

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Физический факультет
Механико-математический факультет

Е. А. Кузнецов

**КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ
ПО СПЕЦКУРСУ «НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ».
ЧАСТЬ I**

Учебное пособие

Новосибирск
2015

УДК 530.1:517.9
ББК 22.311
К194

Автор

д-р физ.-мат. наук, проф. Е. А. Кузнецов
Физический институт РАН им. П. Н. Лебедева,
НГУ, лаборатория нелинейных волновых процессов

Рецензент

д-р физ.-мат. наук, проф. В. Ф. Дмитриев

Издание подготовлено в рамках реализации *Программы развития государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Новосибирский государственный университет»* на 2009–2018 годы.

К194 Кузнецов, Е. А.

Конспект лекций по спецкурсу «Нелинейные волны». Часть I : учеб. пособие
/ Е. А. Кузнецов ; Новосиб. гос. ун-т. – Новосибирск : РИЦ НГУ, 2015. – 98 с.

Данный спецкурс представляет собой введение в теорию нелинейных волн. В данном издании представлена первая часть конспекта лекций, в которой изложены основные понятия физики нелинейных волн: гамильтоновский формализм, неустойчивости монохроматических волн – распадная и модуляционная неустойчивости; дан вывод нелинейного уравнения Шредингера (НУШ) и системы трех волн (уравнения Бломбергена); изучены вопрос о генерации второй гармоники и влияние расстройки резонанса на этот процесс; рассеяние Мандельштама–Бриллюэна; в рамках НУШ получены решения в виде ярких и серых/темных солитонов; исходя из НУШ с дефокусирующей нелинейностью выведены уравнение КДВ и уравнение КП, выяснена роль опрокидывания на основе решения в виде простой волны Римана и влияние дисперсии; исследован вопрос об устойчивости одномерных солитонов относительно одномерных и неодномерных возмущений в рамках трехмерного НУШ и уравнения КП; для фокусирующего многомерного НУШ представлены результаты по коллапсу волн.

В каждой лекции читатель найдет задачи, которые позволят более подробно познакомиться с представленным материалом. Данный конспект лекций может быть рекомендован студентам и аспирантам, а также молодым научным сотрудникам, специализирующимся в исследованиях нелинейных волновых процессов.

УДК 530.1:517.9
ББК 22.311

ISBN 978-5-4437-0315-2

© Новосибирский государственный
университет, 2015
© Е. А. Кузнецов, 2015

Оглавление

Лекция 1 «Нелинейный осциллятор»	7
1.1 Резонанс в нелинейном осцилляторе	11
1.2 Параметрический резонанс	14
Лекция 2 «Линейные волны»	17
2.1 Краткое содержание предыдущей лекции	17
2.2 Линейные волны	18
2.3 Распространение волнового пакета в линейной среде	20
2.4 Гамильтоновский формализм для нелинейных волн	24
Лекция 3 «Канонические переменные, нахождение законов дисперсии и матричных элементов»	27
3.1 Краткое содержание предыдущей лекции	27
3.2 Нелинейные звуковые волны	27
3.3 Электромагнитные волны в нелинейном диэлектрике	33
3.4 Трехволновые нелинейные процессы. Распадная неустойчивость	36
Лекция 4 «Система трех волн»	39
4.1 Краткое содержание предыдущей лекции	39
4.2 Система трех волн	39
4.3 Генерация второй гармоники	43
4.4 Генерация второй гармоники при ненулевой расстройке	46
Лекция 5 «Четырехволновое нелинейное взаимодействие»	51
5.1 Распадные законы дисперсии	51
5.2 О вкладе трехволновых процессов	53
5.3 Нелинейное уравнение Шредингера	55
5.4 Рассеяние Мандельштама – Бриллюэна	59
Лекция 6 «Одномерные солитоны в НУШ и их устойчивость»	63
6.1 Яркие солитоны в НУШ	63
6.2 Серые/темные солитоны	69
Лекция 7 «Неустойчивость одномерных солитонов относительно поперечных возмущений»	79
7.1 Еще раз об устойчивости одномерных солитонов в НУШ	79
7.2 Неустойчивость ярких солитонов	80
7.3 Неустойчивость серых и темных солитонов	83
Лекция 8 «Волновые коллапсы»	88
8.1 Введение	88
8.2 Нелинейное уравнение Шредингера	88
8.3 Волновые коллапсы	90

8.4	О роли излучения	92
8.5	Теорема вириала	93
8.6	Сильный коллапс	94
8.7	Слабый коллапс	95

Вводные замечания

Этот спецкурс можно рассматривать как введение в физику нелинейных явлений. Этот раздел физики по своей сути является междисциплинарным. Первый вариант этого спецкурса был прочитан студентам физического факультета Новосибирского государственного университета в 1984–1986 годах (конспект лекций «Теория солитонов. Лекции» (1986) доступен в библиотеке НГУ). Данный вариант этого спецкурса был прочитан в ФИАНе для студентов кафедры проблем квантовой физики ФОПФ МФТИ в 2007–2014 гг. и для студентов физического и механико-математического факультетов НГУ в 2011–2012 гг.

В физике нелинейных явлений нелинейные волны составляют одно из главных направлений. С волнами мы встречаемся всюду. В гидродинамике — это волны на воде, в частности, морские волны; в акустике — это звуковые волны, в электродинамике — электромагнитные волны, в плазме имеется большой букет различного рода волн, правда, все они могут рассматриваться как электромагнитные, в твердом теле имеется также большое разнообразие волн. Хотелось бы подчеркнуть, что всюду в спецкурсе мы будем рассматривать классические волновые поля и не будем касаться квантовых эффектов. Напомню, что поля можно считать классическими, если соответствующие числа заполнения велики. Такое возможно только для бозе-частиц. Иными словами, классическое волновое поле можно (и нужно) рассматривать как классический предел бозе-систем. Важно отметить, что все наблюдаемые (классические) волны являются нелинейными — линейными могут считаться только волны очень малой амплитуды. У нелинейных волн разной природы существует много общего. Именно об этом общем, в основном, и пойдет речь в этом спецкурсе. Вначале речь пойдет о нелинейном осцилляторе. На его примере мы поймем, какова роль нелинейных эффектов, предполагая их малыми. Оказывается, уже в этом случае, используя теорию возмущений, можно выяснить основные закономерности нелинейного поведения, которые затем мы перенесем на волны. Почему же такой переход является естественным? Известно, что линейные волны описываются с помощью линейных уравнений — для них справедлив принцип суперпозиции. При этом сумма двух решений линейных уравнений, соответствующих двум волнам, есть снова решение. При этом между этими волнами отсутствует какое-либо взаимодействие, есть только их взаимная интерференция. Главная характеристика линейных волн в однородной среде — закон дисперсии. Это зависимость частоты ω от волнового вектора $\mathbf{k}$:

$$\omega = \omega(\mathbf{k}).$$

Нахождение закона дисперсии представляет собой задачу на собственные значения для решения в виде монохроматической волны, когда все характеристики среды — флуктуации плотности, скорость, поля и т. д. — меняются $\sim e^{-i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r})}$. При этом собственный вектор линейной задачи задает соотношение между амплитудами физических параметров волны, например, поляризацию в случае электромагнитных волн, для звуковых волн — связь между скоростью и флуктуациями плотности. При этом всякая монохроматическая волна должна пониматься как осциллятор с частотой $\omega(\mathbf{k})$. Их динамика тривиальна: она определяется экс-

понентой $e^{-i\omega(\mathbf{k})t}$. Поэтому, если мы хотим понять, какие особенности привносит нелинейность, а она становится существенной при росте амплитуды, естественно начать с рассмотрения нелинейного осциллятора — механической системы с одной степенью свободы.

Лекция 1 «Нелинейный осциллятор»

Для нелинейного осциллятора гамильтониан представляет собой сумму кинетической и потенциальной энергий:

$$H(p, x) = \frac{p^2}{m} + U(x). \quad (1)$$

Мы будем считать амплитуду малой и разложим $U(x)$ в ряд по степеням x — отклонения от положения равновесия:

$$U(x) = U(0) + \frac{m\omega^2}{2}x^2 + \alpha x^3 + \beta x^4 + \dots$$

Здесь мы ограничились членами вплоть до четвертого порядка. Важно, что разложение начинается с квадратичного члена

$$H_0 = \frac{p^2}{2m} + m\frac{\omega^2 x^2}{2},$$

который, как хорошо известно, дает гармонические колебания.

Уравнения движения для p и x (суть уравнения Гамильтона)

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}; \quad \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x}, \quad (2)$$

при подстановке H_0 дают уравнения гармонического осциллятора

$$\frac{dx}{dt} = \frac{p}{m}; \quad \frac{dp}{dt} = -m\omega^2 x. \quad (3)$$

Эти два уравнения эквивалентны одному уравнению второго порядка по времени:

$$\frac{d^2 x}{d\tau^2} + \omega^2 x = 0.$$

Откуда имеем общее решение: $x = A \cos(\omega t + \varphi)$, где A и φ определяются из начальных данных.

Часто оказывается удобным вместо переменных p и x вводить нормальные переменные a и a^* с помощью линейных соотношений:

$$p = -i\sqrt{\frac{m\omega}{2}}(a - a^*); \quad x = \sqrt{\frac{1}{2m\omega}}(a + a^*). \quad (4)$$

Обратное к ним преобразование имеет вид:

$$a = \sqrt{\frac{m\omega}{2}}x + i\sqrt{\frac{1}{2m\omega}}p,$$
$$a^* = \sqrt{\frac{m\omega}{2}}x - i\sqrt{\frac{1}{2m\omega}}p.$$

При такой замене от p и x к переменным a и a^* уравнения Гамильтона (2) записываются в виде:

$$\frac{da}{dt} = -i \frac{\partial H}{\partial a^*}. \quad (5)$$

Этот факт проверяется прямым вычислением. Действительно, с одной стороны,

$$\frac{da}{dt} = \sqrt{\frac{m\omega}{2}} \frac{dx}{dt} + i \sqrt{\frac{1}{2m\omega}} \frac{dp}{dt} = \sqrt{\frac{m\omega}{2}} \frac{\partial H}{\partial p} - i \sqrt{\frac{1}{2m\omega}} \frac{\partial H}{\partial x};$$

с другой —

$$\frac{\partial H}{\partial a^*} = \frac{\partial p}{\partial a^*} \frac{\partial H}{\partial p} + \frac{\partial x}{\partial a^*} \frac{\partial H}{\partial x} = i \sqrt{\frac{m\omega}{2}} \frac{\partial H}{\partial p} + \sqrt{\frac{1}{2m\omega}} \frac{\partial H}{\partial x}.$$

Сравнение этих двух результатов дает уравнение (5).

В силу замены (4) разложение гамильтониана по степеням канонических переменных будет представлять собой ряд по степеням a и a^* . При этом первый член этого разложения — квадратичный гамильтониан — становится диагональным: $H_0 = \omega|a|^2$. Таким образом, в линейном приближении (квадратичном в гамильтониане) уравнение движения для a приобретает вид

$$\frac{da}{dt} + i\omega a = 0,$$

то есть $a = a_0 e^{-i\omega t}$, соответственно $a^* = a_0^* e^{i\omega t}$. Эти переменные (a и a^*) в квантовой механике представляют собой операторы уничтожения и рождения (с точностью до постоянной Планка). Это обстоятельство очень нам поможет в дальнейшем, когда мы будем анализировать нелинейные процессы.

Подставляя (4) в H_3 , имеем:

$$\begin{aligned} H_3 &= \alpha x^3 = \alpha \left(\frac{1}{2m\omega} \right)^{3/2} [a^3 + (a^*)^3 + 3a(a^*)^2 + 3a^*a^2] \\ &\equiv \frac{U}{3} (a^3 + (a^*)^3) + V(a(a^*)^2 + 3a^*a^2), \end{aligned}$$

где

$$U = V = 3\alpha \left(\frac{1}{2m\omega} \right)^{3/2}.$$

Таким образом, во втором порядке по амплитуде уравнение движения для a приобретает следующий вид:

$$\frac{da}{dt} + i\omega a = -iU(a^*)^2 - iVa^2 - 2iVaa^*. \quad (6)$$

В следующем порядке

$$H_4 = \beta x^4 = \beta \left(\frac{1}{2m\omega} \right)^2 [a^4 + (a^*)^4 + 6|a|^4 + 4|a|^2(a^2 + a^{*2})].$$

При малой амплитуде, как мы знаем, уравнение движения дает решение чисто гармоническое: $a \propto e^{-i\omega t}$.

Если бы мы стали искать решение нашего нелинейного уравнения, то это решение можно было бы представить в виде:

$$C e^{-i\omega t} + C_0 + C_2 e^{-2i\omega t} + C_{-2} e^{+2i\omega t} + \dots, \quad (7)$$

где амплитуды соответствующих гармоник C , C_0 , C_2 , C_{-2} были бы медленно меняющимися функциями времени. Почему это так? Почему возникают нулевая и вторая гармоники?

Давайте в уравнении движения оставим только квадратичный нелинейный член — главный при малой амплитуде, и подставим $a = C(t)e^{-i\omega t}$ в правую часть уравнения (6). Тогда мы увидим, что за счет нелинейности правая часть будет иметь вид:

$$-iUC^{*2}e^{2i\omega t} - iVC^2e^{-2i\omega t} - 2iV|C|^2.$$

Иными словами, на наш «линейный» осциллятор будет действовать возбуждающая сила на частотах 2ω , -2ω и 0 . За счет этой силы мы получаем:

$$C_0 = -\frac{2V}{\omega}|C|^2; \quad C_2 = \frac{V}{\omega}C^2; \quad C_{-2} = -\frac{U}{3\omega}C^{*2}. \quad (8)$$

Таким образом, мы пришли к весьма интересному выводу: нелинейность приводит к появлению кратных (в общем случае — комбинационных) гармоник. Эти кратные гармоники, в свою очередь, оказывают обратное влияние на движение на основной частоте, то есть на C .

Для того чтобы понять, к чему приводит это влияние, нужно вернуться к уравнению движения

$$\frac{da}{d\tau} + i\omega a = -iU(a^*)^2 - iVa^2 - 2iVaa^*$$

на основной частоте т.е. в левую часть подставить $a = C(t)e^{-i\omega t}$, а в правую часть — разложение (7). При этом в правой части нужно выделить только члены, содержащие $e^{-i\omega t}$. Такая процедура представляет собой своеобразное проектирование на состояние $e^{-i\omega t}$. В результате этого мы имеем:

$$e^{-i\omega t} \frac{dC}{dt} = e^{-i\omega t} [-2iUC_{-2}^*C^* - 2iVCC_0 - 2iVCC_0^* - 2iVC_2C^*].$$

Подставляя далее в правую часть амплитуды гармоник (8), получаем замкнутое уравнение для $C(t)$:

$$\frac{dC}{d\tau} = -2iUC_{-2}^*C^* - i2VCC_0 - 2iVCC_0^* - 2iVC_2C^* \equiv i\frac{20}{3\omega}V^2|C|^2C,$$

где мы учли, что $U = V$.

Возвращаясь к прежним обозначениям, уравнение для основной гармоники $a = C(t)e^{-i\omega t}$ запишем почти в том же виде, что и прежде:

$$\frac{da}{dt} + i(\omega + \Delta\omega)a = 0.$$

Здесь частота ω заменяется на $\omega + \Delta\omega$, где

$$\Delta\omega = -\frac{20}{3} \frac{V^2}{\omega} |a|^2.$$

Метод, которым мы здесь воспользовались, представляет собой метод усреднения. Частота осциллятора испытывает малое изменение в силу малости нелинейности, при этом добавка к частоте оказывается медленно меняющейся функцией времени.

Для того чтобы найти вклад от членов четвертого порядка (в гамильтониане), достаточно провести процедуру усреднения прямо в гамильтониане H_4 . В результате получаем:

$$\overline{H}_4 = 6\beta \left(\frac{1}{2m\omega} \right)^2 |a|^4 \equiv \frac{T}{2} |a|^4.$$

Соответствующее уравнение для основной гармоники a получается отсюда посредством правила (5). Легко видеть, что члены третьего порядка (во втором порядке теории возмущений) и четвертого порядка дают уравнение, в котором константа взаимодействия четвертого порядка испытывает перенормировку

$$\tilde{T} = T - \frac{20}{3} \frac{V^2}{\omega}.$$

В результате имеем:

$$\frac{da}{dt} + i\omega a = -i\tilde{T}|a|^2 a. \quad (9)$$

Таким образом, частота осциллятора за счет нелинейности приобретает добавку

$$\Delta\omega = \tilde{T}|a|^2,$$

которая называется нелинейным сдвигом частоты.

Уравнение (9) легко интегрируется, поскольку из него следует, что $|a|^2$ не изменяется во времени:

$$\frac{d}{dt} |a|^2 = 0.$$

Сохраняющаяся величина $|a|^2$ представляет собой действие — адиабатический инвариант. В результате решение уравнения (9) имеет тот же вид, что и линейное уравнение, в котором ω заменяется на $\omega + \Delta\omega$:

$$a = a_0 e^{-i(\omega + \Delta\omega)t}.$$

Хотелось бы сделать одно важное замечание. Из формулы для перенормированной константы взаимодействия видно, что вклад в нее от квадратичной (в уравнении) нелинейности отрицателен, что соответствует хорошо известному в квантовой механике факту, что смещение основного уровня во втором порядке теории возмущений отрицательно.

Из всего сказанного можно сделать два важных вывода:

1) Нелинейность есть причина появления кратных гармоник. В частности, квадратичная (в уравнении) нелинейность дает в главном порядке нулевую и вторую гармоники.

2) Для основного движения на основной гармонике нелинейность приводит к появлению нелинейного сдвига частоты.

Следует отметить, что эти два свойства сохраняются и для волн, распространяющихся в нелинейной среде, о чем мы будем говорить в дальнейшем.

Задача 1. Найти нелинейную добавку к частоте для математического маятника.

1.1 Резонанс в нелинейном осцилляторе

Рассмотрим теперь резонансное возбуждение нелинейного осциллятора внешней периодической силой. В линейном приближении уравнение для амплитуды a имеет вид:

$$\frac{\partial a}{\partial t} + i(\omega - i\gamma)a = -if_0e^{-i\Omega t}.$$

Здесь сила f предполагается монохроматической, т.е. f_0 и Ω — константы. Кроме этого, в левую часть уравнения мы ввели малое затухание γ ($\gamma \ll \omega$).

Решение этого уравнения (при $t \rightarrow \infty$) имеет вид:

$$a = \frac{f_0}{\Omega - \omega + i\gamma} e^{-i\Omega t},$$

откуда для квадрата амплитуды получается типичный резонансный контур (лоренцевского типа):

$$|a|^2 = \frac{|f_0|^2}{(\Omega - \omega)^2 + \gamma^2}. \quad (10)$$

Из этого выражения видно, что при $\gamma \rightarrow 0$ и $\Omega \rightarrow \omega$ амплитуда установившегося колебания оказывается бесконечно большой. Это есть обычный линейный резонанс. В нелинейном случае, как мы знаем, частота ω испытывает нелинейную коррекцию, в результате вместо (10) следует писать:

$$|a|^2 = \frac{|f_0|^2}{(\nu - T|a|^2)^2 + \gamma^2}, \quad \nu = \Omega - \omega, \quad (11)$$

где под T подразумевается перенормированная константа $\tilde{T}$.

За счет нелинейной добавки к частоте резонанс при $\nu \rightarrow 0$ и малых γ оказывается замороженным: амплитуда не обращается в бесконечность. В этом случае простая оценка дает:

$$|a|_{sat}^6 \approx \frac{|f_0|^2}{\tilde{T}^2} \quad \text{или} \quad |a|_{sat}^2 \approx \left(\frac{|f_0|}{\tilde{T}_0} \right)^{2/3}.$$

Такое поведение реализуется при $(T|a|^2) \gg \gamma$.

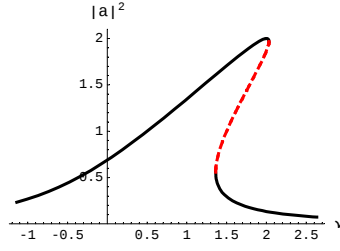


Рис. 1. Зависимость стационарных значений $|a|^2$ от ν при силе, больше критической (безразмерные переменные). Пунктиром отмечено неустойчивое решение (см. Задачу 1)

При малой силе, $f_0 \rightarrow 0$, нелинейной добавкой к частоте, очевидно, можно пренебречь, и (11) в этом случае имеет прежний «линейный» вид, симметричный относительно ν :

$$|a|^2 = \frac{|f_0|^2}{\nu^2 + \gamma^2}.$$

С ростом f_0 резонансный контур (11) оказывается асимметричным. При малых f_0 у уравнения (11), кубического относительно $|a|^2$, при всех значениях ν есть только одно действительное решение. Легко видно, что при значении $|f|$, выше некоторого критического значения $|f_{0cr}|$, резонансный контур, симметричный при $T = 0$, будет иметь вид, как показано на рис. 1. При $|f_0| \geq |f_{0cr}|$ у кубического уравнения (11) относительно $|a|^2$ существуют три действительных корня в области $\nu_1 \leq \nu \leq \nu_2$, где ν_1 и ν_2 границы области неоднозначности решения. Критическое значение силы $|f_{0cr}|$ может быть определено из условия исчезновения двух действительных корней.

Задача 2. Найти критическую силу.

Решение: Вначале запишем нестационарное уравнение на C

$$\frac{\partial C}{\partial t} - i(\nu - T|C|^2 + i\gamma)C = -i(f_0), \quad (12)$$

из которого следует, что $|C|^2$ подчиняется уравнению:

$$\frac{\partial |C|^2}{\partial t} + 2\gamma|C|^2 = -i(f_0 C^* - f_0^* C).$$

Отсюда в стационаре имеем

$$[(\nu - T|C|^2)^2 + \gamma^2]|C|^2 = |f_0|^2,$$

т. е. приходим к уже знакомому соотношению (11). Из уравнения для $|C|^2$ в стационарном случае получаем

$$\gamma|C|^2 = |f_0||C|\sin\delta, \quad \delta = \Phi_f - \Phi_C,$$

где Φ_f и Φ_C — фазы силы f и C соответственно, т. е.

$$\sin \delta = \frac{\gamma|C|}{|f_0|}.$$

Чтобы найти критическую силу, необходимо знать границы области $\nu_{1,2}$ существования трех решений. Очевидно, что равенство $\nu_1 = \nu_2$ есть условие, когда кривая $|C|^2(\nu)$ оказывается однозначной функцией (т. е. когда у уравнения (11) есть только одно действительное решение), что и определяет критическую силу. В точках $\nu_{1,2}$ производные

$$\frac{d|C|^2}{d\nu} = \infty.$$

Эти точки находятся исходя из дифференцирования уравнения

$$|C|^2 \left[(\nu - T|C|^2)^2 + \gamma^2 \right] = |f_0|^2$$

по ν . В результате

$$\frac{\partial|C|^2}{\partial\nu} \left[(\nu - T|C|^2)^2 + \gamma^2 - 2|C|^2 T (\nu - T|C|^2) \right] + 2|C|^2 (\nu - T|C|^2) = 0,$$

откуда в точках $\nu = \nu_{1,2}$ находим

$$(\nu - T|C|^2)^2 + \gamma^2 - 2|C|^2 T (\nu - T|C|^2) = -\frac{2|C|^2 (\nu - T|C|^2)}{d|C|^2/d\nu} = 0.$$

Отсюда соответственно границы области определяются уже из решения квадратного уравнения относительно ν (или $|C|^2$):

$$\nu_{1,2} = 2T|C|^2 \pm (|C|^4 T^2 - \gamma^2)^{1/2}. \quad (13)$$

Слияние двух корней происходит при

$$T|C|^2 = \gamma; \quad \text{тогда} \quad \nu = 2T|C|^2.$$

Отсюда критическая сила равна (см. также [1])

$$|f_{cr}|^2 = \frac{2\gamma^3}{T}.$$

Задача 3. Показать, что при $|f_0| > |f_{0cr}|$ решение, отмеченное пунктиром (см. рис. 1), является неустойчивым.

Решение: Вначале произведем линеаризацию уравнения (12), предполагая возмущение малым, $b = \delta C \ll C$. В результате получаем два линейных уравнения на b и b^* :

$$\begin{aligned} \frac{\partial b}{\partial t} - i(\nu - 2T|C|^2 + i\gamma)b + iT C^2 b^* &= 0, \\ \frac{\partial b^*}{\partial t} + i(\nu - 2T|C|^2 - i\gamma)b^* - iT C^{*2} b &= 0. \end{aligned}$$

Считая, что $b, b^* \sim e^{\lambda t}$ имеем для λ два корня:

$$\lambda_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{|T|^2|C|^4 - (\nu - 2T|C|^2)^2}, \quad (14)$$

где значения ν лежат в области $\nu_1 \leq \nu \leq \nu_2$, а функция $|C|^2(\nu)$ является растущей при изменении ν от $\nu = \nu_1$ до $\nu = \nu_2$.

Покажем теперь, что в этой области $|T|^2|C|^4 - (\nu - 2T|C|^2)^2 - \gamma^2 \geq 0$. Легко видеть, что равенство достигается в точках $\nu_{1,2}$, что следует после подстановки (13) в это выражение. С другой стороны, левая часть этого неравенства представима в виде произведения $(\nu - \nu_1)(\nu_2 - \nu)$, которое по определению положительно всюду в интервале $\nu_1 \leq \nu \leq \nu_2$ за исключением точек $\nu_{1,2}$, где оно равно нулю. Это доказывает, что λ_1 положительно внутри области $\nu_1 < \nu < \nu_2$, т.е. «пунктирное» решение неустойчиво. Два других решения в этой области устойчивы.

Из решения последней задачи следует, что при $|f_0| > |f_{0cr}|$ возникает явление гистерезиса. Если стартовать (при фиксированной силе) со стационарного состояния с $\nu > \nu_1$, то, плавно увеличивая ν , мы будем двигаться по стационарным состояниям вплоть до состояния с $\nu = \nu_2$. При дальнейшем увеличении разности частот ν система *скачком* перейдет в нижнее (устойчивое) состояние. Если теперь уменьшать ν , то мы будем двигаться по нижней ветви (см. рис. 1), пока не дойдем до $\nu = \nu_1$. При уменьшении ν опять возникнет *скачок*, теперь на верхнюю кривую. Это и есть явление гистерезиса. Связано оно с бистабильностью: в диапазоне $\nu_1 \leq \nu \leq \nu_2$ есть два устойчивых положения равновесия.

1.2 Параметрический резонанс

Рассмотрим другой пример резонанса, так называемый параметрический резонанс. Этот резонанс возникает в случае, когда частота осциллятора зависит гармонически от времени. В простейшем варианте:

$$\omega^2(t) = \omega_0^2(1 + \varepsilon \cos \Omega t),$$

где безразмерную амплитуду ε будем считать малой: $\varepsilon \ll 1$. Для того чтобы получить соответствующий резонанс, запишем гамильтониан в переменных a и a^* :

$$H = \omega_0|a|^2 + \frac{\varepsilon\omega_0}{4}(a + a^*)^2 \cos(\Omega t).$$

Если предположить, как и ранее, что основное движение осциллятора описывается зависимостью

$$a(t) = C(t)e^{-i\omega_0 t} \quad \text{и} \quad a^*(t) = C^*(t)e^{i\omega_0 t},$$

где $C(t)$ — медленно меняющаяся функция времени по сравнению с $e^{-i\omega_0 t}$, то в возмущении гамильтониана H_{int} нужно выделить (или оставить) члены, которые при усреднении дают ненулевой вклад. Выражая в

$$H_{int} = \frac{\varepsilon\omega_0}{4}(a + a^*)^2 \cos \Omega t$$

косинус через экспоненты и помня, что $a \propto e^{-i\omega_0 t}$, а $a^* \propto e^{i\omega_0 t}$, мы сталкиваемся с тем, что многие слагаемые после усреднения выпадают. Например, после усреднения члена $|a|^2 \cos \Omega t$ мы получим нуль. Ненулевой вклад возникнет от среднего $a^2 e^{i\Omega t}$, когда удвоенная частота $2\omega_0$ близка к Ω . Равенство

$$2\omega_0 = \Omega$$

как раз есть условие параметрического резонанса. При этом соответствующий гамильтониан, ответственный за этот резонанс, имеет вид:

$$\bar{H}_{int} = \frac{\varepsilon\omega_0}{8} \left[a^2 e^{+i\Omega t} + a^{*2} e^{-i\Omega t} \right] \equiv \frac{\omega_0}{2} \left(h^* a^2 + h a^{*2} \right),$$

где $h(t) = h_0 e^{i\Omega t}$ есть накачка, ее амплитуда h_0 равна $\varepsilon/4$.

Условие резонанса имеет простую квантово-механическую интерпретацию. Если посмотреть на

$$\bar{H}_{int} = \frac{\omega_0}{2} \left(h a^{*2} + h^* a^2 \right)$$

и вспомнить, что a есть классический аналог оператора уничтожения, a^* , соответственно — аналог оператора рождения, то член в гамильтониане $h a^{*2}$ описывает уничтожение одного кванта накачки и рождение двух квантов осциллятора. Для этого необходимо выполнение закона сохранения энергии

$$\Omega = 2\omega_0,$$

что в точности есть условие параметрического резонанса.

