Н.Е.Кочин, И.А.Кибель, Н.В.Розе

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ГИДРОМЕХАНИКА, ЧАСТЬ 1

М.: Физматгиз, 1963, 584 стр.

Содержание

Предисловие к шестому изданию	8
Глава первая. Кинематика жидкой среды (Н.В.Розе)	**9**
А. Деформация жидкой частицы	9
§ 1. Формулы Коши—Гельмгольца	9
§ 2. Чистая деформация	12
§ 3. Эллипсоид деформации	13
§ 4. Кубическое расширение	15
§ 5. Упражнения	16
Б. Уравнение неразрывности	16
§ 6. Переменные Лагранжа	16
§ 7. Переменные Эйлера	18
§ 8. Переход от переменных Лагранжа к переменным Эйлера и обратно	18
§ 9. Поле скоростей	19
§ 10. Уравнение неразрывности в переменных Лагранжа	22
§ 11. Уравнение неразрывности в переменных Эйлера	24
§ 12. Другой метод вывода уравнения неразрывности	25
§ 13. Уравнение неразрывности в цилиндрических, сферических и криволинейных координатах	26
§ 14. Упражнения	29
В. Кинематическая характеристика безвихревого и вихревого движений	31
§ 15. Введение	31
§ 16. Потенциал скорости	31
§ 17. Свойства безвихревого движения в односвязном объеме	33
§ 18. Безвихревое движение в многосвязном объеме	36
§ 19. Вихревое поле и его свойства	38
§ 20. Упражнения	40
Глава вторая. Основные уравнения динамики идеальной жидкости (Н.В.Розе)	**44**
§ 1. Силы массовые и поверхностные	44
§ 2. Общее уравнение движения	45
§ 3. Гидродинамическое давление в идеальной жидкости	46
§ 4. Общие уравнения движения идеальной жидкости	47
§ 5. Уравнения движения в форме Эйлера	48
§ 6. Векторные формы уравнений движения	53
§ 7. Уравнения движения в форме Ламба	54
§ 8. Уравнения движения в форме Лагранжа	57
§ 9. Общая постановка задач гидродинамики	58
§ 10. Случай несжимаемой жидкости	59
§ 11. Случаи сжимаемой жидкости. Баротропность и бароклинность.	60

Уравнение притока энергии
§ 12. Начальные и граничные условия 64
§ 13. Применение закона количеств движения и закона моментов количеств движения 65
§ 14. Уравнение энергии 72
§ 15. Упражнения 75
Глава третья. Гидростатика (Н.В.Розе) 83
А. Гидростатическое давление 83
§ 1. Уравнения равновесия 83
§ 2. Условие для сил 84
§ 3. Барометрическая формула 85
§ 4. Условия на поверхности раздела 87
§ 5. Общие формулы для определения давления на твердую поверхность 88
§ 6. Давление тяжелой несжимаемой жидкости 88
§ 7. Давление на плоскую стенку 90
§ 8. Закон Архимеда 91
§ 9. Давление на криволинейную стенку 92
§ 10. Упражнения 94
Б. Равновесие плавающих тел 96
§ II. Условия равновесия плавающего тела 96
§ 12. Поверхность сечений 97
§ 13. Поверхность центров 98
§ 14. Радиусы кривизны главных нормальных сечении поверхности центров 99
§ 15. Устойчивость равновесия 102
§ 16. Упражнения 104
Глава четвертая. Простейшие случаи движения идеальной жидкости (Н.В.Розе) 110
А. Интегралы Бернулли Коши 110
§ 1. Установившееся движение 110
§ 2. Безвихревое движение 113
§ 3. Установившееся безвихревое движение 116
§ 4. Ограничения, налагаемые на скорость 117
§ 5. Формула Торичелли 118
§ 6. Истечение газов 118
§ 7. Действие мгновенных сил 119
§ 8. Кинетическая энергия безвихревого движения 121
§ 9. Теорема В. Томсона 122
§ 10. Упражнения 124
Б. Плоское безвихревое движение 129
§ 11. Введение 129
§ 12. функция тока 130
§ 13. Связь функции тока с потенциалом скорости 131
§ 14. Комплексная скорость и комплексный потенциал 133

§ 15. Связь плоской гидродинамической задачи с теорией функций комплексного переменного 134
§ 16. Примеры комплексного потенциала 134
§ 17. Источники и стоки 136
§ 18. Дублеты 138
§ 19. Вихревые точки 139
§ 20. Вихреисточники 140
§ 21. Вычеты комплексной скорости, циркуляция и поток скорости 141
§ 22. Упражнения 142
Глава пятая. Вихревые движения идеальной жидкости (Н.Е.Кочин) 144
А. Основные уравнения теории вихрей и теоремы Гельмгольца о сохранении вихрей 144
§ 1. Введение 144
§ 2. Теорема Томсона 147
§ 3. Теорема Лагранжа 151
§ 4. Теоремы Гельмгольца 152
§ 5. Сохраняемость векторных линий 154
§ 6. Уравнения Фридмана. Уравнения Гельмгольца 160
§ 7. Теоремы Гельмгольца 161
§ 8. Образование вихрей. Теорема В. Бьеркнеса 162
§ 9. Примеры образования вихрей 166
§ 10. Упражнения 174
Б. Определение поля скоростей по заданному полю вихрей и полю расхождения скорости 176
§ 11. Вычисление вектора скорости по вихрю и расхождению скорости для бесконечного пространства 176
§ 12. Случай одной вихревой нити 187
§ 13. Прямолинейная вихревая нить 192
§ 14. Две прямолинейные вихревые нити. Движение системы вихрей 193
§ 15. Круговая вихревая нить 197
§ 16. Вихревой слой 202
§ 17. Упражнения 205
В. Вихревые цепочки Кармана 207
§ 18. Введение 207
§ 19. Одна вихревая цепочка 208
§ 20. Две вихревые цепочки 209
§ 21. Об устойчивости вихревых цепочек Кармана 211
§ 22. Схема Кармана движения тела в жидкости с образованием вихрей 225
§ 23. Вычисление лобового сопротивления по Карману 229
§ 24. Упражнения 236
Глава шестая. Плоская задача о движении тела в идеальной жидкости (Н.В.Розе) 237
§ 1. Предварительные замечания 237
§ 2. Граничные условия. Задачи Дирихле и Неймана 238

§ 3. Движение кругового цилиндра 243
§ 4. Нестационарное течение, вызываемое движущимся круговым цилиндром 251
§ 5. Общие выражения для гидродинамических реакций при установившемся течении. Формула Блазиуса — Чаплыгина 252
§ 6. Эффективное вычисление гидродинамических реакций при установившемся течении Формула Кутта — Жуковского 254
§ 7. Применение метода конформного отображения 257
§ 8. Реакции на контур 262
§ 9. Парабола устойчивости 265
§ 10. Обтекание эллиптического цилиндра 267
§ 11. Обтекание плоской пластинки 272
§ 12. Обтекание некоторых форм профилей цилиндров 274
§ 13. Обтекание профилей Жуковского 280
§ 14. Обтекание решетки 291
§ 15. Тонкое крыло 297
§ 16. Неустановившееся движение плоского контура 309
§ 17. Обтекание с отрывом струй. Метод Кирхгоффа 321
§ 18. Метод Жуковского—Митчеля. Истечение из отверстия. Удар струи в пластинку. Глиссирующая пластинка 329
§ 19. Метод Леви-Чивита 343
§ 20. Давление при обтекании со срывом струй и при обтекании с циркуляцией 352
§ 21. Обтекание с кавитацией 354
Глава седьмая. Пространственная задача о движении тела в идеальной жидкости (Н.В.Розе) **359**
§ 1. Безвихревое движение. Движение шара 359
§ 2. Обтекание эллипсоида 362
§ 3. Функция тока для осесимметрнчного течения 366
§ 4. Метод источников и стоков 370
§ 5. Поперечное обтекание осесимметричных тел 374
§ 6. Движение твердого тела в безграничной жидкости 375
§ 7. Расчет гидродинамических реакций при движении тела 380
§ 8. Примеры 387
§ 9. Движение тела по инерции 396
Глава восьмая. Волновые движения идеальной жидкости (Н.Е.Кочин) **401**
А. Основные уравнения теории волн 401
§ 1. Различные типы волн 401
§ 2. Основные уравнения 402
§ 3. Начальные условия 407
Б. Плоские волны 409
§ 4. Введение 409
§ 5. Стоячие волны 409
§ 6. Прогрессивные волны 414

§ 7. Сведение прогрессивных волн к установившемуся движению 418
§ 8. Групповая скорость 420
§ 9. Общий случай плоской задачи 424
§ 10. Профиль волны 431
§ 11. Волны при конечной глубине жидкости 436
§ 12. Волны на поверхности раздела двух жидкостей 439
§ 13. Капиллярные волны 444
§ 14. Волны конечной амплитуды 447
§ 15. Трохоидальные волны Герстнера 448
§ 16. Свойства трохоидальных волн 451
§ 17. Энергия волн 455
§ 18. Перенос энергии 459
§ 19. Волновое сопротивление. Движение тела под свободной поверхностью 460
§ 20. Волны в сжимаемой жидкости. Обтекание воздухом горного хребта 477
§ 21. Упражнения 188
В. Трехмерные волны 489
§ 22. Общие формулы 489
§ 23. Корабельные волны 499
§ 24. Стоячие колебания тяжелой жидкости в сосуде 504
§ 25. Колебания жидкости в прямоугольном сосуде и в круговом цилиндре 507
§ 26. Упражнения 511
Г. Длинные волны 512
§ 27. Основные уравнения 512
§ 28. Длинные волны в каналах постоянной глубины 515
§ 29. Стоячие колебания в каналах переменной глубины 518
§ 30. Стоячие колебания в цилиндрическом сосуде малой глубины 521
§ 31. Вынужденные колебания в каналах постоянной глубины 522
§ 32. Статическая теория приливов 526
§ 33. Выводы статической теории приливов 530
§ 34. Каналовая теория приливов 534
§ 35. Волны во вращающейся атмосферной оболочке 539
§ 36. Центры действия атмосферы 546
§ 37. Длинные волны конечной амплитуды. Волны на мелкой воде. Разрушение плотины 553
§ 38. Обтекание препятствия тяжелой сжимаемой жидкостью. Длинные волны Бора 561
§ 39. Упражнения 570
Литература 571
Именной указатель 576
Предметный указатель 578

Предметный указатель

Амплитуда волны 411
Анализ приливов гармонический 533
Антипассат 167, 171
Антициклон 145

Архимеда закон 91
Атмосфера вихрей 166, 206
Бабине формула 87
Бароклинность 60
Баротропность 60
Бернулли интеграл 70, 111
Бернулли—Эйлера интеграл 117
Био — Савара закон 189
Блазиуса — Чаплыгина формулы 253, 254
Бойля — Мариотта закон 80
Бьеркнеса теорема 165
Взрыв бомбы внутри несжимаемой жидкости 127
- мины под водой 77
- подводный 120
Вихреисточник 140
Вихрь абсолютный 172
- в криволинейных ортогональных координатах 42
- скорости 22, 154, 176
- точечный 192
Возникновение вихрей в жидкости 162, 205
Волны 36
- в сжимаемой жидкости 477
- во вращающейся атмосферной оболочке 539
- вынужденные 471
- Герстнера трохоидальные 448
- гравитационные 401
- длинные 512, 515, 565
- - в каналах постоянной глубины 515
- капиллярные 444, 446
- конечной амплитуды 447
- - - длинные 553
Волны корабельные 401, 499
- мелкие 401, 446
- морские 401
- на поверхности раздела двух жидкостей 439
- плоские 409
- при конечной глубине жидкости 436
- приливные 401
- прогрессивные 414, 418, 437
- с подветренной стороны 488
- стоячие 409
- трехмерные 489
- трохоидальные Герстнера 448
- упругие 401
Вынос решетки 291
Высота геометрическая 111
- прилива 529
- пьезометрическая 112
- скоростная 112
Вычет комплексной скорости 141
Вязкость 63
Гаусса теорема 22, 177
Гей-Люссака закон 166
Гельмгольца теоремы 152, 153, 161
- уравнение 161
Гельмгольциан вектора полный 159
Гидростатика 83
Гипотеза Жуковского 260
Градиент сверхадиабатический 488
Граница раздела 87
Гребень волны 411
Группа волн 423
Давление взрывное 77
- гидродинамическое 252
- - в идеальной жидкости 46
- гидростатическое 83
- мгновенное 119
- на замкнутую поверхность погруженную в жидкость твердого тела 91
Давление на криволинейную стенку 92
- - плоскую стенку 90
- - твердое тело 89
- нормальное 45, 46
- при обтекании со срывом струй 352
- - - с циркуляцией 352
- тяжелой несжимаемой жидкости 88
Движение в жидкости плоского контура неустановившееся 309
- - - по инерции 398

