О динамике идеальной жидкости со свободной поверхностью

А.И.Дьяченко

Институт теоретической физики им. Л.Д.Ландау РАН, 117334, Москва, ул. Косыгина, 2

Аннотация

Получены точные уравнения, описывающие потенциальное течение двумерной несжимаемой жидкости. Уравнения оказываются кубически нелинейными, а переменными являются функция, осуществляющая конформное преобразование области, занимаемой жидкостью, на нижнюю полуплоскость, и комплексная потенциальная скорость течения. Они являются уравнениями гидродинамического типа и описывают перенос особенностей конформного преобразования в верхней полуплоскости.

PACS коды: 47.10.+g, 47.15.Hg, 03.40.G, 02.60.Cb

1 Физические (естественные переменные)

Задача о потенциальном течении несжимаемой жидкости со свободной поверхностью является одной из фундаментальных в гидродинамике. Уравнения, описывающие такое течение, впервые были выведены Стоксом в 1845 году. В данной статье рассматривается течение двумерной жидкости на плоскости, что позволяет применить для его исследования теорию конформных отображений.

Потенциал скорости жидкости ϕ удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\triangle\phi = 0$$

в области, занимаемой жидкостью. Эта область ограничена свободной поверхностью $y = \eta(x, t)$ на которой заданы граничные условия для потенциала скорости и кинематическое условие движения самой границы:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\phi}{\partial t} &+ \frac{1}{2}|\nabla\phi|^2 + g\eta = P,\\
\frac{\partial\eta}{\partial t} &+ \eta_x\phi_x = \phi_y
\end{aligned}
\qquad (1.1)
$$

при $y = \eta(x,t)$ и

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\phi}{\partial y} = 0, y \to -\infty,\\
\frac{\partial\phi}{\partial x} = 0, |x| \to \infty.
\end{aligned}
\qquad (1.2)
$$

Здесь g - это гравитационное ускорение, а P - постоянное давление на поверхности (не нарушая общности полагаем P=0). Система уравнений (1.1) и (1.2) является гамильтоновой с гамильтонианом

$$
\mathcal{H} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\eta(x,t)} |\nabla\phi|^2 dy \;+\; \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} g\eta^2(x,t)dx \qquad (1.3)
$$

и канонически сопряженными переменными $\psi(x,t) = \phi(x,\eta(x,t),t)$ и $\eta(x,t)$ (см. [1]):

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\eta}{\partial t} &= \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\psi},\\
\frac{\partial\psi}{\partial t} &= -\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\eta}.
\end{aligned}
\qquad (1.4)
$$

Наряду с гамильтонианом имеются еще три интеграла движения. Это количество жидкости:

$$
\frac{\partial}{\partial t}\int_{-\infty}^{\infty} \eta(x,t)dx = 0, \qquad (1.5)
$$

и вертикальный и горизонтальный импульсы:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\eta(x,t)} \phi_y dy &= 0,\\
\frac{\partial}{\partial t}\int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\eta(x,t)} \phi_x dy &= 0.
\end{aligned}
\qquad (1.6)
$$

Уравнения (1.1) и (1.2) являются функционально нелинейными, и поэтому чрезвычайно трудны для исследования. Среди известных решений следует отметить решения полученные Дирихле в 1860 году. Это свободные поверхности, ограниченные кривыми второго порядка: эллипсом, гиперболой и параболой. Решения Дирихле подробно описаны в работе[2].