Рассмотрим теперь, как выглядят уравнения движения в переменных a . Это уравнение получается при дифференцировании усредненного гамильтониана $\bar{H} = H_0 + \bar{H}_{int}$:

$$\frac{da}{dt} + \gamma a = -i \frac{\partial \bar{H}}{\partial a^*} \equiv -i\omega_0 a - i\omega_0 h_0 a^* e^{-i\Omega t}. \quad (15)$$

В левую часть этого уравнения мы добавили линейное затухание γ . Соответственно уравнение для a^* получается отсюда комплексным сопряжением:

$$\frac{da^*}{dt} + \gamma a^* = i\omega_0 a^* + i\omega_0 h_0 a e^{i\Omega t}. \quad (16)$$

Таким образом, на a и a^* мы получили систему двух линейных уравнений, явно содержащих зависимость от времени. Легко видно, что эта зависимость от времени исключается после введения новых переменных:

$$a = c(t) e^{-i\frac{\Omega t}{2}}, \quad a^* = c^*(t) e^{+i\frac{\Omega t}{2}}.$$

В результате имеем систему линейных уравнений уже с постоянными коэффициентами:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \left[i \left(\omega_0 - \frac{\Omega}{2} \right) + \gamma \right] c + i\omega_0 h_0 c^* = 0,$$

$$\frac{\partial c^*}{\partial t} + \left[-i \left(\omega_0 - \frac{\Omega}{2} \right) + \gamma \right] c^* - i\omega_0 h_0 c = 0.$$

Решение этой системы ищется в виде $c, c^* \sim e^{\Gamma t}$, для c и c^* получаем алгебраическую систему

$$\left[\Gamma + \gamma + i \left(\omega_0 - \frac{\Omega}{2} \right) \right] c = -i\omega_0 h_0 c^*,$$

$$\left[\Gamma + \gamma - i \left(\omega_0 - \frac{\Omega}{2} \right) \right] c^* = +i\omega_0 h_0 c.$$

Условие совместности, то есть $\det = 0$, дает:

$$\Gamma = -\gamma \pm \sqrt{|h_0|^2 \omega_0^2 - \left(\omega_0 - \frac{\Omega}{2} \right)^2}, \quad (17)$$

откуда мы заключаем, что неустойчивость имеет место, начиная с амплитуды накачки $h_0 > h_{cr} = \gamma/\omega_0$. Эта неустойчивость называется параметрической. Соотношение (17) задает инкремент параметрической неустойчивости. Его максимум достигается при

$$\omega_0 = \frac{\Omega}{2}. \quad (18)$$

Как мы знаем, для раскачивания качелей нужно приседать в нижней точке, т. е. частота приседаний должна быть в два раза больше частоты колебаний качелей, что как раз и есть условие параметрического резонанса (18).

Задача 4. Найти ширину параметрического резонанса $\Delta\omega$.

Ответ: $\Delta\omega = 4\sqrt{|h_0|^2 \omega_0^2 - \gamma^2}$.

В заключении этой лекции хотелось бы отметить, что для нелинейного осциллятора вывод нелинейного сдвига частоты можно найти в книге Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшица «Механика» [1]. Метод, используемый у Ландау – Лифшица, по сути дела совпадает с предложенным в этой лекции. Как будет видно из дальнейшего, подход, здесь используемый, достаточно просто обобщается на случай нелинейных волн, и в этом состоит методическое значение этого описания.

Лекция 2 «Линейные волны»

2.1 Краткое содержание предыдущей лекции

На прошлой лекции мы рассмотрели простейшие нелинейные эффекты, возникающие для нелинейного осциллятора — системы с одной степенью свободы. В частности, мы вычислили нелинейный сдвиг частоты $\Delta\omega$:

$$\Delta\omega = T|a|^2,$$

который возникает благодаря нелинейности, при этом частота осциллятора ω_0 заменяется на $\omega_0 + \Delta\omega$ или, как говорят, перенормируется. При этом уравнение движения в терминах a и a^* — нормальных амплитуд, классических аналогов операторов уничтожения и рождения, записывается в виде:

$$\frac{da}{dt} + i\omega_0 a = -i\Delta\omega a \equiv -iT|a|^2 a.$$

Это уравнение также представимо в гамильтоновой форме:

$$\frac{\partial a}{\partial t} = -i \frac{\partial H}{\partial a^*}, \quad (19)$$

где гамильтониан

$$H = \omega_0 |a|^2 - \frac{1}{2} T |a|^4.$$

Этот гамильтониан получается при усреднении начального гамильтониана (равного сумме кинетической и потенциальной энергий) по «быстрым» колебаниям с частотой ω_0 при предположении малости отклонения от положения равновесия. Другим важным результатом прошлой лекции стал вывод о том, что появление кратных гармоник обязано нелинейным эффектам. В свою очередь, обратное влияние кратных гармоник на основное колебание с частотой ω_0 приводит к перенормировке частоты колебаний за счет нелинейного сдвига частоты.

Кроме того, на прошлой лекции мы изучили, как устроены решения при воздействии периодической силы на нелинейный осциллятор. Выяснили, что при наличии затухания стационарные состояния при достаточно большой силе имеют гистерезисное поведение. Другой вопрос, который также был рассмотрен на прошлой лекции, — параметрический резонанс. Мы видели с вами, что при периодическом изменении частоты осциллятора $\omega^2 = \omega_0^2(1 + \varepsilon \cos \Omega t)$ возникает параметрическая неустойчивость. При малых ε параметрическое возбуждение наступает при частоте Ω , близкой к $2\omega_0$. При этом максимум инкремента достигается при точном резонансе:

$$\Omega = 2\omega_0.$$

Такого рода неустойчивость имеет простое квантово-механическое объяснение: этот процесс представляет собой распад (потеря одного кванта внешнего поля — накачки) с возбуждением двух квантов осциллятора. Эта связь с квантовой механикой оказывается весьма полезной, особенно когда мы будем рассматривать нелинейные волны.

Прежде чем переходить к этому вопросу (т. е. к нелинейным волнам), необходимо сначала разобраться с линейными волнами.

2.2 Лине́йные волны

Пусть у нас имеется однородная среда, в которой могут распространяться линейные волны (то есть волны малой амплитуды). Это означает, что все поля — электрическое (E) поле и магнитное (B) поле, флуктуации плотности $\delta\rho$, скорости самой среды V и т. д. — подчиняются линейным уравнениям вида:

$$\frac{\partial\Psi}{\partial t} = \hat{L}(\nabla)\Psi, \quad (20)$$

где Ψ есть вектор состояния, включающий в себя все переменные поля:

$$\Psi = \begin{pmatrix} E, \\ B, \\ \delta\rho, \\ V, \\ \vdots \end{pmatrix},$$

а $L(\nabla)$ есть матричный линейный оператор, зависящий только от градиентов ∇ .

В этом случае решение этой системы может быть представлено в виде разложения по плоским волнам:

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \int \Psi(k, \omega) e^{-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{r}} d\omega d\mathbf{k},$$

то есть частное решение $\Psi(\mathbf{r}, t)$ следует искать пропорциональным $e^{-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{r}}$. В результате, (20) превращается в задачу на собственные значения для матрицы $L(i\mathbf{k})$:

$$-i\omega\Psi_k = L(i\mathbf{k})\Psi_k.$$

Условие разрешимости $\det[-i\omega\delta_{lm} - L_{lm}(i\mathbf{k})] = 0$ задает связь между частотой и волновым вектором или, как говорят, закон дисперсии:

$$\omega = \omega(\mathbf{k}).$$

Например, для уравнений Максвелла в среде с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon_{ik} = \varepsilon_{ik}(\omega)$ закон дисперсии для электромагнитных волн определяется из решения уравнения:

$$\det[n^2\delta_{ik} - n_i n_k - \varepsilon_{ik}(\omega)] = 0,$$

где $\mathbf{n} = \mathbf{k}c/\omega$. При этом каждому собственному значению $\omega = \omega(\mathbf{k})$ будет отвечать свой собственный вектор. В электродинамике он задает поляризацию электромагнитной волны. Например, в одноосном кристалле с тензором диэлектрической проницаемости

$$\hat{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{\parallel} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{\perp} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{\perp} \end{pmatrix}$$

для обыкновенной волны

$$n^2 = \varepsilon_{\perp},$$

т. е.

$$\omega = \frac{kc}{\sqrt{\varepsilon_{\perp}}}.$$

Поляризация этой волны оказывается линейной: вектор $\mathbf{E}$ перпендикулярен плоскости вектора $\mathbf{k}$ и $\mathbf{l}$ — оси анизотропии кристалла. Для необыкновенной волны поляризация тоже оказывается линейной: вектор $\mathbf{E}$ лежит в плоскости, образованной векторами вектора $\mathbf{k}$ и $\mathbf{l}$.

Самое главное, что следует из этого анализа, основанного на разложении по плоским волнам — разложении Фурье, — это то, что каждой отдельной частоте (моду) можно (и нужно) сопоставить один осциллятор с частотой $\omega(\mathbf{k})$, при этом энергия всех осцилляторов будет равна сумме энергий осцилляторов, т. е. будет даваться интегралом по всем k :

$$H_0 = \int \omega(\mathbf{k}) |a_k|^2 d\mathbf{k}, \quad (21)$$

где a_k — амплитуда нормальных волн. В такой формулировке вся информация о линейных характеристиках среды заложена только в виде закона дисперсии. Разным волнам будут отвечать разные законы дисперсии. Собственный вектор (поляризация в случае электромагнитных волн) является вторичной, если угодно, дополнительной характеристикой волн. Таким образом, первая (она же — главная) задача для линейных волн есть отыскание закона дисперсии $\omega = \omega(\mathbf{k})$.

Очевидно, что уравнение движения для амплитуд a_k будет иметь тот же вид, что и для одного отдельного (линейного) осциллятора:

$$\frac{\partial a_k}{\partial t} + i\omega(\mathbf{k})a_k = 0. \quad (22)$$

Это уравнение может быть записано в гамильтоновой форме:

$$\frac{\partial a_k}{\partial t} = -i \frac{\delta H_0}{\delta a_k^*}. \quad (23)$$

Здесь разница с одним осциллятором состоит только в том, что в уравнении (19) частная производная по a^* для одного осциллятора заменяется на вариационную производную. Ее нахождение почти такое же, как и для обычных производных. Сначала нужно найти вариацию δH_0 при изменении δa_k^* :

$$\delta H_0 = \int \omega(\mathbf{k}') a_{k'} \delta a_{k'}^* dk',$$

а затем воспользоваться правилом

$$\frac{\delta a_{k'}^*}{\delta a_k^*} = \delta(k - k'),$$

которое означает, что k -й и k' -й осцилляторы независимы. В результате

$$\frac{\delta H_0}{\delta a_k^*} = \int \omega(\mathbf{k}') a_{k'} \frac{\delta a_{k'}^*}{\delta a_k^*} dk' = \omega(\mathbf{k}) a_k.$$

Таким образом, остается только вопрос: как найти переменные a_k ? Для этого вначале нужно найти закон дисперсии $\omega = \omega(\mathbf{k})$, а затем найти соответствующие ему (собственному значению) собственные векторы. Далее нужно собственные векторы отнормировать таким образом, чтобы энергия волн (она же гамильтониан) была представима в виде

$$H_0 = \int \omega(\mathbf{k}) |a_k|^2 d\mathbf{k}.$$

Следует отметить, что введенные таким образом a_k определены с точностью до постоянного фазового множителя, который в каждом конкретном случае выбирается исходя из соображений удобства.

Резюмируя все сказанное, мы можем сделать вывод, что все линейные волны описываются одним и тем же уравнением

$$\frac{\partial a_k}{\partial t} + i\omega(\mathbf{k})a_k = 0, \quad (24)$$

с той лишь разницей, что в каждом конкретном случае фигурирует свой закон дисперсии, то есть специфика среды заключена только в виде $\omega(\mathbf{k})$.

2.3 Распространение волнового пакета в линейной среде

Из уравнения (22) можно извлечь то общее, что присуще всем волнам. Рассмотрим распространение волнового пакета. Для волнового пакета распределение $|a_k|^2$ сосредоточено в окрестности точки $\mathbf{k} = \mathbf{k}_0$ с шириной пика $\Delta k \ll |\mathbf{k}_0|$.

Введем волновую функцию $\psi(\mathbf{r}, t)$ как обратное Фурье-преобразование a_k :

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} a_k(t) d\mathbf{k}, \quad (25)$$

где d — размерность пространства.

Поскольку $|a_k(t)|$ имеет максимум в точке $\mathbf{k} = \mathbf{k}_0$, то естественно в этом интеграле выделить $e^{i\mathbf{k}_0\mathbf{r}}$, то есть представить ψ в виде

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \frac{e^{i\mathbf{k}_0\mathbf{r}}}{(2\pi)^{d/2}} \int a_{\mathbf{k}}(t) e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}_0)\mathbf{r}} d\mathbf{k} = \frac{e^{i\mathbf{k}_0\mathbf{r}}}{(2\pi)^{d/2}} \int a_{\mathbf{k}_0+\kappa}(t) e^{i\kappa\mathbf{r}} d\kappa,$$

где $\kappa = \mathbf{k} - \mathbf{k}_0$. Таким образом,

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \psi_0(\mathbf{r}, t) e^{i\mathbf{k}_0\mathbf{r}},$$

а функция $\psi_0(\mathbf{r}, t)$ будет представлять собой огибающую (при заданном t). При этом ее фурье-образ как раз есть $a_{\mathbf{k}_0+\kappa} \equiv c_\kappa$, соответствующая ширина c_κ равна $\Delta k \ll |\mathbf{k}_0|$.

Посмотрим теперь, какому уравнению подчиняется огибающая $\psi_0(\mathbf{r}, t)$. Для этого в уравнении (24) совершим обратное преобразование Фурье по κ :

$$\frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int e^{i\kappa\mathbf{r}} \left(\frac{\partial a_{\mathbf{k}_0+\kappa}}{\partial t} + i\omega_{\mathbf{k}_0+\kappa} a_{\mathbf{k}_0+\kappa} \right) d\kappa = 0.$$

Очевидно, что первый интеграл равен $\frac{\partial \psi_0}{\partial t}$. Второй интеграл представляет собой интеграл от плавной функции $\omega_{\mathbf{k}_0+\kappa}$, умноженной на острую функцию $a_{\mathbf{k}_0+\kappa}$. Отсюда ясно, что основной вклад в интеграл внесет узкая область по $\kappa \sim \Delta k$. Разлагая далее $\omega_{\mathbf{k}_0+\kappa}$ в ряд по κ ,

$$\omega_{\mathbf{k}_0+\kappa} = \omega_{k_0} + \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}_0} \kappa + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial k_{0\alpha} \partial k_{0\beta}} \kappa_\alpha \kappa_\beta + \dots, \quad (26)$$

и вспоминая, что при обратном преобразовании Фурье вектор κ превращается в оператор $-i\nabla$, получаем уравнение на огибающую $\psi_0(\mathbf{r}, t)$:

$$\frac{\partial \psi_0}{\partial t} + i\omega_0 \psi_0 + \mathbf{v}_{gr} \nabla \psi_0 - \frac{i}{2} \omega_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} + \dots = 0, \quad (27)$$

где ω_0 , $\mathbf{v}_{gr}$, $\omega_{\alpha\beta}$ есть соответственно значения частоты ω_k , групповой скорости $\frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}}$ и дисперсионного тензора $\frac{\partial^2 \omega}{\partial k_\alpha \partial k_\beta}$, взятые в точке $\mathbf{k} = \mathbf{k}_0$. Отметим, что в силу разложения (26) каждый член в этом уравнении мал по сравнению с предыдущим. Таким образом, в главном порядке ψ_0 подчиняется уравнению

$$\frac{\partial \psi_0}{\partial t} + i\omega_0 \psi_0 = 0,$$

которое показывает, что ψ_0 меняется пропорционально $e^{-i\omega_0 t}$. Очевидно, что простое преобразование — переход во вращающуюся систему координат

$$\psi_0 \rightarrow \psi_0 e^{-i\omega_0 t},$$

исключает слагаемое $\omega_0 \psi_0$ из уравнения (27). При этом по сравнению с экспонентой $e^{-i\omega_0 t + i\mathbf{k}_0 \mathbf{r}}$ преобразованная ψ_0 является медленно меняющейся функцией не только координат, но и времени t :

$$\psi(x, t) = \psi_0(x, t) e^{-i\omega_0 t + i\mathbf{k}_0 \mathbf{r}}.$$

В результате мы приходим к уравнению

$$i \left(\frac{\partial \psi_0}{\partial t} + \mathbf{v}_{gr} \nabla \right) \psi_0 + \frac{1}{2} \omega_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} = 0. \quad (28)$$

В этом уравнении второе слагаемое является главным. Оно, как легко видно, может быть исключено путем перехода в систему координат, движущуюся с групповой скоростью $\mathbf{v}_{gr}$.

Действительно, совершая преобразования (преобразования Галилея)

$$\begin{aligned} \mathbf{r}' &= \mathbf{r} - \mathbf{v}_{gr} t \\ t' &= t, \end{aligned}$$

легко получить, что производные пересчитываются как

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t'} - \mathbf{v}_{gr} \nabla',$$

$$\nabla = \nabla'.$$

В результате уравнение (28) приобретает вид

$$i\frac{\partial\psi_0}{\partial t} + \frac{1}{2}\omega_{\alpha\beta}\frac{\partial^2\psi_0}{\partial x_\alpha\partial x_\beta} = 0. \quad (29)$$

Это уравнение есть уравнение Шредингера для свободной частицы, ψ_0 в этом случае играет роль волновой функции. Поскольку тензор $\omega_{\alpha\beta}$ симметричен, то он может быть приведен к диагональному виду, и, соответственно, уравнение в главных осях записывается как

$$i\frac{\partial\psi_0}{\partial t} + \frac{\lambda_1}{2}\frac{\partial^2\psi}{\partial x_1^2} + \frac{\lambda_2}{2}\frac{\partial^2\psi}{\partial x_2^2} + \frac{\lambda_3}{2}\frac{\partial^2\psi}{\partial x_3^2},$$

где λ_i имеет смысл обратных масс (по каждому из направлений).

Для изотропных сред, когда $\omega(k)$ зависит только от модуля k , дисперсионный тензор имеет вид:

$$\omega_{\alpha\beta} = \omega''\frac{k_\alpha k_\beta}{k^2} + \frac{v_{gr}}{k_0}\left(\delta_{\alpha\beta} - \frac{k_\alpha k_\beta}{k^2}\right).$$

Задача 1. Доказать эту формулу.

Соответственно, линейное уравнение Шредингера (29) в этом случае записывается в виде

$$i\frac{\partial\psi_0}{\partial t} + \frac{\omega''}{2}\frac{\partial^2\psi_0}{\partial x^2} + \frac{v_{gr}}{2k_0}\Delta_\perp\psi_0 = 0, \quad (30)$$

где ось x направлена вдоль вектора $\mathbf{k}_0$ — направления распространения волнового пакета, $\Delta_\perp = \partial_y^2 + \partial_z^2$ есть поперечный оператор Лапласа. В этом уравнении второе слагаемое описывает дисперсионное распыливание волнового пакета $x \sim t^{1/2}$. Последнее следует из простой оценки: $\frac{\partial\psi_0}{\partial t} \sim \frac{\psi_0}{t}$ и $\frac{\partial^2\psi_0}{\partial x^2} \sim \frac{\psi_0}{x^2}$. Сравнение этих двух членов дает, что характерный размер $x \sim \sqrt{\omega''t}$, т.е. растет со временем корневым образом. Последнее слагаемое в (30) описывает поперечную диффузию волнового пакета — дифракцию.

В частности, в стационарном случае, когда $\frac{\partial\psi_0}{\partial t} = 0$, уравнение на ψ_0 записывается в виде:

$$i\frac{\partial\psi_0}{\partial x} + \frac{1}{2k_0}\Delta_\perp\psi_0 = 0, \quad (31)$$

то есть координата x играет роль времени (в этом случае член $\omega''\psi_{0xx}$ мал по сравнению $v_{gr}\psi_{0x}$). Отметим, что уравнение (31) не содержит никакой информации о законе дисперсии — групповая скорость выпала. Это означает, что законы дифракции в изотропных средах одинаковы. Например, для электромагнитных и звуковых волн. Согласно (31), пучок в этом случае дифрагирует в поперечном направлении по одинаковому закону:

$$r_\perp \sim \left(\frac{x}{k_0}\right)^{1/2} \sim (x\lambda)^{1/2}.$$

Рассмотрим теперь, каким образом записывается гамильтониан волн для волнового пакета. По сути дела эта задача состоит в том, чтобы записать гамильтониан $H_0 = \int \omega(k) |a_k|^2 d\mathbf{k}$ в терминах огибающей ψ_0 . Для этого в гамильтониане нужно воспользоваться разложением частоты

$$\omega_k \equiv \omega_{\mathbf{k}_0 + \kappa} = \omega_{k_0} + \mathbf{v}_{gr} \kappa + \frac{1}{2} \omega_{\alpha\beta} \kappa_\alpha \kappa_\beta + \dots$$

и далее совершить обратное преобразование Фурье по κ в интеграле $\int \omega_{\mathbf{k}_0 + \kappa} |a_{\mathbf{k}_0 + \kappa}|^2 d\kappa$.

Рассмотрим вначале первый член

$$\omega_0 \int a_{\mathbf{k}_0 + \kappa}^* a_{\mathbf{k}_0 + \kappa} d\kappa.$$

Подставляя в это выражение

$$a_{\mathbf{k}_0 + \kappa} = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int \psi_0(\mathbf{r}, t) e^{-i\kappa \mathbf{r}} d\mathbf{r}, \quad (32)$$

$$a_{\mathbf{k}_0 + \kappa}^* = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int \psi_0^*(\mathbf{r}, t) e^{i\kappa \mathbf{r}} d\mathbf{r}, \quad (33)$$

получаем

$$\begin{aligned} & \frac{\omega_0}{(2\pi)^d} \int \psi_0(\mathbf{r}, t) \psi_0^*(\mathbf{r}', t) d\mathbf{r} d\mathbf{r}' \int e^{-i\kappa(\mathbf{r} - \mathbf{r}')} d\kappa = \\ & = \omega_0 \int \psi_0(\mathbf{r}, t) \psi_0^*(\mathbf{r}', t) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') d\mathbf{r} d\mathbf{r}' = \omega_0 \int |\psi_0|^2 d\mathbf{r}. \end{aligned}$$

Аналогичным образом преобразуется интеграл

$$\int (\kappa \mathbf{v}_{gr}) a_{\mathbf{k}_0 + \kappa}^* a_{\mathbf{k}_0 + \kappa} d\kappa.$$

При этом нужно помнить, что при обратном фурье-преобразовании $\kappa \rightarrow -i\nabla$. Поэтому второе слагаемое в H_0 записывается как

$$-i \mathbf{v}_{gr} \int \psi_0^* \nabla \psi_0 d\mathbf{r}.$$

Наконец, для третьего члена получаем

$$\frac{1}{2} \omega_{\alpha\beta} \int \kappa_\alpha \kappa_\beta a_{\mathbf{k}_0 + \kappa}^* a_{\mathbf{k}_0 + \kappa} d\kappa = -\frac{1}{2} \omega_{\alpha\beta} \int \psi_0^* \nabla_\alpha \nabla_\beta \psi_0 d\mathbf{r}.$$

Поскольку введенная нами волновая функция ψ (25) есть фурье-образ от $a_{\mathbf{k}}$, то легко можно установить, что уравнение для ψ будет также гамильтоновым:

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\delta H}{\delta \psi^*}. \quad (34)$$

Доказательство этого факта основано только на свойствах преобразования Фурье (*предлагается читателю в качестве упражнения*). Для огибающей ψ_0 уравнение движения будет иметь тот же вид, что и (34). Единственное отличие состоит в том, что гамильтониан H следует заменить на гамильтониан, усредненный по быстрым пространственно-временным осцилляциям. Последнее очень важно, особенно, при учете нелинейных членов. В линейном же случае уравнение для огибающей ψ (здесь и всюду ниже мы будем опускать индекс у ψ_0) записывается в гамильтоновском виде, откуда непосредственно после варьирования следует уравнение движения (27):

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{\delta H_0}{\delta\psi^*} \implies i\psi_t - \omega_0\psi + i(\mathbf{v}_{gr}\nabla)\psi + \frac{1}{2}\omega_{\alpha\beta}\partial_{\alpha\beta}^2\psi = 0,$$

где гамильтониан

$$H_0 = \omega_0 N + \mathbf{v}_{gr}\mathbf{P} + E_{kin}.$$

Введенные здесь величины

$$N = \int |\psi|^2 d\mathbf{r}, \quad \mathbf{P} = -i \int \psi^* \nabla \psi d\mathbf{r},$$

имеют смысл числа частиц (или волн) и импульса волн. По аналогии с квантовой механикой величину

$$E_{kin} = -\frac{\omega_{\alpha\beta}}{2} \int \psi^* \left(\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \right) \psi d\mathbf{r}$$

будем называть кинетической энергией.

Задача 2. Показать, что введенные таким образом величины N и P являются интегралами движения.

2.4 Гамильтоновский формализм для нелинейных волн

Перейдем теперь к учету нелинейных эффектов. Действуя в том же духе, что и для линейных волн, будем обобщать нелинейный осциллятор на совокупность нелинейных осцилляторов. В общем случае гамильтониан с учетом ангармонизмов (т.е. нелинейных членов) должен быть записан в виде:

$$H = H_0 + H_{int},$$

$$\begin{aligned} H_{int} = & \int \frac{1}{3} (U_{kk_1k_2} a_k^* a_{k_1}^* a_{k_2}^* + U_{kk_1k_2}^* a_k a_{k_1} a_{k_2}) \delta_{k+k_1+k_2} d\mathbf{k} d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 + \\ & + \int (V_{k|k_1k_2} a_k^* a_{k_1} a_{k_2} + V_{k|k_1k_2}^* a_k a_{k_1}^* a_{k_2}^*) \delta_{k-k_1-k_2} d\mathbf{k} d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 + \dots, \end{aligned}$$

где H_0 дается (21), а комплексное сопряжение обеспечивает действительность гамильтониана (энергии).

Наличие δ -функций от $\mathbf{k}$, например, $\delta_{k-k_1-k_2}$ во второй строчке, возникает за счет однородности, что, как известно из курса классической механики, приводит к сохранению импульса.

Действительно, рассмотрим уравнения движения (ограничиваясь только квадратичными нелинейными членами)

$$\begin{aligned}\frac{\partial a_k}{\partial t} + i\omega_k a_k &= -i \int U_{kk_1 k_2} a_{k_1}^* a_{k_2}^* \delta_{k+k_1+k_2} d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 - \\ &- i \int V_{k|k_1 k_2} a_{k_1} a_{k_2} \delta_{k-k_1-k_2} d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 - 2i \int V_{k_1|k k_2}^* a_{k_1} a_{k_2}^* \delta_{k_1-k-k_2} d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2, \\ \frac{\partial a_k^*}{\partial t} - i\omega_k a_k^* &= i \int U_{kk_1 k_2}^* a_{k_1} a_{k_2} \delta_{k+k_1+k_2} d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 + \\ &+ i \int V_{k|k_1 k_2}^* a_{k_1}^* a_{k_2}^* \delta_{k-k_1-k_2} d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 + 2i \int V_{k_1|k k_2} a_{k_1}^* a_{k_2} \delta_{k_1-k-k_2} d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2,\end{aligned}$$

и покажем, что они сохраняют полный импульс

$$\mathbf{P} = \int \mathbf{k} |a_k|^2 d\mathbf{k}.$$

Домножая первое уравнение на $\mathbf{k} a_k^*$, а второе — на $\mathbf{k} a_k$, сложим результаты и проинтегрируем по всем $\mathbf{k}$. Тогда в левой части мы получим $\frac{d\mathbf{P}}{dt}$, а в правой — 0. При этом каждое слагаемое, содержащее ту или иную вершину U или V , обратится в нуль по отдельности в силу наличия δ -функции, например, интеграл

$$\int \mathbf{k} U_{kk_1 k_2} a_k^* a_{k_1}^* a_{k_2}^* \delta_{k+k_1+k_2} d\mathbf{k} d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 = 0.$$

Поскольку $U_{kk_1 k_2}$ — по определению симметричный объект по всем своим аргументам, то мы можем записать после симметризации этот интеграл как

$$\frac{1}{3} \int (\mathbf{k} + \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) U_{k+k_1+k_2} a_k^* a_{k_1}^* a_{k_2}^* \delta_{k+k_1+k_2} d\mathbf{k} d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2,$$

который, как легко видно, обращается в нуль за счет δ -функции. Аналогичным образом можно убедиться, что и все другие интегралы обратятся в нуль благодаря свойствам симметрии матричных элементов $V_{k|k_1 k_2}$ и соответствующим δ -функциям.

Как мы уже видели на примере нелинейного осциллятора, кубическая нелинейность в гамильтониане ответственна за рождение новых гармоник. С точки зрения квантовой механики, когда переменные a_k^* и a_k являются аналогами операторов рождения и уничтожения, например, гамильтониан

$$\frac{1}{3} \int U_{kk_1 k_2} a_k^* a_{k_1}^* a_{k_2}^* \delta_{k+k_1+k_2} d\mathbf{k} d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2$$

ответственен за рождение трех квантов из вакуума, в каждом акте которого должны выполняться законы сохранения энергии и импульса

(условия резонанса):

$$0 = \omega_k + \omega_{k_1} + \omega_{k_2}, \quad (35)$$

$$0 = \mathbf{k} + \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2. \quad (36)$$

Такой процесс является разрешенным, если одна из волн имеет отрицательную частоту, соответственно энергия этой волны (для малой амплитуды) $\omega|a|^2$ является отрицательной. Такого рода волны существуют для сред с потоками. Как известно, частота ω волны при переходе в движущуюся систему испытывает эффект Доплера, $\omega \rightarrow \omega - \mathbf{k}\mathbf{v}$. Благодаря этому, волна может иметь отрицательную энергию. Например, в плазме, в которой имеется пучок, средняя (направленная) энергия которого больше его температуры, существуют (благодаря пучку) волны с отрицательной энергией. Соответственно, условие резонанса для процесса (35) может быть выполнено. Комплексно-сопряженные вклады в H (пропорциональные $U_{kk_1k_2}^*$) соответствуют обратному процессу, когда одновременно умирают три кванта.

Процессы, ответственные за взаимодействие

$$H_{int} = \int (V_{kk_1k_2} a_k^* a_{k_1} a_{k_2} + V_{k|k_1k_2}^* a_k a_{k_1}^* a_{k_2}^*) \delta_{k-k_1-k_2} d\mathbf{k} d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2,$$

описывают распад, когда

$$\omega_k = \omega_{k_1} + \omega_{k_2}, \quad (37)$$

$$\mathbf{k} = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2. \quad (38)$$

Законы дисперсии, для которых выполнены условия резонанса (37), называют распадными. Однако, не все законы дисперсии являются распадными.

Задача 3. Показать, что для $\omega = ck^\alpha$ с $\alpha > 1$ закон дисперсии является распадным и соответственно нераспадным при $\alpha < 1$.