- - - тела 237, 359—375
- - - цилиндра 225, 243, 251
- - - шара 388
- - - эллипсоида 389
- вихревой нити между двумя параллельными стенками 236
- вихревых цепочек неустойчивое 211
- - - устойчивое 212
- внутри прямого угла 135
- газа по прямолинейной трубке постоянного сечения 79
- жидкости адиабатическое 63, 112
- - безвихревое 31, 114, 144, 406
- - в многосвязном объеме 37
- - - односвязном объеме 33, 35
- - - элементарной трубке тока 66
- - - элиптическом цилиндре 242
- - вихревое 31, 38, 145
- - волновое 401
- - идеальной 110, 144
- - изотермическое 60, 112
- - изэнтропическое 112
- - плоское 129, 409
- - под действием сил тяжести 504
- - по прямолинейной трубке постоянного сечения 80
- - с потенциалом скорости 144
- - стационарное установившееся 21, 110
- - установившееся 116
- системы вихрей 193
- тела под свободной поверхностью 460
- - по инерции 396
- цилиндра в бесконечном потоке 475
- шара поступательное 360
Действие мгновенных сил 119
Деформация жидкой частицы 9
- однородная 16
- чистая 12
Диафрагма 37
Дирихле задача 240
Дисперсия волн 423
Диссипативность объема 73
Длина волны 411
- глиссирующей пластинки 338
Дублет 138
Жидкость бароклинная 61
- баротропная 60, 111, 114, 150
- идеальная 151
- неразрывная 24
- несжимаемая 59
- сжимаемая 60
Жуковского гипотеза 260
- парадокс 96
- профиль 286
- руль 290
Жуковского — Митчеля метод 329
Задача Дирихле 240
- Неймана 241
Закон Архимеда 91
- Био —Савара 189
- Бойля — Мариотта 80, 166
- Гей-Люссака 166
- живой силы 72, 110
- количества движения 65, 226
- моментов количества движения 65
- Паскаля 83
Излучение 63
Импульс давления 402
Индекс циркуляции 543
Интеграл Бернулли 70
- Бернулли—Эйлера 117
- Коши 110, 114
- - Пуассона 347
Интегралы движения центра инерции 194
Интенсивность векторной трубки 154, 157
- вихревой нити 187
- - точки 139
- - трубки 39, 147, 153
- вихря 39, 193, 204, 226
Истечение газа из сосуда через отверстие 118
- - - тонкой конической трубки 124
- жидкости из сосуда 330
Источник 136

Каверна 354
Кавитация 354
Капиллярность 444
Кинематика жидкой среды 9
Кирхгоффа метод 322
Клапейрона уравнение 62, 85
Клепсидра 125
Колебания жидкости в круговом цилиндре 507
- - в прямоугольном сосуде 507
- - вынужденные 522
- - свободные гармонические 408
- - состояние 504, 518, 521
Координаты общие криволинейные 28, 51
- сферические 28, 50
- цилиндрические 27, 48
Коши — Гельмгольца формула 9
Коши интеграл 110, 114
Коши — Римана условие 133
Коэффициент приведенных масс 316
- температурного расширения воздуха 85
Кривизна линий тока 129
Крыло тонкое 297
Кутта—Жуковского формула 251, 256, 263
Лагранжа переменные 17
- теорема 151
Лапласа уравнение 33
Леви-Чивита метод 343
Линия вихревая 39, 146, 152
- наибольшего ската 506
- равной вертикальной амплитуды 506
- тока 20, 35, 70, 129, 202
Масса жидкости 25
- тела присоединенная 385
Метацентр большой 104
- малый 104
Метод Жуковского — Митчеля 329
- источников и стоков 370
- Кирхгоффа 322
- конформного отображения 257
- Леви-Чивита 343, 350
- Симонова — Серебрийского 298
Момент дублета 138
Мощность источника 136
Муссон 167
Напряжение вихревой точки 139
- косое 45
Натяжение жидкости поверхностное 444
Нить вихревая 187
- - круговая 197
- - прямолинейная 192
Обильность источника 136
Образование вихрей 162, 171, 225
Обтекание воздухом горного хребта 477
- жидкостью неподвижного твердого тела 67
- круга поступательным потоком бесциркуляционное 246, 326
- неподвижного кругового цилиндра 246
- осесимметричных тел поперечное 374
- пластины косое 350
- - прямое 355
- плоской пластины 272
- препятствия тяжелой сжимаемой жидкостью 561
- произвольного тонкого профиля 298
- профилей Жуковского 280
- решетки 291
- - бесциркуляционное 293
- с кавитацией 354
- с образованием поверхностей разрыва 321
- с отрывом струй 321
- тел вращения 374
- тела безграничным потоком 324
- цилиндров различной формы 274
- эллипсоида 362
- эллиптического цилиндра 267
Объем жидкий 16
- жидкости многосвязный 37

- - односвязный 35, 57
- - связный 36
- удельный 163
Оператор Лапласа в криволинейных координатах 43
Ось деформации главная 13
- дублета 138
- контура критическая 264
- нулевой подъемной силы 264
- профиля критическая 289
Отлив морской 401
Отображение конформное 257
Пара вихрей 193, 205
- импульсивная 383, 397
Парабола метацентров (парабола устойчивости) 266
Парадокс Жуковского 96
- Эйлера — Даламбера 362
Параметры Ламэ 29, 41, 359
Паскаля закон 83
Пассат 167, 171
Переваливание воздушной массы через хребет 565
Переменные Лагранжа 17, 18, 19
- Эйлера 18
Перенос энергии 459
Период волны 412
- решетки 291
Пластинка глиссирующая 338
Плоскость плавания 97
Плотность жидкости 151
- слоя вихревая 203
- тепловой мощности притока тепла 61
Площадь плавания 97
Поверхность изобарическая 163
- изотермическая 163
- контрольная 68
- равного удельного объема 163
- раздела 87
- разрыва 171, 202
- свободная 83
- сечений 97, 107
- уровня 83
- центров 98
- - для однородного эллипсоида 107
- - для прямого однородного цилиндра 109
Подошва волны 411
Показатель политропы 60
Поле вихревое 38
- скоростей 19
- - соленоидальное (трубчатое) 22
Порядок вихрей симметричный 211
- - шахматный 211
Постоянная газовая 62, 85
Постоянные циклические 38
Потенциал векторный 183
- комплексный 133
- Ньютона 179, 362
- скорости 32, 34, 131, 144, 152, 359
Поток однородный поступательный 134
- скорости 21, 26, 141, 142
- установившийся циркуляционный 247
Прилив морской 401
- —обращенный» 537
- —прямой» 537
Принцип симметрии Римана — Шварца 347
- - Шварца 464
Производная по нормали к поверхности 33
- полная (индивидуальная) 19
Профиль волны 431, 437
- Жуковского 286
- крыла аэроплана 286
- тонкий 298
Процесс изэнтропический 63
- политропический 60, 63
Пуассона уравнение 177
Пучность 411
Равновесие жидкости изотермическое 88
- плавающих тел 96
- тяжелой несжимаемой жидкости 88

Радиус кривизны главных нормальных сечений поверхности центров 99
Разрушение вихрей 162
- волны 553
- плотины 554, 557
Расположение вихрей симметричное 211
- - шахматное 211
Растяжение нормальное 45
Расхождение вектора в криволинейных ортогональных координатах 41
- скорости 22, 176
Расширение жидкости кубическое 15, 74
Реакция при движении тела гидравлическая 380
Резонанс 524
Руль Жуковского 290
Рябь 401, 446
Свойство сохраняемости вихревых линий 153
Седло (особая точка) 21
Сейши 401, 504
Сила живая несжимаемой жидкости 122
- Жуковского 315
- импульсивная 383, 397
- капиллярная 444
- массовая 44
- мгновенная 119
- объемная 45
- поверхностная 45, 69
- подсасывающая 274, 304
- подъемная Архимеда 473
- трения 45
Симонова — Серебрийского метод 298
Система вихрей 193, 203
Скорость волн групповая 422
- комплексная 133
Скорость критическая 560
- кубического расширения жидкости 22
- чистой деформации 12
Слой вихревой 203
- - цилиндрический 203
Смерч 145
Сопротивление вихревое 145
- волновое 460, 461
- лобовое 226, 232
- - по Карману 229
Сохраняемость векторных линий 154
Среда бароклинная 61
- баротропная 60
Сток 136
Стокса теорема 22, 40
- формула 147
Стрела прогиба 286
Тело плавающее 96
Тензор упругих напряжений 47
Теорема Бьеркнеса 165
- Гаусса 22, 177
- Гельмгольца 161
- - о постоянстве интенсивности вихревой трубки 147
- - - сохранении вихревых линий 152
- - - - интенсивности вихревых трубок 153
- Лагранжа 151
- о постоянстве циркуляции 147
- Стокса 22, 40
- Томсона 122, 147
- - основная 151
- Фридмана 155
- Чаплыгина 265, 286
- Эйлера 67
Теория вихревых дорожек Кармана 322
- приливов каналовая 535
- статическая 526
Течение жидкости пространственное 359
- морское 167
- осесимметричное 366
Точка вихревая 139

- критическая 20, 248
- особая 20
Трохоида 452
Трубка вихревая 39, 153, 187
- изобаро-изостерическая единичная 163
- тока 26, 112
- - единичная 26
Угол атаки 264, 286
Удар струи в пластинку 70, 334
Удлинение главное 15
Узел (особая точка) 21, 411
Уравнение абсолютного движения жидкости в подвижной системе координат 57
- Гельмгольца 161
- движения идеальной жидкости общее 45
- Клапейрона 62, 85
- Лапласа 33, 120
- неразрывности 16, 23, 25
- - в криволинейных координатах 359
- - - общих криволинейных ортогональных координатах 28
- - - переменных Лагранжа 24
- - - - Эйлера 24
- - - сферических координатах 28
- - - цилиндрических координатах 27
- притока энергии (притока тепла) 62
- Пуассона 177
- состояния 80, 85
- статической теории приливов 527
- Фридмана 160
- энергии 72, 74
Уравнения гидродинамики идеальной жидкости 44
- движения в векторной форме 53
- - форме Лагранжа 51, 58
- - - - Ламба 54
- - - - Эйлера 48
- - длинных волн 515
- - идеальной жидкости 47
- Ламба гидродинамические 54
- равновесия 83
- Эйлера гидродинамические 48
Уровень поверхности 83
- приведенный 89
Ускорение Кориолиса 56
Условие Коши — Римана 133
- равновесия плавающего тела 96
- устойчивости движения вихревых цепочек Кармана 218
Условия граничные 64, 239
- начальные 64, 407
Устойчивость вихревых цепочек Кармана 211
- равновесия 102
Фокус (особая точка) 21
- контура 265
Формула Бабине 87
- барометрическая 85
- Блазиуса — Чаплыгина вторая 254
- Блазиуса — Чаплыгина первая 253
- давления на твердую поверхность 88
- Коши — Гельмгольца 9
- Кутта — Жуковского 251, 256, 263, 285
- Лагранжа — Коши 359
- Леви-Чивита 350
- Стокса 147
- Торричелли 118
- Шварца — Кристоффеля 329, 332
- Эртеля 173
Фридмана теорема 155
- уравнение 160
Функции сопряженные 131
Функция тока 130, 199, 367
- - для осесимметричного течения 366
Характеристика вихревого движения кинематическая 31
Центр (особая точка) 21
- давления 71, 91, 266
- действия атмосферы 546
Центр инерции вихрей 194
- кривизны главных сечений поверхности центров 104

Цепочка вихревая 208
- - Кармана 207, 211
Циклон 145, 171
Циркуляция скорости 22, 32, 37, 40, 142, 151, 193
Чаплыгина теорема 265, 286
Частота колебаний 412
Число кавитации 358
Шаг решетки 291
Шварца — Кристоффеля формула 331
Эйлера — Даламбера парадокс 362
- переменные 18, 24, 25, 64
- теорема 67
Эллипсоид вращения 13
Энергия волн 455
- кинетическая 73
- - безвихревого течения 121
- потенциальная 72, 73
Энтропия 63, 173
Эпициклоида удлиненная 424
- укороченная 424
Эртеля формула 173

ПРЕДИСЛОВИЕ К ШЕСТОМУ ИЗДАНИЮ

Дополнения и изменения, внесенные в шестое издание первой части, касаются лишь главы о волнах. Здесь вставлены два новых параграфа: один посвящен теории длинных волн на мелкой воде (в частности, рассмотрен вопрос о разрушении плотины), другой — теории длинных волн в сжимаемой жидкости (задача обтекания препятствия).