2 Конформные переменные

Для того, чтобы упростить уравнения (1.1) и (1.2) необходимо сделать конформное преобразование (см.[3]) области на z-плоскости, занимаемой жидкостью, на нижнюю полуплоскость комплексной переменной $w = u + iv$

$$-\infty < u < \infty, \qquad -\infty < v < 0.$$

После такого преобразования граница жидкости будет задаваться параметрически действительной и мнимой частями конформного преобразовани взятого на вещественной оси:

$$y = y(u,t), \quad x = x(u,t) = u + \tilde{x}(u,t), \tag{2.7}$$

здесь вещественная и мнимая части $\tilde{x}(u,t)$ и $y(u,t)$ связаны между собой преобразованием Гильберта

$$y = \hat{H}\tilde{x}, \qquad \tilde{x} = -\hat{H}y, \qquad \hat{H}^2 = -1$$

и

$$\hat{H}(f(u)) = P.V.\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(u')du'}{u'-u}.$$

После конформного преобразования $\phi(x,y,t) \to \phi(u,v,t)$. Пусть $\Psi(u,t) = \phi(u,0,t)$, значение потенциала на свободной поверхности. В работе [3] было показано, что $y(u,t)$ и $\Psi(u,t)$ удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$y_t = (y_u\hat{H} - x_u)\frac{\hat{H}\Psi_u}{J} \tag{2.8}$$

$$\Psi_t = -\frac{\Psi_u^2 + \hat{H}\Psi_u^2}{2J} + \hat{H}\left(\frac{\hat{H}\Psi_u}{J}\right)\Psi_u + \frac{\hat{H}\Psi_u}{J}\hat{H}\Psi_u - gy \tag{2.9}$$

где g - это ускорение силы тяжести, а

$$J = x_u^2 + y_u^2 = 1 + 2\tilde{x}_u + \tilde{x}_u^2 + y_u^2. \qquad (2.10)$$

Другая форма уравнений (2.8) и (2.9), полученная в работе [3] ыглядит так:

$$\begin{aligned} y_t x_u - x_t y_u &= -\hat{H}\Psi_u, \\ \Psi_t x_u - x_t \Psi_u + g y x_u &= \hat{H}\left(\Psi_t y_u - y_t \Psi_u + g y y_u\right) \end{aligned} \qquad (2.11)$$

Интегралы движения приобретают следующий вид:

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= -\int_{-\infty}^{\infty} \Psi \hat{H} \Psi_u du \; + \; \frac{g}{2}\int_{-\infty}^{\infty} y^2 x_u du, \\ M &= \int_{-\infty}^{\infty} y x_u du, \\ P_y &= \int_{-\infty}^{\infty} \Psi x_u du, \\ P_x &= \int_{-\infty}^{\infty} \Psi y_u du. \end{aligned} \qquad (2.12)$$

Если уж мы применили конформное преобразование и используем комплексный потенциал скорости, то нам следует вместо вещественных уравнений (2.8) и (2.9) написать комплексные уравнения для $z(w,t)$ и комплексного потенциала скорости $\Phi(w,t)$. Эти комплексные уравнения можно получить применяя оператор проектирования $\hat{P}$

$$\hat{P}(f) = \frac{1}{2}(1 + i\hat{H})(f)$$

к уравнениям 2.8) и (2.9):

$$\begin{aligned} z_t &= iU z_u, \\ \Phi_t &= iU\Phi_u - \hat{P}(\frac{|\Phi_u|^2}{|z_u|^2}) + ig(z-u). \end{aligned} \qquad (2.13)$$

Здесь U - это комплексная скорость переноса:

$$U = \hat{P}(\frac{-\hat{H}\Psi_u}{|z_u|^2}).$$

Оказалось, что уравнения (2.13) могут быть упрощены просто заменой переменных. Действительно, вместо переменных $z(w,t)$ и $\Phi(w,t)$ введем новые функции $R(w,t)$ и $V(w,t)$ следующим способом:

$$\begin{aligned} R &= \frac{1}{z_w}, \\ \Phi_w &= -iVz_w. \end{aligned} \qquad (2.14)$$