Следующие члены в гамильтониане описывают четырехволновые процессы. Наиболее важным из них является процесс рассеяния, для которого

$$\omega_k + \omega_{k_1} = \omega_{k_2} + \omega_{k_3}, \quad (39)$$

$$\mathbf{k} + \mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3. \quad (40)$$

Этому резонансу отвечает гамильтониан

$$\frac{1}{2} \int T_{kk_1|k_2k_3} a_k^* a_{k_1}^* a_{k_2} a_{k_3} \delta_{k+k_1+k_2} d\mathbf{k} d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 d\mathbf{k}_3.$$

В этом случае матричный элемент обладает следующими свойствами симметрии

$$T_{kk_1|k_2k_3} = T_{k_1k|k_2k_3} = T_{kk_1|k_3k_2} = T_{k_2k_3|kk_1}^*.$$

Этот процесс является важным, если все трехволновые процессы — процессы рождения трех волн из вакуума (35) и процессы распада (37) — запрещены, то есть являются нерезонансными. По этой причине — в силу нерезонансности — они могут быть исключены. Это, как мы увидим далее, можно достигнуть с помощью канонических преобразований.

Лекция 3 «Канонические переменные, нахождение законов дисперсии и матричных элементов»

3.1 Краткое содержание предыдущей лекции

На прошлой лекции мы рассмотрели, как выглядит гамильтоновское описание линейных волн. Их основная характеристика есть зависимость частоты от волнового вектора $\omega = \omega_k$ — закон дисперсии, а гамильтониан представляет собой интеграл по всем осцилляторам $\int \omega_k |a_k|^2 d\mathbf{k}$. Поведение нормальных амплитуд a_k от времени определяется из линейного уравнения $\partial a_k / \partial t + i\omega_k a_k = 0$, не зависит от поведения другого осциллятора (другой волны). Исходя из этого, мы нашли то общее, что объединяет все волны вне зависимости от их природы. Это распространение волнового пакета, т. е. имеющего распределение $|a_k|^2$ в виде острого пика в точке $\mathbf{k} = \mathbf{k}_0$ с шириной $\Delta k \ll |\mathbf{k}_0|$, которое после перехода в систему координат, движущуюся с групповой скоростью, может быть описано с помощью линейного дифференциального уравнения типа Шредингера для огибающей. Обобщая наши знания по нелинейному осциллятору, для нелинейных волн мы нашли общие выражения для гамильтониана взаимодействия, как разложения по степеням a_k^* и a_k , которые с квантово-механической точки зрения представляют собой аналоги операторов рождения и уничтожения. Последнее позволило нам провести простейшую классификацию нелинейных волновых процессов.

В этой лекции мы рассмотрим на примерах, каким образом могут введены канонические переменные и соответственно вычислены законы дисперсии и матричные элементы нелинейного взаимодействия. Начнем со звуковых волн.

3.2 Нелинейные звуковые волны

Для этого нам нужно вспомнить основные уравнения гидродинамики (точнее — газодинамики). Эти уравнения описывают колебания газа. Основными характеристиками этих колебаний являются плотность ρ , скорость газа $\mathbf{v}$, давление газа p , которое предполагается зависящим от плотности и энтропии s , т. е. $p = p(\rho, s)$.

Первое уравнение есть уравнение непрерывности для плотности ρ :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0,$$

которое представляет собой закон сохранения массы.

Второе уравнение — уравнение Эйлера:

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right] = -\nabla p. \quad (41)$$

Левая часть этого уравнения есть масса (единицы объема) ρ , умноженная на ускорение $\frac{d\mathbf{v}}{dt}$. Поскольку скорость $\mathbf{v}$ есть функция координат $\mathbf{r}$ и времени t , а по

определению $\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}$, то при вычислении ускорения необходимо дифференцировать $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ как сложную функцию. В результате

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\dot{\mathbf{r}} \nabla) \mathbf{v}.$$

Таким образом,

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla).$$

Это есть так называемая материальная производная.

Справа в уравнении Эйлера (41) стоит сила $-\nabla p$ (действующая на единицу массы). Такая ситуация реализуется, если затуханием за счет вязкости можно пренебречь, то есть, как говорят, для идеальной жидкости (газа). В этом случае говорят об идеальной гидродинамике (газодинамике). Для идеальных жидкостей энтропия s каждого жидкого элемента сохраняется:

$$\frac{ds}{dt} \equiv \frac{\partial s}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) s = 0.$$

Такие величины как s , неизменные вдоль траектории «жидкой» частицы, называют лагранжевыми инвариантами.

Если при $t = 0$ энтропия s всюду постоянна, т. е. не зависит от координат, то тогда, в силу линейности уравнения, s будет оставаться постоянной величиной при всех $t > 0$. В такой ситуации энтропия в уравнении состояния $p = p(\rho, s)$ выступает в качестве параметра, и давление таким образом изменяется только благодаря плотности. Такого рода течения называют изэнтропическими.

Как известно, звуковые волны являются продольными. Последнее означает, что фурье-амплитуда скорости параллельна волновому вектору $\mathbf{k}$. Очевидно, что обратное фурье-преобразование дает $\mathbf{v} = \nabla \Phi$, т. е. мы приходим к так называемым потенциальным течениям жидкости.

В этом случае, благодаря известному из векторного анализа равенству

$$(\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = \nabla \frac{\mathbf{v}^2}{2} - [\mathbf{v} \times \text{rot } \mathbf{v}],$$

уравнение Эйлера (41) может быть раз проинтегрировано относительно координат:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{(\nabla \Phi)^2}{2} = -w(\rho) + f(t),$$

где $w(\rho)$ – энтальпия, $dw = dp/\rho$. В силу определения потенциала скорости (к Φ можно добавить произвольную функцию времени) функцию $f(t)$ можно положить равной нулю. Полученное уравнение на Φ называется нестационарным уравнением Бернулли:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{(\nabla \Phi)^2}{2} = -w(\rho), \quad (42)$$

которое вместе с уравнением непрерывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \nabla \Phi) = 0, \quad (43)$$

образует замкнутую систему для плотности ρ и потенциала Φ .

Рассмотрим теперь (полную) энергию газа

$$H = \int \left[\frac{\rho (\nabla \Phi)^2}{2} + \varepsilon(\rho) \right] d\mathbf{r}.$$

В этом выражении первый член есть кинетическая энергия, второе слагаемое представляет собой внутреннюю энергию газа, которая в силу термодинамических соотношений связана с энтальпией следующим равенством:

$$\frac{\partial \varepsilon(\rho)}{\partial \rho} = w(\rho).$$

Покажем теперь, что уравнения движения (42) и (43) могут быть представлены в гамильтоновой форме:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\delta H}{\delta \Phi}; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial t} = - \frac{\delta H}{\delta \rho}. \quad (44)$$

Докажем вначале, что уравнение непрерывности (43) записывается в таком виде. Вычисляем вначале вариацию гамильтониана при изменении Φ . Очевидно, что

$$\delta H = \int p (\nabla \Phi, \nabla \delta \Phi) d\mathbf{r}.$$

Интегрируя это выражение по частям (точнее — используя формулу Грина), получаем

$$\delta H = - \int \operatorname{div} (\rho \nabla \Phi) \delta \Phi(r) d\mathbf{r}.$$

Вспоминая, что

$$\frac{\delta \Phi(\mathbf{r})}{\delta \Phi(\mathbf{r}')} = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'),$$

окончательно приходим к уравнению непрерывности.

Вариация H относительно вариаций плотности $\delta \rho$ дает

$$\delta H = \int \left[\frac{(\nabla \Phi)^2}{2} + w(\rho) \right] \delta \rho d\mathbf{r}$$

или

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{(\nabla \Phi)^2}{2} + w(\rho) = 0.$$

Таким образом, мы показали, что уравнения (42) и (43) являются гамильтоновыми, при этом плотность ρ представляет собой обобщенную координату, а потенциал Φ имеет смысл обобщенного импульса.

Чтобы найти закон дисперсии и нормальные переменные a и a^* , нужно выделить из разложения гамильтониана по степеням канонических переменных квадратичный гамильтониан H_0 . Такое разложение получается после подстановки

плотности $\varrho = \varrho_0 + \varrho'$, где ϱ_0 есть средняя плотность, а ϱ' — ее флуктуация, в выражении для гамильтониана H . Подстановка в кинетический член дает два слагаемых: одно квадратичное — $\frac{1}{2} \int \rho_0 (\nabla \Phi)^2 d\mathbf{r}$, другое — кубическое $\frac{1}{2} \int \varrho' (\nabla \Phi)^2 d\mathbf{r}$. Легко показать, что разложение внутренней энергии в ряд по ϱ'

$$\int \varepsilon(\rho) d\mathbf{r} = \int \varepsilon(\rho_0) d\mathbf{r} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial \rho_0^2} \int (\varrho')^2 d\mathbf{r} + \int q c_s^2 \frac{\varrho'^3}{\rho_0^2} d\mathbf{r} + \dots$$

не содержит линейный член $\int \varrho' d\mathbf{r} \equiv 0$ благодаря закону сохранения массы (q — безразмерная константа порядка 1). Таким образом,

$$H_0 = \int \left[\frac{\rho_0 (\nabla \Phi)^2}{2} + \frac{1}{2} \frac{c_s^2}{2\rho_0} (\varrho')^2 \right] d\mathbf{r}, \quad (45)$$

где мы воспользовались следующими из термодинамики соотношениями

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} = w(\rho); \quad \frac{\partial w}{\partial \rho} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \rho} = \frac{c_s^2}{\rho},$$

в которых c_s^2 есть квадрат скорости звука (здесь, напомним, производная $\frac{\partial p}{\partial \rho}$ берется при постоянной энтропии!).

Совершим теперь фурье-преобразование в интеграле (45). Для этого нужно выразить $\rho(\mathbf{r})$ и $\Phi(\mathbf{r})$ через их фурье-образы:

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{r}) &= \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int \rho_k e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} d\mathbf{k}; \quad \rho_k = \rho_{-k}^*, \\ \Phi(\mathbf{r}) &= \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int \Phi_k e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} d\mathbf{k}; \quad \Phi_k = \Phi_{-k}^*, \end{aligned}$$

далее подставить эти выражения в интеграл (45) и затем произвести сначала интегрирование по $\mathbf{r}$, а потом — по $\mathbf{k}'$ (d — размерность пространства). При этом интегрировании нужно помнить, что при переходе в $\mathbf{k}$ -пространство оператор ∇ переходит в вектор $i\mathbf{k}$. В результате этих несложных преобразований H_0 записывается в виде

$$H_0 = \int \left\{ \frac{\rho_0 k^2}{2} |\Phi_k|^2 + \frac{c_s^2}{2\rho_0} |\rho_k|^2 \right\} d\mathbf{k}.$$

Как следует из гамильтоновых уравнений, Φ имеет смысл обобщенного импульса, а ρ — обобщенной координаты. Более того, первое слагаемое в подынтегральном выражении есть кинетическая энергия, а второе — потенциальная энергия каждого осциллятора, а суммирование (т.е. интегрирование по всем $\mathbf{k}$) дает общую энергию всех осцилляторов (невзаимодействующих). Собственные частоты осцилляторов находятся как произведение $\rho_0 k^2$ и c_s^2/ρ_0 , т.е.

$$\omega_k^2 = \rho_0 k^2 \cdot c_s^2 / \rho_0 \equiv k^2 c_s^2.$$

Это дает нам закон дисперсии звуковых волн: $\omega_k = kc_s$. К этому же ответу можно прийти и стандартным путем, линеаризуя уравнения движения:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\rho' + \rho_0\Delta\Phi &= 0, \\ \frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{c_s^2}{\rho_0}\rho' &= 0.\end{aligned}$$

Подставляя ρ' , $\Phi \sim e^{-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{r}}$, получаем

$$\begin{aligned}-i\omega\rho_k - \rho_0k^2\Phi_k &= 0, \\ -i\omega\Phi_k + \frac{c_s^2}{\rho_0}\rho_k &= 0.\end{aligned}$$

Условие разрешимости $\det| \quad | = 0$ дает $\omega^2 = k^2c_s^2$.

Следует отметить, что в этом случае уравнение для плотности (после исключения Φ) превращается в волновое уравнение:

$$\frac{\partial^2\rho'}{\partial t^2} - c_s^2\Delta\rho' = 0.$$

Задача 1. Найти закон дисперсии ионно-звуковых волн в плазме, считая температуру электронов много больше температуры ионов..

Указание: Ионно-звуковые колебания — это колебания ионов в присутствии электронов. Из-за большой разницы в массах электронов m и ионов M электроны успевают термализоваться, то есть можно считать, что их плотность распределена по Больцману: $n_e = n_0 e^{\frac{e\varphi}{T_e}}$, где T_e — температура электронов. Температура ионов при этом считается равной нулю.

Поэтому для ионной жидкости можно записать два уравнения:

$$\begin{aligned}\frac{\partial n}{\partial t} + \operatorname{div}(n\mathbf{v}) &= 0, \\ \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} &= -\frac{e\nabla\varphi}{M},\end{aligned}$$

где потенциал φ определяется из решения уравнения Пуассона

$$\Delta\varphi = -4\pi e \left(n - n_0 e^{\frac{e\varphi}{T_e}} \right).$$

Задача 2. Найти канонические переменные для потенциальных ионно-звуковых волн.

Теперь перейдем к следующему вопросу — как ввести нормальные переменные a_k и a_k^* для звука. Алгоритм очевиден, поскольку H_0 представляет собой сумму осцилляторов. Нужно добиться, чтобы гамильтониан одного осциллятора был равен $\omega_k|a_k|^2$.

Легко видно, что преобразования

$$\rho_k = \left(\frac{\rho_0 k^2}{2\omega_k} \right)^{1/2} (a_k + a_{-k}^*), \quad (46)$$

$$\Phi_k = -i \left(\frac{\omega_k}{2\rho_0 k^2} \right)^{1/2} (a_k - a_{-k}^*), \quad (47)$$

которые аналогичны введению a и a^* для одного осциллятора, решают поставленную задачу и таким образом

$$H_0 = \int \omega_k |a_k|^2 d\mathbf{k}.$$

Теперь перейдем к вычислению матричных элементов. Гамильтониан взаимодействия (трехволновой) имеет вид:

$$H_{int} = \int \left[\frac{\rho'(\nabla\Phi)^2}{2} + qc_s^2 \frac{\rho'^3}{\rho_0^2} \right] d\mathbf{r}, \quad (48)$$

где q — число, которое находится при разложении $\varepsilon(\rho)$ в ряд по отклонению ρ' . Теперь, для того чтобы вычислить матричные элементы $U_{kk_1k_2}$ и $V_{kk_1k_2}$, необходимо подставить (46), (47) в H_{int} (48).

Рассмотрим вначале первое слагаемое в (48) и совершим в нем преобразование Фурье по координатам, подставляя

$$\varrho'(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \rho_k e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} d\mathbf{k},$$

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \Phi_k e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} d\mathbf{k}.$$

В результате

$$\int \frac{\delta\rho(\nabla\Phi)^2}{2} d\mathbf{r} = \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \right)^3 \rho_k(\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2) \Phi_{k_1} \Phi_{k_2} e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2)\mathbf{r}} d\mathbf{r} d\mathbf{k} d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2.$$

Интегрирование по $\mathbf{r}$ дает δ -функцию

$$\frac{1}{2} \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int (\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2) \rho_k \Phi_{k_1} \Phi_{k_2} \delta_{\mathbf{k}+\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2} d\mathbf{k} d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2.$$

Далее подставляем ρ_k , Φ_k (46, 47), выраженные через a_k и a_k^* . В результате имеем:

$$\frac{1}{2} \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int \frac{1}{22^{1/2}} \left(\frac{\rho_0 k^2 \omega_1 \omega_2}{\omega_k \rho_0^2 k_1^2 k_2^2} \right)^{1/2} (\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2) [(a_k + a_{-k}^*)(a_{k_1} + a_{-k_1}^*)(a_{k_2} - a_{-k_2}^*)] \cdot$$

$$\cdot \delta_{\mathbf{k}+\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2} d\mathbf{k} d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2.$$

Отсюда вклад в $U_{kk_1k_2}$ равен:

$$U_{kk_1k_2}^{(1)} = \frac{1}{4(2\pi)^{d/2}} \sqrt{\frac{c_s}{2\rho_0}} (kk_1k_2)^{-1/2} [k(\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2) + k_1(\mathbf{k}\mathbf{k}_2) + k_2(\mathbf{k}\mathbf{k}_1)],$$

для $V_{kk_1k_2}^{(1)}$ аналогично имеем:

$$V_{kk_1k_2}^{(1)} = \frac{1}{4(2\pi)^{d/2}} \sqrt{\frac{c_s}{2\rho_0}} (kk_1k_2)^{-1/2} [k(\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2) + k_1(\mathbf{k}\mathbf{k}_2) + k_2(\mathbf{k}\mathbf{k}_1)] \equiv U_{kk_1k_2}^{(1)}.$$

Теперь подставим во второе слагаемое

$$\int \frac{qc_s^2}{\rho_0^2} (\rho')^3 d\mathbf{r} = \int \frac{qc_s^2}{(2\pi)^{d/2} \rho_0^2} \left(\frac{\rho_0}{2c_s} \right)^{3/2} (kk_1k_2)^{1/2} \cdot (a_k + a_{-k}^*)(a_{k_1} + a_{-k_1}^*)(a_{k_2} + a_{-k_2}^*) \delta_{k+k_1+k_2} d\mathbf{k} d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2.$$

Откуда

$$U_{kk_1k_2}^{(2)} = V_{kk_1k_2}^{(2)} = \frac{3q}{2(2\pi)^{d/2}} \left(\frac{c_s}{2\rho_0} \right)^{1/2} (kk_1k_2)^{1/2}.$$

В результате получаем, что

$$V_{kk_1k_2} = U_{kk_1k_2} = \frac{1}{4(2\pi)^{d/2}} \left(\frac{c_s}{2c\rho_0} \right)^{1/2} (kk_1k_2)^{1/2} \left[\frac{\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2}{k_1k_2} + \frac{\mathbf{k}\mathbf{k}_2}{kk_2} + \frac{\mathbf{k}\mathbf{k}_1}{kk_1} + 6q \right].$$

Здесь следует сделать одно замечание. Как следует из этой формулы, $U_{kk_1k_2}$ и $V_{kk_1k_2}$ совпадают, но это совпадение формальное, поскольку матричные элементы $U_{kk_1k_2}$ и $V_{kk_1k_2}$ определены на разных резонансных поверхностях:

$$\begin{aligned} \mathbf{k} &= -\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2, \\ \mathbf{k} &= \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2. \end{aligned}$$

Задача 3. Найти константу q , предполагая $p \sim \rho^\gamma$, где γ — показатель адиабаты.

3.3 Электромагнитные волны в нелинейном диэлектрике

Следующий пример — электромагнитные волны в нелинейном диэлектрике.

Для простоты ограничимся одномерным распространением, считая электрическое поле линейно поляризованным. В этом случае уравнения Максвелла

$$\text{rot } E = -\frac{1}{c} \frac{\partial B}{\partial t}, \quad \text{rot } B = \frac{1}{c} \frac{\partial D}{\partial t} \quad (49)$$

сводятся к одному уравнению для поля E :

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 D}{\partial t^2} = 0.$$

При взаимодействии света со средой электрическая индукция D выражается следующим образом через E :

$$D(x, t) = \hat{\varepsilon}(t)E(x, t) + \chi E^3(x, t), \quad (50)$$

где $\hat{\varepsilon}$ — интегральный оператор: $\hat{\varepsilon}(t)E(x, t) = \int_{-\infty}^t \varepsilon(t - t')E(x, t')dt'$, а второе слагаемое отвечает эффекту Керра; χ — константа Керра.

Если в линейном соотношении

$$D(x, t) = \hat{\varepsilon}(t)E(x, t)$$

совершить преобразование Фурье по времени, то мы придем к классическому соотношению в линейной электродинамике сплошных сред:

$$D_\omega = \varepsilon(\omega)E_\omega, \quad (51)$$

где $\varepsilon(\omega) = \int_0^\infty \varepsilon(t)e^{i\omega t}dt$ — диэлектрическая проницаемость на частоте ω . Как известно из электродинамики (см., например, Ландау — Лифшиц, «Электродинамика сплошных сред» [2]), зависимость ε от частоты ω означает наличие частотной (временной) дисперсии. В общем случае, ε зависит не только от частоты, но и от волнового числа k . В последнем случае говорят о пространственной дисперсии. Для электромагнитных волн, взаимодействующих со средой, такая зависимость, однако, является слабой. Это следует из простой оценки. Характерная энергия перехода из одного состояния в возбужденное под действием электромагнитной волны порядка боровской энергии e^2/r_B (r_B — боровский радиус). Эта величина есть энергия кванта волны, т. е. $\sim \hbar c/\lambda$ (λ — длина волны). Из сравнения этих величин следует, что отношение $r_B/\lambda \sim \alpha = \frac{e^2}{\hbar c}$, т. е. эффекты пространственной дисперсии малы. Это относится не только к линейной характеристике $\varepsilon(\omega)$, но также и к нелинейному члену в (50) (см. Ландау — Лифшиц, «Электродинамика сплошных сред» [2]). Отметим, что в ситуации общего положения χ должна быть оператором, для которого эффекты пространственной дисперсии также малы. Если речь идет об относительно узком частотном распределении волн, то χ можно считать константой.

Далее мы будем считать, что $\varepsilon(\omega)$ в некоторой частотной области — зоне прозрачности — является действительной величиной, т. е. мнимой частью будем пренебрегать. Если подставить теперь соотношение (51) в волновое уравнение, то мы придем к дисперсионному соотношению

$$k^2 = \frac{\omega^2 \varepsilon(\omega)}{c^2},$$

то есть k явно выражается через частоту ω . Из-за этого для введения гамильтоновского описания нужно поменять x и t местами, то есть мы представим уравнение движения в виде:

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{\delta H}{\delta \Phi}; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x} = -\frac{\delta H}{\delta \rho},$$

аналогичном представлению для нелинейных звуковых колебаний. Разница этих уравнений по сравнению с (44) состоит в замене t на x .

Вместо E и B (магнитного поля) введем две величины ρ и Φ с помощью равенств:

$$E = \frac{\sqrt{4\pi}}{c} \rho; \quad B = \sqrt{4\pi} \frac{\partial \Phi}{\partial t}.$$

В этом случае для ρ и Φ мы получаем уравнения (тождественные уравнениям Максвелла (49))

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{1}{c^2} \left(\widehat{\varepsilon} \rho + \frac{4\pi x}{c^2} \rho^3 \right) = 0.$$

Если сравнить эти уравнения со звуковыми (в линейном приближении)

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{c_s^2}{\rho_0} \rho' = 0,$$

то можно сразу, меняя t и x местами, написать для (49) выражение для гамильтониана:

$$H = \int \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2c^2} \rho \widehat{\varepsilon} \rho + \frac{\pi \chi}{c^4} \rho^4 \right\} dt \equiv \int \frac{1}{8\pi} \left[B^2 + E \widehat{\varepsilon} E + \frac{\chi}{2} E^4 \right] dt.$$

Отсюда мы можем сразу получить закон дисперсии и вычислить соответствующий матричный элемент.

Квадратичная часть H , после фурье-преобразования по времени, равна

$$H_0 = \int \left[\frac{\omega^2}{2} |\Phi_\omega|^2 + \frac{\varepsilon(\omega)}{2c^2} (\rho_\omega)^2 \right] d\omega.$$

Закон дисперсии (как в случае осциллятора) отсюда получается перемножением ω^2 и $\varepsilon(\omega)/c^2$, т. е.

$$k^2 = \frac{\omega^2 \varepsilon(\omega)}{c^2}.$$

Далее переходим к нормальным переменным (формулы практически те же, что и (46, 47)):

$$\begin{aligned} \rho_\omega &= \sqrt{\frac{\omega^2}{2k(\omega)}} (a_\omega^* + a_{-\omega}), \\ \varphi_\omega &= -i \sqrt{\frac{k(\omega)}{2\omega^2}} (a_\omega - a_{-\omega}^*). \end{aligned}$$

В результате

$$H = \int k(\omega) |a_\omega|^2 d\omega + \frac{1}{2} \int T_{\omega_1 \omega_2 \omega_3 \omega_4} a_{\omega_1}^* a_{\omega_2}^* a_{\omega_3} a_{\omega_4} \delta_{\omega_1 + \omega_2 - \omega_3 - \omega_4} \prod_i d\omega_i,$$

где четырехволновый матричный элемент

$$T_{\omega_1\omega_2\omega_3\omega_4} = \frac{3\chi}{4\pi c^4} \left[\frac{\omega_1^2\omega_2^2\omega_3^2\omega_4^2}{k_1k_2k_3k_4} \right]^{1/2}, \quad \text{где } k_i = k(\omega_i).$$

3.4 Трехволновые нелинейные процессы. Распадная неустойчивость

После того как мы поняли, каким образом могут вычисляться матричные элементы взаимодействия, рассмотрим, к каким эффектам приводят трехволновые нелинейные процессы.

Первый вопрос, который мы рассмотрим, – это вопрос о распадной неустойчивости монохроматической волны.

Начнем с гамильтониана, в котором с самого начала будем пренебрегать членами $\sim (a^*)^3$, которые являются резонансными только в неустойчивых средах, например, в плазме с пучками. В данном случае H имеет вид:

$$H = \int \omega_k |a_k|^2 d\mathbf{k} + \int V_{k|k_1k_2} (a_k^* a_{k_1} a_{k_2} + a_k a_{k_1}^* a_{k_2}^*) \delta_{k-k_1-k_2} \prod_i d\mathbf{k}_i,$$

где для простоты матричный элемент $V_{k|k_1k_2}$ предполагается действительным. Соответственно уравнение движения запишется в виде:

$$\frac{\partial a_k}{\partial t} + i\omega_k a_k = \quad (52)$$

$$= -i \int V_{k|k_1k_2} a_{k_1} a_{k_2} \delta_{k-k_1-k_2} d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 - 2i \int V_{k_1|kk_2} a_{k_1} a_{k_2}^* \delta_{k_1-k-k_2} d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2. \quad (53)$$

Пусть в среде распространяется монохроматическая волна

$$a_k = A \delta_{k-k_0} e^{-i\omega_{k_0} t}. \quad (54)$$

Строго говоря, это не есть решение уравнения (53). Как мы знаем (см. лекцию 1), квадратичная нелинейность приводит к появлению второй и нулевой гармоник. В свою очередь вторая и нулевая гармоники приводят к перенормировке частоты — нелинейному сдвигу частоты, пропорциональному $|A|^2$, т.е. эффекту следующего порядка малости по отношению к амплитуде. Таким образом, с точностью до кубических нелинейных членов (в уравнениях движения) (54) можно считать решением уравнения (53). Рассмотрим теперь вопрос об устойчивости этого решения, представив a_k в виде:

$$a_k = A \delta_{k-k_0} e^{-i\omega_{k_0} t} + \alpha_k,$$

где α_k — малое возмущение. Подставим это выражение в левую часть уравнения (53) и удержим только линейные по α члены (или, как говорят, линеаризуем уравнение (53) на фоне монохроматической волны (54)). В результате линеаризации

уравнение для возмущений α_k будет иметь вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha_k}{\partial t} + i\omega_k \alpha_k = & -2iV_{k|k_0, k-k_0} A e^{-i\omega_{k_0} t} \alpha_{k-k_0} - \\ & -2iV_{k_0|k, k_0-k} A e^{-i\omega_{k_0} t} \alpha_{k_0-k}^* - 2iV_{k_0+k|k, k_0} A^* e^{+i\omega_{k_0} t} \alpha_{k+k}. \end{aligned} \quad (55)$$

Каждый из трех стоящих в правой части членов имеет разный физический смысл. Поскольку мы предполагаем ангармонизм слабым, приближенно мы можем положить $\alpha_k \sim e^{-i\omega_k t}$. В этом случае первый член в правой части (55) ведет себя пропорционально экспоненте $e^{-i\omega_{k_0} t - i\omega_{k-k_0} t}$, то есть это процесс, когда к частоте накачки (монохроматической волне) добавляется частота ω_{k-k_0} , чтобы породить большую частоту ω_k :

$$\omega_{k_0} + \omega_{k-k_0} = \omega_k. \quad (56)$$

Этот процесс, очевидно, не есть процесс распада, а есть процесс присоединения меньшей частоты, чтобы появилась другая частота ω_k , большая ω_{k_0} .

Следующее слагаемое в правой части (55) пропорционально экспоненте $e^{-i\omega_{k_0} t} e^{+i\omega_{k_0-k} t}$; оно становится резонансным при условии

$$\omega_{k_0} = \omega_{k_0-k} + \omega_k, \quad (57)$$

что соответствует процессу, в котором происходит распад волны накачки на две волны с меньшими частотами. Это другой резонанс, отличный от (56).

Наконец, последний член имеет экспоненту $e^{i\omega_{k_0} t - i\omega_{k_0+k} t}$, то есть соответствующий процесс является резонансным и тем самым существенным вблизи поверхности

$$\omega_k = \omega_{k_0+k} - \omega_{k_0}. \quad (58)$$

Это отличный резонанс от предыдущего, ответственного за распад (57).

Таким образом, мы имеем три различных резонанса. Их ширина, как мы увидим далее, мала, в силу малости амплитуды. Пересечением этих резонансов за счет нелинейности можно пренебречь. По этой причине каждый из этих процессов может быть рассмотрен по отдельности.