В некоторых местах сделаны незначительные изменения текста.

И. Кибель

ГЛАВА ПЕРВАЯ

КИНЕМАТИКА ЖИДКОЙ СРЕДЫ

А. ДЕФОРМАЦИЯ ЖИДКОЙ ЧАСТИЦЫ

§ 1. Формулы Коши — Гельмгольца. В кинематике твердого тела изучен вопрос о распределении скоростей в движущемся теле и показано, что скорость v любой точки тела можно рассматривать как геометрическую сумму поступательной скорости v_0, определяемой как скорость выбранного в теле полюса и вращательной скорости вокруг мгновенной оси, проходящей через полюс. Вращательная скорость, как известно выражается векторным произведением $\omega \times \rho$, где ω есть вектор угловой скорости, отложенный по мгновенной оси вращения, а ρ — относительный радиус-вектор проведенный из полюса в рассматриваемую точку тела; таким образом

$$v = v_0 + \omega \times \rho, \tag{1.1}$$

причем длина ρ остается неизменной во время движения тела по условию твердости. Так как $v = dr/dt$, где r есть абсолютный радиус-вектор взятой точки тела т. е. радиус-вектор проведенный из некоторой фиксированной в пространстве точки, принимаемой за неподвижную, то формула (1.1) дает одновременно разложение элементарного перемещения dr рассматриваемой точки тела на поступательную и вращательную части:

$$dr = dr_0 + (\omega \times \rho)\,dt. \tag{1.2}$$

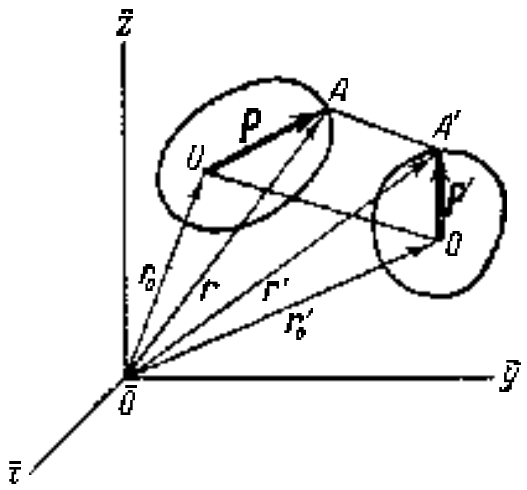

Рис. 1.

Обращаясь к изучению перемещений и скоростей различных точек движущейся жидкой среды, вырежем в ней мысленно малую частицу, ограниченную односвязной поверхностью, например шаровой, и рассмотрим два последовательных положения этой частицы в моменты t и $t + dt$, отделенные бесконечно малым промежутком времени dt.

Возьмем в первом положении жидкой частицы две любые точки O и A (рис. 1) одну из них, например O, примем за основную (полюс)

и обозначим через r_0 и r их абсолютные радиусы-векторы, проведенные из некоторой точки пространства $\bar{O}$; через ρ обозначим относительный радиус-вектор OA; пусть r_0', r' и ρ' означают те же величины во втором положении частицы в момент $t+dt$, так что элементарные перемещения точек O и A будут:

$$dr_0 = r_0' - r_0; \qquad dr = r' - r.$$

Разность $\rho' - \rho$ можно назвать элементарным относительным перемещением точки A по отношению к O; обозначим ее через $d\rho$, так что

$$d\rho = \rho' - \rho.$$

Вследствие очевидных геометрических соотношений

$$\rho' = r' - r_0', \qquad \rho = r - r_0$$

будет справедливо соотношение

$$d\rho = dr - dr_0 = (v - v_0)\,dt,$$

где v и v_0 — скорости точек A и O в момент t. С другой стороны, рассматривая поле скоростей жидкости в момент t, т. е. считая скорость функцией точки

$$v = v(r), \qquad v_0 = v(r_0),$$

мы имеем, согласно определению производной вектора по вектору, с точностью до малых величин второго порядка малости:

$$v(r) - v(r_0) = v(r_0 + \rho) - v(r_0) = (\rho \cdot \nabla)\, v,$$

$$r = r_0 + \rho$$

и следовательно,

$$d\rho = (\rho \cdot \nabla)\, v\, dt \tag{1.3}$$

или, в проекциях на неподвижные координатные оси $\bar{O}\bar{x}\bar{y}\bar{z}$,

$$\left.\begin{aligned} d\xi &= \left(\frac{\partial v_x}{\partial x}\xi + \frac{\partial v_x}{\partial y}\eta + \frac{\partial v_x}{\partial z}\zeta\right) dt, \\ d\eta &= \left(\frac{\partial v_y}{\partial x}\xi + \frac{\partial v_y}{\partial y}\eta + \frac{\partial v_y}{\partial z}\zeta\right) dt, \\ d\zeta &= \left(\frac{\partial v_z}{\partial x}\xi + \frac{\partial v_z}{\partial y}\eta + \frac{\partial v_z}{\partial z}\zeta\right) dt. \end{aligned}\right\} \tag{1.4}$$

Последние формулы после несложных алгебраических преобразований, указанных Коши можно привести к виду:

$$d\xi = \left[\frac{\partial v_x}{\partial x}\xi + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\eta - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x}\right)\zeta\right]dt + \\ + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right)\zeta - \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\eta\right]dt,$$

$$d\eta = \left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\xi + \frac{\partial v_y}{\partial y}\eta + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z}\right)\zeta\right]dt + \\ + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\xi - \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right)\zeta\right]dt,$$

$$d\zeta = \left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x}\right)\xi + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z}\right)\eta + \frac{\partial v_z}{\partial z}\zeta\right]dt + \\ + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right)\eta - \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right)\xi\right]dt.$$

Вводя для краткости обозначения

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial v_x}{\partial x} = \varepsilon_1, \quad \frac{\partial v_y}{\partial y} = \varepsilon_2, \quad \frac{\partial v_z}{\partial z} = \varepsilon_3, \\ &\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z} = \theta_1, \quad \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} = \theta_2, \quad \frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} = \theta_3 \end{aligned}\right\} \quad (1.5)$$

и вспоминая определение вихря, мы можем написать:

$$\left.\begin{aligned} d\xi &= \left(\varepsilon_1\xi + \frac{1}{2}\theta_3\eta + \frac{1}{2}\theta_2\zeta\right)dt + \frac{1}{2}(\zeta\,\mathrm{rot}_y\,\mathbf{v} - \eta\,\mathrm{rot}_z\,\mathbf{v})\,dt, \\ d\eta &= \left(\frac{1}{2}\theta_3\xi + \varepsilon_2\eta + \frac{1}{2}\theta_1\zeta\right)dt + \frac{1}{2}(\xi\,\mathrm{rot}_z\,\mathbf{v} - \zeta\,\mathrm{rot}_x\,\mathbf{v})\,dt, \\ d\zeta &= \left(\frac{1}{2}\theta_2\xi + \frac{1}{2}\theta_1\eta + \varepsilon_3\zeta\right)dt + \frac{1}{2}(\eta\,\mathrm{rot}_x\,\mathbf{v} - \xi\,\mathrm{rot}_y\,\mathbf{v})\,dt \end{aligned}\right\} \quad (1.6)$$

или короче:

$$\left.\begin{aligned} d\xi &= \frac{\partial F}{\partial \xi}dt + \left(\frac{1}{2}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{v}\times\boldsymbol{\rho}\right)_x dt, \\ d\eta &= \frac{\partial F}{\partial \eta}dt + \left(\frac{1}{2}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{v}\times\boldsymbol{\rho}\right)_y dt, \\ d\zeta &= \frac{\partial F}{\partial \zeta}dt + \left(\frac{1}{2}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{v}\times\boldsymbol{\rho}\right)_z dt \end{aligned}\right\} \quad (1.7)$$

где

$$F = \frac{1}{2}(\varepsilon_1\xi^2 + \varepsilon_2\eta^2 + \varepsilon_3\zeta^2 + \theta_1\eta\zeta + \theta_2\xi\zeta + \theta_3\xi\eta). \quad (1.8)$$

Последние формулы показывают, что элементарное относительное перемещение $d\boldsymbol{\rho}$ можно рассматривать как геометрическую сумму двух слагаемых: 1) вектора с проекциями $\frac{\partial F}{\partial \xi}dt$, $\frac{\partial F}{\partial \eta}dt$, $\frac{\partial F}{\partial \zeta}dt$,

называемого *чистой деформацией*, и 2) вектора $\left(\frac{1}{2}\operatorname{rot} v \times \rho\right) dt$ выражающего элементарное вращательное перемещение, которое получила бы точка A, если бы частица затвердела, при вращении вокруг мгновенной оси, проходящей через точку O с угловой скоростью $\omega = \frac{1}{2}\operatorname{rot} v$.

Так как $dr = dr_0 + d\rho$, то мы приходим к заключению, что *элементарное перемещение любой точки жидкой частицы можно рассматривать как геометрическую сумму трех перемещений: поступательного, вращательного и деформационного*; разделив на dt, мы можем повторить то же самое заключение про скорость.

$$v = v_0 + v_1 + v_2, \tag{1.9}$$

где v_0 — скорость поступательного движения, определяемого полюсом O; $v_1 = \omega \times \rho$ — скорость вращательного движения взятой точки (определяемой относительным радиусом-вектором ρ) вокруг мгновенной оси, проходящей через полюс, с угловой скоростью

$$\omega = \frac{1}{2}\operatorname{rot} v, \tag{1.10}$$

$v_2 = \operatorname{grad} \Gamma$ — *скорость чистой деформации*, т. е. потенциальный вектор, определяемый квадратичной однородной функцией (1.8), в которой коэффициенты имеют вышеуказанное значение.

