2\pi)^2} \int T^{\omega^2 \omega_1^2}_{\omega_2^2 \omega_3^2} c^*_{k_1 \omega_1} c_{k_2 \omega_2} c_{k_3 \omega_3} \times \\
\times \quad \delta_{k+k_1-k_2-k_3} \delta_{\omega+\omega_1-\omega_2-\omega_3} dk_1 dk_2 dk_3 d\omega_1 d\omega_2 d\omega_3
\end{aligned}
$$

Применяя обратное преобразование Фурье над этим уравнением по x и t, получаем пространственное уравнение для волн на воде:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x} c_\omega - i \frac{\omega^2}{g} c_\omega = \\
= \quad -\frac{2\omega^3 \theta_\omega}{g^3} \frac{i}{2\pi} \int T^{\omega^2 \omega_1^2}_{\omega_2^2 \omega_3^2} c^*_{\omega_1} c_{\omega_2} c_{\omega_3} \delta_{\omega+\omega_1-\omega_2-\omega_3} d\omega_1 d\omega_2 d\omega_3
\end{aligned}
$$

Это задача Коши по x.

Spatial Equation

Это уравнение можно записать в Гамильтоновой форме.:

$$\frac{\partial}{\partial x} c_\omega = i\omega^3 \theta_\omega \frac{\delta H}{\delta c_\omega^*}$$

со скобкой третьего порядка:

$$i\omega^3 \theta_\omega \leftrightarrow \frac{\partial^3}{\partial t^3}$$

и Гамильтонианом:

$$H = \frac{1}{g} \int \frac{1}{\omega} |c_\omega|^2 d\omega -$$
$$- \quad \frac{1}{2\pi} \frac{1}{g^3} \int T_{\omega_2^2 \omega_3^2}^{\omega^2 \omega_1^2} c_\omega^* c_{\omega_1}^* c_{\omega_2} c_{\omega_3} \delta_{\omega+\omega_1-\omega_2-\omega_3} d\omega d\omega_1 d\omega_2 d\omega_3$$

Spatial Equation

Явный вид $T^{\omega^2\omega_1^2}_{\omega_2^2\omega_3^2}$:

$$T^{\omega_k^2\omega_{k_1}^2}_{\omega_{k_2}^2\omega_{k_3}^2} = \frac{1}{4}(\omega_k^2 + \omega_{k_1}^2 + \omega_{k_2}^2 + \omega_{k_3}^2 -$$
$$-|\omega_k^2 - \omega_{k_2}^2| - |\omega_k^2 - \omega_{k_3}^2| - |\omega_{k_1}^2 - \omega_{k_2}^2| - |\omega_{k_1}^2 - \omega_{k_3}^2|)$$

$T^{\omega^2\omega_1^2}_{\omega_2^2\omega_3^2}$ позволяет записать Гамитьтониян 4-го порядка H_{int} в компактной форме:

$$H_{int} = \frac{1}{2g^3}\int |c|^2(\ddot{c}^* c + \ddot{c}c^*)dt + \frac{i}{g^3}\int |c|^2\hat{\omega}(\dot{c}c^* - c\dot{c}^*)dt$$

Компактное пространственное уравнение

Имеем уравнение движения:

$$\frac{\partial}{\partial x} c = \hat{P}^{-} \frac{\partial^3}{\partial t^3} \frac{\delta H}{\delta c^*}$$

или в t-пространстве:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} c + \frac{i}{g} \frac{\partial^2}{\partial t^2} c = \\ = \quad & \frac{\hat{P}^{-}}{2g^3} \frac{\partial^3}{\partial t^3} \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(|c|^2 c \right) + 2|c|^2 \ddot{c} + \ddot{c}^* c^2 \right] + \\ + \quad & \frac{i\hat{P}^{-}}{g^3} \frac{\partial^3}{\partial t^3} \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(c\hat{\omega} |c|^2 \right) + \dot{c}\hat{\omega}|c|^2 + c\hat{\omega} \left(\dot{c} c^* - c \dot{c}^* \right) \right] \end{aligned}$$

Восстановление η

$$\begin{aligned}\eta(x,t) &= \frac{\hat{\omega}^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}}[c(x,t)+c^*(x,t)]- \\ &- \frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{1}{4g}\left[\hat{\omega}^{-\frac{1}{2}}[c(x,t)-c^*(x,t)]\right]^2+\dots\end{aligned}$$

Приближение "почти" монохроматической волны

Let $c(x,t)$ - is almost monochromatic wave with the frequency ω_0:

$$\begin{aligned} c(x,t) &= C(x, t - \frac{x}{v_g}) e^{i(k_0 x - \omega_0 t)}, \\ \omega_0 &= \sqrt{g k_0}, \quad v_g = \frac{\omega_0}{2k_0}. \end{aligned}$$

where $C(x,t)$ is a slowly varying function. One can derive the following equation:

$$\frac{\partial}{\partial x} C + \frac{i}{g} \frac{\partial^2}{\partial t^2} C + \frac{2i\omega_0^5}{g^3} |C|^2 C = \frac{4\omega_0^4}{g^3} \left[4|C|^2 \dot{C} + \frac{3}{2} C^2 \dot{C}^* + iC\hat{\omega}|C|^2 \right]$$

L. Shemer - 2001, F.Fedele - 2011

Заключение

$$H = \frac{1}{g}\int \frac{1}{\omega}|c_\omega|^2 d\omega + \frac{1}{2g^3}\int |c|^2\left[\ddot{c}^* c + \ddot{c}c^* + 2i\hat{\omega}(\dot{c}c^* - c\dot{c}^*)\right] dt$$

$$\frac{\partial}{\partial x}c = \hat{P}^- \frac{\partial^3}{\partial t^3}\frac{\delta H}{\delta c^*}$$

$$\mathcal{H} = \int c^* \hat{V} c \, dx + \frac{1}{2}\int |c|^2 \left[\frac{i}{2}(cc'^* - c^* c') - \hat{K}|c|^2\right] dx.$$

$$V_k = \frac{\omega_k}{k} \qquad\qquad c \simeq \mathrm{e}^{i(kx-\omega t)}, k > 0, \omega > 0$$

$$\dot{c} + \hat{P}^+ \frac{\partial}{\partial x}\frac{\delta H}{\delta c^*} = 0$$