Начнем с анализа второго резонанса. Для него мы имеем:

$$\frac{\partial \alpha_k}{\partial t} + i\omega_k \alpha_k = -2iV_{k_0|kk-k_0} A e^{-i\omega_{k_0} t} \alpha_{k_0-k}^*.$$

Для замыкания этого уравнения нужно записать уравнение для $\alpha_{k_0-k}^*$, в котором нужно выделить соответствующий резонанс:

$$\frac{\partial \alpha_{k_0-k}^*}{\partial t} - i\omega_{i\omega_{k_0-k}} \alpha_{k_0-k}^* = 2iV_{k_0|kk-k_0} A^* e^{i\omega_{k_0} t} \alpha_k.$$

Таким образом, эти уравнения оказываются замкнутыми! Но они содержат временную экспоненту, которую можно исключить, сделав замену переменных:

$$C = \alpha_k e^{-i\omega_{k_0} t}; \quad D = \alpha_{k_0-k}^*.$$

В результате этой замены временная экспонента исчезает из уравнений:

$$\begin{aligned}\frac{\partial C}{\partial t} + i(\omega_k - \omega_{k_0})C &= -2iVAD, \\ \frac{\partial D}{\partial t} - i\omega_{k_0-k}D &= 2iV^*AC,\end{aligned}$$

(здесь $V_{k_0|kk-k_0} \equiv V$), и по этой причине решение этой системы ищется в виде $C, D \sim e^{\lambda t}$, где λ находится из квадратного уравнения:

$$\lambda^2 + i(\omega_k - \omega_{k_0} - \omega_{k_0-k})\lambda - \omega_{k_0-k}(\omega_k - \omega_{k_0}) - 4|V|^2|A|^2 = 0,$$

решение которого

$$\lambda_{1,2} = \frac{i}{2}(\omega_k - \omega_{k_0} - \omega_{k_0-k}) \pm \left[4|V|^2|A|^2 - \frac{(\omega_k - \omega_{k_0} - \omega_{k_0-k})^2}{4} \right]^{1/2}.$$

Отсюда инкремент неустойчивости дается выражением

$$\gamma = \left[4|V|^2|A|^2 - \frac{(\omega_k - \omega_{k_0} - \omega_{k_0-k})^2}{4} \right]^{1/2}. \quad (59)$$

Эта неустойчивость называется распадной. Из (59) следует, что инкремент γ достигает своего максимума $2|V||A|$ на резонансной поверхности

$$\omega_{k_0} = \omega_k + \omega_{k_0-k}.$$

Ширина этого резонанса по частоте $\Delta\omega = 8|V||A|$, то есть в четыре раза больше максимального инкремента. Важно, что этот резонанс отстроен от двух других резонансов. Наиболее близко эти резонансы подходят друг к другу при $k \rightarrow 0$, т. е. когда две резонансные поверхности (57) и (58) подходят друг к другу. Только в этом случае требуется учитывать оба резонанса одновременно. В этом случае распадная неустойчивость модифицируется (мы не будем рассматривать этот вопрос — впервые он был рассмотрен в статье [3]). При k , сравнимых с k_0 , эти резонансы отодвинуты друг от друга на величину порядка частоты ω_{k_0} .

Задача 4. Найти поведение амплитуд вблизи резонанса (58).

Лекция 4 «Система трех волн»

4.1 Краткое содержание предыдущей лекции

На прошлой лекции мы рассмотрели, как устроена распадная неустойчивость монохроматической волны с частотой $\omega = \omega(k_0)$ и волновым вектором $k = k_0$. Эта неустойчивость развивается около поверхности

$$\begin{aligned}\omega_0 &= \omega_{k_1} + \omega_{k_2}, \\ \mathbf{k}_0 &= \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2,\end{aligned}\tag{60}$$

достигая на ней максимума инкремента. Как резонанс, эта неустойчивость имеет ширину порядка максимального инкремента. Частным случаем распадной неустойчивости монохроматической волны является параметрическая неустойчивость (рассмотренная нами на первой лекции), которая развивается вблизи резонанса $\Omega = 2\omega_0$, где Ω — частота накачки, а ω_0 — частота осциллятора.

В результате процесса распада (60) происходит перекачка энергии из основной компоненты во вторичные волны. Ясно, что, когда амплитуды вторичных волн будут сравнимы с амплитудой основной волны, возникнет обратное влияние вторичных волн на основную компоненту. В этом случае уже нельзя ограничиться линейным приближением, необходимо рассматривать нелинейные эффекты и соответственно нелинейные уравнения.

4.2 Система трех волн

Предположим, что у нас есть три волновых пакета, несущие частоты и волновые векторы которых находятся в резонансе (60). Когда речь идет о волновых пакетах, мы считаем, что они узкие, т. е.

$$\omega(\mathbf{k}_i + \kappa) = \omega(\mathbf{k}_i) + \kappa \mathbf{v}_i + \dots,$$

где $\mathbf{v}_i = \partial\omega/\partial\mathbf{k}_i$ — групповая скорость i -го пакета, а характерное изменение κ внутри i -го пакета предполагается малым: $\Delta k_i \ll k_i$. В этом случае, как мы знаем из лекции 2, можно ввести огибающую для каждого пакета как фурье-образ от амплитуды $c_i(\kappa, t) \equiv a(\mathbf{k}_i + \kappa, t)$:

$$\psi_i(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int c_i(\kappa, t) e^{i\kappa \mathbf{r}} d\mathbf{r}.\tag{61}$$

Для каждой огибающей $\psi_i(\mathbf{r}, t)$ нужно написать свое уравнение. Здесь рецепт следующий. Необходимо подставить в гамильтониан H выражение для огибающей (или $c(\kappa)$) и произвести усреднение по времени, помня, что огибающая i -го пакета $\psi_i(\mathbf{r}, t) \propto e^{-i\omega_i t}$.

В линейном случае, для одного пакета с $\mathbf{k} = \mathbf{k}_l$

$$H_0 = \omega_l \int |\psi_l|^2 d\mathbf{r} - i \left(\mathbf{v}_l \int \psi_l^* \nabla \psi_l d\mathbf{r} \right).\tag{62}$$

Для трех пакетов нужно просуммировать по всем (трем) пакетам l :

$$H_0 = \sum_l \omega_l \int |\psi_l|^2 d\mathbf{r} - i \sum_i \mathbf{v}_l \int \psi_l^* \nabla \psi_l d\mathbf{r}. \quad (63)$$

Что касается нелинейного члена, то подстановка $a(\mathbf{k}) = \sum c_l(\kappa)$ в гамильтониан трехволнового взаимодействия

$$H_{int} = \int (V_{k|k_1 k_2} a_k^* a_{k_1} a_{k_2} + V_{k|k_1 k_2} a_k a_{k_1}^* a_{k_2}^*) \delta_{k-k_1-k_2} d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 d\mathbf{k}_3 \quad (64)$$

после усреднения по времени, в силу резонансного условия $\omega_0 = \omega_1 + \omega_2$, дает

$$H_{int} = 2V_{k_0|k_1 k_2} \int (c_1^*(\kappa) c_2(\kappa_1) c_3(\kappa_2) + \text{к.с.}) \delta_{\kappa-\kappa_1-\kappa_2} d\kappa d\kappa_1 d\kappa_2. \quad (65)$$

Все другие члены в H_{int} благодаря тому, что $\psi_i(\mathbf{r}, t) \propto e^{-i\omega_i t}$, будут осциллирующими функциями времени и по этой причине после усреднения выпадают. Далее в этом интеграле совершим обратное фурье-преобразование, т.е. перейдем вместо интегрирования по κ_i к интегрированию по $\mathbf{r}$ с помощью обратного фурье-преобразования от $\psi_i(\mathbf{r}, t)$:

$$c_i(\kappa) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int \psi_i(\mathbf{r}) e^{i\kappa \mathbf{r}} d\mathbf{r}.$$

В результате подстановки имеем

$$\begin{aligned} & \int c_1^*(\kappa) c_2(\kappa_1) c_3(\kappa_2) \delta_{\kappa-\kappa_1-\kappa_2} d\kappa d\kappa_1 d\kappa_2 = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{3d/2}} \int \psi_i^*(\mathbf{r}) e^{-i\kappa \mathbf{r}} d\mathbf{r} \int \psi_2(\mathbf{r}_1) e^{i\kappa_1 \mathbf{r}_1} d\mathbf{r}_1 \int \psi_3(\mathbf{r}_2) e^{i\kappa_2 \mathbf{r}_2} d\mathbf{r}_2 \delta_{\kappa-\kappa_1-\kappa_2} d\kappa d\kappa_1 d\kappa_2. \end{aligned}$$

Проинтегрируем вначале по κ , а затем по κ_1 и κ_2 . Последнее интегрирование, как легко видеть, дает произведение двух δ -функций

$$\int e^{i\kappa_1(\mathbf{r}_1-\mathbf{r})} e^{i\kappa_2(\mathbf{r}_2-\mathbf{r})} d\kappa_1 d\kappa_2 = (2\pi)^{2d} \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}) \delta(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}), \quad (66)$$

после чего получаем

$$(2\pi)^{d/2} \int (\psi_1^* \psi_2 \psi_3 + \psi_1 \psi_2^* \psi_3^*) d\mathbf{r}. \quad (67)$$

Таким образом, гамильтониан системы принимает вид:

$$H = \sum_i \omega_i \int |\psi_i|^2 d\mathbf{r} - i \sum_l \int \psi_l^* (\mathbf{v}_l \nabla) \psi_l d\mathbf{r} + V \int (\psi_1^* \psi_2 \psi_3 + \psi_1 \psi_2^* \psi_3^*) d\mathbf{r}, \quad (68)$$

где $V = 2(2\pi)^{d/2} V_{k|k_1 k_2}$. Уравнения движения получаются отсюда путем варьирования по ψ_i^* :

$$\frac{\partial \psi_l}{\partial t} = -i \frac{\delta H}{\delta \psi_l^*}. \quad (69)$$

В результате мы приходим к замкнутым уравнениям на три амплитуды ψ_1 , ψ_2 и ψ_3 :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \psi_1}{\partial t} + i\omega_0 \psi_1 + (\mathbf{v}_1 \nabla) \psi_1 &= -iV \psi_2 \psi_3, \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial t} + i\omega_1 \psi_2 + (\mathbf{v}_2 \nabla) \psi_2 &= -iV \psi_1 \psi_3^*, \\ \frac{\partial \psi_3}{\partial t} + i\omega_2 \psi_3 + (\mathbf{v}_3 \nabla) \psi_3 &= -iV \psi_1 \psi_2^*.\end{aligned}\quad (70)$$

В силу того, что несущие частоты удовлетворяют условию резонанса (60), то при замене $\psi_l \rightarrow \psi_l e^{-i\omega_l t}$ (такая замена соответствует введению огибающих — медленно меняющихся функций координат и времени) система (70) упрощается до вида:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \psi_1}{\partial t} + (\mathbf{v}_1 \nabla) \psi_1 &= -iV \psi_2 \psi_3, \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial t} + (\mathbf{v}_2 \nabla) \psi_2 &= -iV \psi_1 \psi_3^*, \\ \frac{\partial \psi_3}{\partial t} + (\mathbf{v}_3 \nabla) \psi_3 &= -iV \psi_1 \psi_2^*.\end{aligned}\quad (71)$$

Эта система уравнений называется системой Бломбергена, ее часто также называют системой трех волн. Эта система, как и (70), является гамильтоновой с

$$H = -i \sum_l \int \psi_l^* (\mathbf{v}_l \nabla) \psi_l d\mathbf{r} + V \int (\psi_1^* \psi_2 \psi_3 + \psi_1 \psi_2^* \psi_3^*) d\mathbf{r}. \quad (72)$$

Есть несколько упрощений этой системы. Пусть ψ_i не зависят от координат, т.е. для пространственно однородных решений $\psi_i = \Psi_i(t)$. В этом случае мы имеем для $\Psi_i(t)$ систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}\frac{d\Psi_1}{dt} &= -iV \Psi_2 \Psi_3, \\ \frac{d\Psi_2}{dt} &= -iV \Psi_1 \Psi_3^*, \\ \frac{d\Psi_3}{dt} &= -iV \Psi_1 \Psi_2^*.\end{aligned}\quad (73)$$

Эти уравнения похожи на уравнения для волчка. Для классического волчка, как известно, есть два интеграла — энергия и момент импульса. Для системы (73) мы имеем также несколько интегралов. Во-первых, это энергия

$$E = V(\Psi_1^* \Psi_2 \Psi_3 + \Psi_1 \Psi_2^* \Psi_3^*). \quad (74)$$

Во-вторых, это так называемые интегралы Мэнли–Роу:

$$\begin{aligned}|\Psi_1|^2 + |\Psi_2|^2 &= inv \\ |\Psi_1|^2 + |\Psi_3|^2 &= inv\end{aligned}\quad (75)$$

Эти интегралы имеют простой физический смысл, а именно, закона сохранения квантов или квазичастиц. В процессе распада в каждом акте один квант волны 1 уничтожается, а другой квант волны 2 *одновременно* рождается. В результате $|\Psi_1|^2 + |\Psi_2|^2$ остается постоянной величиной. В том, что эти величины сохраняются во времени, можно убедиться и непосредственно из уравнений.

Задача 1. Доказать в общем случае, т. е. для системы (71), что интеграл Мэнли – Роу $\int |\psi_1|^2 d\mathbf{r} + \int |\psi_{2,3}|^2 d\mathbf{r}$ является сохраняющейся величиной.

Задача 2. Показать, что при выполнении условия резонанса (60) первый член в гамильтониане (68) является сохраняющейся величиной.

Интегралы (75) вносят существенные ограничения на величины амплитуд волны накачки $|\Psi_1|$ и вторичных волн $|\Psi_2|$ и $|\Psi_3|$. Все эти величины ограничены. Таким образом, единственное, что допускается динамикой этой системы, — это автоколебания, при которых происходит обмен между всеми тремя компонентами. И это есть ситуация общего положения. Однако существуют частные случаи, когда вся энергия волны накачки может быть полностью передана вторичным волнам. Такая ситуация возможна при специальном выборе фаз трех волн.

Рассмотрим простейшее стационарное решение уравнений (73) вида $\Psi_1 = \text{const}$, $\Psi_2 = \Psi_3 = 0$. Это состояние соответствует монохроматической волне (в соответствии с обозначением предыдущей лекции $\text{const} = (2\pi)^{-d/2} A$).

Линеаризация уравнений (73) на фоне этого решения приводит к двум линейным уравнениям:

$$\begin{aligned}\frac{d\Psi_2}{dt} &= -i(2\pi)^{-d/2} V A \Psi_3^*, \\ \frac{d\Psi_3^*}{dt} &= i(2\pi)^{-d/2} V A^* \Psi_2.\end{aligned}$$

Считая $\Psi_{2,3} \sim e^{\gamma t}$, для γ получаем уравнение

$$\gamma^2 = |(2\pi)^{-d/2} V|^2 |A|^2 \text{ или } \gamma = \pm |(2\pi)^{-d/2} V| |A|. \quad (76)$$

Знаку + соответствует неустойчивость. Это есть распадная неустойчивость, рассмотренная нами в предыдущей лекции. Ее инкремент в максимуме как раз равен $2|V_{k|k_1 k_2}| |A|$.

При учете пространственной зависимости, т. е. в рамках полной системы трех волн (70), можно получить ширину этого резонанса.

Другой вариант этих уравнений — стационарные волны (не зависящие от времени, $\partial/\partial t = 0$), когда $\psi_i = \Psi_i(r)$. Например, такая ситуация возникает при стационарном падении волны с частотой ω на нелинейный кристалл, в результате чего возникают вторичные волны с частотами ω_1 и ω_2 . В этом случае необходимо решать граничную задачу. В простейшем варианте нормального падения можно считать, что все величины зависят только от одной координаты x . Тогда

уравнения (71) приобретают вид:

$$\begin{aligned} v_1 \frac{\partial \Psi_1}{\partial x} &= -iV \Psi_2 \Psi_3, \\ v_2 \frac{\partial \Psi_2}{\partial x} &= -iV \Psi_1 \Psi_3^*, \\ v_3 \frac{\partial \Psi_3}{\partial x} &= -iV \Psi_1 \Psi_2^*. \end{aligned}$$

Эти уравнения следуют из равенства нулю вариации для действия $S = \int L dx$, $\delta S = 0$, где функция Лагранжа

$$L = -i \sum_l v_l \Psi_l^* \frac{\partial}{\partial x} \Psi_l + V(\Psi_1^* \Psi_2 \Psi_3 + \Psi_1 \Psi_2^* \Psi_3^*), \quad (77)$$

а координата x играет роль времени. Откуда можно для данных уравнений построить гамильтониан и найти канонически сопряженные координаты-импульсы.

Задача 3. Построить гамильтониан и найти канонически сопряженные координаты-импульсы.

4.3 Генерация второй гармоники

Следующий вопрос, который мы рассмотрим, — вопрос о генерации второй гармоники. Это процесс, обратный к распадному. В нем

$$\omega(\mathbf{k}_0) + \omega(\mathbf{k}_0) = \omega(2\mathbf{k}_0), \quad (78)$$

т.е. два кванта основной волны дают волну на удвоенной частоте. Для электромагнитных волн такой процесс является почти разрешенным, поскольку между частотой и волновым числом имеется почти линейная зависимость:

$$\omega = kc_m, \quad (79)$$

где скорость света в среде c_m можно считать слабо зависящей от частоты (или от k). В действительности, однако, резонанс (78) является приближенным за счет наличия у электромагнитных волн в среде дисперсии. Т.е. всегда имеется расстройка

$$\Omega = \omega(2\mathbf{k}_0) - 2\omega(\mathbf{k}_0), \quad (80)$$

которую мы будем предполагать малой. В главном порядке расстройкой Ω будем пренебрегать.

Процесс генерации второй гармоники является частным случаем трех-волнового взаимодействия. Поэтому для него мы можем сразу написать уравнения движения для огибающих ψ_0 и ψ_2 . Гамильтониан (68) в этом случае запишется в виде:

$$\begin{aligned} H &= \omega(\mathbf{k}_0) \int |\psi_0|^2 d\mathbf{r} + \omega(2\mathbf{k}_0) \int |\psi_2|^2 d\mathbf{r} - \\ &- i \int \psi_0^* (\mathbf{v}_0 \nabla) \psi_0 d\mathbf{r} - i \int \psi_2^* (\mathbf{v}_2 \nabla) \psi_2 d\mathbf{r} + V \int (\psi_2^* \psi_0 \psi_0 + \psi_2 \psi_0^* \psi_0^*) d\mathbf{r}, \end{aligned} \quad (81)$$

где ψ_0 и ψ_2 — амплитуды основной и второй гармоник, а $\mathbf{v}_0$ и $\mathbf{v}_2$ — соответствующие им групповые скорости. Уравнения движения записываются согласно правилу (69):

$$\begin{aligned}\frac{\partial \psi_0}{\partial t} + i\omega(\mathbf{k}_0)\psi_0 + (\mathbf{v}_0 \nabla)\psi_0 &= -2iV\psi_2\psi_0^*, \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial t} + i\omega(2\mathbf{k}_0)\psi_2 + (\mathbf{v}_2 \nabla)\psi_2 &= -iV\psi_0\psi_0.\end{aligned}\quad (82)$$

Как и общая система уравнений трех волн (70), данные уравнения также обладают дополнительными интегралами движения, но, в отличие от (70), здесь из-за идентификации амплитуд $\psi_2 = \psi_3$ имеется только один интеграл Мэнли-Роу:

$$N = \int (|\psi_0|^2 + 2|\psi_2|^2) d\mathbf{r}.$$

Если совершить в уравнениях замену $\psi_0 \rightarrow \psi_0 e^{-i\omega(\mathbf{k}_0)t}$ и $\psi_2 \rightarrow \psi_2 e^{-2i\omega(\mathbf{k}_0)t}$, то для новых амплитуд (истинных огибающих) получаются уравнения

$$\frac{\partial \psi_0}{\partial t} + (\mathbf{v}_0 \nabla)\psi_0 = -2iV\psi_2\psi_0^*, \quad (83)$$

$$\frac{\partial \psi_2}{\partial t} + i\Omega\psi_2 + (\mathbf{v}_2 \nabla)\psi_2 = -iV\psi_0\psi_0, \quad (84)$$

где мы воспользовались определением расстройки (80).

Рассмотрим следующую задачу. Пусть на нелинейный кристалл стационарно падает электромагнитная волна с частотой ω_0 и амплитудой A . Будем считать, что все зависит только от координаты x , отсчитываемой от края кристалла. И пусть расстройка $\Omega = 0$. В этом случае система (82) для амплитуд $\psi_0 = \psi_0(x)$ и $\psi_2 = \psi_2(x)$ представляет собой два обыкновенных дифференциальных уравнения:

$$\begin{aligned}v_0 \frac{d\psi_0}{dx} &= -2iV\psi_2\psi_0^*, \\ v_2 \frac{d\psi_2}{dx} &= -iV\psi_0\psi_0.\end{aligned}$$

На границе кристалла $x = 0$ амплитуда $\psi_0 = A$, а $\psi_2 = 0$.

Эти уравнения допускают частное решение: $\psi_2 = i\varphi$ и $\text{Im } \psi_0 = \text{Im } \varphi = 0$. В этом случае уравнения переписываются в виде

$$\begin{aligned}v \frac{d\psi_0}{dx} &= 2V\varphi\psi_0, \\ v \frac{d\varphi}{dx} &= -V\psi_0^2,\end{aligned}$$

где для простоты мы положили групповые скорости равными: $v_0 = v_2 \equiv v$. Заметим также, что матричный элемент V можно исключить, заменив $x \rightarrow xV$.

Далее удобно вместо ψ_0 всюду рассматривать ψ_0^2 , тогда

$$\begin{aligned} v \frac{d\psi_0^2}{dx} &= 4\varphi\psi_0^2, \\ v \frac{d\varphi}{dx} &= -\psi_0^2. \end{aligned}$$

Исключая далее ψ_0^2 , для φ получим уравнение

$$v \frac{d^2\varphi}{dx^2} = 4\varphi \frac{d\varphi}{dx}, \quad (85)$$

которое один раз интегрируется:

$$v \frac{d\varphi}{dx} = 2\varphi^2 + C. \quad (86)$$

Константа C находится из граничного условия в точке $x = 0$ (начало кристалла), когда $\varphi(x = 0) = 0$ и $\psi_0^2|_{x=0} = A^2$ — начальная мощность падающего пучка. В результате $C = -A^2$ оказывается отрицательной величиной (обозначим ее как $-2B^2$). Таким образом, это уравнение сводится к вычислению интеграла

$$\int \frac{d\varphi}{\varphi^2 - B^2} = \frac{2x}{v}.$$

Замена переменных $z = \varphi/B$ приводит этот интеграл к табличному

$$\int \frac{dz}{B(z^2 - 1)} = -\frac{1}{B} \operatorname{arcth} \left(\frac{\varphi}{B} \right),$$

отсюда решение записывается как

$$\varphi = -B \operatorname{th} \left(\frac{2Bx}{v} \right).$$

Чтобы найти ψ_0^2 , достаточно продифференцировать φ по x :

$$\psi_0^2 = -v \frac{d\varphi}{dx} = 2B^2 \operatorname{ch}^{-2} \left(\frac{2Bx}{v} \right). \quad (87)$$

В размерных переменных это решение записывается как

$$\varphi = -\frac{A}{\sqrt{2}} \operatorname{th} \left(\frac{\sqrt{2}AV}{v} x \right), \quad (88)$$

$$\psi_0^2 = A^2 \operatorname{ch}^{-2} \left(\frac{\sqrt{2}AV}{v} x \right). \quad (89)$$

Графики этих решений приведены на рис. 2.

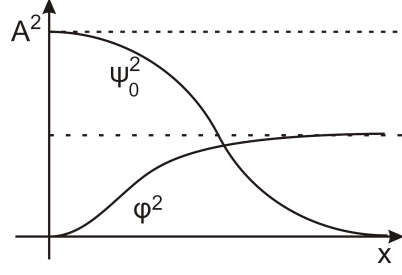


Рис. 2. Зависимости амплитуд первой и второй гармоник при точном резонансе

При этом сумма $\psi_0^2 + 2\varphi^2 = \text{const}$ (Мэнли–Роу). Если смотреть по энергии, то энергия первой гармоники

$$E_1 \approx \omega_0 A^2 c h^{-2} \left(\frac{\sqrt{2}AV}{v} x \right), \quad (90)$$

а второй гармоники —

$$E_2 \approx 2\omega_0 \frac{A^2}{2} t h^2 \left(\frac{\sqrt{2}AV}{v} x \right). \quad (91)$$

Таким образом, при $x \rightarrow \infty$ вся энергия первой гармоники полностью трансформируется во вторую гармонику (только в этом частном случае!). Коэффициент (для конечного кристалла длины L)

$$K = c h^{-2} \left(\frac{\sqrt{2}AV}{v} L \right) \quad (92)$$

называется коэффициентом трансформации. Величину $\alpha = \sqrt{2}AV/v$ называют коэффициентом усиления. Он имеет размерность обратной длины, измеряется в обратных сантиметрах. $\sqrt{2}AV$ есть величина, совпадающая по порядку величины с инкрементом распадной неустойчивости (76). Когда делим на групповую скорость, получаем обратные сантиметры. Из этого выражения видно, что чем больше интенсивность и нелинейная константа V , тем меньше длина усиления. Чтобы достигнуть большого выхода, необходимо иметь достаточно большие кристаллы с большой нелинейностью!

4.4 Генерация второй гармоники при ненулевой расстройке

Рассмотренный выше случай $\text{Im}\psi_0 = 0$ и $\psi_2 = i\varphi$ является весьма частным. Сейчас мы изучим, как происходит генерация второй гармоники при отсутствии точного синхронизма, т. е. когда

$$\omega(2\mathbf{k}_0) = 2\omega(\mathbf{k}_0) + \Omega \quad (93)$$

при $\Omega \neq 0$. Огибающие ψ_0 , ψ_2 подчиняются уравнениям (83, 84).

$$\frac{\partial \psi_0}{\partial t} + (\mathbf{v}_0 \nabla) \psi_0 = -2iV \psi_2 \psi_0^*, \quad (94)$$

$$\frac{\partial \psi_2}{\partial t} + i\Omega \psi_2 + (\mathbf{v}_2 \nabla) \psi_2 = -iV \psi_0 \psi_0. \quad (95)$$

Гамильтониан для этой системы имеет вид:

$$H = \Omega \int |\psi_2|^2 d\mathbf{r} - i \int \psi_0^* (\mathbf{v}_0 \nabla) \psi_0 d\mathbf{r} - i \int \psi_2^* (\mathbf{v}_2 \nabla) \psi_2 d\mathbf{r} + \\ + V \int (\psi_2^* \psi_0 \psi_0 + \psi_2 \psi_0^* \psi_0^*) d\mathbf{r}. \quad (96)$$

В дальнейшем мы рассмотрим случай, когда ψ_0 и ψ_2 не зависят от координат. Легко видеть, что для граничной стационарной задачи при $\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}_2$ уравнения простой заменой сводятся к предыдущему случаю. Итак, мы имеем:

$$\frac{d\psi_0}{dt} = -2iV \psi_2 \psi_0^*, \\ \frac{d\psi_2}{dt} + i\Omega \psi_2 = -iV \psi_0^2.$$

В этих уравнениях удобно исключить V с помощью замен $t' = tV$, и $\Omega' = \Omega/V$, а также заменить $\psi_0 = \sqrt{2}\psi'_0$. В результате уравнения приобретают вид (штрихи опущены):

$$\frac{d\psi_0}{dt} = -2i\psi_2 \psi_0^*, \quad (97) \\ \frac{d\psi_2}{dt} + i\Omega \psi_2 = -2i\psi_0^2.$$

Эти уравнения допускают интегрирование в квадратурах благодаря наличию двух интегралов: соотношения Мэнли – Роу

$$N = |\psi_0|^2 + |\psi_2|^2$$

и интеграла энергии

$$E = \Omega |\psi_2|^2 + 2(\psi_2 \psi_0^{*2} + \psi_2^* \psi_0^2). \quad (98)$$

Будем далее нормировать амплитуды ψ_0 и ψ_2 на $\sqrt{N}$:

$$\psi_0 \rightarrow \sqrt{N} \psi_0, \psi_2 \rightarrow \sqrt{N} \psi_2,$$

так что соотношение Мэнли – Роу и энергия записываются в виде

$$1 = |\psi_0|^2 + |\psi_2|^2, \\ E = \Omega |\psi_2|^2 + 2(\psi_2 \psi_0^{*2} + \psi_2^* \psi_0^2),$$

где $E \rightarrow EN^{3/2}$, $\Omega \rightarrow \Omega\sqrt{N}$. Далее вводим амплитуды и фазы для ψ_0 и ψ_2 :

$$\psi_0 = ue^{i\varphi_0}, \psi_2 = ve^{i\varphi_2}.$$

Уравнения (97) после этой замены приобретают вид:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} + iu\varphi_{0t} &= -2ie^{-2i\varphi_0+i\varphi_2}uv, \\ \frac{dv}{dt} + i(\Omega + \varphi_{2t})v &= -2ie^{2i\varphi_0-i\varphi_2}u^2. \end{aligned}$$

Разделяя действительные и мнимые части этих уравнений, получим четыре уравнения

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= 2uv \sin(\varphi_2 - 2\varphi_0), \\ \frac{dv}{dt} &= 2u^2 \sin(\varphi_2 - 2\varphi_0), \\ u\varphi_{0t} &= -2uv \cos(\varphi_2 - 2\varphi_0), \\ (\varphi_{2t} + \Omega)v &= -2u^2 \cos(\varphi_2 - 2\varphi_0). \end{aligned} \tag{99}$$

Таким образом, в этих уравнениях фазы входят (под синусами и косинусами) в комбинации $\chi = \varphi_2 - 2\varphi_0$. Комбинируя два последних уравнения системы (99), нетрудно получить отдельное уравнение для χ :

$$\frac{d\chi}{dt} + \Omega = 2 \left(v - \frac{u^2}{v} \right) \cos \chi. \tag{100}$$

Итак, мы имеем три уравнения

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= 2uv \sin \chi, \\ \frac{dv}{dt} &= 2u^2 \sin \chi, \\ \frac{d\chi}{dt} + \Omega &= 2 \frac{v^2 - u^2}{v} \cos \chi \end{aligned}$$

и два интеграла движения

$$\begin{aligned} 1 &= u^2 + v^2, \\ E &= \Omega v^2 + 4vu^2 \cos \chi. \end{aligned}$$

Далее достаточно рассмотреть только второе уравнение, выразив $\cos \chi$ и u с помощью интегралов:

$$\begin{aligned} u^2 &= 1 - v^2, \\ \cos \chi &= \frac{E - \Omega v^2}{4vu^2}. \end{aligned}$$

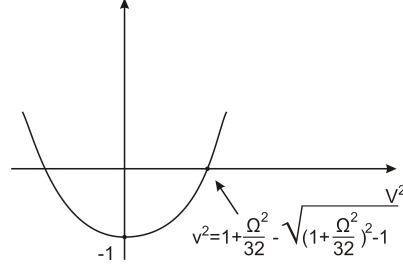


Рис. 3. Зависимость $U(v)$

Пусть $u = 1$ при $t = 0$, тогда соответственно $v = 0$. Очевидно, что в этом случае $E = 0$, а

$$\cos \chi = \frac{-\Omega v}{4(1 - v^2)}. \quad (101)$$

Отсюда

$$\sin \chi = \left[1 - \frac{\Omega^2}{16} \frac{v^2}{(1 - v^2)^2} \right]^{1/2}. \quad (102)$$

В результате для v имеем уравнение

$$\frac{dv}{dt} = 2(1 - v^2) \left[1 - \frac{\Omega^2}{16} \frac{v^2}{(1 - v^2)^2} \right]^{1/2}. \quad (103)$$

Чтобы понять, как меняется v как функция времени t , возведем это выражение в квадрат

$$\left(\frac{dv}{dt} \right)^2 + U(v) = 0, \quad (104)$$

где второй член

$$U(v) = \frac{\Omega^2}{4} v^2 - 4(1 - v^2)^2 \quad (105)$$

можно трактовать как потенциальную энергию, а первый член — как кинетическую энергию (с точностью до $m/2$). Зависимость $U(v)$ представлена на графике (рис. 3). Таким образом, частица (с нулевой энергией) движется вправо, достигая максимального значения в точке остановки (точке отражения)

$$v_{ref} = \left[1 + \frac{\Omega^2}{32} - \sqrt{\left(1 + \frac{\Omega^2}{32} \right)^2 - 1} \right]^{1/2} \leq 1. \quad (106)$$

После отражения частица доходит до левого края $v = -v_{ref}$, где вновь отражается. В результате возникают колебания. Период колебаний T находится путем интегрирования:

$$T = 4 \int_0^{V_{ost}} \frac{dv}{\sqrt{-U(v)}}. \quad (107)$$

При $\Omega = 0$ мы приходим к ответу, полученному выше (см. (88)). Таким образом, точка $v^2 = 1$ (полная трансформация во вторую гармонику) достигается за бесконечное время при выполнении точного резонанса, что соответствует решениям (88). Отстройка от резонанса ведет к появлению колебаний и не дает полной трансформации энергии из основной гармоники во вторую.