§ 2. Чистая деформация. Чтобы представить яснее характер движения, названного чистой деформацией, допустим, что вращательная часть движения отсутствует, тогда относительные координаты некоторой точки жидкой частицы ξ, η, ζ по истечении элемента времени dt примут значения:

$$\left.\begin{aligned} \xi' &= \xi + d\xi = (1 + \varepsilon_1 dt)\,\xi + \frac{1}{2}\theta_3 dt\,\eta + \frac{1}{2}\theta_2 dt\,\zeta, \\ \eta' &= \eta + d\eta = \frac{1}{2}\theta_3 dt\,\xi + (1 + \varepsilon_2 dt)\,\eta + \frac{1}{2}\theta_1 dt\,\zeta, \\ \zeta' &= \zeta + d\zeta = \frac{1}{2}\theta_2 dt\,\xi + \frac{1}{2}\theta_1 dt\,\eta + (1 + \varepsilon_3 dt)\,\zeta. \end{aligned}\right\} \tag{2.1}$$

Так как ξ', η', ζ' отличаются от ξ, η, ζ на величины бесконечно малые, то с точностью до величин второго порядка малости можно положить

$$\begin{aligned} \xi' &= \xi + \varepsilon_1 dt\,\xi' + \frac{1}{2}\theta_3 dt\,\eta' + \frac{1}{2}\theta_2 dt\,\zeta', \\ \eta' &= \eta + \frac{1}{2}\theta_3 dt\,\xi' - \varepsilon_2 dt\,\eta' + \frac{1}{2}\theta_1 dt\,\zeta', \\ \zeta' &= \zeta + \frac{1}{2}\theta_2 dt\,\xi' + \frac{1}{2}\theta_1 dt\,\eta' + \varepsilon_3 dt\,\zeta', \end{aligned}$$

откуда

$$\left.\begin{aligned}
\xi &= (1 - \varepsilon_1\,dt)\,\xi' - \tfrac{1}{2}\,\theta_3\,dt\,\eta' - \tfrac{1}{2}\,\theta_2\,dt\,\zeta',\\
\eta &= -\tfrac{1}{2}\,\theta_3\,dt\,\xi' + (1 - \varepsilon_2\,dt)\,\eta' - \tfrac{1}{2}\,\theta_1\,dt\,\zeta',\\
\zeta &= -\tfrac{1}{2}\,\theta_2\,dt\,\xi' - \tfrac{1}{2}\,\theta_1\,dt\,\eta' + (1 - \varepsilon_3\,dt)\,\zeta'.
\end{aligned}\right\} \qquad (2.2)$$

Последние формулы показывают, что точки малой жидкой частицы лежащие в момент t на сфере радиуса R

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = R^2,$$

перейдут в момент $t + dt$ на поверхность второго порядка (вследствие линейности предыдущих формул), которая может быть только эллипсоидом, так как, вследствие сплошности движения, шаровая жидкая поверхность может за бесконечно малый элемент времени dt претерпеть лишь бесконечно малое изменение своей формы; уравнение этого эллипсоида будет

$$(1 - 2\varepsilon_1\,dt)\,\xi'^2 + (1 - 2\varepsilon_2\,dt)\,\eta'^2 + (1 - 2\varepsilon_3\,dt)\,\zeta'^2 - 2\theta\,dt\,\eta'\zeta' - 2\vartheta_1\,dt\,\zeta'\xi' - 2\vartheta_3\,dt\,\xi'\eta' = R^2, \qquad (2.3)$$

если отбросить величины второго порядка малости.

Эллипсоид (2.3) носит название *эллипсоида деформации*, а его главные оси называются *главными осями деформации*.

§ 3. Эллипсоид деформации. Покажем, что точки жидкой частицы, лежащие на главных осях деформации, остаются после деформации на тех же осях, испытывая лишь смещения вдоль этих осей. Для этого воспользуемся тем свойством главных осей эллипсоида, что они совпадают с нормалями к эллипсоиду в точках пересечения последнего с осями.

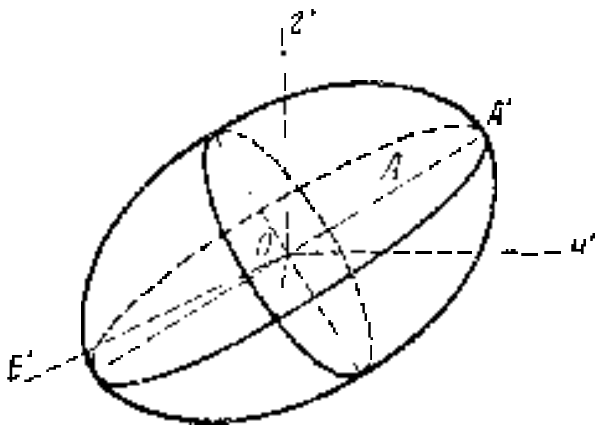

Рис. 2

Пусть ρ' — вектор с составляющими ξ', η', ζ', проведенный в конце A' главной полуоси эллипсоида (рис. 2). Направляющие косинусы нормали к этому эллипсоиду в точке (ξ', η', ζ') пропорциональны производным левой части уравнения (2.3) по ξ', η', ζ'; если эта нормаль коллинеарна с вектором ρ', то должно быть:

$$\left.\begin{aligned}
(1 - 2\varepsilon_1\,dt)\,\xi' - \vartheta_3\,dt\,\eta' - \vartheta_2\,dt\,\zeta' &= \mu\xi',\\
-\vartheta_1\,dt\,\xi' + (1 - 2\varepsilon_2\,dt)\,\eta' - \vartheta_1\,dt\,\zeta' &= \mu\eta',\\
-\vartheta_2\,dt\,\xi' - \vartheta_1\,dt\,\eta' + (1 - 2\varepsilon_3\,dt)\,\zeta' &= \mu\zeta',
\end{aligned}\right\} \qquad (3.1)$$

где μ — параметр имеющий очень простое значение. Действительно, если помножить предыдущие уравнения по порядку на ξ', η' и ζ', сложить и воспользоваться уравнением (2.3), то мы получим:

$$R^2 = \mu\left(\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2\right) = \mu\rho'^2,$$

откуда следует, что

$$\mu = \frac{R^2}{\rho'^2}, \tag{3.2}$$

где ρ' есть длина рассматриваемой главной полуоси эллипсоида (2.3).

Воспользовавшись уравнениями (2.2), мы можем переписать соотношения (3.1) в следующем виде:

$$2\xi - \xi' = \mu\xi', \qquad 2\eta - \eta' = \mu\eta', \qquad 2\zeta - \zeta' = \mu\zeta',$$

откуда

$$\xi = \frac{1+\mu}{2}\xi', \qquad \eta = \frac{1+\mu}{2}\eta', \qquad \zeta = \frac{1+\mu}{2}\zeta',$$

или в векторной форме:

$$\rho = \frac{1+\mu}{2}\rho',$$

где ρ — радиус-вектор той точки A, которая после деформации перешла в конец вектора ρ'. Полученное уравнение показывает, что все точки, лежавшие до деформации на главной оси эллипсоида деформации (2.3), остаются после деформации на той же оси.

Вычислим отнесенное к единице времени относительное удлинение главной оси, которое мы обозначим через e:

$$e = \frac{\rho' - \rho}{\rho\, dt},$$

так что

$$\rho' = \rho\,(1 + e\,dt).$$

Из уравнения (3.2), принимая во внимание, что $\rho = R$, выведем:

$$\mu = \frac{1}{(1+e\,dt)^2},$$

или, пренебрегая членами второго порядка малости:

$$\mu = 1 - 2e\,dt. \tag{3.3}$$

Воспользовавшись этим выражением, мы можем переписать систему (3.1) еще так:

$$\begin{aligned}
2(\varepsilon_1 - e)\xi' + \theta_3\eta' + \theta_2\zeta' &= 0,\\
\theta_3\xi' + 2(\varepsilon_2 - e)\eta' + \theta_1\zeta' &= 0,\\
\theta_2\xi' + \theta_1\eta' + 2(\varepsilon_3 - e)\zeta' &= 0.
\end{aligned}$$

Условие совместности этой системы трех однородных по ξ', η', ζ' уравнений состоит в равенстве нулю определителя

$$\begin{vmatrix} 2(\varepsilon_1 - e) & \theta_3 & \theta_2 \\ \theta_3 & 2(\varepsilon_2 - e) & \theta_1 \\ \theta_2 & \theta_1 & 2(\varepsilon_3 - e) \end{vmatrix} = 0. \tag{3.4}$$

Это кубическое относительно e уравнение имеет всегда три вещественных корня e_1, e_2, e_3 (два из которых или все три могут оказаться равными). По формуле (3.3) мы вычислим соответствующие значения

$$\mu_1 = 1 - 2e_1\,dt, \quad \mu_2 = 1 - 2e_2\,dt, \quad \mu_3 = 1 - 2e_3\,dt,$$

и по формуле (3.2) найдем длины главных осей эллипсоида (2.3), которые мы обозначим через a, b, c:

$$a^2 = \frac{R^2}{1 - 2e_1\,dt}, \quad b^2 = \frac{R^2}{1 - 2e_2\,dt}, \quad c^2 = \frac{R^2}{1 - 2e_3\,dt}.$$

Поэтому уравнение эллипсоида деформации (2.3), отнесенное к осям симметрии, получит вид

$$(1 - 2e\,dt)\,\xi_1^2 + (1 - 2e_2\,dt)\,\eta_1^2 + (1 - 2e_3\,dt)\,\zeta_1^2 = R^2. \tag{3.5}$$

§ 4. Кубическое расширение. Коэффициенты e_1, e_2, e_3 в уравнении (3.5) носят название *главных удлинений*. По известному свойству инвариантности при преобразовании уравнения поверхности второго порядка [получающемуся из уравнения (3.4)] будет иметь место соотношение

$$e_1 + e_2 + e_3 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \tag{4.1}$$

или заменяя ε_1, ε_2, ε_3 их значениями в (1.5),

$$e_1 + e_2 + e_3 = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = \operatorname{div} v. \tag{4.2}$$

Нетрудно видеть, что последняя величина имеет простое физическое значение, выражая собой *кубическое расширение* жидкости, отнесенное к единице времени. Действительно, обозначая через τ и τ' объем сферической частицы и объем эллипсоида, в который переходит эта частица после деформации, имеем с точностью до величин второго порядка малости:

$$\frac{\tau' - \tau}{\tau\,dt} = \frac{\frac{4}{3}\pi abc - \frac{4}{3}\pi R^3}{\frac{4}{3}\pi R^3\,dt} = \frac{(1 + e_1\,dt)(1 + e_2\,dt)(1 + e_3\,dt) - 1}{dt} =$$

$$= e_1 + e_2 + e_3. \tag{4.3}$$

Отсюда получается, что для несжимаемой жидкости в каждой ее точке должно удовлетворяться соотношение

$$\operatorname{div} v = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0. \qquad (4.4)$$

Заметим, что величины ε_1, ε_2, ε_3, θ_1, θ_2, θ_3, ω_x, ω_y, ω_z определяющие чистую деформацию и вращение частицы, относятся к точке O — полюсу частицы — и вообще являются функциями координат (точки O) и времени. В том случае, когда эти величины являются постоянными, деформация называется *однородной*.

§ 5. Упражнения. 1. Показать, что при однородной деформации точки жидкости, лежащие на плоскости или на прямой, остаются после деформации соответственно на некоторой плоскости или на прямой.

2. Выяснить значение коэффициента ε_1, считая, что все прочие коэффициенты равны нулю.

Ответ. ε_1 есть скорость удлинения вдоль оси Ox.

3. Выяснить значение коэффициента θ_3, считая, что прочие коэффициенты равны нулю.

Ответ. θ_3 есть скорость скашивания прямого угла Oxy.

4. Показать, что при однородной деформации направления главных осей деформации для любой точки жидкости будут одинаковы.

Б. УРАВНЕНИЕ НЕРАЗРЫВНОСТИ

§ 6. Переменные Лагранжа. Изучение движения жидкости может быть произведено с двух точек зрения.

С точки зрения, развитой особенно подробно Лагранжем, объектом изучения служит сама движущаяся жидкость, точнее говоря, отдельные ее частицы, рассматриваемые как материальные частицы, сплошным образом заполняющие некоторый движущийся объем, занятый жидкостью; такой объем условимся называть «жидким объемом».

Самое изучение состоит: 1) в исследовании изменений, которые претерпевают различные векторные и скалярные величины, характеризующие движение некоторой фиксированной частицы жидкого объема (например скорость, плотность и т. д.) в зависимости от времени, 2) в исследовании изменений тех же величин при переходе от одной частицы жидкого объема к другой. Иначе говоря, упомянутые величины, характеризующие движение, рассматриваются как функции от времени и тех чисел, которыми отмечается индивидуальность взятой частицы.