(V - это $i\frac{\partial\Phi}{\partial z}$, т.е. комплексная скорость). Заметим, что поскольку $z(w,t)$ является конформным преобразованием, его производная существует в нижней полуплоскости и не имеет там нулей. Таким образом функция $R(w,t)$ также является аналитической в нижней полуплоскости, и имеет следующие граничные условия:

$$R(w,t) \to 1, \quad |w| \to \infty, \quad Im(w) \le 0.$$

Очевидно, что для V граничные условия выглядят так:

$$V(w,t) \to 0, \quad |w| \to \infty, \quad Im(w) \le 0.$$

Тогда для этих функций уравнения приобретают весьма изящную форму:

$$\begin{aligned} R_t &= i(UR' - U'R), \\ V_t &= i(UV' - R\hat{P}'(V\bar{V})) + g(R-1). \end{aligned} \qquad (2.15)$$

Здесь

$$U = \hat{P}(V\bar{R} + \bar{V}R).$$

Полученные уравнения кубически нелинейны и включают в себя линейный интегральный оператор. Они являются уравнениями гидродинамичес типа, но действуют в комплексной плоскости. Важную роль в этих уравнениях играет комплексная скорость переноса U. Она переносит нули функции $R(w,t)$, которые являются особыми точками конформного отображения $z(w,t)$. Разные типы нулей предполагается изучить в следующей статье. Здесь же следует лишь отметить, что в численном моделировании наблюдаются лишь корневые ($\sqrt{w}$) точки ветвления.

В уравнениях (2.15) легко учесть и поверхностное натяжение, следует лишь заменить второе уравнение на

$$V_t = i(UV' - R\hat{P}'(V\bar{V}) + g(R-1)) - 2\sigma R\hat{P}'(Q'\bar{Q} - \bar{Q}'Q),$$

где σ - это коэффициент поверхностного натяжения, а $Q = \sqrt{R}$.

Следует отметить, что уравнения (2.15) сохраняют свою форму и для других граничных условий. Например, вместо граничных условий (1.2) можно рассмотреть периодические условия, а также жидкость конечной глубины.

Отметим также, что новые уравнения включают в себя только производные конформного отображения и комплексного потенциала скорости. Что касается интегралов движения, то они приобретают в новых переменных более сложную форму. Однако, если интегрированием восстановить комплексный потенциал

$$\Phi = -i \int \frac{V}{R} dw$$

то гамильтониан равен

$$\mathcal{H} = -\int_{-\infty}^{\infty} Re(\Phi) Im(\Phi')$$

а импульсы

$$P_y = \int_{-\infty}^{\infty} Re(\Phi) Re(\frac{1}{R}) du, \quad P_x = \int_{-\infty}^{\infty} Re(\Phi) Im(\frac{1}{R}) du.$$

3 Заключение

Основное утверждение статьи заключается в следующем. Хорошо известные уравнения (1.1), описывающие потенциальное течение несжимаемой жидкости со свободной границей, являются эквивалентными кубическим уравнениям (2.15), которые написаны для обратной производной конформного отображения $R(w,t) = 1/z'(w,t)$ и комплексной скорости жидкости $V(w,t)$. Эти уравнения являются уравнениями гидродинамического типа и описывают перенос особенностей конформного отображения в верхней полуплоскости. Движение особенностей и определяет форму свободной поверхности.

Автор глубоко благодарен академику В.Е. Захарову за полезные обсуждения работы. Эта работа была частично поддержана грантом INTAS-96-0413, ONR грантом # N00014-98-1-0070, грантом РФФИ є 00-01-00929 и грантом поддержки ведущих научных школ России є 00-15-96007.

Список литературы

[1] В.Е Захаров. Прикл. Мех. Тех. Физ. 2 (1968) 190.

[2] M.S. Longuet-Higgins. J. Fluid Mech. **73** (1976) 603.

[3] A.I. Dyachenko, E.A. Kuznetsov, M.D. Spector and V.E. Zakharov, *Phys. Lett. A,* **221** (1996) 73-79.

[4] A.I. Dyachenko and V.E. Zakharov, *Phys. Lett. A*, **221** (1996) 80.

[5] V.E. Zakharov and A.I. Dyachenko, *Physica D* **98** (1996) 652-664.