Такая же ситуация возникает при взаимодействии трех гармоник, когда есть отличие от точного резонанса:

$$\begin{aligned}\Omega &= \omega(k_1) - \omega(k_2) - \omega(k_3) \neq 0, \\ 0 &= \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3.\end{aligned}$$

При расстройке Ω , малой по сравнению с частотами ω_1, ω_2 и ω_3 (точнее — с их разностями), метод усреднения, используемый при выводе уравнений трех волн (70), остается справедливым. В этом случае уравнения движения (аналогичные (94)) имеют вид:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \psi_1}{\partial t} + i\Omega \psi_1 + (\mathbf{v}_1 \nabla) \psi_1 &= -iV \psi_2 \psi_3, \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial t} + (\mathbf{v}_2 \nabla) \psi_2 &= -iV \psi_1 \psi_3^*, \\ \frac{\partial \psi_3}{\partial t} + (\mathbf{v}_3 \nabla) \psi_3 &= -iV \psi_1 \psi_2^*.\end{aligned}\tag{108}$$

Задача 4. Найти выражение для инкремента распадной неустойчивости из уравнений (108), сравнить с ответом, полученным в предыдущей лекции.

Указание: Рассмотреть пространственно однородные решения ($\nabla = 0$) вида $\psi_1 = A e^{-i\Omega t}$, $\psi_{2,3} = 0$ (стационарное состояние). Затем провести линеаризацию на этом фоне.

Задача 5. Показать, что стационарная задача трех волн ($\frac{\partial}{\partial t} = 0$) при параллельных групповых скоростях ($v_1 || v_2 || v_3$) с помощью замен сводится к задаче для пространственно-однородных решений.

Указание: Воспользоваться масштабными преобразованиями амплитуд ψ_i .

Лекция 5 «Четырехволновое нелинейное взаимодействие»

5.1 Распадные законы дисперсии

На прошлой лекции мы рассматривали трехволновые процессы. Они являются существенными, если выполнено либо условие резонанса

$$\begin{aligned}\omega_k + \omega_{k_1} + \omega_{k_2} &= 0, \\ \mathbf{k} + \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 &= 0,\end{aligned}$$

соответствующего рождению трех волн из вакуума, либо условие для распадного резонанса:

$$\begin{aligned}\omega_k &= \omega_{k_1} + \omega_{k_2}, \\ \mathbf{k} &= \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2.\end{aligned}\tag{109}$$

Для выполнения первого резонанса необходимо иметь волны с отрицательной частотой, которые существуют в неустойчивых средах, например, в плазме с пучками. Такая ситуация возникает редко. Для устойчивых сред такие процессы запрещены.

Для распадных процессов резонансное условие (109) выполняется для большого круга волн. В качестве примера рассмотрим закон дисперсии Ландау (спектр Ландау) для возбуждений в жидком гелии (рис. 4).

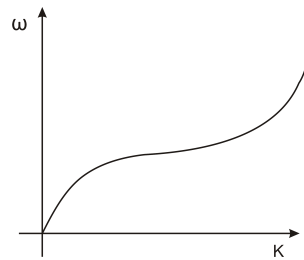


Рис. 4. Спектр возбуждений Ландау

Покажем графически, что такой спектр относится к распадным законам дисперсии. На графике $\omega = \omega(k)$ в некоторой точке $k = k_1$, $\omega_1 = \omega(k_1)$ снова построим ту же дисперсионную кривую $\omega = \omega(k)$ (см. рис. 5).

Существование пересечения означает, что выполнены условия резонанса:

$$\begin{aligned}\omega_{k_0} &= \omega_{k_1} + \omega_{k_2}, \\ \mathbf{k}_0 &= \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2.\end{aligned}$$

Таким образом, мы графически показали, что **пересечение** двух графиков $\omega = \omega(k)$ и того же самого графика, который начинается на плоскости в точке $k = k_1$, $\omega = \omega(k_1)$, означает выполнение резонансных условий для процесса распада.

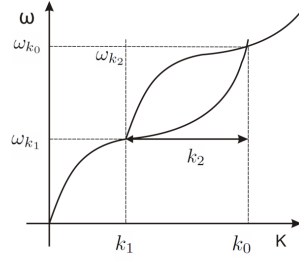


Рис. 5. Графическое доказательство распадности спектра Ландау

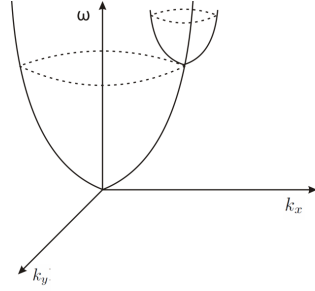


Рис. 6. Доказательство распадности закона дисперсии $\omega = Ak^\alpha$ с $\alpha > 1$

Покажем теперь, что закон дисперсии $\omega = Ak^\alpha$ с $\alpha > 1$ относится к распадным законам дисперсии, а при $\alpha < 1$ — к нераспадным.

Например, капиллярные волны на поверхности жидкости имеют закон дисперсии $\omega = \sqrt{\sigma k^3}$, где σ — коэффициент поверхностного натяжения, $\alpha = \frac{3}{2} > 1$. Для гравитационных волн на поверхности глубокой жидкости $\omega = \sqrt{gk}$, где g — ускорение свободного падения, и $\alpha = 1/2 < 1$.

В первом случае ($\alpha > 1$) дисперсионные поверхности представляют собой чашки (рис. 6). Отсюда ясно, что если поместить на дисперсионной поверхности в какой-либо точке $\mathbf{k} = \mathbf{k}_1$, $\omega = \omega(\mathbf{k}_1)$ такую же чашку, то эти две чашки обязательно пересекутся вдоль целой линии. Таким образом, при $\alpha > 1$ закон дисперсии является распадным. Это, в частности, означает, что капиллярные волны имеют распадный закон дисперсии.

При $\alpha < 1$ мы имеем дисперсионные поверхности в виде розеток (рис. 7).

Из рис. 7 видно, что в любую точку розетки мы можем поставить точно такую же розетку, ее не разрушив, т. е. пересечения отсутствуют. Таким образом, закон дисперсии $\omega = Ak^\alpha$ с $\alpha < 1$ является нераспадным. В этом случае кубические члены в гамильтониане являются нерезонансными и могут быть исключены.

Задача 1. Выяснить, к какому типу законов дисперсии относятся закон дисперсии электромагнитных волн в изотропной плазме $\omega = \sqrt{\omega_p^2 + k^2 c^2}$ (ω_p — плазменная частота) и поверхностных гравитационных волн с $\omega = \sqrt{gk \cosh(kh)}$ для жидкостей конечной глубины h .

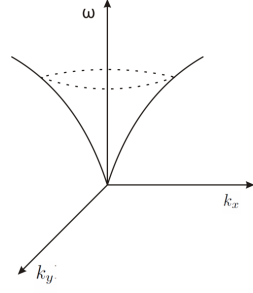


Рис. 7. Демонстрация нераспадения закона дисперсии $\omega = Ak^\alpha$ с $\alpha < 1$

Как мы с вами видели на первой лекции, для одномерного нелинейного осциллятора такого рода члены (квадратичные в уравнениях движения или кубические в гамильтониане), являясь нерезонансными, оказывают влияние в следующем порядке теории возмущений (по малости амплитуды), что приводит к перенормировке констант нелинейного взаимодействия — к изменению нелинейной добавки частоты. Аналогичным образом можно произвести исключение нерезонансных членов в общем, непрерывном случае при наличии бесконечного числа степеней свободы, т.е. в случае волн. Мы не будем проводить этот анализ полностью, а ограничимся рассмотрением вклада трехволновых процессов при вычислении нелинейной добавки к частоте.

Когда речь идет о квазимонохроматической волне (волновом пакете), то для нахождения нелинейной добавки к частоте необходимо вычислить матричный элемент $T_{kk_1k_2k_3}$, взятый в точке $k_i = k_0$: $T_{k_0k_0k_0k_0} = T_0$, где k_0 — волновой вектор пакета. В этом случае гамильтониан взаимодействия примет вид:

$$H_{int} = \frac{1}{2} \int T_{kk_1k_2k_3} a_k^* a_{k_1}^* a_{k_2} a_{k_3} \delta_{k+k_1-k_2-k_3} \Pi dk_i \approx \frac{T_0}{2} \int a_k^* a_{k_1}^* a_{k_2} a_{k_3} \delta_{k+k_1-k_2-k_3} \Pi dk_i. \quad (110)$$

Затем нужно ввести огибающую ψ как фурье-образ от $a_{k_0+\kappa}$ по κ :

$$\psi(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int a_{k_0+\kappa} e^{i\kappa\mathbf{r}} d\kappa \text{ или } a_{k_0+\kappa} = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int \psi(\mathbf{r}) e^{-i\kappa\mathbf{r}} d\mathbf{r}.$$

Подставляя последнее выражение в (110), получим:

$$H_{int} = \frac{T_0}{2} (2\pi)^d \int |\psi|^4 d\mathbf{r}. \quad (111)$$

5.2 О вкладе трехволновых процессов

Гамильтониан взаимодействия (110) предполагает отсутствие членов, кубических по амплитудам волн. Такая ситуация, как мы видели, имеет место в нелинейных диэлектриках, для которых нелинейная добавка к показателю преломления

пропорциональна квадрату амплитуды электромагнитной волны (эффект Керра). Очевидно, что если среда симметрична относительно отражений, то такого рода членов не будет в силу того, что при инверсии $\mathbf{E} \rightarrow -\mathbf{E}$, соответственно матричные элементы V и U должны менять свой знак (напомним, что V и U являются характеристиками среды, в случае электромагнитных волн они выражаются через тензоры третьего ранга).

Рассмотрим, какой вклад вносят трехволновые процессы в четырехволновые процессы. В присутствии монохроматической волны с $k = k_0$ трехволновые взаимодействия приводят к появлению гармоник с $k = 2k_0$ и $k = 0$. Заметим, что для того чтобы вычислить нелинейную добавку к частоте, необходимо знать $T_{k_0 k_0 k_0 k_0}$, т. е. один коэффициент при $k = k_0$ (что соответствует монохроматической волне). Поэтому, подставляя $a_k = A(t)\delta_{k-k_0}$ ($A(t) \propto e^{-i\omega_0 t}$, $\omega_0 \equiv \omega_{k_0}$) в правую часть уравнения движения для a_k :

$$\begin{aligned} \frac{\partial a_k}{\partial t} + i\omega_k a_k = & -i \int U_{kk_1 k_2} a_{k_1}^* a_{k_2}^* \delta_{k+k_1+k_2} d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 - \\ & -2i \int V_{k_1|k k_2} a_{k_1} a_{k_2}^* \delta_{k_1-k+k_2} d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 \\ & -i \int V_{k|k_1 k_2} a_{k_1} a_{k_2} \delta_{k-k_1-k_2} d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 + \dots, \end{aligned} \quad (112)$$

находим, что она представляет собой сумму трех членов:

$$-iU_{-2k_0 k_0 k_0} A^{*2} \delta_{k+2k_0} - 2iV_{k_0|0 k_0} |A|^2 \delta_k - iV_{2k_0|k_0 k_0} A^2 \delta_{k-2k_0}.$$

В главном порядке $A(t)$ как функция времени определяется экспонентой $e^{-i\omega_0 t}$. Благодаря этому, основная временная зависимость каждого из этих трех членов будет определяться осциллирующими экспонентами с частотами $\pm 2\omega_0, 0$. Учитывая, что правая часть (113) представляет собой вынуждающую силу с узкими спектрами на этих частотах, находим соответствующий отклик

$$a_k = -\frac{U_{-2k_0 k_0 k_0}}{2\omega(k_0) + \omega(2k_0)} A^{*2} \delta_{k+2k_0} - 2\frac{V_{k_0|0 k_0}}{\omega(0)} |A|^2 \delta_k + \frac{V_{2k_0|k_0 k_0}}{2\omega(k_0) - \omega(2k_0)} A^2 \delta_{k-2k_0}.$$

Появление кратных гармоник $\pm 2\omega_0, 0$, в свою очередь, приводит к обратному влиянию на основную гармонику:

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial t} + i\omega(k_0)A = & -2iU_{-2k_0 k_0 k_0} A^* a_{-2k_0}^* - 2iV_{k_0|k_0 0} A a_0^* - 2iV_{2k_0|k_0 k_0} a_{2k_0} A^* - 2iV_{k_0|k_0 0} A a_0 = \\ = & \frac{2iU_{-2k_0 k_0 k_0}^2}{2\omega(k_0) + \omega(2k_0)} |A|^2 A + 8i\frac{V_{k_0|0 k_0}^2}{\omega(0)} |A|^2 A - 2i\frac{V_{2k_0|k_0 k_0}}{2\omega(k_0) - \omega(2k_0)} |A|^2 A = \\ = & -2i \left[-\frac{U_{-2k_0 k_0 k_0}^2}{2\omega(k_0) + \omega(2k_0)} - 4\frac{V_{k_0|0 k_0}^2}{\omega(0)} + \frac{V_{2k_0|k_0 k_0}^2}{2\omega(k_0) - \omega(2k_0)} \right] |A|^2 A. \end{aligned}$$

Таким образом, мы нашли добавку в матричный элемент $T_{k_0 k_0 k_0 k_0}$ за счет трех-волновых процессов:

$$\widetilde{T}_0 = T_0 + 2 \left[-\frac{U_{2k_0 k_0 k_0}^2}{2\omega(k_0) + \omega(2k_0)} - 4\frac{V_{k_0|0k_0}^2}{\omega(0)} + \frac{V_{2k_0 k_0 k_0}^2}{2\omega(k_0) - \omega(2k_0)} \right]. \quad (113)$$

Следует отметить, что третье слагаемое в правой части содержит значение частоты $\omega(k)$ при $k = 0$. В соответствии с теоремой Голдстейна частота $\omega(k)$ при $k \rightarrow 0$ либо стремится к константе, либо стремится к нулю. В случае обращения частоты при $k \rightarrow 0$ в нуль необходимо рассмотреть предел отношения $V_{k_0|\kappa k_0}^2/\omega(\kappa)$ при $\kappa \rightarrow 0$. Например, этот предел равен нулю для гравитационных волн на воде большой глубины. В случае, когда этот предел оказывается бесконечным, формула (113) для перенормировки $T_{k_0 k_0 k_0 k_0}$ оказывается несправедливой — требуется рассмотреть отдельное уравнение для низкочастотной моды. Такая ситуация, например, возникает, когда $\omega(k)$ при $k \rightarrow 0$ имеет звуковую асимптотику.

5.3 Нелинейное уравнение Шредингера

В дальнейшем мы будем предполагать значение $\widetilde{T}_0$ конечным. В этом случае для описания нелинейного поведения квазимонохроматической волны достаточно учесть два вклада в гамильтониан H : квадратичные члены, ответственные за распространение волнового пакета в линейной среде, и гамильтониан взаимодействия (111) —

$$\begin{aligned} H = & \omega_0 \int |\psi|^2 d\mathbf{r} - i\mathbf{v}_{gr} \int \psi^* \nabla \psi d\mathbf{r} + \\ & + \frac{1}{2} \int \frac{\partial^2 \omega}{\partial k_\alpha \partial k_\beta} \nabla_\alpha \psi \nabla_\beta \psi^* d\mathbf{r} + \frac{1}{2} (2\pi)^d T_0 \int |\psi|^4 d\mathbf{r}. \end{aligned} \quad (114)$$

Как мы видели во второй лекции, первые три слагаемых возникают из разложения частоты $\omega(k_0 + \kappa)$ по малости κ благодаря узости волнового пакета $\Delta k/k_0 \ll 1$. Как мы знаем, первый член является сохраняющейся величиной за счет сохранения адиабатического инварианта (числа волн) $N = \int |\psi|^2 d\mathbf{r}$. Второе слагаемое в H описывает распространение волнового пакета с групповой скоростью $\mathbf{v}_{gr}$. При этом $\mathbf{P} = -i \int \psi^* \nabla \psi d\mathbf{r}$ есть полный импульс волнового пакета, он также сохраняется. Третий член ответствен за дисперсионное/дифракционное расплывание пакета. И наконец, последняя величина отвечает за нелинейное взаимодействие.

Уравнение для ψ получается из (114) путем взятия вариационной производной гамильтониана:

$$i\psi_t = \frac{\delta H}{\delta \psi^*}.$$

В системе координат, движущейся с групповой скоростью, и фазе, вращающейся с частотой ω_0 , для огибающей ψ мы приходим к так называемому нелинейному уравнению Шредингера (НУШ):

$$i\frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{1}{2} \omega_{\alpha\beta} \nabla_\alpha \nabla_\beta \psi - (2\pi)^d T_0 |\psi|^2 \psi = 0, \quad (115)$$

где $\omega_{\alpha\beta} = \frac{\partial^2 \omega}{\partial k_\alpha \partial k_\beta}$.

Для однородных состояний ($\nabla = 0$) это уравнение превращается в уравнение для одной степени свободы; в нем $(2\pi)^d T_0 |\psi|^2$ есть не что иное, как нелинейный сдвиг частоты $\Delta\omega$. Таким образом, структура нелинейного уравнения Шредингера проста: это есть комбинация дисперсионной добавки к частоте и нелинейного сдвига частоты. Каждый из этих членов мал по отношению к частоте ω_0 и поэтому может быть вычислен независимо. При этом, однако, эти факторы могут быть сравнимы между собой, что, как мы увидим далее, приводит к разнообразным физическим явлениям.

Поскольку тензор $\omega_{\alpha\beta}$ является симметричным, то при соответствующих поворотах к главным осям этого тензора НУШ (115) будет записываться в виде:

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{1}{2} \lambda_1 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \lambda_2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{1}{2} \lambda_3 \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \alpha |\psi|^2 \psi = 0,$$

где λ_i ($i = 1, 2, 3$) есть собственные значения матрицы $\omega_{\alpha\beta}$, а $\alpha = (2\pi)^d T_0$.

В случае положительной дисперсии, когда все $\lambda_i > 0$, после растяжений всех трех координат — $x = x \lambda_1^{-\frac{1}{2}}, y = y \lambda_2^{-\frac{1}{2}}, z = z \lambda_3^{-\frac{1}{2}}$ — в этом уравнении оператор второго порядка превращается в оператор Лапласа:

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{1}{2} \Delta \psi - \alpha |\psi|^2 \psi = 0. \quad (116)$$

Это есть стандартная форма НУШ. В этом случае уравнение представляет собой уравнение Шредингера для движения «частицы» в самосогласованном потенциале $U = \alpha |\psi|^2$. Если $\alpha > 0$, то это даст нам отталкивание частиц, или, как говорят в нелинейной оптике, мы имеем дефокусирующую нелинейность. Когда $\alpha < 0$, потенциал U соответствует притяжению; в нелинейной оптике такую нелинейность называют фокусирующей. В этом случае, в области повышенной амплитуды, т. е. когда потенциал U понижен, частицы имеют тенденцию к притяжению, что есть причина для возникновения самолокализованных структур — солитонов или коллапсирующих объектов.

Напомним (см. лекцию 3), что для нелинейной оптики

$$T_0 = \frac{\omega_0^2}{k_0^2} \frac{3\chi}{4\pi c^4},$$

где χ — константа Керра (при этом нелинейная добавка $\Delta\varepsilon = \chi E^2$). Как отмечалось в лекции 3, в изотропной среде волновое число явно выражается через частоту ω : $k = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon(\omega)}$. По этой причине координата x вдоль направления распространения волнового пакета и время t меняются местами. Соответственно, уравнение движения записывается в виде:

$$i \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{1}{v_{gr}} \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) + \frac{k''}{2} \psi_{tt} - 2\pi T_0 |\psi|^2 \psi = 0.$$

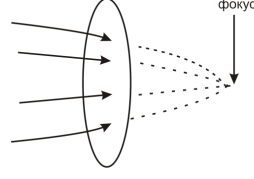


Рис. 8. Иллюстрация самофокусировки: каждый луч (пунктирная линия) распространяется в оптически более плотную среду, приводя к формированию фокуса

В этом случае $\frac{\partial k}{\partial \omega} = \frac{1}{v_{gr}}$, $\frac{\partial^2 k}{\partial \omega^2} = -\frac{1}{v_{gr}^2} \frac{\partial v_{gr}}{\partial \omega}$. Если $\frac{\partial v_{gr}}{\partial \omega} > 0$, то в этом случае говорят об аномальной дисперсии. Для нормальной дисперсии — наоборот $\frac{\partial v_{gr}}{\partial \omega} < 0$.

Обычно константа χ положительна. Поэтому только для аномальной дисперсии, что соответствует отрицательной «массе», возможна локализация.

Для стационарных световых пучков и изотропных сред, когда $\omega_{\alpha\beta} = \frac{v_{gr}}{k_0} (\delta_{\alpha\beta} - \frac{k_{\alpha}k_{\beta}}{k^2}) + \omega'' \frac{k_{\alpha}k_{\beta}}{k^2}$, мы приходим к уравнению:

$$i \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{1}{2k_0} \Delta_{\perp} \psi - (2\pi)^{\frac{d}{2}} T_0 |\psi|^2 \psi = 0.$$

Это же уравнение, только в несколько других обозначениях, может быть получено прямо из уравнений Максвелла. В случае линейной поляризации, когда вектор электрического поля $\mathbf{E}$, можно считать, имеет только одну компоненту и когда очевидно $\text{div} \mathbf{E} = 0$, уравнения Максвелла записываются в виде:

$$\Delta E - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} D = 0.$$

Для монохроматической волны $\frac{\partial^2}{\partial t^2} \rightarrow -\omega^2$, а $D = \varepsilon(\omega)E + \chi|E|^2E$. Далее, полагая, что $E = E_0(\mathbf{r})e^{ikz}$, где $k = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon(\omega)}$, а $E_0(\mathbf{r})$ — огибающая, медленно меняющаяся функция координат, получим уравнение:

$$2ik \frac{\partial E_0}{\partial z} + \Delta_{\perp} E_0 + \frac{\omega^2}{c^2} \chi |E_0|^2 E_0 = 0.$$

При выводе этого уравнения мы пренебрегли членом $\frac{\partial^2 E_0}{\partial z^2}$ по сравнению с $k \frac{\partial E_0}{\partial z}$. Полученное уравнение (в оптике его иногда называют параболическим уравнением) есть не что иное, как нелинейное уравнение Шредингера (116), в котором роль времени играет координата z . Это уравнение описывает самофокусировку света, если $\chi > 0$. Пучки света, проходя область повышенной интенсивности, будут загигаться в область оптически более плотную, т. е. сам свет создает для себя линзу. Это есть стационарная самофокусировка света. Это явление было предсказано Аскарьяном в 1962 г. [23].

Рассмотрим теперь, какие неустойчивости волны связаны с четырехволновым процессом. Для этого ограничимся НУШ с положительной дисперсией (в оптике

это соответствует аномальной дисперсии):

$$i\psi_t + \frac{1}{2}\Delta\psi - \alpha|\psi|^2\psi = 0.$$

В этом уравнении простейшее решение имеет вид монохроматической волны: $\psi = Ae^{-i\alpha|A|^2 t}$, где $\alpha|A|^2$ есть нелинейный сдвиг частоты. Далее произведем линеаризацию этого уравнения на фоне этого решения, полагая $\psi = (A+a)e^{-i\alpha|A|^2 t}$, где $a \ll A$. Для возмущений a и a^* получаем систему линейных уравнений:

$$\begin{aligned} ia_t + \alpha|A|^2 a + \frac{1}{2}\Delta a - 2\alpha|A|^2 a - \alpha A^2 a^* &= 0, \\ -ia_t^* + \alpha|A|^2 a^* + \frac{1}{2}\Delta a^* - 2\alpha|A|^2 a^* - \alpha A^{*2} a &= 0. \end{aligned}$$

В этих уравнениях все коэффициенты не зависят от времени, поэтому решение ищем в виде $ae^{\gamma t + i\kappa \mathbf{r}}$. В результате имеем:

$$\begin{aligned} (i\gamma - \alpha|A|^2 - \frac{1}{2}\kappa^2)a &= \alpha A^2 a^*, \\ (-i\gamma - \alpha|A|^2 - \frac{1}{2}\kappa^2)a^* &= \alpha A^{*2} a. \end{aligned}$$

Отсюда следует

$$\gamma^2 + (\alpha|A|^2 + \frac{1}{2}\kappa^2)^2 = \alpha^2|A|^4$$

или

$$\gamma = \sqrt{\alpha^2|A|^4 - (\alpha|A|^2 + \frac{1}{2}\kappa^2)^2} = \sqrt{-\alpha|A|^2\kappa^2 - \frac{1}{4}\kappa^4}. \quad (117)$$

Из этого выражения следует, что при $\alpha > 0$ (дефокусирующая среда) γ — чисто мнимая величина, что соответствует колебаниям с законом дисперсии:

$$\Omega = \kappa\sqrt{\alpha|A|^2 + \frac{\kappa^2}{4}}. \quad (118)$$

Это есть закон дисперсии Боголюбова, который был получен Н. Н. Боголюбовым для спектра колебаний конденсата слабо неидеального бозе-газа. Этот закон при малых κ линеен по κ , т. е. является звуковым со скоростью звука $c_s = \sqrt{\alpha|A|^2}$. С ростом κ звуковые волны приобретают положительную дисперсию. В пределе больших значений κ закон дисперсии Боголюбова (118) переходит в закон дисперсии для свободных частиц: $\Omega = \frac{\kappa^2}{2}$. Таким образом, для этих колебаний минимальная фазовая скорость Ω/κ совпадает со скоростью звука. Это, как известно, определяет максимально возможное значение скорости конденсата бозе-газа в капилляре, при котором сохраняется сверхтекучесть.

В случае $\alpha < 0$ (фокусирующая нелинейность) мы получаем неустойчивость с инкрементом

$$\Gamma = \kappa\sqrt{|\alpha||A|^2 - \frac{\kappa^2}{4}}. \quad (119)$$

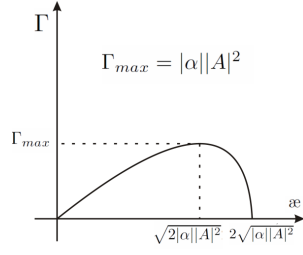


Рис. 9. Зависимость инкремента модуляционной неустойчивости от κ

Эта неустойчивость называется модуляционной. Ее причина связана с притяжением: квазичастицам выгодно собираться в одном месте, размер таких областей, однако, не должен быть достаточно малым — характерное значение κ^2 должно быть меньше $4|\alpha||A|^2$.

5.4 Рассеяние Мандельштама–Бриллюэна

Следующий вопрос, который мы рассмотрим в этой лекции, относится к рассеянию Мандельштама–Бриллюэна. Это есть нелинейное взаимодействие электромагнитных волн со звуковыми волнами (фононами). Если посмотреть на условие резонанса трехволнового взаимодействия, то в силу того, что скорость света в среде (групповая скорость) превосходит скорость звука в среде, единственным возможным резонансом может быть резонанс такого типа:

$$\omega(k) = \omega(k') + |\mathbf{k} - \mathbf{k}'|c_s,$$

который отвечает рассеянию электромагнитной волны с частотой $\omega = kc/n$ (n — показатель преломления) на звуковых колебаниях — флуктуациях плотности. Это рассеяние, которое и называют рассеянием Мандельштама–Бриллюэна. В процессе рассеяния электромагнитной волны на фононах частота фонона значительно ниже частоты электромагнитной волны, поскольку $c_{\text{photon}} = \frac{c}{n} \gg c_s$. Из условия резонанса видно, что частота электромагнитной волны максимально уменьшается при рассеянии назад. При рассеянии вперед рассеяние является почти упругим.

Такой характер взаимодействия позволяет описать этот процесс, используя усреднение по быстрой частоте — частоте электромагнитной волны. По отношению к электромагнитным волнам звуковые волны являются низкочастотными.

В линейном случае гамильтониан электромагнитных и звуковых волн будет иметь следующий вид:

$$H_0 = \int \omega_k |a_k|^2 d\mathbf{k} + \int |\Omega_k| b_k|^2 d\mathbf{k},$$

где $\omega_k = kc/n$ — частота электромагнитной волны, $\Omega_k = kc_s$ — соответственно частота звука. Амплитуда a_k отвечает электромагнитным волнам, а b_k — звуковым.