За такие числа можно например принять декартовы координаты жидкой частицы x_0, y_0, z_0 в некоторый начальный момент времени t_0; тогда при движении жидкого объема можно, очевидно, трактовать координаты любой его частицы x, y, z как определенные функции

от времени t и начальных координат той же частицы:

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi_1(t,\ x_0\ \ y_0\ \ z_0),\\ y &= \varphi_2(t,\ x_0\ \ y_0\ \ z_0),\\ z &= \varphi_3(t,\ x_0,\ y_0\ \ z_0). \end{aligned}\right\} \qquad (6\ 1)$$

причем функции φ_1 φ_2 φ_3 при $t = t_0$ тождественно обращаются в x_0, y_0, z_0:

$$\begin{aligned} x_0 &= \varphi_1(t_0,\ x_0,\ y_0,\ z_0),\\ y_0 &= \varphi_2(t_0,\ x_0\ \ y_0,\ z_0),\\ z_0 &= \varphi_3(t_0,\ x_0,\ y_0,\ z_0). \end{aligned}$$

Вместо декартовых координат x_0 y_0 z_0, отличающих одну частицу от другой, в рассматриваемом жидком объеме можно взять любые три величины a, b c, связанные с x_0 y_0, z_0 взаимно-однозначными зависимостями,

$$x_0 = \psi_1(a,\ b,\ c),\quad y_0 = \psi_2(a,\ b\ \ c),\quad z_0 = \psi_3(a,\ b\ \ c),$$

иначе говоря, можно взять криволинейные координаты частицы для начального момента t_0.

С точки зрения Лагранжа переменные t, a, b c являются аргументами, определяющими значение различных векторных и скалярных функций, которыми может характеризоваться движение жидкости, эти переменные носят название *переменных Лагранжа*.

Мы будем, таким образом, иметь:

$$\left.\begin{aligned} x &= f_1(a,\ b\ \ c,\ t)\\ y &= f_2(a,\ b\ \ c,\ t)\\ z &= f_3(a,\ b\ \ c,\ t). \end{aligned}\right\} \qquad (6\ 2)$$

Проекции скорости и ускорения выразятся формулами:

$$\left.\begin{aligned} v_x &= \frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial f_1(a\ \ b,\ c,\ t)}{\partial t},\\ v_y &= \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial f_2}{\partial t},\\ v_z &= \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial f_3}{\partial t}, \end{aligned}\right\} \qquad (6\ 3)$$

$$\left.\begin{aligned} w_x &= \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 f_1}{\partial t^2},\\ w_y &= \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 f_2}{\partial t^2},\\ w_z &= \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 f_3}{\partial t^2}, \end{aligned}\right\} \qquad (6.4)$$

Плотность будет:

$$\rho = f(a,\ b,\ c,\ t)$$

и т. д.

§ 7. Переменные Эйлера. С другой точки зрения, развитой Эйлером, объектом изучения является, строго говоря, не сама жидкость, а неподвижное пространство (или его фиксированная часть), заполненное движущейся жидкостью, и изучается: 1) изменение различных элементов движения в фиксированной точке пространства с течением времени и 2) изменение этих элементов при переходе к другим точкам пространства; иначе говоря, различные векторные и скалярные элементы движения рассматриваются как функции точки и времени, т. е. как функции четырех аргументов x, y, z, t, называемых *переменными Эйлера*; например:

$$v = F(r, t)$$

или

$$\left.\begin{aligned} v_x &= F_1(x, y, z, t), \\ v_y &= F_2(x, y, z, t), \\ v_z &= F_3(x, y, z, t), \end{aligned}\right\} \tag{7.1}$$

аналогично

$$\rho = F_4(x, y, z, t)$$

и т. д.

Таким образом, с точки зрения Эйлера, объектами изучения являются различные *векторные* и *скалярные поля* характеризующие движение жидкости, например: поле скоростей, поле ускорений, поле плотностей и т. д.

§ 8. Переход от переменных Лагранжа к переменным Эйлера и обратно. Такой переход может быть осуществлен при помощи уравнений (6.2), которые должны иметь однозначные решения относительно a, b, c:

$$\left.\begin{aligned} a &= \varphi_1(x, y, z, t), \\ b &= \varphi_2(x, y, z, t), \\ c &= \varphi_3(x, y, z, t), \end{aligned}\right\} \tag{8.1}$$

так как два положения жидкого объема в моменты t_0 и t связаны, очевидно, взаимно-однозначным точечным соответствием. Из взаимной разрешимости уравнений (6.2) и (8.1), как известно из анализа, вытекает, что ни один из функциональных определителей

$$D = \frac{D(x, y, z)}{D(a, b, c)}$$

и

$$D_1 = \frac{D(a, b, c)}{D(x, y, z)} = \frac{1}{D}$$

не обращается тождественно в нуль или бесконечность.

Пусть, например, некоторая величина A задана в переменных Эйлера

$$A = F(x, y, z, t)$$

и требуется составить ее производные по переменным Лагранжа, тогда будет:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial A}{\partial a} &= \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial a} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial a} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial a},\\
\frac{\partial A}{\partial b} &= \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial b} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial b} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial b},\\
\frac{\partial A}{\partial c} &= \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial c} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial c} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial c},\\
\frac{\partial A}{\partial t} &= \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial t};
\end{aligned}\right\} \qquad (8.2)$$

последняя формула на основании (6.3) дает выражение для так называемой *полной* или *индивидуальной* производной функции F

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial x}v_x + \frac{\partial F}{\partial y}v_y + \frac{\partial F}{\partial z}v_z + \frac{\partial F}{\partial t}. \qquad (8.3)$$

Применяя последнюю формулу к функциям v_x, v_y, v_z, получаем следующие выражения для проекций ускорения в переменных Эйлера:

$$\left.\begin{aligned}
w_x &= \frac{\partial v_x}{\partial x}v_x + \frac{\partial v_x}{\partial y}v_y + \frac{\partial v_x}{\partial z}v_z + \frac{\partial v_x}{\partial t},\\
w_y &= \frac{\partial v_y}{\partial x}v_x + \frac{\partial v_y}{\partial y}v_y + \frac{\partial v_y}{\partial z}v_z + \frac{\partial v_y}{\partial t},\\
w_z &= \frac{\partial v_z}{\partial x}v_x + \frac{\partial v_z}{\partial y}v_y + \frac{\partial v_z}{\partial z}v_z + \frac{\partial v_z}{\partial t}.
\end{aligned}\right\} \qquad (8.4)$$

Обратный переход от переменных Эйлера к переменным Лагранжа может быть произведен при помощи уравнений (7.1), которые в переменных Лагранжа принимают вид:

$$\frac{\partial x}{\partial t} = F_1(x, y, z, t), \quad \frac{\partial y}{\partial t} = F_2(x, y, z, t), \quad \frac{\partial z}{\partial t} = F_3(x, y, z, t).$$

Интегрируя эти уравнения, найдем:

$$\begin{aligned}
x &= f_1(c_1, c_2, c_3, t),\\
y &= f_2(c_1, c_2, c_3, t),\\
z &= f_3(c_1, c_2, c_3, t),
\end{aligned}$$

где c_1, c_2, c_3 — произвольные постоянные, появляющиеся при интегрировании. Полагая $a = c_1$, $b = c_2$, $c = c_3$, мы приходим к уравнениям (6.2), определяющим движение в переменных Лагранжа.

§ 9. Поле скоростей. Точка зрения Эйлера открывает дорогу для применения векторного анализа, название многих терминов которого указывает на тесную связь их с гидродинамикой. Особенно

ходотворным является рассмотрение векторного поля скоростей, для которого мы повторим некоторые определения векторного анализа.

Линиями тока называются линии, которые характеризуются тем, что для данного момента времени t касательная к линии тока в любой ее точке совпадает по направлению со скоростью, дифференциальные уравнения линий тока будут:

$$\frac{dx}{v_x(x, y, z, t)} = \frac{dy}{v_y(x, y, z, t)} = \frac{dz}{v_z(x, y, z, t)}, \tag{9.1}$$

где t играет роль параметра.

Через каждую точку поля, в которой функции v_x, v_y, v_z не обращаются в нуль одновременно в данный момент времени проходит только одна линия тока, как это следует из теоремы существования для системы уравнений (9.1) в предположении, например, что v_x, v_y, v_z однозначные и непрерывные вместе с их первыми производными по координатам функции.

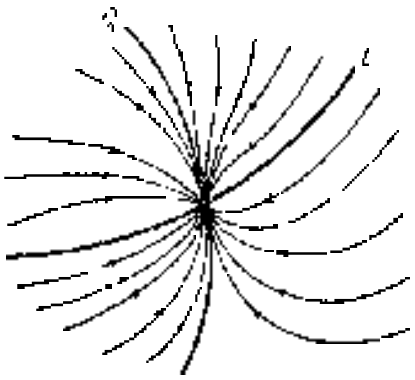

Рис. 3.

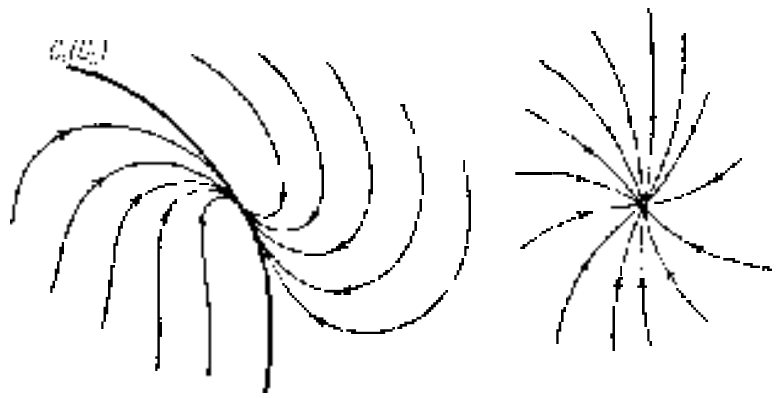

Рис. 4

ранные особенности могут представиться, если в данной точке поля скорость обращается в нуль; такие точки называются *критическими* или *особыми*. Критические точки могут располагаться изолированно и могут образовывать критические линии и поверхности. Не анализируя вопроса о наличии, расположении и характере критических точек во всей общности, укажем простейшие типы критических изолированных точек для плоского течения жидкости. В этом случае линии тока определяются дифференциальным уравнением

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v_y(x, y, t)}{v_x(x, y, t)}.$$

Перенося начало координат в одну из изолированных критических точек и предполагая, что в окрестности рассматриваемой критической точки функции v_x и v_y разложимы в ряды по целым положительным степеням координат, мы приведем уравнение линий тока для данного момента времени к виду

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax + by + P(x, y)}{a'x + b'y + Q(x, y)},$$

где P и Q — ряды, начинающиеся с членов по крайней мере второго измерения относительно x и y. Как показывается в курсах дифференциальных

уравнений, характер критической точки определяется при выполнении некоторых условий видом корней квадратного уравнения (характеристического)

$$\lambda^2 - (a' - b)\lambda + a'b - ab' = 0$$

Если корни этого уравнения различны, вещественны, отличны от нуля и одного знака, то в окрестности критической точки все линии тока проходят через критическую точку, касаясь в ней некоторой кривой C_1, за исключением одной линии тока C_2, пересекающейся с C_1 под некоторым углом; критическая точка такого типа называется *узлом* (рис. 3). При равных вещественных корнях, отличных от нуля, линия C_2 совпадает с C_1, давая картину вырождающегося узла; или же линии тока будут проходить через критическую точку во всех направлениях (рис. 4). Если корни характеристического уравнения вещественны, отличны от нуля и разных знаков, то через критическую точку проходят только две линии тока C_1 и C_2; критическая точка такого типа называется *седлом* (рис. 5).