Как выглядит H_{int} ? Частота $\omega_k \gg \Omega_k$, поэтому в $H_{int}^{(3)}$ нужно выделить только члены вида $a_{k_1} a_{k_2}^*$, которые при усреднении по частотам ω_k не дают нулевого ответа. Таким образом,

$$H_{int} = \int V_{kk_1k_2} (a_k^* a_{k_1} b_{k_2} + a_k a_{k_1}^* b_{k_2}^*) \delta_{k-k_1-k_2} d\mathbf{k} d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2.$$

Матричный элемент V подлежит определению. Для его нахождения нужно записать энергию электромагнитного поля в среде:

$$\varepsilon = \int \left(\frac{\mathbf{H}^2}{8\pi} + \varepsilon \frac{\mathbf{E}^2}{8\pi} \right) d\mathbf{r}.$$

При своем прохождении электромагнитные волны меняют плотность среды ρ благодаря зависимости диэлектрической проницаемости ε от ρ (эффект стрикции). Считая отклонения $\delta\rho$ от средней плотности ρ_0 малыми, отсюда мы получаем гамильтониан взаимодействия электромагнитных волн со звуковыми:

$$H_{int} = \int \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho_0} \delta\rho \frac{\mathbf{E}^2}{8\pi} d\mathbf{r}.$$

Дописывая гамильтониан собственно звуковых колебаний, мы получаем:

$$H = \int \left[\frac{\rho_0 (\nabla \phi)^2}{2} + \frac{c_s^2}{2} \frac{\delta\rho^2}{\rho_0} \right] d\mathbf{r} + \int \left(\frac{\mathbf{H}^2}{8\pi} + \varepsilon \frac{\mathbf{E}^2}{8\pi} \right) d\mathbf{r} + \int \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho_0} \delta\rho \frac{\mathbf{E}^2}{8\pi} d\mathbf{r}. \quad (120)$$

Первый член, в котором ϕ — гидродинамический потенциал (скорость $\mathbf{v} = \nabla \phi$), как раз есть гамильтониан звуковых волн в линейном приближении, второе слагаемое соответствует гамильтониану свободных электромагнитных волн. Чтобы ввести нормальные переменные для электромагнитной волны, необходимо обратиться к уравнениям Максвелла (линеаризованным):

$$\begin{aligned} \text{rot} \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \\ \text{rot} \mathbf{H} &= \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \end{aligned}$$

Первое уравнение разрешим, вводя векторный потенциал: $\mathbf{H} = \text{rot} \mathbf{A}$ с $\text{div} \mathbf{A} = 0$. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} &= -c \mathbf{E}, \\ \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= -\Delta \mathbf{A}. \end{aligned}$$

Эти уравнения могут быть записаны в гамильтоновой форме:

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \frac{\delta H}{\delta \mathbf{P}}, \quad (121)$$

$$\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} = -\frac{\delta H}{\delta \mathbf{A}}, \quad (122)$$

где $\mathbf{P} = -\frac{\varepsilon \mathbf{E}}{4\pi c}$, а гамильтониан

$$H = \int \left[\frac{(\text{rot} \mathbf{A})^2}{8\pi} + \frac{2\pi c^2 \mathbf{P}^2}{\varepsilon} \right] d\mathbf{r} \quad (123)$$

совпадает с энергией электромагнитного поля в линейном приближении.

Действительно, вариация второго слагаемого в (120) $\delta H = \int \frac{4\pi}{\varepsilon} \mathbf{P} \delta \mathbf{P} d\mathbf{r}$ дает:
 $\frac{\delta H}{\delta \mathbf{P}} = \frac{4\pi c^2}{\varepsilon} \mathbf{P} = -c\mathbf{E}$, т. е.

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -c\mathbf{E}.$$

Вариация H относительно $\mathbf{A}$, $\delta H = -\frac{1}{4\pi} \int (\Delta \mathbf{A} \delta \mathbf{A}) d\mathbf{r}$, приводит к $\frac{\delta H}{\delta \mathbf{A}} = -\frac{\Delta \mathbf{A}}{4\pi}$, т. е. ко второму уравнению системы (121).

Переходя далее в (123) к фурье-амплитудам,

$$H = \int \left[\frac{k^2 |\mathbf{A}_k|^2}{8\pi} + \frac{2\pi c^2}{\varepsilon} |\mathbf{P}_k|^2 \right] d\mathbf{k},$$

простым перемножением получаем закон дисперсии электромагнитных волн:

$$\omega_k^2 = \frac{k^2}{4\pi} \frac{4\pi c^2}{\varepsilon} = \frac{k^2 c^2}{\varepsilon}.$$

Нормальные переменные $a_{k\lambda}$ и $a_{k\lambda}^*$ задаются выражениями, аналогичными для линейного осциллятора:

$$\mathbf{A}_k = \sqrt{\frac{4\pi\omega_k}{k^2}} \sum_{\lambda} \mathbf{S}_{k\lambda} (a_{k\lambda} + a_{-k\lambda}^*),$$

где индекс λ нумерует две линейные поляризации:

$$(\mathbf{S}_{k\lambda} \mathbf{S}_{k\lambda'}) = \delta_{\lambda\lambda'} \text{ и } (\mathbf{S}_{k\lambda} \mathbf{k}) = 0.$$

Соответственно, $\mathbf{P}_k$ записывается в виде:

$$\mathbf{P}_k = -i \sqrt{\frac{\varepsilon\omega_k}{4\pi c^2}} \sum_{\lambda} \mathbf{S}_{k\lambda} (a_{k\lambda} - a_{-k\lambda}^*). \quad (124)$$

Нормальные переменные b_k для звуковых колебаний задаются с помощью следующего соотношения:

$$\rho_k = \sqrt{\frac{\Omega_k \rho_0}{2c_s^2}} (b_k + b_{-k}^*), \quad (125)$$

($\Omega_k = kc_s$). В результате гамильтониан звуковых волн имеет стандартную форму:

$$H_s = \int \Omega_k |b_k|^2 d\mathbf{k}.$$

Гамильтониан взаимодействия со звуком в канонических переменных записывается в виде:

$$H_{int} = \int \frac{2\pi c^2}{\varepsilon^2} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} \delta \rho(\mathbf{P})^2 d\mathbf{r}.$$

Теперь нужно вычислить матричный элемент, который получается путем подстановки в H_{int} представлений (124) и (125). В результате, после усреднения по частоте ω_k , получаем

$$H_{int} = \frac{\partial \varepsilon / \partial \rho}{\varepsilon} \sqrt{\frac{\rho_0}{2c_s^2}} \int \sum_{\lambda \lambda_1} \sqrt{\omega_k \omega_{k_1} \Omega_{k_2}} (\mathbf{S}_{k\lambda} \mathbf{S}_{k_1 \lambda_1}) a_{k\lambda}^* a_{k_1 \lambda_1} (b_{k_2} + b_{-k_2}^*) \cdot \\ \cdot \delta_{k-k_1-k_2} d\mathbf{k} d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2.$$

Итак, матричный элемент рассеяния «э/м $\rightarrow$ э/м + звук» имеет вид:

$$V_{kk_1 k_2}^{\lambda \lambda_1} = \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} \sqrt{\frac{\rho_0}{2c_s^2}} \sqrt{\omega_k \omega_{k_1} \Omega_{k_2}} (\mathbf{S}_{k\lambda} \mathbf{S}_{k_1 \lambda_1}).$$

Этот матричный элемент, как мы знаем, определяет максимальное значение инкремента распадной неустойчивости

$$\Gamma_{max} = |V_{kk_1 k_2}^{\lambda \lambda_1}| |A_0|,$$

достигающее на распадной поверхности

$$\begin{aligned} \omega_{k_0} &= \omega_{k_1} + \Omega_{k_2}, \\ \mathbf{k}_0 &= \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2. \end{aligned}$$

Из выражений для инкремента видно, что он пропорционален корню квадратному из частоты звука Ω_{k_2} . Максимальная Ω_{k_2} достигается при $\mathbf{k}_0 \approx -\mathbf{k}_1$, когда $k_2 \approx 2k_0$. Это есть рассеяние назад. Скалярное произведение $(\mathbf{S}_{k\lambda} \mathbf{S}_{k_1 \lambda_1})$ показывает нам, что максимальное выражение для инкремента достигается, если оба (для падающей и рассеянной электромагнитных волн) вектора поляризации совпадают. Таким образом, рассеяние Мандельштама – Бриллюэна максимально при рассеянии назад с поляризацией, совпадающей с поляризацией исходной электромагнитной волны. Что означает это рассеяние с точки зрения спектров? В спектрах появляются линии, сдвинутые вниз по частоте на частоту звука. Впервые этот эффект был обнаружен Мандельштамом в ФИАНе (1928).

Если рассеяние Мандельштама – Бриллюэна представляет собой рассеяние электромагнитных волн на акустических фононах, то рамановское рассеяние (или рассеяние Рамана) представляет собой аналогичный процесс — рассеяние на оптических фононах. Он был открыт Раманом также в 1928 г., за что он был удостоен Нобелевской премии. Хотя аналогичный эффект Мандельштама – Бриллюэна и был открыт ранее, но опубликован Мандельштамом он был чуть позже статьи Рамана.

Лекция 6 «Одномерные солитоны в НУШ и их устойчивость»

6.1 Яркие солитоны в НУШ

На прошлой лекции мы выяснили, что модуляционная неустойчивость возникает в среде, когда $\omega'' T_0 < 0$, где $\omega'' = \left. \frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2} \right|_{k=k_0}$ и $T_0 = T_{k_0 k_0 k_0}$. В одномерном случае эта неустойчивость описывается с помощью нелинейного уравнения Шредингера (НУШ):

$$i\psi_t + \frac{1}{2}\psi_{xx} + |\psi|^2\psi = 0. \quad (126)$$

В этом уравнении мы выбрали такие переменные, что все размерные коэффициенты путем масштабных преобразований равны $\frac{1}{2}$ для дисперсии, и $T_0 = -1$. При этом $\omega'' T_0 = -\frac{1}{2} < 0$. Как мы выяснили на прошлой лекции, это уравнение может быть представлено в гамильтоновской форме:

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{\delta H}{\delta\psi^*},$$

где

$$H = \frac{1}{2} \int [|\psi_x|^2 - |\psi|^4] dx. \quad (127)$$

НУШ можно записать в виде двух уравнений гидродинамического типа, если представить $\psi = \sqrt{n} \exp(i\Phi)$, где $n = |\psi|^2$ — плотность, а Φ — фаза. Дифференцируя ψ , находим

$$\begin{aligned} \psi_t &= \left(\frac{1}{2} n_t n^{-1/2} + \sqrt{n} i \Phi_t \right) \exp(i\Phi), \\ \psi_{xx} &= [(\sqrt{n})_{xx} + 2i(\sqrt{n})_x \Phi_x - \sqrt{n} \Phi_x^2 + i\sqrt{n} \Phi_{xx}] \exp(i\Phi). \end{aligned}$$

Подставляя далее эти выражения в (126),

$$\frac{i}{2} n_t n^{-1/2} - \sqrt{n} \Phi_t + \frac{1}{2} (\sqrt{n})_{xx} = \frac{1}{2} 2i \frac{n_x \Phi_x}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2} i \sqrt{n} \Phi_{xx} - \sqrt{n} \frac{\Phi_x^2}{2} + n \sqrt{n} = 0, \quad (128)$$

и отделяя действительную и мнимую части, получаем два уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial n}{\partial t} + \operatorname{div}(n \Phi_x) &= 0, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\Phi_x^2}{2} - n &= \frac{1}{2\sqrt{n}} \frac{\partial^2 \sqrt{n}}{\partial x^2}. \end{aligned}$$

Первое уравнение этой системы есть не что иное, как уравнение непрерывности. Производная Φ_x имеет смысл скорости V , для нее мы получаем уравнение Эйлера:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} = - \frac{\partial W}{\partial x} = - \frac{1}{n} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (129)$$

где

$$W = -n - \frac{(\sqrt{n})_{xx}}{2\sqrt{n}}$$

— энтальпия, а p — давление. Второе слагаемое в p иногда называют квантовым давлением. Если им пренебречь, что справедливо в длинноволновом пределе, тогда полученные уравнения представляют собой уравнения газовой динамики с отрицательным давлением: $p = -\frac{n^2}{2}$. Отрицательное давление есть причина модуляционной неустойчивости.

Следует отметить, что уравнения для n и Φ являются гамильтоновскими:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial \Phi}; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial n},$$

где

$$H = \frac{1}{2} \int [n\Phi_x^2 + (\sqrt{n})_x^2 - n^2] dx$$

совпадает с прежним выражением гамильтониана (127), в котором совершена замена $\psi = \sqrt{n} \exp(i\Phi)$.

Если нелинейность является слабой, т.е. когда можно пренебречь членом $|\psi|^2\psi$, то в этом случае мы имеем свободное (линейное) уравнение Шредингера:

$$i\psi_t + \frac{1}{2}\psi_{xx} = 0, \quad (130)$$

которое описывает распывание пакета по автомодельному закону (при больших временах)

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{t}} g\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right).$$

Такой вид получается из решения уравнения (130) с помощью метода Фурье. Для ψ_k — фурье-амплитуды, мы имеем:

$$i\frac{\partial \psi_k}{\partial t} = \frac{k^2}{2}\psi_k.$$

Отсюда $\psi_k(t) = \psi_k(0) \exp\left(-i\frac{k^2}{2}t\right)$ и соответственно

$$\psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \psi_k(0) \exp\left(-i\frac{k^2}{2}t + ikx\right) dk.$$

При больших временах, $t \rightarrow \infty$, этот интеграл можно вычислить с помощью метода перевала. Перевальная точка находится дифференцированием фазы $\varphi = kx - \frac{k^2}{2}t$; $\frac{\partial \varphi}{\partial k} = x - k_0t = 0$ или $k_0 = \frac{x}{t}$. В результате интеграл превращается в

$$\psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{t}} f\left(\frac{x}{t}\right) \exp\left(i\frac{x^2}{2t}\right). \quad (131)$$

Зависимость $f(\frac{x}{t})$ берется от $\psi(k, 0)$ при подстановке туда перевальной точки.
Решение

$$G(x, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \exp\left(i \frac{x^2}{2t}\right)$$

есть функция Грина для (свободного) уравнения Шредингера. Это есть решение задачи Коши для $\psi(x, 0) = \delta(x)$. Поэтому общее решение записывается через функцию Грина в виде:

$$\psi(x, t) = \int G(x - x', t) \psi(x', 0) dx'. \quad (132)$$

Важным моментом всего этого анализа является хорошо известный факт: дисперсия приводит к распыванию пакета при $t \rightarrow \infty$. Его амплитуда будет падать $\sim \frac{1}{\sqrt{t}}$. Нелинейность же всегда работает в другую сторону. Поэтому возможно равновесие между дисперсионным распылением и нелинейным сжатием. Оно реализуется на солитоне. Солитон — сокращение от английского «solitary wave» (уединенная волна). Поскольку речь идет об уравнении Шредингера, то будем искать решение этого уравнения, как в квантовой механике, в виде стационарного состояния:

$$\psi(x, t) = \exp^{i \frac{\lambda^2 t}{2}} \psi_0(x), \quad (133)$$

где $-\lambda^2/2$ имеет смысл энергии солитона, как связанного состояния. Подставляя эту зависимость в НУШ, имеем:

$$-\frac{\lambda^2}{2} \psi_0 + \frac{1}{2} \psi_{0xx} + |\psi_0|^2 \psi_0 = 0. \quad (134)$$

Нас будет интересовать простейшее решение (основное состояние), когда ψ_0 чисто действительно и не имеет нулей.

Задача 1. Показать, что решение этого уравнения имеет солитонное решение, т. е. $\psi_0 \rightarrow 0$ при $|x| \rightarrow \infty$, только при условии постоянства фазы. При фазе, не равной нулю (или константе), локализованных решений нет.

В этом случае уравнение для ψ_0 имеет вид уравнения Ньютона:

$$\psi_0'' = -2\psi_0^3 + \lambda^2 \psi_0 = -\frac{\partial}{\partial \psi_0} \left[\frac{\psi_0^4}{2} - \frac{\lambda^2}{2} \psi_0^2 \right], \quad (135)$$

где x играет роль времени, а ψ_0 имеет смысл координаты. Первый интеграл — энергия

$$E = \frac{\psi_0'^2}{2} + U(\psi_0),$$

где $U(\psi_0) = \frac{1}{2}(\psi_0^2 - \lambda^2 \psi_0^2)$ есть потенциальная энергия для уравнения Ньютона (135), а первое слагаемое — кинетическая энергия. Здесь есть единственная траектория с $E = 0$, которая соответствует экспоненциально долгому сползанию с точки $\psi_0 = 0$, затем отражению в точке λ и далее экспоненциально медленному приходу к $\psi_0 = 0$.

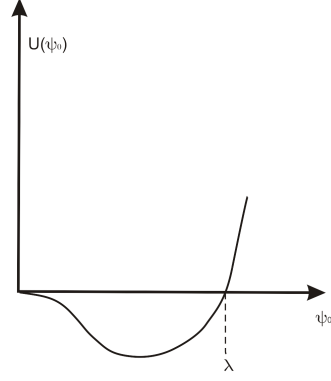


Рис. 10. Зависимость потенциальной энергии $U(\psi_0)$. Солитону соответствует траектория с $E = 0$

Все остальные траектории с $E \neq 0$ дают периодические (по x) колебания (или кноидальные волны). Для $E = 0$ мы имеем интеграл:

$$\int \frac{d\psi_0}{\sqrt{\lambda^2 \psi_0^2 - \psi_0^4}} = \int dx. \quad (136)$$

В результате замены переменных, $z = \frac{\lambda}{\psi_0}$, мы приходим к стандартному интегралу

$$\int \frac{dz}{\sqrt{z^2 - 1}} = -\lambda x, \quad (137)$$

который выражается через элементарные функции:

$$\operatorname{arcch} \frac{\lambda}{\psi_0} = -\lambda x \quad (138)$$

или

$$\psi_0 = \frac{\lambda}{\operatorname{ch} \lambda x}. \quad (139)$$

Это есть солитонное решение. В одномерной геометрии, например, при распространении света в световолокне, это есть движущийся с групповой скоростью уединенный импульс с экспоненциальным убыванием при $x \rightarrow \pm\infty$.

Для стационарной самофокусировки, для которой $-(\lambda)^2/2$ имеет смысл малого смещения от величины $k = k_0$ волнового числа огибающей, распределение $|\psi(z, x)|^2$ имеет вид плоского канала (самофокусировочного), для которого самофокусировочная нелинейность (линза) скомпенсирована дифракцией.

Следует отметить, что решение в виде солитона, особенно для световолоконных линий связи, играет очень важное прикладное значение. Мы покажем, что в этом случае солитон устойчив не только относительно малых возмущений, но также и конечных. Иными словами, мы установим факт устойчивости солитона НУШ по Ляпунову (более подробные детали можно найти в обзоре [7]).

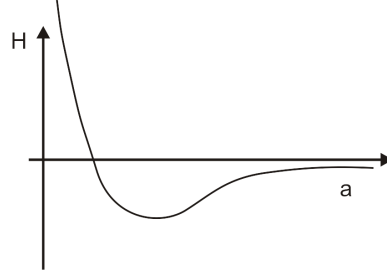


Рис. 11. Зависимость H от масштабного параметра a

Рассмотрим уравнение для ψ_0 :

$$-\frac{\lambda^2}{2}\psi_0 + \frac{1}{2}\psi_{xx} + |\psi_0|^2\psi_0 = 0.$$

Легко видно, что это уравнение возникает из решения следующей вариационной задачи:

$$\delta \left(H + \frac{\lambda^2}{2}N \right) = 0. \quad (140)$$

Напомним, что $N = \int |\psi|^2 dx$ есть число волн (или частиц), а $H = \frac{1}{2} \int (|\psi_x|^2 - |\psi|^4) dx$ — гамильтониан для НУШ. Обе эти величины (N и H) сохраняются. При этом запись (140) означает, что солитонное решение есть стационарная точка гамильтониана H при фиксированном числе частиц N ; $\lambda^2/2$ при этом имеет смысл множителя Лагранжа. В соответствии с теоремой Ляпунова стационарная точка будет устойчива, если она реализует минимум (либо максимум) гамильтониана.

Если взять математический маятник, то минимум энергии достигается в нижней точке, где импульс равен нулю. Поэтому такое положение устойчиво. С другой стороны, если вместо энергии E рассмотреть $-E$, то для нее уже максимум будет устойчивым, который соответствует все тому же положению равновесия.

Теперь обратимся к солитону. Нам нужно показать, что H имеет минимум на солитоне при фиксированном числе частиц N . Сделаем простую оценку. Пусть a есть характерный размер, а A — характерная амплитуда ψ_0 . Тогда из $N = \text{const}$ мы имеем $N \approx A^2 a$ или $A^2 \simeq \frac{N}{a}$. Гамильтониан при такой оценке запишется в виде:

$$H = \frac{1}{2} \frac{N}{a^2} - \frac{1}{2} \frac{N^2}{a}. \quad (141)$$

Отсюда мы видим, что H как функция a ограничена снизу (рис. 11). При этом минимум должен соответствовать солитону (как стационарной точке гамильтониана). Согласно этим оценкам, он должен быть устойчивым. Давайте теперь сделаем оценку (придя к тому же ответу) немного более аккуратно. Рассмотрим масштабные преобразования

$$\psi_0 \rightarrow \frac{1}{a^{1/2}} \psi_0 \left(\frac{x}{a} \right), \quad (142)$$

которые, как легко видеть, сохраняют число частиц: $N = inv$.

При таком преобразовании гамильтониан H становится функцией масштабного параметра a :

$$H(a) = \frac{1}{2} \left(\frac{I_1}{a^2} - \frac{I_2}{a} \right),$$

где

$$I_1 = \int |\psi_{0x}|^2 dx, I_2 = \int |\psi_0|^4 dx.$$

Поскольку солитонное решение ψ_0 есть стационарная точка гамильтониана, то $\frac{\partial H}{\partial a}|_{a=1} = 0$, т. е. $2I_1 = I_2$. Рассмотрим теперь уравнение для ψ_0 :

$$-\lambda^2 \psi_0 + \psi_{0x} + 2|\psi_0|^2 \psi_0 = 0. \quad (143)$$

Домножая это уравнение на ψ_0^* и интегрируя по x , приходим к соотношению:

$$-\lambda^2 N - I_1 + 2I_2 = 0. \quad (144)$$

Отсюда мы имеем:

$$I_1 = \frac{\lambda^2 N}{3}, I_2 = \frac{2\lambda^2 N}{3}, H = -\frac{1}{6}\lambda^2 N = -\frac{\lambda^3}{3},$$

поскольку $\psi_0 = \frac{\lambda}{\text{ch}(\lambda x)}$, то $N = 2\lambda$.

Из этих преобразований мы видим, что солитонное решение реализует минимум, но это есть частный тип деформаций. Нам нужно теперь доказать, что минимум H действительно достигается на солитоне. Доказательство тривиально. Рассмотрим (все) стационарные точки H при фиксированном N , т. е. вариационную задачу:

$$\delta \left(H + \frac{\lambda^2}{2} N \right) = 0. \quad (145)$$

Эти стационарные точки определяются из уравнения:

$$-\frac{\lambda^2}{2} \psi_0 + \frac{1}{2} \psi_{0xx} + |\psi_0|^2 \psi_0 = 0; \quad (146)$$

но у этого уравнения есть единственное (с точностью до постоянного фазового множителя) решение в виде солитона. Но мы видели, что эта точка соответствует минимуму относительно масштабных преобразований. Поэтому солитон, как единственная стационарная точка, реализует минимум H . Таким образом, солитон устойчив не только относительно малых, но также конечных возмущений.

Это есть один из главных выводов, который был сделан Захаровым и Шабатом (1971) [14] при решении НУШ в одномерном случае. Захаров и Шабат вычислили, используя так называемый метод обратной задачи рассеяния, как взаимодействуют солитоны между собой. Было показано, что, несмотря на нелинейность, солитоны в этих процессах ведут себя упругим образом: их ширина и

амплитуды остаются неизменными при рассеянии, а изменяются только их фазы и центры тяжести. Процесс рассеяния оказывается похожим на столкновение двух одинаковых шаров, когда при столкновении они обмениваются своими импульсами.

Это свойство солитонов весьма важно с точки зрения приложений. Такие солитоны могут быть использованы в световолоконных линиях связи в качестве бита информации, поскольку они демонстрируют свою структурную устойчивость. Впервые эта идея была высказана Хасегавой и Таппетом в 1973 г. [8].

Солитоны рассмотренного вида называют яркими (bright) солитонами, потому что их интенсивность (яркость) максимальна в центре солитона и стремится к нулю при больших $|x|$. Как мы с вами видели, такого рода солитоны (солитоны огибающих) возникают при $\omega''T_0 < 0$. В оптике это возникает для керровской нелинейности и аномальной дисперсии. Если дисперсия нормальная, то нелинейность является дефокусирующей ($\omega''T_0 > 0$). В этом случае уже нет ярких солитонов — локализованных решений, стремящихся к нулю при $|x| \rightarrow \infty$. Однако, если на бесконечности (при больших $|x|$) интенсивность постоянна, то солитоны представляют собой локальные области пониженной интенсивности — их называют серыми солитонами, а если интенсивность обращается в нуль, то эти солитоны называют темными (dark).

6.2 Серые/темные солитоны

Чтобы найти темные солитоны, нужно рассмотреть НУШ с дефокусирующей нелинейностью:

$$i\psi_t + \frac{1}{2}\psi_{xx} - |\psi|^2\psi = 0$$

с граничным условием $|\psi|^2 \rightarrow n_0$ при $|x| \rightarrow \infty$. Чтобы найти солитонное решение, вначале совершим преобразование:

$$\psi \rightarrow \psi e^{-in_0 t}, \quad (147)$$

в результате которого уравнение приобретает вид:

$$i\psi_t + \frac{1}{2}\psi_{xx} + (n_0 - |\psi|^2)\psi = 0. \quad (148)$$

В переменных плотность n и фаза Φ это уравнение записывается в виде системы уравнений:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(n\Phi_x) = 0, \quad (149)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}\Phi_x^2 + (n - n_0) = \frac{1}{2\sqrt{n}} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \sqrt{n}. \quad (150)$$

Интересно отметить, что в этом случае в длинноволновом пределе мы имеем уравнения газовой динамики со скоростью $v = \Phi_x$, плотностью n и положительным давлением $p = \frac{n^2}{2} > 0$. По этой причине в линейном приближении,

$n = n_0 + \delta n$, $|\delta n| \ll n_0$, при $k \rightarrow 0$ мы приходим к звуковым волнам:

$$\omega = k \sqrt{n_0 + \frac{k^2}{4}} \rightarrow k c_s, \quad (151)$$

где (в этих безразмерных переменных) квадрат скорости звука — $c_s^2 = \frac{\partial p}{\partial n_0}$. Напомним, что спектр (151) мы уже получали, когда анализировали модуляционную неустойчивость. Закон дисперсии (151) называется спектром Боголюбова, он описывает звуковые волны с положительной дисперсией. Легко установить, что этот закон дисперсии относится к распадным законам.

В длинноволновом пределе ($k \rightarrow 0$) закон дисперсии записывается в виде:

$$\omega \simeq k c_s \left(1 + \frac{k^2}{8 n_0} \right). \quad (152)$$

Важно, что коэффициент $\lambda^2 = 1/8 n_0$ (имеет смысл квадрата длины) положителен. Простая линеаризация в этом случае (без учета дисперсии) дает две волны, которые распространяются вправо и влево с почти звуковой скоростью:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \delta n - c_s^2 \frac{\partial^2 \delta n}{\partial x^2} \approx 0. \quad (153)$$

Теперь наряду с дисперсионными членами учтем нелинейные эффекты. Как и в линейном (длинные волны) пределе, мы получим две характеристики. Каждой такой характеристике будет соответствовать свой инвариант Римана. Что такое инвариант Римана для НУШ с дефокусирующей нелинейностью?

Будем считать все волны длинноволновыми. Это означает, что мы можем в этом пределе пренебречь в (150) дисперсией, так что у нас есть два уравнения вида

$$\frac{\partial n}{\partial t} + n \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial n}{\partial x} = 0, \quad (154)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{n} \frac{\partial p}{\partial x} = 0. \quad (155)$$

Здесь

$$p = \frac{n^2}{2}, \quad c_s^2 = \frac{\partial p}{\partial n} = n.$$

Введем два инварианта Римана $J_{\pm}$ (почему это - инварианты, будет видно в дальнейшем):

$$dJ_{\pm} = dv \pm \frac{c_s}{n} dn.$$

Умножая первое уравнение (154) на $\frac{c_s}{n}$ и складывая со вторым уравнением (155), получаем:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{c_s}{n} \frac{\partial n}{\partial t} + (v + c_s) \frac{\partial v}{\partial x} + (v + c_s) \frac{c_s}{n} \frac{\partial n}{\partial x} = 0 \quad (156)$$

или

$$\frac{\partial J_+}{\partial t} + (v + c_s) \frac{\partial J_+}{\partial x} = 0. \quad (157)$$

Для J_- получаем аналогично:

$$\frac{\partial J_-}{\partial t} + (v - c_s) \frac{\partial J_-}{\partial x} = 0. \quad (158)$$

Из этих уравнений мы видим, что инвариант J_+ является постоянной величиной вдоль характеристики

$$\frac{dx}{dt} = v + c_s, \quad (159)$$

а инвариант J_- постоянен вдоль

$$\frac{dx}{dt} = v - c_s. \quad (160)$$

При малых амплитудах мы имеем две «старые» характеристики:

$$\frac{dx_{1,2}}{dt} = \pm c_s, \quad (161)$$

т. е. волны распространяются вправо и влево со скоростью c_s .

Пусть в начальный момент инвариант $J_- = \text{const}$ при всех x , то тогда, в силу «линейности» уравнения для J_- , этот инвариант будет константой при всех $t > 0$, т. е.

$$0 = dJ_- = dv - \frac{c_s}{n} dn = dv - 2d\sqrt{n}. \quad (162)$$

Таким образом, для волн, которые движутся вправо, скорость

$$v = 2(\sqrt{n} - \sqrt{n_0}) \text{ или } c_s = c_s^{(0)} + \frac{v}{2}. \quad (163)$$

Для J_+ в силу этих соотношений мы имеем

$$dJ_+ = dv + \frac{c_s}{n} dn - v \text{ или } J_+ = 2v. \quad (164)$$

Отсюда уравнение для v выглядит как

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (c_s + v) \frac{\partial v}{\partial x} = 0. \quad (165)$$

Подставляя $c_s = c_s^{(0)} + \frac{v}{2}$, мы имеем одно автономное уравнение:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \left(c_s^{(0)} + \frac{3v}{2} \right) \frac{\partial v}{\partial x} = 0. \quad (166)$$

Это уравнение называют уравнением для простой волны Римана. Это решение описывает опрокидывание волны.

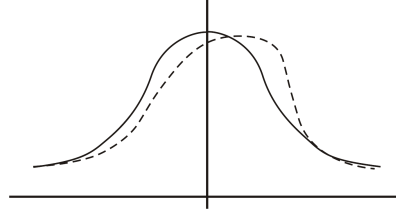


Рис. 12. Поведение $u = u(x, t)$ в разные моменты времени

Действительно, переходя в систему координат,двигающуюся со скоростью $c_s^{(0)}$, и вводя $u = \frac{3v}{2}$, для u получаем уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \quad (167)$$

Это простейшее уравнение квазилинейного типа. Оно интегрируется с помощью метода характеристик. Если понимать, что u есть скорость, то уравнение (167) в лагранжевых переменных записывается как

$$\frac{du}{dt} = 0 \text{ при } \frac{dx}{dt} = u, \quad (168)$$

где последнее условие есть уравнение на характеристику.

Для этих двух дифференциальных уравнений мы имеем начальные условия:

$$x|_{t=0} = x_0; u|_{t=0} = u_0(x_0). \quad (169)$$

Решение тривиально:

$$u = u_0(x_0), \quad x = x_0 + u_0(x_0)t. \quad (170)$$

Здесь x_0 – параметр, который необходимо исключить, что даст $u = u(x, t)$.

Графически решение этого уравнения можно легко проанализировать (рис. 12). В соответствии с (170) каждая точка этого профиля движется со своей скоростью. Максимальная точка будет иметь максимальную скорость, поэтому профиль будет деформироваться таким образом, что более быстрые частицы будут догонять медленные. В результате возникнет опрокидывание, т. е. найдется такой момент времени $t = t^*$, когда производная u_x станет бесконечной. При $t > t^*$ решение будет неоднозначным.

Таким образом, гидродинамическая нелинейность типа $u \frac{\partial u}{\partial x}$ приводит к опрокидыванию профиля. С точки зрения фурье-гармоник этот процесс приводит к появлению больших значений k , соответственно спектр сдвигается в область больших k .

Давайте посмотрим, что дает комбинация двух слабых эффектов — слабой нелинейности и слабой дисперсии. При слабой дисперсии

$$\omega = kc_s(1 + \lambda^2 k^2), \quad (171)$$

чему отвечает линейное уравнение

$$\frac{\partial v}{\partial t} + c_s \frac{\partial v}{\partial x} - c_s \lambda^2 \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} = 0. \quad (172)$$

Главным в этом уравнении является второе слагаемое, которое описывает движение волны со скоростью звука.

Для простой волны Римана мы имеем уравнение

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \left(c_s + \frac{3v}{2} \right) \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad (173)$$

в котором, при слабой нелинейности, последний член будет мал по сравнению со вторым. Поэтому при одновременном учете слабой дисперсии и слабой нелинейности эти два эффекта будут входить аддитивно, т. е.

$$\frac{\partial v}{\partial t} + c_s \frac{\partial v}{\partial x} - c_s \lambda^2 \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} + \frac{3v}{2} \frac{\partial v}{\partial x} = 0. \quad (174)$$

Здесь $\lambda^2 = \frac{1}{8n_0}$, $c_s = \sqrt{n_0}$.

Переходя в систему координат,двигающуюся со скоростью звука c_s , мы приходим к уравнению Кортевега — де Вриза (КДВ):

$$\frac{\partial v}{\partial t} - c_s \lambda^2 \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} + \frac{3v}{2} \frac{\partial v}{\partial x} = 0. \quad (175)$$

При этом флуктуация плотности (интенсивность) выражается в соответствии с инвариантом Римана J_- : $v = \delta n / \sqrt{n_0}$.

Солитонное решение уравнения КДВ ищется в виде $v = v(x - Vt)$, где V — скорость солитона. В этом случае имеем обыкновенное дифференциальное уравнение

$$-Vv_x - c_s \lambda^2 v_{xxx} + \frac{3v}{2} \frac{\partial v}{\partial x} = 0. \quad (176)$$

После простого интегрирования приходим к уравнению Ньютона:

$$c_s \lambda^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -Vv + \frac{3}{4}v^2. \quad (177)$$

Первый интеграл — энергия E — дается выражением

$$\frac{1}{2} c_s \lambda^2 \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + V \frac{v^2}{2} - \frac{v^3}{4} = E. \quad (178)$$

Для решений с $v \rightarrow 0$ константа $E = 0$, а потенциальная энергия при разных V представлена на рис. 13. Из этих графиков видно, что только $V < 0$ дает солитонное решение. Это означает, что скорость солитона меньше скорости звука. (Замечание: солитон не может иметь скорость больше c_s , в этом случае он должен излучать волны черенковским образом.) Сама скорость v в этом случае отрицательна, соответственно флуктуации плотности также отрицательны.

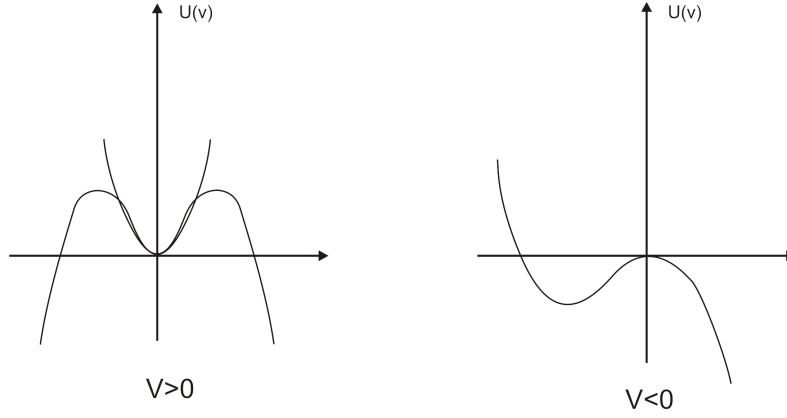


Рис. 13. Зависимости потенциальной энергии при разных знаках скорости V

С точки зрения оптики такого рода солитоны есть серые солитоны, у них интенсивность ниже средней.

Найдем теперь решение этого уравнения. Положим $n_0 = 1$, в этом случае $\lambda^2 = 1/8$, $c_s = 1$. Таким образом, для солитона

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 - \left(|V|\frac{v^2}{2} + \frac{v^3}{4}\right) = 0. \quad (179)$$

Отсюда

$$-\int \frac{d|v|}{\sqrt{2|V|v^2 - |v|^3}} = 2x. \quad (180)$$

Делаем замену $z^2 = 2|V|/|v|$, тогда интеграл сводится к табличному:

$$\int \frac{dz}{\sqrt{z^2 - 1}} = \text{arcch}(z) = \sqrt{2V}x.$$

Таким образом,

$$|v| = \frac{2|V|}{ch^2(\sqrt{2V}x)} \quad (181)$$

или окончательно

$$v = -\frac{2|V|}{ch^2(\sqrt{2V}x)}. \quad (182)$$

При этом скорость солитона V оказывается отрицательной, т. е. солитон движется со скоростью, меньшей звуковой скорости c_s . Скорость v также отрицательна, соответственно флуктуация плотности $\delta n = v$ отрицательна, т. е. солитон представляет собой уединенную волну в виде ямки плотности. Если проанализировать, откуда берется ямка плотности, то это связано с дисперсией волн. Если дисперсия положительна, как в данном случае, $\delta = c_s \lambda^2 k^2 > 0$, то мы получаем ямку плотности. В оптике это соответствует серым солитонам — движущимся областям с пониженной интенсивностью. Если дисперсия отрицательна

$\delta = -c_s \lambda^2 k^2 < 0$, то солитон представляет собой горб плотности. Например, для волн на поверхности воды

$$\omega = \sqrt{gk th(kh)},$$

где g — ускорение силы тяжести, h — глубина жидкости; частота ω при $k \rightarrow 0$ имеет отрицательную дисперсию:

$$\omega \approx \sqrt{ghk} \left[1 - \frac{1}{6} (kh)^2 + \dots \right].$$

В этом случае солитон представляет собой горб — возвышение, которое движется со скоростью, большей $\sqrt{gh} = c_s$. Именно такой солитон на поверхности воды (в канале) в конце XIX в. обнаружил Лорд Рассел. Он скакал на лошади и увидел, что от толчка баржи возникла уединенная волна, которая долго затем двигалась вдоль канала. Впоследствии Лорд Рассел описал это явление в трудах Лондонского Королевского общества.

Вернемся теперь к НУШ с дефокусирующей нелинейностью:

$$i\psi_t + \frac{1}{2}\psi_{xx} + (1 - |\psi|^2)\psi = 0, \quad (183)$$

где $|\psi|^2 \rightarrow 1$ при $|x| \rightarrow \infty$.

Рассмотрим решение этого уравнения в виде стационарной волны, распространяющейся со скоростью V : $\psi = \psi(x - Vt)$. Для этого решения $\psi_t = -V\psi_x$, а уравнение (183) становится обыкновенным дифференциальным уравнением

$$-iV\psi_x + \frac{1}{2}\psi_{xx} + (1 - |\psi|^2)\psi = 0.$$

Член с первой производной исключим стандартным образом, положив $\psi = u\varphi$. Тогда

$$\begin{aligned} \psi_x &= u_x \varphi + u \varphi_x, \\ \psi_{xx} &= u_{xx} \varphi + 2u_x \varphi_x + u \varphi_{xx}, \end{aligned}$$

при этом u выберем таким образом, чтобы отсутствовали члены с первой производной:

$$-iVu + u_x = 0, \text{ т. е. } u = e^{iVx}.$$

В результате

$$-iVu_x + \frac{1}{2}u_{xx} = (V^2 - \frac{V^2}{2})e^{iVx} = \frac{V^2}{2}e^{iVx},$$

т. е. уравнение на φ записывается в виде уравнения Ньютона

$$\varphi_{xx} = -V^2\varphi - 2(1 - |\varphi|^2)\varphi = 0$$

для движения частицы в центрально-симметричном потенциале

$$U(|\varphi|) = V^2 \frac{|\varphi|^2}{2} + |\varphi|^2 - \frac{|\varphi|^4}{2}.$$

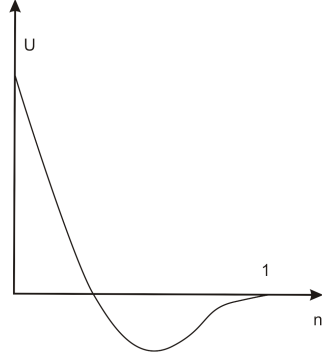


Рис. 14. Зависимость «потенциальной» энергии $U(n)$ для уравнения (187)

(В этом уравнении действительная и мнимая части φ представляют собой «компоненты» вектора $\mathbf{r}$ «частицы», а x играет роль времени.) Поэтому мы можем сразу записать первый интеграл — энергию

$$\frac{r_x^2}{2} + V^2 \frac{r^2}{2} + r^2 - \frac{r^4}{2} + \frac{M^2}{2r^2} = E, \quad (184)$$

где $M = r^2 \frac{d(\arg \varphi)}{dx}$ есть момент импульса. При $|x| \rightarrow \infty$ $|\varphi| \equiv r \rightarrow 1$, поэтому

$$\frac{1}{2}(V^2 + 1) + \frac{M^2}{2} = E. \quad (185)$$

Таким образом, (184) переписывается в виде:

$$\frac{r_x^2}{2} + \frac{V^2}{2}(r^2 - 1) - \frac{1}{2}(r^2 - 1)^2 + \frac{M^2}{2r^2}(1 - r^2) = 0. \quad (186)$$

Умножим это уравнение на r^2 и введем плотность $n = r^2$, тогда

$$\frac{n_x^2}{8} + n \frac{V^2}{2}(n - 1) - \frac{1}{2}(n - 1)^2 n + \frac{M^2}{2}(1 - n) = 0. \quad (187)$$

Это значение новой энергии, при которой частица плавно — экспоненциально «долго» — должна приближаться к точке $n = 1$ (при $x \rightarrow \pm\infty$). Чтобы было касание в точке $n = 1$, необходимо выполнение условия

$$\frac{V^2}{2} = \frac{M^2}{2}, \quad (188)$$

т. е. «потенциальная» энергия для уравнения (187) преобразуется к виду (см. рис. 14):

$$U(n) = \frac{V^2}{2}(n - 1)^2 - \frac{1}{2}(n - 1)^2 n = \frac{(n - 1)^2}{2}[V^2 - n]. \quad (189)$$

Вводим величину $z = 1 - n$. Для z имеем уравнение

$$\frac{1}{8}(z_x)^2 + U(z) = 0, \quad (190)$$

где

$$U(z) = \frac{z^2}{2}[z - \kappa^2] ; \kappa^2 = 1 - V^2 > 0. \quad (191)$$

Отсюда искомое решение получается взятием интеграла:

$$\int \frac{dz}{2z[\kappa^2 - z]^{\frac{1}{2}}} = x \implies \int \frac{dz}{2z^{\frac{3}{2}}[\frac{\kappa^2}{z} - 1]^{\frac{1}{2}}} = x.$$

Вводя далее новую переменную интегрирования $y = \kappa z^{-1/2}$, интеграл сводится к табличному:

$$-\frac{1}{\kappa} \int \frac{dy}{\sqrt{y^2 - 1}} - \frac{1}{\kappa} \operatorname{arccch}\left(\frac{\kappa}{\sqrt{1 - n}}\right) = x.$$

В результате получаем

$$n = 1 - \frac{\kappa^2}{ch^2(\kappa x)}. \quad (192)$$

По поводу интегрирования нужно сказать, что мы его уже делали при нахождении солитона для уравнения КДВ. В этом пределе $\kappa^2 = 1 - V^2 \simeq 2|V|$. Поэтому решение (192) переходит в найденное до этого решение для солитона уравнения КДВ.

При $|V| \rightarrow 0$, когда $\kappa^2 \rightarrow 1$, решение (192) соответственно записывается в виде

$$n = 1 - \frac{1}{ch^2(x)} = th^2(x), \quad (193)$$

т. е. в точке $x = 0$ плотность (интенсивность) обращается в нуль. Это есть решение в виде темного (dark) солитона. Все остальные солитоны относятся к серым солитонам, для которых плотность (интенсивность) не обращается в нуль.

Нам осталось теперь найти фазовый множитель $\theta = \arg \varphi$. Его определяем из интегрирования уравнения для момента (импульса):

$$n \frac{d\theta}{dx} = M \equiv V. \quad (194)$$

При этом, напомним, $\kappa^2 + V^2 = 1$, а плотность n может быть записана в виде

$$n = 1 - \frac{\kappa^2}{ch^2(\kappa x)} = 1 - \kappa^2[1 - th^2(\kappa x)] = V^2 + \kappa^2 th^2(\kappa x). \quad (195)$$

Нужно вычислить интеграл:

$$\varphi = \int \frac{V dx}{V^2 + \kappa^2 th^2(\kappa x)}; \quad (196)$$

вводя $z = \kappa x$, интеграл преобразуется как

$$\varphi = \frac{V}{\kappa} \int \frac{dz}{V^2 + \kappa^2 \text{th}^2(z)}. \quad (197)$$

Затем делаем замену

$$u = \text{th } z, \quad du = \frac{dz}{\text{ch}^2 z} = (1 - u^2) dz, \quad (198)$$

в результате все сводится к простому вычислению интегралов путем разложения на простые дроби:

$$\theta = \frac{V}{\kappa} \int \frac{du}{(1 - u^2)(V^2 + \kappa^2 u^2)}. \quad (199)$$

Мы не будем заниматься этими простыми вычислениями, а приведем сразу окончательный ответ для солитона:

$$\psi = \kappa \text{th} \kappa(x - Vt) + iV. \quad (200)$$

Отсюда видно, что при $V = 0$ фаза меняется на π , а ψ соответственно равно -1 при $x \Rightarrow -\infty$ и 1 при $x \rightarrow +\infty$. Для серых солитонов скачок фазы

$$\Delta\varphi = 2 \arctg \left(\frac{\kappa}{V} \right). \quad (201)$$

Лекция 7 «Неустойчивость одномерных солитонов относительно поперечных возмущений»

7.1 Еще раз об устойчивости одномерных солитонов в НУШ

На прошлой лекции мы видели с вами, что солитоны (яркие) НУШ в одномерном случае реализуют минимум гамильтониана относительно одномерных возмущений. Мы показали, что масштабные преобразования

$$\psi_0(x) \rightarrow \frac{1}{a^{1/2}} \psi_0\left(\frac{x}{a}\right), \quad (202)$$

сохраняющие число частиц, дают минимум H на солитонном решении. С другой стороны, у гамильтониана H есть только одна стационарная точка в виде солитона. Поэтому мы сделали вывод о том, что солитоны реализуют минимум H . С физической точки зрения применение масштабных преобразований выглядит достаточным. Сейчас мы приведем другое доказательство этого факта.

Рассмотрим интеграл

$$I_2 = \int |\psi|^4 dx. \quad (203)$$

Он может быть оценен сверху как

$$I_2 \leq \max_x |\psi|^2 \int |\psi|^2 dx = \quad (204)$$

$$= \int_{-\infty}^{x_{max}} |\psi_x|^2 dx \cdot \int |\psi|^2 dx \leq 2 \int_{-\infty}^{x_{max}} |\psi| |\psi_x| dx \int |\psi|^2 dx. \quad (205)$$

Интеграл в правой части неравенства

$$\int_{-\infty}^{x_{max}} |\psi| |\psi_x| dx \leq \int_{-\infty}^{\infty} |\psi| |\psi_x| dx \quad (206)$$

оценим с помощью неравенства Коши – Буняковского:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi| |\psi_x| dx \leq \left(\int |\psi|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int |\psi_x|^2 dx \right)^{1/2}. \quad (207)$$

Таким образом, I_2 оценивается сверху как

$$I_2 \leq 2N^{3/2} I_1^{1/2}. \quad (208)$$

Соответственно для H имеем оценку:

$$H = \frac{1}{2}(I_1 - I_2) \geq \frac{1}{2}(I_1 - 2N^{3/2} I_1^{1/2}). \quad (209)$$

Правая часть этого неравенства, как функция I_1 , имеет минимум, равный $-\frac{1}{2}N^3$, т.е. $H \geq -\frac{1}{2}N^3$. Отсюда следует, что H ограничен снизу. Минимум H

достигается на солитонном решении, что и доказывает его устойчивость по Ляпунову [7].

Относительно одномерных ярких солитонов следует сделать одно замечание. Уравнение

$$i\psi_t + \frac{1}{2}\psi_{xx} + |\psi|^2\psi = 0 \quad (210)$$

инвариантно относительно преобразований Галилея, как и само уравнение Шредингера. Т. е. если совершить преобразование вида:

$$\psi = e^{-i\omega t + ikx} \tilde{\psi}(x - Vt, t), \quad (211)$$

и положить $\omega = \frac{V^2}{2}$; $k = V$, то уравнение для $\tilde{\psi}$ будет иметь тот же вид, что и исходное уравнение — НУШ (210):

$$i\tilde{\psi}_t + \frac{1}{2}\tilde{\psi}_{xx} + |\tilde{\psi}|^2\tilde{\psi} = 0. \quad (212)$$

Это означает, что солитоны образуют целое семейство решений вида

$$\psi(x, t) = e^{-i\frac{V^2}{2}t + iVx} \tilde{\psi}(x - Vt, t), \quad (213)$$

где $\tilde{\psi}(x, t)$ есть солитонное решение, которое мы уже знаем:

$$\tilde{\psi}(x, t) = \frac{\lambda}{\cosh(\lambda x)} e^{i\lambda^2 t}. \quad (214)$$

Решения (213) представляют собойдвигающийся со скоростью V солитон. Таким образом, солитонное решение общего вида характеризуется двумя параметрами: λ — его амплитудой и V — его скоростью. Самое главное — это то, что, например, при изучении устойчивости солитона удобнее перейти в систему отчета,двигающуюся с его скоростью. Этим мы будем пользоваться при рассмотрении вопроса об устойчивости солитонов относительно поперечных возмущений.

7.2 Неустойчивость ярких солитонов

Начнем с НУШ с положительной дисперсией:

$$i\psi_t + \Delta\psi + |\psi|^2\psi = 0. \quad (215)$$

Для этого ψ представим в виде

$$\psi = [\psi_0(x) + u + iv]e^{i\lambda^2 t}, \quad (216)$$

где $\psi_0 = \frac{\lambda}{\cosh \lambda x}$. Линеризация этого уравнения на фоне ψ_0 дает два уравнения для действительной (u) и мнимой (v) части возмущения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= L_0 v - \frac{1}{2} \Delta_{\perp} v, \\ -\frac{\partial v}{\partial t} &= L_1 u - \frac{1}{2} \Delta_{\perp} u. \end{aligned}$$

Здесь $L_{0,1}$ — два оператора Шредингера:

$$\begin{aligned} L_0 &= -\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \psi_0^2 + \lambda^2, \\ L_1 &= -\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - 3\psi_0^2 + \lambda^2. \end{aligned}$$

Полученные два уравнения не зависят явно от времени и от поперечной координаты, поэтому u и $v \propto e^{-i\omega t + ik y}$. В результате получим:

$$\begin{aligned} -i\omega u &= L_0 v + \frac{1}{2} k^2 v, \\ i\omega v &= L_1 u + \frac{1}{2} k^2 u. \end{aligned}$$

При $\omega = k = 0$ эти уравнения переходят в

$$L_0 v = 0, \quad L_1 u = 0. \quad (217)$$

Сравнивая с уравнением для определения формы солитона:

$$\lambda^2 \psi_0 - \frac{1}{2} \psi_{0xx} - \psi_0^3 = 0, \quad (218)$$

мы получаем, что

$$L_0 \psi_0 = 0. \quad (219)$$

Дифференцируя (218) по x , мы имеем

$$L_1 \frac{\partial \psi_0}{\partial x} = 0. \quad (220)$$

Таким образом,

$$v_0 = \psi_0 \quad \text{и} \quad u_0 = \frac{\partial \psi_0}{\partial x} \quad (221)$$

представляют собой два безразлично устойчивых решения линейной задачи.

Далее мы рассмотрим, как выглядит спектр $\omega = \omega(k)$ в области малых k . Будем разлагать u, v и ω в ряд по степеням k :

$$\begin{aligned} u &= u_0 + u_1 + u_2 + \dots, \\ v &= v_0 + v_1 + v_2 + \dots, \\ \omega &= \omega_1 + \omega_2 + \dots, \end{aligned}$$

где u_0 и v_0 подчиняются уравнениям, соответствующим главному порядку:

$$L_0 v_0 = 0, \quad L_1 u_0 = 0. \quad (222)$$

Для нахождения спектра $\omega = \omega(k)$ нам понадобятся два соотношения:

$$L_1 \frac{\partial \psi_0}{\partial \lambda^2} = -\psi_0 \quad \text{и} \quad L_0(x\psi_0) = -\frac{\partial \psi_0}{\partial x}, \quad (223)$$

которые доказываются с помощью уравнения (218).

В следующем (первом) порядке мы имеем:

$$\begin{aligned} -i\omega_1 u_0 &= L_0 v_1, \\ i\omega_1 v_0 &= L_1 u_1. \end{aligned}$$

В силу уравнений (223)

$$\begin{aligned} v_1 &= i\omega_1 x \psi_0, \\ u_1 &= -i\omega_1 \frac{\partial \psi_0}{\partial \lambda^2}. \end{aligned}$$

Во втором порядке теории возмущений мы имеем уравнения для u_2 и v_2 :

$$\begin{aligned} -i\omega_1 u_1 - \frac{1}{2} k^2 v_0 &= L_0 v_2, \\ i\omega_1 v_1 - \frac{1}{2} k^2 u_0 &= L_0 u_2. \end{aligned}$$

Условие разрешимости этих уравнений (альтернатива Фредгольма) состоит в том, что левая часть этих уравнений должна быть ортогональна собственной функции операторов $L_0(L_1)$ с нулевым собственным значением, в данном случае с ψ_0 для первого уравнения и $\frac{\partial \psi_0}{\partial x}$ для второго. В результате

$$\begin{aligned} -i\omega_1 \langle \psi_0, u_1 \rangle - \frac{1}{2} k^2 \langle \psi_0, v_0 \rangle &= 0, \\ i\omega_1 \langle \frac{\partial \psi_0}{\partial x}, v_1 \rangle - \frac{1}{2} k^2 \langle \frac{\partial \psi_0}{\partial x}, u_0 \rangle &= 0. \end{aligned}$$

Из первого уравнения, в силу $v_0 = \psi_0$, получаем

$$-i\omega_1 \int \psi_0 (-i\omega_1) \frac{\partial \psi_0}{\partial \lambda^2} dx - \frac{k^2}{2} \int \psi_0^2 dx = 0. \quad (224)$$

Откуда

$$\omega^2 = -k^2 \frac{N}{\partial N / \partial \lambda^2} = -\frac{k^2 \lambda^2}{2} < 0.$$

Таким образом, мы получили неустойчивость. Собственная функция, отвечающая этому собственному значению, равна

$$\begin{aligned} u &= -i\omega_1 \frac{\partial \psi_0}{\partial \lambda^2} + \dots, \\ v &= \psi_0 + \dots \end{aligned}$$

Эта функция симметричная и соответствует возмущениям типа перетяжек (рис. 15). Это есть самофокусировочная неустойчивость. Системе выгодно увеличивать интенсивность в области перетяжки.

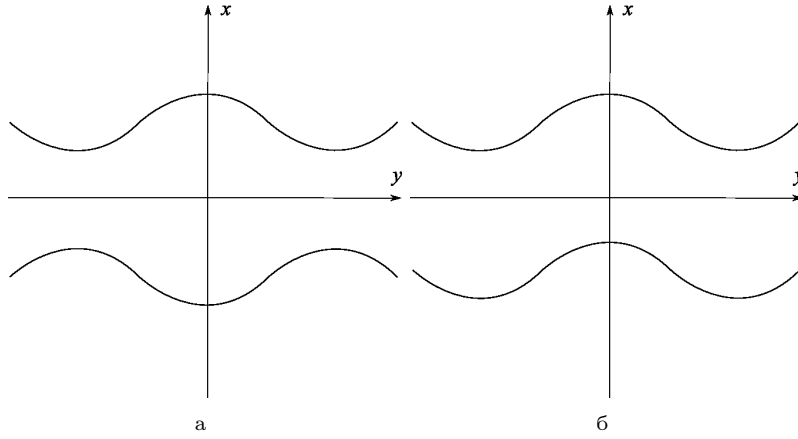


Рис. 15. Линии уровня возмущения типа а) перетяжки (симметричные, самофокусировочная неустойчивость), б) змейки (шланговая неустойчивость)

Для другого уравнения мы имеем устойчивую моду:

$$0 = i\omega_1 \left\langle \frac{\partial \psi_0}{\partial x}, v_1 \right\rangle - \frac{k^2}{2} \left\langle \frac{\partial \psi_0}{\partial x}, u_0 \right\rangle = -\omega^2 \left\langle \frac{\partial \psi_0}{\partial x}, x\psi_0 \right\rangle - \frac{k^2}{2} \left\langle \frac{\partial \psi_0}{\partial x}, \frac{\partial \psi_0}{\partial x} \right\rangle. \quad (225)$$

Интегрирование по частям в первом слагаемом дает

$$\omega^2 = k^2 \frac{\int |\psi_{0x}|^2 dx}{\int |\psi_0|^2 dx} = \frac{k^2 \lambda^2}{3} > 0. \quad (226)$$

Такая ситуация возникает в среде с положительной дисперсией, когда в НУШ оператор второго порядка есть Δ . В оптике, напомню, это соответствует аномальной дисперсии. Если дисперсия отрицательна (нормальная в оптике), то яркий солитон будет также неустойчив. Для того, чтобы получить ответ, достаточно во всех выражениях заменить k^2 на $-k^2$ (это соответствует замене Δ на $\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \Delta_{\perp}$). В результате для антисимметричной моды имеем неустойчивость

$$\omega_1^2 = -\frac{k^2}{3} \lambda^2 < 0.$$

Это неустойчивость типа змейки, она также называется шланговой неустойчивостью.

7.3 Неустойчивость серых и темных солитонов

Обратимся теперь к случаю поперечной устойчивости солитонов (серых и темных) для дефокусирующей среды. Для описания такого рода солитонов, как мы видели на прошлой лекции, можно воспользоваться КДВ-приближением:

$$\frac{\partial v}{\partial t} - c_s \lambda^2 \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} + \frac{3}{2} v \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad (227)$$

где $c_s = 1$, $\lambda^2 = \frac{1}{8}$ (плотность $n_0 = 1$). Напомню, что уравнение КДВ получается из НУШ в пределе слабой дисперсии и малой нелинейности, т. е. два последних слагаемых являются малыми по сравнению с движением волны со звуковой скоростью. Теперь я хочу учесть поперечные возмущения. Для этого рассмотрим линейный закон дисперсии волн малой амплитуды (спектр Боголюбова)

$$\omega = k\sqrt{1 + \frac{k^2}{4}}.$$

Пусть волна распространяется, в основном, в направлении x , т. е. $k_x \gg k_\perp$. Тогда в длинноволновом пределе ($\lambda k \ll 1$)

$$\omega = k_x \left[1 + \frac{k_\perp^2}{2k_x^2} + \frac{k_x^2}{8} \right]. \quad (228)$$

Второе слагаемое в этом уравнении описывает дифракцию звуковых колебаний в направлении, поперечном к направлению распространения волны. В соответствии с (228) в линейном приближении динамика волн будет описываться с помощью уравнения

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial t} + c_s \frac{\partial v}{\partial x} - c_s \lambda^2 \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} \right) = -\frac{c_s}{2} \Delta_\perp v. \quad (229)$$

С учетом нелинейности, в системе координат, двигающейся со скоростью звука, мы приходим к уравнению

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial t} - c_s \lambda^2 \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} + \frac{3}{2} v \frac{\partial v}{\partial x} \right) = -\frac{c_s}{2} \Delta_\perp v, \quad (230)$$

которое называется уравнением Кадомцева – Петвиашвили (КП). Это уравнение было выведено Кадомцевым и Петвиашвили в 1970 г. [5]. Они же впервые исследовали устойчивость солитонов КДВ относительно поперечных возмущений.