Если корни характеристического уравнения комплексны, то все линии тока спиралеобразно завиваются вокруг критической точки, асимптотически

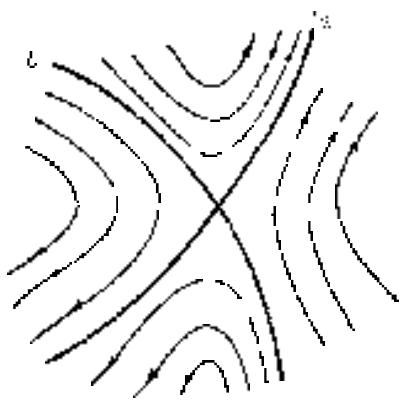

Рис. 5.

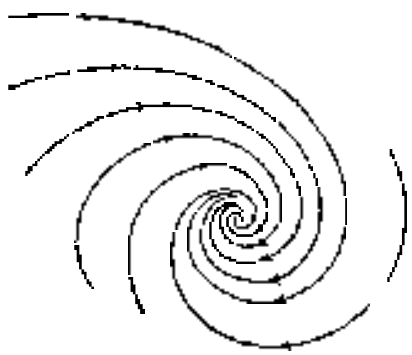

Рис. 6

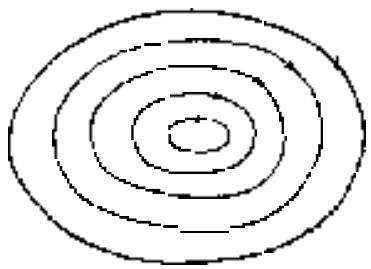

Рис. 7.

к ней приближаясь (рис. 6), в этом случае критическая точка называется *фокусом*. При чисто мнимых корнях характеристического уравнения и при выполнении некоторых добавочных условий все линии тока в окрестности критической точки могут оказаться замкнутыми кривыми, окружающими ее (рис. 7) критическая точка называется в этом случае *центром*.

Семейство линий тока содержа параметр t, будет семейством линий, изменяющихся с течением времени; очевидно, что в таком переменном поле траектории жидких частиц не будут вообще совпадать с линиями тока; для постоянного поля скоростей, когда вектор скорости в каждой точке не будет меняться с течением времени, линии тока будут оставаться неизменными и будут служить траекториями жидких частиц. Движение жидкости в этом случае называется *стационарным* или *установившимся*.

Потоком скорости через данную поверхность S называется поверхностный интеграл

$$\int_S \boldsymbol{v}\, d\boldsymbol{S} = \int_S v_n\, dS = \int_S v_x\, dy\, dz + v_y\, dz\, dx + v_z\, dx\, dy, \quad (9.2)$$

очевидно, что поток скорости выражает объем жидкости, протекающей за единицу времени сквозь поверхность S, считаемую неподвижной; при замкнутой поверхности S вытекающий из поверхности объем считается положительным, а втекающий — отрицательным.

Расхождением скорости в данной точке поля называется отнесенный к единице объема поток скорости сквозь замкнутую поверхность бесконечно малого объема τ окружающего данную точку:

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \lim_{\tau \to 0} \int_S \frac{\mathbf{v}\, d\mathbf{S}}{\tau} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}; \qquad (9.3)$$

из определения очевидно, что расхождение скорости выражает скорость кубического расширения жидкости в области данной точки.

На основании теоремы Гаусса (или последнего свойства расхождения скорости), можно выразить поток скорости сквозь замкнутую поверхность через объемный интеграл от расхождения скорости, распространенный на весь объем, заключенный внутри S.

$$\int_S \mathbf{v}\, d\mathbf{S} = \int \operatorname{div} \mathbf{v}\, d\tau \qquad (9.4)$$

Поле скоростей называется *соленоидальным* или *трубчатым*, если расхождение скорости равно нулю в каждой точке поля; следовательно поле скоростей несжимаемой жидкости будет соленоидальным.

Циркуляцией скорости по замкнутой кривой с определенным направлением обхода называется линейный интеграл

$$\oint_L \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \oint_L v_x\, dx - v_y\, dy + v_z\, dz, \qquad (9.5)$$

где $d\mathbf{r}$ есть элемент кривой L.

Вихрь скорости есть вектор $\Omega = \operatorname{rot} \mathbf{v}$, определяемый проекциями:

$$\Omega_x = \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}; \quad \Omega_y = \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}; \quad \Omega_z = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}. \qquad (9.6)$$

На основании теоремы Стокса, циркуляция скорости по замкнутому контуру равна потоку вихря скорости сквозь любую поверхность, ограниченную данным контуром:

$$\oint_L \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \int_S (\operatorname{rot} \mathbf{v})_n\, dS. \qquad (9.7)$$

§ 10. Уравнение неразрывности в переменных Лагранжа. Во всех последующих выводах при рассмотрении движения жидкости мы предполагаем, что движущаяся жидкость сплошным образом заполняет пространство или его определенную часть и что во время движения не происходит ни потери вещества, ни его возникновения.

Это предположение налагает некоторое условие на изменение плотности и объема жидкости во время движения, носящее название *уравнения неразрывности*. Обратимся сначала к переменным Лагранжа и рассмотрим два положения одного и того же жидкого объема в моменты t_0 и t, пусть в момент t_0 жидкий объем τ_0 ограничен произвольной замкнутой поверхностью S_0, которая к моменту t перейдет в некоторую другую также замкнутую поверхность S, ограничивающую объем τ, жидкая частица, имеющая в момент t_0 координаты x_0, y_0, z_0, перейдет в момент t в положение с координатами x, y z причем

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= f_1(a, b, c, t_0), & x &= f_1(a, b, c, t) \\ y_0 &= f_2(a, b, c, t_0), & y &= f_2(a, b, c, t), \\ z_0 &= f_3(a, b, c, t_0), & z &= f_3(a, b, c, t), \end{aligned}\right\} \qquad (10\,1)$$

плотность жидкости ρ_0 в момент t_0 перейдет к моменту t в ρ, причем

$$\rho_0 = f(a, b, c, t_0); \quad \rho = f(a, b, c, t)$$

В этих формулах a, b, c суть параметры, отличающие одну частицу от другой в рассматриваемом жидком объеме. Выражая что масса, заключенная в жидком объеме, не изменится при переходе от момента t_0 к t, имеем:

$$\int\int\int_{\tau_0} \rho_0\, dx_0\, dy_0\, dz_0 = \int\int\int_{\tau} \rho\, dx\, dy\, dz. \qquad (10\,2)$$

Заменим теперь в обоих интегралах переменные x y, z переменными a, b, c по формулам перехода (10 1); по известным правилам преобразования интеграла при замене переменных получим:

$$\int\int\int_{\tau} \rho\, dx\, dy\, dz = \int\int\int_{\tau} \rho D\, da\, db\, dc, \qquad (10\,3)$$

где D есть функциональный определитель

$$D = \frac{D(x, y, z)}{D(a, b, c)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial a} & \frac{\partial y}{\partial a} & \frac{\partial z}{\partial a} \\ \frac{\partial x}{\partial b} & \frac{\partial y}{\partial b} & \frac{\partial z}{\partial b} \\ \frac{\partial x}{\partial c} & \frac{\partial y}{\partial c} & \frac{\partial z}{\partial c} \end{vmatrix}.$$

Перенося в (10.2) все члены в одну часть и применяя (10 3), найдем:

$$\int\int\int_{\tau_0} (\rho_0 D_0 - \rho D)\, da\, db\, dc = 0,$$

где D_0 имеет аналогичное с D значение.

Отсюда, ввиду произвольности взятого первоначально объема τ_0, в любой момент t должно иметь место соотношение

$$\rho_0 D_0 - \rho D = 0 \tag{10.4}$$

или подробнее

$$\rho_0(a\ b\ c\ t_0)\begin{vmatrix} \frac{\partial x_0}{\partial a} & \frac{\partial y_0}{\partial a} & \frac{\partial z_0}{\partial a} \\ \frac{\partial x_0}{\partial b} & \frac{\partial y_0}{\partial b} & \frac{\partial z_0}{\partial b} \\ \frac{\partial x_0}{\partial c} & \frac{\partial y_0}{\partial c} & \frac{\partial z_0}{\partial c} \end{vmatrix} = \rho(a, b, c, t)\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial a} & \frac{\partial y}{\partial a} & \frac{\partial z}{\partial a} \\ \frac{\partial x}{\partial b} & \frac{\partial y}{\partial b} & \frac{\partial z}{\partial b} \\ \frac{\partial x}{\partial c} & \frac{\partial y}{\partial c} & \frac{\partial z}{\partial c} \end{vmatrix},$$

которое и является искомым *уравнением неразрывности в переменных Лагранжа*. Для несжимаемой жидкости уравнение неразрывности принимает вид:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial a} & \frac{\partial y}{\partial a} & \frac{\partial z}{\partial a} \\ \frac{\partial x}{\partial b} & \frac{\partial y}{\partial b} & \frac{\partial z}{\partial b} \\ \frac{\partial x}{\partial c} & \frac{\partial y}{\partial c} & \frac{\partial z}{\partial c} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_0}{\partial a} & \frac{\partial y_0}{\partial a} & \frac{\partial z_0}{\partial a} \\ \frac{\partial x_0}{\partial b} & \frac{\partial y_0}{\partial b} & \frac{\partial z_0}{\partial b} \\ \frac{\partial x_0}{\partial c} & \frac{\partial y_0}{\partial c} & \frac{\partial z_0}{\partial c} \end{vmatrix}. \tag{10.5}$$

Если за a, b, c взяты начальные координаты частицы, то $x_0 = a$, $y_0 = b$, $z_0 = c$, и правая часть обращается в единицу.

§ 11. Уравнение неразрывности в переменных Эйлера. Чтобы выразить уравнение неразрывности в переменных Эйлера, применим уравнение (10.2) к бесконечно малому объему $\delta\tau_0$, переходящему к моменту t в объем $\delta\tau$

$$\rho\,\delta\tau = \rho_0\,\delta\tau_0 = \text{const},$$

откуда, взяв полную производную по времени, получаем

$$\frac{d(\rho\,\delta\tau)}{dt} = 0, \quad \text{или} \quad \frac{d\rho}{dt} + \rho\,\frac{d(\delta\tau)}{\delta\tau\,dt} = 0;$$

отношение $\frac{d(\delta\tau)}{\delta\tau\,dt}$ выражает собой скорость относительного кубического расширения жидкости в данной точке и равно расхождению скорости в этой точке, как было показано выше в формулах (4.2), (4.3).

Таким образом, *уравнение неразрывности в переменных Эйлера* получает вид:

$$\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt} + \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0. \tag{11.1}$$

Уравнение неразрывности после несложных преобразований можно представить еще в следующих равносильных формах:

$$\frac{d\ln\rho}{dt} + \operatorname{div} v = 0, \tag{11.2}$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} = 0. \tag{11.3}$$

Для *несжимаемой* жидкости, хотя бы и неоднородной, обратится в нуль $d\rho/dt$ (хотя $\partial\rho/\partial t = 0$), и уравнение неразрывности приобретает вид:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \tag{11.4}$$

Для *стационарного* движения $\frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$, и уравнение неразрывности получается в виде:

$$\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} = 0 \tag{11.5}$$

§ 12. Другой метод вывода уравнения неразрывности. Предыдущий вывод уравнения неразрывности в переменных Эйлера представляет в сущности перефразировку вывода в переменных Лагранжа, так как мы рассматривали изменения плотности и объема в некоторой части жидкости, состоящей из одних и тех же частиц, следуя за ней при ее движении. Можно получить уравнение неразрывности в переменных Эйлера и другим методом, оставаясь строго на точке зрения Эйлера. Для этого достаточно рассмотреть поток вектора ρv сквозь некоторую *неподвижную* замкнутую поверхность S произвольной формы. Этот поток, на основании теоремы Гаусса может быть представлен объемным интегралом

$$\int_S\int \rho v_n\, dS = \int_\tau\int\int\left[\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z}\right] dx\, dy\, dz.$$

Очевидно, что этот поток выражает *массу* жидкости вытекающей за единицу времени из замкнутой поверхности S, что повлечет за собой *уменьшение плотности* в точках внутри S за единицу времени на величину $-\partial\rho/\partial t$ и соответственное изменение *массы* жидкости внутри поверхности, равное

$$-\int\int\int \frac{\partial\rho}{\partial t}\, dx\, dy\, dz;$$

таким образом имеем.

$$\int_\tau\int\int\left[\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z}\right] dx\, dy\, dz = -\int_\tau\int\int \frac{\partial\rho}{\partial t}\, dx\, dy\, dz.$$

откуда, вследствие произвольности объема τ, снова приходим к уравнению неразрывности:

$$\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z}+\frac{\partial\rho}{\partial t}=0.$$

Заметим, что для случая *несжимаемой жидкости*

$$\int_S v_n\,dS=0, \tag{12.1}$$

т. е. *поток скорости через любую неподвижную замкнутую поверхность* равен нулю, иначе говоря, объем втекающей в поверхность жидкости равен объему вытекающей.