Прежде чем переходить к этому вопросу, необходимо сделать одно очень важное замечание относительно уравнения КДВ. Это уравнение, как и НУШ, относится к гамильтоновским уравнениям. Оно может быть записано в виде

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} \frac{\delta H}{\delta v}, \quad (231)$$

где

$$H = \int \left[\frac{c_s \lambda^2}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{4} v^3 \right] dx.$$

Эта форма необычна, однако, она каноническая гамильтоновская. Чтобы убедиться в этом, нужно в уравнении (231) совершить преобразование Фурье по координатам. В результате это уравнение запишется в виде:

$$\frac{\partial v_k}{\partial t} = -ik \frac{\delta H}{\delta v_k^*}. \quad (232)$$

Соответственно для v_k^* мы имеем

$$\frac{\partial v_k^*}{\partial t} = ik \frac{\delta H}{\delta v_k}. \quad (233)$$

Отсюда мы видим, что с точностью до множителя $\sqrt{k}$ переменные v_k и v_k^* являются канонически сопряженными друг к другу. Следует также указать, что уравнение КДВ может быть получено из вариационного принципа: $\delta I = 0$, где действие

$$I = \int dt dx \left[\frac{1}{2} \phi_t \phi_x + \frac{c_s \lambda^2}{2} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right)^2 + \frac{3}{4} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^3 \right]. \quad (234)$$

Здесь ϕ — гидродинамический потенциал, $v = \frac{\partial \phi}{\partial x}$. Отсюда, в частности, следует, что гамильтониан является сохраняющейся величиной. Помимо этого, сохраняющейся является величина $\frac{1}{2} \int v^2 dx = P$, которая представляет собой импульс. Уравнение для солитонного решения

$$-Vv - c_s \lambda^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{3}{4} v^2 = 0 \quad (235)$$

является уравнением для экстремали функционала $H - VP$, т.е. вариационная задача

$$\delta(H - VP) = 0 \quad (236)$$

эквивалентна уравнению (235), где V играет роль множителя Лагранжа. Исходя из этого, можно убедиться, что солитонное решение уравнения КДВ

$$v_s = - \frac{2|V|}{\cosh^2 \sqrt{2|V|}(x - Vt)} \quad (237)$$

реализует минимум при фиксированном импульсе.

Задача 1. Доказать, что солитон КДВ реализует минимум H при фиксированном P при масштабных преобразованиях.

Факт устойчивости солитона следует также из того, что уравнение КДВ интегрируется методом обратной задачи рассеяния (Gardner, Greene, Kruskal and Miura — 1967, [6]). Именно для уравнения КДВ и был открыт этот метод, ставший теперь одним из главных математических методов в теории солитонов. Из этого метода, в частности, следует, что солитоны являются структурно устойчивыми образованиями. Они ведут себя упруго при рассеянии на других солитонах, а также при взаимодействии с несолитонными решениями.

Обратимся после этого отступления к исследованию устойчивости солитона КДВ относительно неоднородных возмущений. Положим

$$v = v_s(x - Vt) + u(x - Vt, y, t),$$

где возмущение u предполагается малым по сравнению с v_s . Линеаризация дает уравнение на u :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + |V| \frac{\partial u}{\partial x} - c_s \lambda^2 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{3}{2} (v_s u) \right) = -\frac{c_s}{2} \Delta_{\perp} u.$$

В этом линейном уравнении отсутствует явная зависимость от времени и поперечной координаты, поэтому u ищем в виде: $u = \psi(x)e^{-i\omega t + i\kappa y}$.

В результате для $\psi(x)$ имеем следующую спектральную задачу:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(-i\omega\psi + |V| \frac{\partial\psi}{\partial x} - c_s\lambda^2 \frac{\partial^3\psi}{\partial x^3} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{3}{2}(v_s\psi) \right) = \frac{c_s\kappa^2}{2}\psi.$$

Это уравнение представим как

$$i\omega \frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{c_s\kappa^2}{2}\psi = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[|V| - c_s\lambda^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{3}{2}v_s \right] \psi \equiv A\psi,$$

и будем искать его решение в виде разложения по малости κ :

$$\psi = \psi_0 + \psi_1 + \psi_2 + \dots$$

В качестве ψ_0 возьмем нейтрально устойчивую моду $\frac{\partial v_s}{\partial x}$ (сдвиг солитона). Очевидно, что

$$A\psi_0 = 0.$$

В следующем порядке имеем уравнение

$$i\omega \frac{\partial\psi_0}{\partial x} = A\psi_1.$$

Чтобы найти ψ_1 , необходимо рассмотреть уравнение на солитонное решение

$$|V| \frac{\partial v_s}{\partial x} - c_s\lambda^2 \frac{\partial^3 v_s}{\partial x^3} + \frac{3}{4} \frac{\partial v_s^2}{\partial x} = 0,$$

дифференцируя которое по $|V|$, мы получим

$$\frac{\partial v_s}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left[|V| - c_s\lambda^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{3}{2}v_s \right] \frac{\partial v_s}{\partial |V|} = 0.$$

Отсюда, сравнивая уравнения

$$-\frac{\partial^2 v_s}{\partial x^2} = A \frac{\partial v_s}{\partial |V|} \quad \text{с} \quad i\omega \frac{\partial^2 v_s}{\partial x^2} = A\psi_1,$$

мы заключаем, что $\psi = -i\omega \frac{\partial v_s}{\partial |V|}$. В следующем порядке

$$i\omega_1 \frac{\partial\psi_1}{\partial x} + \frac{c_s\kappa^2}{2}\psi_0 = A\psi_2. \quad (238)$$

Условие разрешимости этого уравнения состоит в ортогональности левой части собственной функции ϕ с нулевым собственным значением оператора, сопряженного к A :

$$\left[|V| - c_s\lambda^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{3}{2}v_s \right] \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 0.$$

Легко увидеть, что

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = v_s,$$

т. е. ϕ — потенциал скорости v . Отсюда, подставляя $\psi_0 = \frac{\partial v_s}{\partial x}$ и $\psi_1 = -i\omega \frac{\partial v_s}{\partial |V|}$ в (238) и далее скалярно умножая на ϕ , получаем:

$$\omega^2 \int \frac{\partial^2}{\partial x \partial |V|} \phi dx + \frac{c_s \kappa^2}{2} \int \frac{\partial v_s}{\partial x} \phi dx = 0.$$

Интегрирование по частям дает:

$$\omega^2 = -c_s k^2 \frac{P}{\partial P / \partial |V|} < 0,$$

поскольку для солитонного решения

$$\begin{aligned} v_s &= -\frac{2|V|}{\cosh^2(\sqrt{2|V|x})}, \\ P &\propto |V|^{3/2} \quad \text{и} \quad \frac{P}{\partial P / \partial |V|} = \frac{2}{3}|V|. \end{aligned}$$

Окончательно

$$\omega^2 = -\frac{2}{3}c_s |V| \kappa^2 < 0. \quad (239)$$

Эта неустойчивость называется неустойчивостью Кадомцева–Петвиашвили [5]. Причина ее возникновения связана с тем, что солитоны — это ямки плотности, которые уменьшают свою скорость с ростом амплитуды. Это означает, что те участки солитона, которые имеют большие амплитуды, будут отставать от участков с меньшей амплитудой. В результате возникает неустойчивость — неустойчивость фокусирующего типа. Эта неустойчивость отстраивается от других процессов (еще двух), если ширина $\Delta\omega$ меньше расстояния (по частотам) от двух других резонансов.

Лекция 8 «Волновые коллапсы»

8.1 Введение

На прошлой лекции в рамках НУШ с положительной дисперсией был показана неустойчивость одномерных ярких солитонов относительно поперечных возмущений. Причина этой неустойчивости связана с тенденцией образования областей с повышенной интенсивностью $|\psi|^2$, обусловленного характером нелинейного взаимодействия — фокусирующей нелинейностью.

В данной лекции мы покажем, что этот процесс имеет взрывное поведение, в результате чего возникает особенность поля, причем за конечное время. Этот процесс называют волновым коллапсом. Следует отметить, что волновые коллапсы играют очень значительную роль в различных областях физики, не только в нелинейной оптике, но также в физике плазмы, гидродинамике, физике атмосферы и океана, а также в физике твердого тела. Коллапс, как процесс возникновения особенности за конечное время, во многих физических системах представляет собой один из наиболее эффективных механизмов диссипации волновой энергии в тепло. Например, коллапс плазменных волн определяет эффективность различных коллективных методов нагрева плазмы для задач УТС. В нелинейной оптике этот процесс останавливается благодаря многофотонному поглощению для умеренных интенсивностей, а для больших амплитуд — за счет ионизации атомов.

На прошлых лекциях мы видели, что одномерные (яркие) солитоны НУШ устойчивы относительно одномерных возмущений, при этом солитон реализует минимум гамильтониана при фиксированном числе частиц. Как мы увидим в этой лекции, коллапс в НУШ с фокусирующей нелинейностью возникает уже в двумерной геометрии, т. е. при $d = 2$. Более того, мы увидим, что роль нелинейных эффектов усиливается с ростом размерности пространства, а само явление коллапса обязано неограниченности гамильтониана снизу. По этой причине коллапс может рассматриваться как процесс падения частицы в неограниченном (самосогласованном) потенциале.

8.2 Нелинейное уравнение Шредингера

В безразмерных переменных нелинейное уравнение Шредингера для фокусирующей нелинейности записывается в следующем каноническом виде:

$$i\psi_t + \frac{1}{2}\Delta\psi + |\psi|^2\psi = 0. \quad (240)$$

Напомним, что ψ в нелинейной оптике имеет смысл амплитуды огибающей электрического поля с определенной поляризацией (например, линейной), а время t представляет собой координату вдоль распространения волнового пакета. Второй член в (240) описывает как дифракцию, так и положительную дисперсию групповой скорости, что реализуется в оптике для области аномальной дисперсии.

При $d = 2$ уравнение (240) описывает самофокусировку света, которая была предсказана Аскарьяном в 1962 г. [23] — об этом мы кратко говорили в лекции 6.

НУШ (240) часто называют уравнением Гросса–Питаевского [9], которое с высокой точностью описывает длинноволновые колебания конденсата слабо неидеального бозе-газа с отрицательной длиной рассеяния. В настоящее время (240) является основной моделью в исследованиях нелинейной динамики бозе–конденсатов. В этом случае (240) представляет собой уравнение Шредингера, а ψ есть волновая функция конденсата. Соответственно, это уравнение описывает движение квантово-механической частицы в самосогласованном потенциале с притяжением: $U = -|\psi|^2$. Именно притяжение является причиной возникновения особенности. С точки зрения квантовой механики коллапс в рамках нелинейного уравнения Шредингера можно интерпретировать как процесс падения частицы на центр (точку коллапса) [15].

Напомним, что (240) может быть записано в гамильтоновом виде:

$$i\psi_t = \frac{\delta H}{\delta \psi^*}, \quad (241)$$

где гамильтониан

$$H = \frac{1}{2} \left[\int |\nabla \psi|^2 d\mathbf{r} - \int |\psi|^4 d\mathbf{r} \right] \equiv \frac{1}{2} [I_1 - I_2]. \quad (242)$$

Кроме H , это уравнение имеет два других простых интеграла движения: число частиц (совпадающее с точностью до постоянного множителя с энергией волнового пакета)

$$N = \int |\psi|^2 d\mathbf{r}, \quad (243)$$

и импульс

$$\mathbf{P} = \frac{i}{2} \int (\psi \nabla \psi^* - \psi^* \nabla \psi) d\mathbf{r}. \quad (244)$$

Сохранение N связано с калибровочной симметрией: $\psi \rightarrow \psi e^{i\alpha}$, а сохранение $\mathbf{P}$ обязано симметрии относительно трансляций. Эти две симметрии обеспечивают инвариантность (240) относительно преобразований Галилея. В частности, простейшее решение уравнения (240),

$$\psi_s = \psi_0(\mathbf{r}) \exp\left(\frac{i\lambda^2}{2}t\right) \quad (245)$$

с $\psi_0(\mathbf{r}) \rightarrow 0$ $r \rightarrow \infty$, соответствует покоящемуся солитону. Решение в виде движущегося солитона получается отсюда с помощью применения преобразования Галилея к (245).

Легко также устанавливается, что солитонное решение (245) представляет собой стационарную точку гамильтониана H при фиксированном числе частиц (ср. с [10]):

$$\delta \left(H + \frac{\lambda^2}{2} N \right) = 0, \quad (246)$$

где $\lambda^2/2$ есть множитель Лагранжа. Эта вариационная задача эквивалентна нахождению решения для стационарного НУШ:

$$-\lambda^2\psi + \Delta\psi + 2|\psi|^2\psi = 0.$$

Отсюда можно получить зависимость N на солитонном решении (245):

$$N_s = \lambda^{2-d}N_0, \quad N_0 = \int |f(\xi)|^2 d\xi, \quad (247)$$

где f подчиняется уравнению:

$$-f + \Delta f + 2|f|^2f = 0.$$

Зависимость (247) оказывается ключевой для критерия линейной устойчивости солитонов. Как было показано Вахитовым и Колоколовым [13], солитон устойчив, если

$$\frac{\partial N_s}{\partial \lambda^2} > 0,$$

и соответственно неустойчив при другом знаке производной. Этот критерий справедлив при произвольных размерности d и зависимости нелинейного сдвига от $|\psi|^2$ (т.е. при замене $|\psi|^2$ в НУШ на произвольную функцию $f(|\psi|^2)$). Данный критерий имеет простой физический смысл. Величина $\varepsilon = -\lambda^2/2$ для стационарного НУШ представляет собой энергию связанного состояния – солитона. Если при добавлении «одной» частицы энергия этого связанного состояния уменьшается, то такая ситуация будет устойчивой. Если при добавлении «одной» частицы уровень $-\lambda^2/2$ выталкивается по направлению к непрерывному спектру, то такого рода солитон будет неустойчив.

Согласно (247) для кубического НУШ: $N_s \propto \lambda^{2-d}$. Отсюда следует устойчивость одномерных солитонов кубического НУШ и неустойчивость трехмерных солитонов. Двумерный случай является пограничным - вырожденным.

8.3 Волновые коллапсы

Волновой коллапс представляет собой другой вариант эволюции нелинейных волновых систем, в определенном смысле, альтернативный солитонному сценарию. Как мы видели, устойчивые по Ляпунову солитоны возникали в том случае, когда гамильтониан при фиксации числа частиц N представлял собой ограниченный снизу функционал. При этом его нижняя граница отвечала устойчивому по Ляпунову солитону. Спрашивается, а что будет, если гамильтониан неограничен снизу? Как будет себя вести система в этом случае? Один из возможных вариантов ее поведения — это коллапс, образование особенности за конечное время.

Хорошо известно (см., например, [12, 15, 22]), что с увеличением размерности d роль нелинейных эффектов усиливается. Этот эффект подобен тому, который встречается в теории фазовых переходов, когда роль кооперативных эффектов усиливается при увеличении числа соседей, например, такая ситуация имеет место в модели Изинга. Для НУШ это видно, в частности, из того, как меняется

H при масштабных преобразованиях, $\psi_s(\mathbf{r}) \rightarrow a^{-d/2}\psi_s(\mathbf{r}/a)$, сохраняющих число частиц:

$$H(a) = \frac{1}{2} \left[\frac{I_1}{a^2} - \frac{I_2}{a^d} \right]. \quad (248)$$

При $d = 1$ $H(a)$ имеет минимум, соответствующий солитону (устойчивому). В двумерии $I_{1s} = I_{2s}$, и поэтому на всем солитонном семействе $H(a) \equiv 0$. При $d = 3$, вместо минимума, $H(a)$ имеет максимум (в действительности это седловая точка, поскольку при фазовых преобразованиях $\psi_s \rightarrow \psi_s e^{i\theta(\mathbf{r})}$ гамильтониан H только увеличивается), что указывает на неустойчивость солитона. В этом случае, кроме того, $H(a)$ оказывается неограниченной при $a \rightarrow 0$, что есть один из критериев коллапса. В этом случае коллапс можно рассматривать в качестве нелинейной стадии неустойчивости солитона.

Чтобы проиллюстрировать сказанное, мы воспользуемся вариационным подходом. Для (240) в качестве пробной функции выберем ψ в виде

$$\psi(\mathbf{r}, t) = a^{-3/2}\psi_s\left(\frac{\mathbf{r}}{a}\right) \exp(i\lambda^2 t + i\mu r^2),$$

где $a = a(t)$ и $\mu = \mu(t)$ — неизвестные функции времени. После подстановки этого анзаца в действие

$$S = \frac{i}{2} \int (\psi_t \psi^* - c.c.) dt d\mathbf{r} - \int H dt$$

и интегрирования по пространственным переменным возникает укороченное действие для двух функций $a = a(t)$ и $\mu = \mu(t)$. Легко проверяется, что два уравнения Лагранжа для $a(t)$ и $\mu(t)$ сводятся к одному уравнению второго порядка для a , которое имеет вид уравнения Ньютона:

$$C\ddot{a} = -\frac{\partial H}{\partial a}, \quad (249)$$

где $C = \int \xi^2 |\psi_0(\xi)|^2 d\xi$ играет роль массы «частицы», а функция (248) имеет смысл потенциальной энергии.

Задача 1. Найти укороченное действие и уравнения движения для $a(t)$ и $\mu(t)$. Показать, что эти уравнения сводятся к уравнению Ньютона (249).

Поведение $a(t)$ будет зависеть от величины полной энергии

$$E = C \frac{\dot{a}^2}{2} + H(a),$$

начального положения «частицы» и размерности d . При $d = 1$ солитон реализует минимум потенциальной энергии $H(a)$, что является причиной его устойчивости. При $d = 3$, если «частица» находится в начальный момент времени в максимальной точке, то тогда в зависимости от направления движения (по направлению к центру $a = 0$ или против) система будет коллапсировать ($\psi \rightarrow \infty$) или расширяться ($\psi \rightarrow 0$) благодаря дисперсии. Для коллапсирующего режима,

что соответствует падению частицы на центр, $a(t)$ ведет себя вблизи особенности степенным образом

$$a(t) \sim (t_0 - t)^{2/5}, \quad (250)$$

где время коллапса t_0 конечно и равно времени падения частицы в потенциале $H(a)$.

Уже из этого рассмотрения можно сделать несколько выводов. Во-первых, влияние нелинейности растет с ростом размерности пространства. Вследствие этого, устойчивые солитоны присущи только для систем с малой размерностью, в то время как при больших размерностях вместо солитонов мы должны ожидать взрывных событий, в результате которых происходит формирование особенностей. Во-вторых, одним из критериев коллапса является неограниченность гамильтониана на малых масштабах. В этом случае коллапс можно интерпретировать как падение частицы на центр в самосогласованном потенциале, неограниченном на малых масштабах [15].

8.4 О роли излучения

В действительности, однако, картина формирования особенности является более сложной, чем рассмотренная выше. С самого начала мы имеем дело с пространственно распределенной системой, т.е. с системой с бесконечным числом степеней свободы, и поэтому редукция НУШ с помощью вариационного подхода к системе обыкновенных дифференциальных уравнений типа (249) не учитывает роль излучения волн. В случае неограниченности H снизу, когда мы ожидаем коллапса, излучение волн малой амплитуды является одним из механизмов формирования особенности.

Пусть гамильтониан в некоторой области Ω отрицателен: $H_\Omega < 0$. В этом случае для этой области будет справедливо следующее неравенство

$$\max_{x \in \Omega} |\psi|^2 \geq \frac{|H_\Omega|}{N_\Omega},$$

которое следует из неравенства

$$\int_{\Omega} |\psi|^4 d\mathbf{r} \leq \max_{x \in \Omega} |\psi|^2 N_\Omega.$$

Предположим, что вне этой области значение $|\psi|$ мало. Рассмотрим, какую роль играет излучение волн из этой области. Очевидно, что излучение уносит положительную энергию, поскольку на больших расстояниях нелинейные эффекты для излученных волн малы. Таким образом, благодаря излучению H_Ω становится все более и более отрицательным, а N_Ω уменьшается. Поэтому $\max |\psi|^2$ будет неограниченно расти, в виду неограниченности гамильтониана снизу. Именно поэтому мы можем говорить, что излучение способствует коллапсу. Излучение в нелинейной волновой системе, таким образом, играет роль трения [12], [18], [22]. Одновременно с этим излучение ускоряет сжатие коллапсирующей области. В частности, это приводит к существованию сжатия по автомодельному закону

$$r \sim (t_0 - t)^{1/2}. \quad (251)$$

Однако, эта аргументация не позволяет сделать вывод о конечности времени коллапса. Ответ на это вопрос дает теорема вириала.

8.5 Теорема вириала

Точный критерий образования особенности в рамках НУШ может быть получен из теоремы вириала. В классической механике теорема вириала легко может быть выведена, если вычислять вторую производную по времени от момента инерции и затем усреднить полученный ответ. Это дает соотношение между средними значениями кинетической и потенциальной энергий частиц, если взаимодействие между частицами степенного вида.

В 1971 г. Власов, Петрищев и Таланов [19] нашли, что эта теорема может быть применена к двумерному нелинейному уравнению Шредингера. Аналогом момента инерции для двумерного НУШ является величина среднего квадрата размера распределения $\langle r^2 \rangle = N^{-1} \int r^2 |\psi|^2 d\mathbf{r}$. Прямым вычислением можно убедиться, что

$$\frac{d^2}{dt^2} \int r^2 |\psi|^2 d\mathbf{r} = 2H. \quad (252)$$

Это соотношение получается благодаря двум законам сохранения — числа частиц и импульса, которые в дифференциальной форме записываются как

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} |\psi|^2 + \operatorname{div} \mathbf{p} &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} p_k + \frac{\partial}{\partial x_i} \pi_{ik} &= 0, \end{aligned}$$

где $\mathbf{p} = \frac{i}{2} (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*)$ — плотность импульса, а π_{ik} есть плотность потока импульса. В результате

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} |\psi|^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_i} \pi_{ik}.$$

Благодаря этому соотношению и дважды интегрированию по частям, получаем

$$\frac{d^2}{dt^2} \int r^2 |\psi|^2 d\mathbf{r} = 2 \int \pi_{ii} d\mathbf{r}.$$

При $d = 2$ интеграл в правой части как раз равен H .

Задача 2. Найти явное выражение π_{ik} .

Поскольку H — сохраняющаяся величина, то уравнение (252) может быть дважды проинтегрировано:

$$\int r^2 |\psi|^2 d\mathbf{r} = Ht^2 + C_1 t + C_2, \quad (253)$$

где $C_{1,2}$ — дополнительные интегралы движения.

Отсюда легко увидеть, что средний квадрат $\langle r^2 \rangle$ для любого распределения с отрицательным гамильтонианом,

$$H < 0, \quad (254)$$

независимо от $C_{1,2}$ обращается в нуль за конечное время, что в силу сохранения N означает образование особенности поля ψ [19]. Условие (254) есть знаменитый критерий Власова–Петрищева–Таланова. Этот критерий, полученный в 1971 г., является одним из основополагающих результатов в теории волновых коллапсов. Это был первый строгий результат для нелинейных волновых систем с дисперсией. Он показал, что образование особенности за конечное время возможно, несмотря на наличие линейной дисперсии волн, которая, например, в линейной оптике препятствует возникновению точечных особенностей — фокусов.

Следует подчеркнуть, что критерий (254) является только *достаточным* условием возникновения коллапса и не является необходимым. Например, если в некоторой области, хорошо отделенной от всего остального, гамильтониан H отрицателен, то тогда в этой области будет развиваться коллапс вне зависимости от того, является общий гамильтониан всей системы положительным либо отрицательным.

8.6 Сильный коллапс

Отметим, что при $d = 2$ солитону соответствует равенство $H = 0$ с числом частиц $N = N_s$. Более того, при $N < N_s$ $H \geq \frac{1}{2}I_1(1 - N/N_s) > 0$, и как следствие этого коллапс оказывается невозможным [21]. В этом случае амплитуда волн при $t \rightarrow \infty$ благодаря дисперсии/дифракции стремится к нулю. Таким образом, можно говорить, что солитон для двумерного НУШ представляет собой сепаратрису, разделяющую многообразия коллапсирующих и неколлапсирующих распределений.

Из соотношения (253) можно видеть, что для режимов с $H < 0$ характерный размер a коллапсирующей области ведет себя как

$$a \sim (t_0 - t)^{1/2},$$

в полном соответствии с автомодельным законом (251).

Точный анализ [20], однако, показывает, что

$$a^2(t) \sim \frac{(t_0 - t)}{\log |\log(t_0 - t)|},$$

при этом пространственный профиль ψ стремится асимптотически к солитонному. Коллапс в этом случае сопровождается экспоненциально малым излучением. При этом захватываемая в особенность энергия, с точностью до постоянного множителя совпадающая с N , оказывается *конечной*, равной энергии двумерного солитона. Именно поэтому такой коллапс называют *сильным коллапсом* [15].

Отметим, что двумерное нелинейное уравнение Шредингера (240) относят к так называемому критическому НУШ. Для критического НУШ, как мы видели, масштабные преобразования представляют собой дополнительную симметрию. В частности, как следствие этого дисперсионный ($\sim I_1$) и нелинейный ($\sim I_2$) члены ведут себя при этих преобразованиях одинаковым образом.

8.7 Слабый коллапс

В трехмерном случае ($d = 3$) вириальное соотношение (252) для НУШ принимает вид:

$$\frac{d^2}{dt^2} \int r^2 |\psi|^2 d\mathbf{r} = 2H - \frac{1}{2} I_2. \quad (255)$$

Соответственно в силу положительности I_2 равенство (255) может быть заменено неравенством

$$N \langle r^2 \rangle < Ht^2 + C_1 t + C_2, \quad (256)$$

где $C_{1,2}$ — константы интегрирования, определяемые из начальных условий. Это соотношение дает тот же самый критерий коллапса, что и при $d = 2$: $H < 0$ [12].

Однако, критерий $H < 0$ для трехмерного НУШ является достаточно мягким. Как было показано в работах [16], [17], этот критерий может быть улучшен. Более точный критерий задается двумя условиями:

$$H < H_s \text{ и } I_1 < I_{1s}. \quad (257)$$

Эти критерии еще раз показывают, что солитон представляет собой седловую точку, перевалив которую коллапс оказывается возможным.

При этом более точное неравенство, следующее из вириального соотношения (255) при $d = 3$, имеет вид:

$$\frac{d^2}{dt^2} \int r^2 |\psi|^2 d\mathbf{r} = 2(H - H_s). \quad (258)$$

Интегрирование этого соотношения дает:

$$N \langle r^2 \rangle < (H - H_s)t^2 + C_1 t + C_2.$$

Здесь H_s есть значение H на основном (без нулей) солитонном решении.

В заключении этой лекции приведем ссылку на обзор [24], где собраны многие известные интегральные критерии волновых коллапсов, которые относятся не только к НУШ.

Благодарности

Данная работа выполнялась при поддержке гранта Правительства РФ для государственной поддержки научных исследований, проводимых под руководством ведущих ученых в российских образовательных учреждениях высшего профессионального образования (Договор 11.G34.31.0035 от 25 ноября 2010 г. между Минобрнауки РФ, НГУ и ведущим ученым).

Список литературы

- [1] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., «Механика», Наука, Москва (1988).
- [2] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., «Электродинамика сплошных сред», Наука, Москва (1982).
- [3] Захаров В. Е., Рубенчик А. М., ПМТФ **13**, 669 (1974).
- [4] Бломберген Н., «Нелинейная оптика», Мир, Москва, 1966 [перевод с англ: Blombergen N., «Nonlinear optics», Benjamin W.A., Inc., NY-Amsterdam, 1965].
- [5] Кадомцев Б. Б., Петвиашвили В. И., ДАН СССР **192**, 753 (1970).
- [6] Gardner C. S., Green J. M., Kruskal M. D. and Miura R. B., Phys. Rev. Lett. **19**, 1095–1097 (1967).
- [7] Захаров В. Е., Кузнецов Е. А., УФН **182**, 569–592 (2012).
- [8] Hasegawa A., Tappet F., Appl. Phys. Lett. **23**, 142–170 (1973).
- [9] Gross E. P., Nuovo Cim., **20** 454–461 (1961); Питаевский Л. П., ЖЭТФ **13**, 451–454 (1961) [Sov. Phys. JETP, **13**, 451–454 (1961)].
- [10] Kuznetsov E. A., Rubenchik A. M., Zakharov V. E., Phys. Rep. **142**, 103–165 (1986).
- [11] Захаров В. Е., Кузнецов Е. А., УФН, **167**, 1137–1168 (1997).
- [12] Захаров В. Е., ЖЭТФ **35**, 908 (1972).
- [13] Вахитов Н. Г., Колоколов А. А., Изв. ВУЗ Радиофизика **16**, 1020–1028 (1973).
- [14] Захаров В. Е., Шабат А. Б., ЖЭТФ, **61**, 118–134 (1971).
- [15] Захаров В. Е., Кузнецов Е. А., ЖЭТФ **91**, 1310–1324 (1986).
- [16] Turitsyn S. K., Phys. Rev. E **47**, R13–16 (1993).
- [17] Kuznetsov E. A., Turitsyn S. K., Rasmussen J. J., Rypdal K., Physica D, **87**, 273–284 (1995).
- [18] Zakharov V. E., Collapse and self-focusing of Langmuir waves, in: Handbook of Plasma Physics, Vol. 2, Basic Plasma Physics, eds. Galeev A. A., Sudan R. N. (Elsevier, North-Holland, 1984), pp. 81–121.
- [19] Власов С. Н., Петрищев В. А., Таланов В. И., Изв. ВУЗ Радиофизика **14**, 1353–1361 (1971) [Radiophys. and Quant. Electr., **14**, 1062–1070 (1971)].
- [20] Фрайман Г. М., ЖЭТФ **88**, 390 (1985).
- [21] Weinstein M. I., Commun. Math. Phys. **87**, 567–576 (1983).

- [22] Kuznetsov E. A., Chaos, **6**, 381–390 (1996).
- [23] Аскарьян Г. А., ЖЭТФ **42**, 1567 (1962).
- [24] Кузнецов Е. А., Изв. ВУЗ Радиофизика **46**, 342–359 (2003) [Radiophysics and Quantum Electronics, **46**, 307–322 (2003)].

Учебное издание

Кузнецов Евгений Александрович

**КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ
ПО СПЕЦКУРСУ «НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ».
ЧАСТЬ I**

Учебное пособие

Редактор *А. В. Грасмик*

Подписано в печать
Формат 70х100/16 Уч.-изд. л. 6,1. Усл. печ. л. 7,9.
Тираж 50 экз. Заказ №

Редакционно-издательский центр НГУ.
630090, Новосибирск, ул. Пирогова, 2.