Последнее свойство дает основание для следующей геометрической интерпретации, широко применяемой в физике при исследовании векторных полей. Проведем через каждую точку малого замкнутого контура c линию тока и рассмотрим полученную трубчатую поверхность, называемую трубкой тока, ограниченную двумя перпендикулярными сечениями a и b (рис. 8), пусть площади этих сечений будут σ_1 и σ_2, а скорости в точках сечений a и b соответственно v_1 и v_2; по малости сечения скорость в разных точках сечения можно принять постоянной. Применяя предыдущее свойство к замкнутой поверхности, образованной трубкой тока и ее нормальными сечениями a и b, получаем:

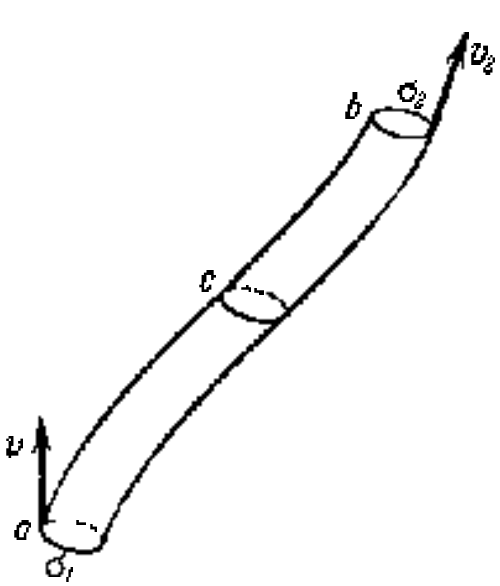

Рис. 8.

$$v_1\sigma_1=v_2\sigma_2 \tag{12.2}$$

Таким образом, произведение из величины скорости на площадь перпендикулярного сечения остается постоянным вдоль трубки тока, выражая объем втекающей и вытекающей из трубки жидкости в единицу времени. Разобьем все пространство на так называемые *единичные* трубки тока, для которых упомянутый объем равен единице. Тогда предыдущее свойство $\int_S v_n\,dS=0$ показывает, что для любой замкнутой поверхности число единичных трубок тока, вступающих в поверхность, равно числу трубок, выходящих из поверхности, т. е. что *внутри любой замкнутой поверхности линии тока несжимаемой жидкости не могут ни начинаться, ни заканчиваться*.

§ 13. Уравнение неразрывности в цилиндрических, сферических и криволинейных координатах. Метод предыдущего параграфа может быть с успехом применен для получения уравнения неразрыв-

ности в различных криволинейных координатных системах, для чего достаточно в качестве объема τ взять бесконечно малую ячейку, образованную тремя парами смежных координатных поверхностей.

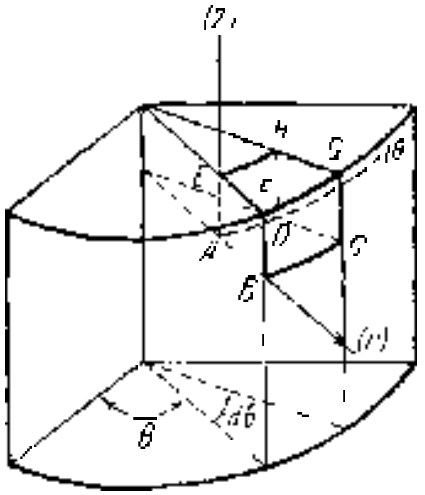

Рис. 9.

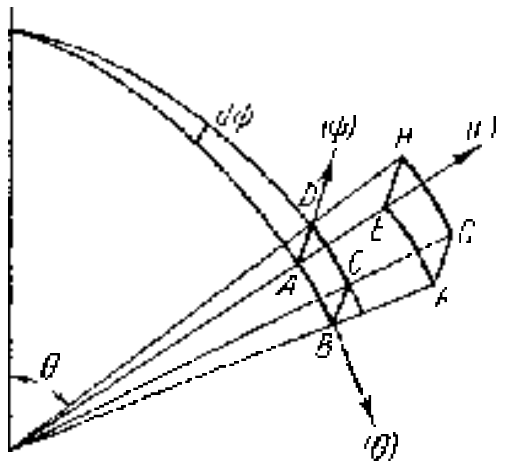

Рис. 10.

Рассмотрим в виде упражнения вывод уравнения неразрывности в цилиндрических, сферических и общих криволинейных ортогональных координатах.

Для *цилиндрических* координат, например (рис. 9):

поток через грань $ALID$ — $-\rho v_r r\, d\theta\, dz$,

» » » $BCGF$ — $\left[\rho v_r r + \frac{\partial(\rho v_r r)}{\partial r} dr\right] d\theta\, dz$,

» » » $ABFE$ — $-\rho v_\theta\, dr\, dz$

» » » $DCGH$ — $\left[\rho v_\theta + \frac{\partial(\rho v_\theta)}{\partial \theta} d\theta\right] dr\, dz$,

» » » $ABCD$ — $-\rho v_z r\, d\theta\, dr$

» » » $EFGH$ — $\left[\rho v_z + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} dz\right] r\, d\theta\, dr$

поток сквозь всю поверхность ячейки:

$$\left[\frac{\partial(\rho v_r r)}{\partial r} + \frac{\partial(\rho v_\theta)}{\partial \theta} + r\frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z}\right] dr\, d\theta\, dz,$$

где v_r, v_θ, v_z суть проекции скорости на оси цилиндрических координат. С другой стороны, уменьшение массы жидкости внутри ячейки будет

$$-\frac{\partial \rho}{\partial t} dr\ r\, d\theta \cdot dz.$$

Приравнивая, находим по разделении на $dr\, d\theta\, dz$ искомое уравнение неразрывности в цилиндрических координатах:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r}\frac{\partial(\rho r v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial(\rho v_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} = 0. \qquad (13.1)$$

Для *сферических координат* (рис. 10) имеем, складывая и опарно потоки вектора ρv через противоположные грани ячейки:
Сумма через $ABCD$ и $FFGH$.

$$\frac{\partial (\rho v_r \cdot r\,d\theta \cdot r\sin\theta\,d\psi)}{\partial r} dr = \frac{\partial (\rho v_r r^2)}{\partial r} \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\psi.$$

Сумма через $AFHD$ и $BFGC$:

$$\frac{\partial (\rho v_\theta\, dr \cdot r\sin\theta\, d\psi)}{\partial \theta} d\theta = \frac{\partial (\rho v_\theta \sin\theta)}{\partial \theta} r\, dr\, d\theta\, d\psi.$$

Сумма через $AEFB$ и $DHGC$:

$$\frac{\partial (\rho v_\psi\, dr \cdot r\, d\theta)}{\partial \psi} d\psi = \frac{\partial (\rho v_\psi)}{\partial \psi} r\, dr\, d\theta\, d\psi.$$

Поток через всю поверхность ячейки

$$\left[\frac{\partial (\rho v_r r^2)}{\partial r} \sin\theta + \frac{\partial (\rho v_\theta \sin\theta)}{\partial \theta} r + \frac{\partial (\rho v_\psi)}{\partial \psi} r\right] dr\, d\theta\, d\psi.$$

С другой стороны, изменение массы жидкости внутри ячейки будет

$$-\frac{\partial \rho}{\partial t} \cdot dr \cdot r\,d\theta \cdot r\sin\theta\, d\psi,$$

и, следовательно, уравнение неразрывности в сферических координатах получает вид:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial (\rho v_r r^2)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta} \frac{\partial (\rho v_\theta \sin\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin\theta} \frac{\partial (\rho v_\psi)}{\partial \psi} = 0 \quad (13.2)$$

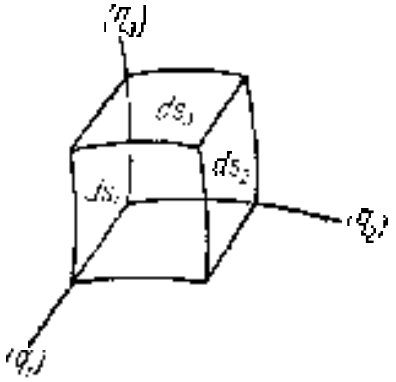

Рис. 11.

Для случая *общих криволинейных* ортогональных координат рассмотрим поток через грани элементарной ячейки, образованной тремя парами смежных координатных поверхностей.

Назвав через ds_1, ds_2 и ds_3 длины ребер ячейки, эквивалентной прямоугольному параллелепипеду, а через v_1, v_2, v_3 — проекции скорости на оси криволинейных координат (q_1), (q_2), (q_3) (рис. 11) получаем:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} ds_1\, ds_2\, ds_3 + \frac{\partial (\rho v_1\, ds_2\, ds_3)}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial (\rho v_2\, ds_1\, ds_3)}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial (\rho v_3\, ds_1\, ds_2)}{\partial q_3} dq_3 = 0,$$

заменяя ds_1, ds_2, ds_3 через их известные выражения

$$ds_1 = H_1\, dq_1, \quad ds_2 = H_2\, dq_2, \quad ds_3 = H_3\, dq_3,$$

где H_1, H_2, H_3 суть параметры Ламэ:

$$H_1 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_1}\right)^2},$$

$$H_2 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_2}\right)^2},$$

$$H_3 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_3}\right)^2},$$

мы приходим к следующему виду уравнения неразрывности:

$$H_1 H_2 H_3 \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho v_1 H_2 H_3)}{\partial q_1} + \frac{\partial (\rho v_2 H_3 H_1)}{\partial q_2} + \frac{\partial (\rho v_3 H_1 H_2)}{\partial q_3} = 0 \qquad (13.3)$$

которое после несложных преобразований может быть представлено еще в такой форме:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{H_1}\frac{\partial (\rho v_1)}{\partial q_1} + \frac{1}{H_2}\frac{\partial (\rho v_2)}{\partial q_2} + \frac{1}{H_3}\frac{\partial (\rho v_3)}{\partial q_3} +$$
$$+ \frac{\rho}{H_1 H_2 H_3}\left[v_1 \frac{\partial (H_2 H_3)}{\partial q_1} + v_2 \frac{\partial (H_3 H_1)}{\partial q_2} + v_3 \frac{\partial (H_1 H_2)}{\partial q_3}\right] = 0 \qquad (13.4)$$

§ 14. Упражнения. 1. Масса жидкости движется таким образом, что каждая частица описывает окружность, перпендикулярную к постоянной оси и с центром на ней; показать, что уравнение неразрывности принимает вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho \omega)}{\partial \theta} = 0,$$

где ω — угловая скорость θ для частицы, положение которой определяется цилиндрическими координатами r, θ, z. (Рамсей)

2. Масса жидкости движется таким образом, что траектории частиц расположены на поверхностях коаксиальных цилиндров; найти уравнение неразрывности. (Рамсей)

Ответ. $\dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial (\rho v_\theta)}{\partial \theta} + \dfrac{\partial (\rho v_z)}{\partial z} = 0.$

3. Частицы жидкости движутся в пространстве симметрично по отношению к неподвижному центру так, что скорость каждой частицы направлена либо от центра, либо к нему и зависит только от расстояния r до центра, выразить уравнение неразрывности. (Рамсей)

Ответ. $\dfrac{\partial \rho}{\partial t} + v_r \dfrac{\partial \rho}{\partial r} + \dfrac{\rho}{r^2}\dfrac{\partial (v_r r^2)}{\partial r} = 0$ в сферических координатах.

4. Каждая частица жидкости движется в плоскости, проходящей через ось z, выразить уравнение неразрывности. (Рамсей)

Ответ. $r\dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \dfrac{\partial (\rho v_r r)}{\partial r} + r\dfrac{\partial (\rho v_z)}{\partial z} = 0$ в цилиндрических координатах.

5. Траектории частиц жидкости расположены на конусах, коаксиальных с осью z и имеющих общую вершину; выразить уравнение неразрывности. (Рамсей)

Ответ $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho v_r)}{\partial r} + \frac{2\rho v_r}{r} + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial (\rho v_\varphi)}{\partial \varphi} = 0$ в сферических координатах.

6. Траектории частиц расположены на сферах, касающихся плоскости Oxy в начале координат вывести уравнение неразрывности (Рамсей)

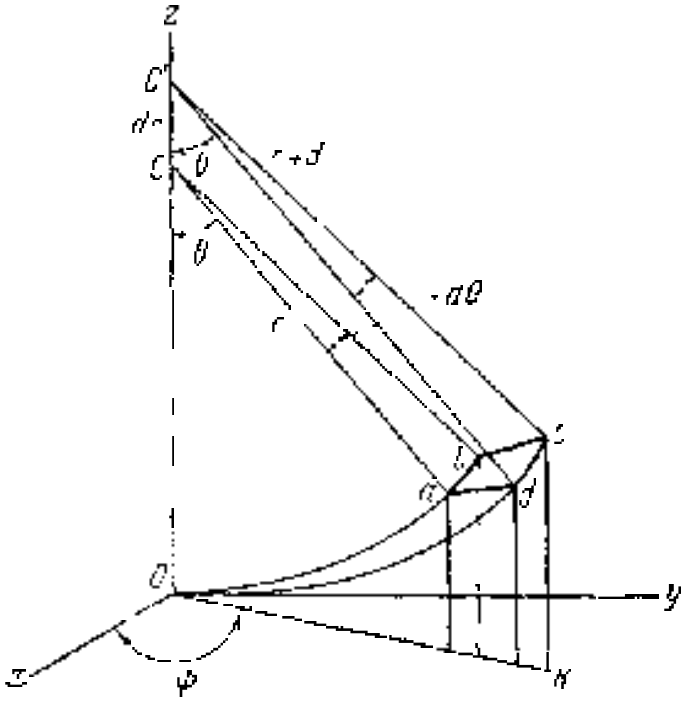

Рис. 12

Решение. Рассмотрим поток вектора ρv через элементарную ячейку, построенную следующим образом. Проведем две сферы, касающиеся плоскости Oxy, с центрами C и C' на оси Oz и с радиусами r и $r+dr$ (рис. 12), пересечем обе сферы вертикальной плоскостью zOK образующей угол φ с плоскостью xOz, и отложим на окружностях пересечения дуги Oa и Od, соответствующие одинаковым центральным углам θ, и дуги ab и cd, соответствующие одинаковым приращениям $d\theta$; проведя отрезки bc и ad, получим элементарную площадку $abcd$, эквивалентную параллелограмму с точностью до малых величин второго порядка; повернув затем плоскость zOK на угол $d\varphi$, получим ячейку, эквивалентную прямому параллелепипеду с основанием $abcd$ и высотой $r \sin\theta\, d\varphi$. Площадь элементарного параллелограмма $abcd$ будет $ab \cdot ad \cdot \sin(\widehat{ab, ad})$, где $ab = r\,d\theta$; чтобы найти длину ad, проектируем отрезок ad на оси OK и OZ, рассматривая его как замыкающую ломаной линии $aCC'd$.

$$(ad)_k = (r+dr)\sin\theta - r\sin\theta = \sin\theta\, dr,$$

$$(ad)_z = -(r+dr)\cos\theta + r\cos\theta + dr = (1-\cos\theta)\, dr$$

откуда

$$ad = dr\sqrt{\sin^2\theta + (1-\cos\theta)^2} = 2\sin\frac{\theta}{2}\, dr;$$

далее

$$\operatorname{tg}(\widehat{ad, OK}) = \frac{(ad)_z}{(ad)_k} = \frac{1-\cos\theta}{\sin\theta} = \operatorname{tg}\frac{\theta}{2};$$

но $(\widehat{ab, OK}) = \theta$, значит $(\widehat{ab, ad}) = \theta/2$ и площадь $abcd = 2r\sin^2\theta/2\, dr\, d\theta$. Замечая, что $v_r = 0$ и приравнивая поток через все грани ячейки секундному изменению массы

$$-\frac{\partial \rho}{\partial t} 2r\sin^2\frac{\theta}{2}\, dr\, d\theta\, r\sin\theta\, d\varphi$$

внутри ячейки, получаем:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} 2r \sin^2 \frac{\theta}{2} dr\, d\theta\, r \sin\theta\, d\psi + \frac{\partial \left(\rho v_\theta r \sin\theta\, d\psi\, 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} dr \right)}{\partial \theta} d\theta + \\ + \frac{\partial \left(\rho v_\psi 2r \sin^2 \frac{\theta}{2} dr\, d\theta \right)}{\partial \psi} d\psi = 0,$$

или

$$r \sin\theta \frac{\partial \rho}{\partial t} + \sin\theta \frac{\partial (\rho v_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial (\rho v_\psi)}{\partial \psi} + \rho v_\theta \frac{\cos\theta\, 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} + \sin^2\theta}{2 \sin^2 \frac{\theta}{2}} = 0;$$

замечая, наконец, что

$$\frac{\cos\theta\, 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} + \sin^2\theta}{2 \sin^2 \frac{\theta}{2}} = \cos\theta + 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} = 1 + 2 \cos\theta,$$

приходим к следующему уравнению неразрывности:

$$r \sin\theta \frac{\partial \rho}{\partial t} + \sin\theta \frac{\partial (\rho v_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial (\rho v_\psi)}{\partial \psi} + \rho v_\theta (1 + 2 \cos\theta) = 0.$$

В. КИНЕМАТИЧЕСКАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА БЕЗВИХРЕВОГО И ВИХРЕВОГО ДВИЖЕНИЙ

§ 15. Введение. Рассмотренное в § 1 разложение движения бесконечно малой частицы жидкости на поступательное, деформационное и вращательное дает основание разбить различные случаи состояния движения жидкости для данного момента времени на два общих класса.

К первому классу мы отнесем *безвихревое* состояние движения жидкости, характеризующееся тем, что в каждой частице будет отсутствовать вращательная часть движения, иначе говоря, в каждой точке жидкости будет выполняться условие

$$\operatorname{rot} v = 0. \qquad (15.1)$$

Ко второму классу мы отнесем состояние вихревого движения, когда условие (15.1) не выполняется во всем объеме жидкости.

Вопрос о сохраняемости существующего в данный момент безвихревого или вихревого состояния движения для последующих моментов времени мы оставляем сейчас открытым и рассмотрим его впоследствии в связи с динамическими элементами движения в главе пятой.

§ 16. Потенциал скорости. Обращаясь к рассмотрению безвихревого состояния движения, называемого короче безвихревым движением, напишем подробнее условие (15.1) в проекциях:

$$\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} = 0. \qquad (16.1)$$

Последние равенства, как известно из анализа, выражают необходимое и достаточное условие того, чтобы v_x, v_y, v_z являлись частными производными по координатам от некоторой функции φ, называемой *потенциалом скорости* [1]:

$$v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad v_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z}. \tag{16.2}$$

Так как в переменных Эйлера v_x, v_y, v_z являются функциями от x, y, z, t, то, очевидно, от тех же аргументов будет зависеть потенциал скорости φ, причем согласно сказанному выше, время t играет роль параметра; в таком случае трехчлен $v_x dx + v_y dy + v_z dz$ можно рассматривать как полный дифференциал функции φ:

$$v_x dx + v_y dy + v_z dz = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz = d\varphi, \tag{16.3}$$

и тогда линейный интеграл

$$\int_L \boldsymbol{v}\, d\boldsymbol{r} = \int_L v_x dx + v_y dy + v_z dz = \int_L d\varphi = \varphi_B - \varphi_A, \tag{16.4}$$

взятый по некоторой кривой между точками 1 и B, не будет зависеть от вида кривой и в случае *однозначности* функции φ будет равняться разности ее значений φ_B и φ_A в этих точках [2]; отсюда вытекает, что циркуляция скорости, взятая по любой замкнутой кривой при существовании однозначного потенциала, будет равна нулю:

$$\oint \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{r} = 0 \tag{16.5}$$

это заключение следует также непосредственно из формулы Стокса.

Из этого свойства вытекает, что при существовании однозначного потенциала *линии тока не могут быть замкнуты*, иначе бы получилось, что циркуляция вдоль такой линии не обратилась бы в нуль, так как все элементы линейного интеграла имели бы один и тот же знак.

Свойство (16.2) безвихревого движения, выраженное в векторной форме

$$\boldsymbol{v} = \operatorname{grad} \varphi = \nabla \varphi, \tag{16.6}$$

показывает, что скорость является *потенциальным* вектором и, значит, всякое безвихревое поле будет потенциальным; очевидно, справедливо и обратное заключение.

---

[1]) По аналогии с определением потенциала сил многие авторы называют потенциалом скорости функцию $-\varphi$, см., например, Лэмб, Гидродинамика, Гостехиздат, 1947.

[2]) В анализе показывается, что при непрерывности и однозначности $\operatorname{grad} \varphi$ во *всех* точках *односвязного* пространства потенциал φ будет однозначен в этом пространстве.

Легко видеть, что при существовании потенциала скорости ускорение также будет являться потенциальным вектором. В самом деле, формулы (8.4) тогда принимают вид:

$$w_x = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\,\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial^2\varphi}{\partial z\,\partial x} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial t\,\partial x} =$$
$$= \frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right] + \frac{\partial\varphi}{\partial t}\right\},$$
$$w_y = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial^2\varphi}{\partial z\,\partial y} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial t\,\partial y} =$$
$$= \frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right] + \frac{\partial\varphi}{\partial t}\right\},$$
$$w_z = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial z} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\,\partial z} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial t\,\partial z} =$$
$$= \frac{\partial}{\partial z}\left\{\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right] + \frac{\partial\varphi}{\partial t}\right\},$$

откуда видно, что

$$\mathbf{w} = \operatorname{grad}\left(\frac{1}{2}v^2 + \frac{\partial\varphi}{\partial t}\right) \tag{16.7}$$

§ 17. Свойства безвихревого движения в односвязном объеме. При существовании потенциала скорости уравнение неразрывности принимает вид

$$\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0, \tag{17.1}$$

и в случае *несжимаемой* жидкости уравнение неразрывности превращается в *уравнение Лапласа*

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0, \tag{17.2}$$

и, следовательно, потенциал φ (считаемый однозначным) будет *гармонической* функцией точки.

Отметим ряд свойств безвихревого движения, отсюда проистекающих:

1. *Для любой замкнутой поверхности* будет иметь место соотношение

$$\int_S \frac{d\varphi}{dn}\,dS = 0 \tag{17.3}$$

где $d\varphi/dn$ означает так называемую производную по нормали к поверхности:

$$\frac{d\varphi}{dn} = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\cos(\widehat{n, x}) + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\cos(\widehat{n, y}) + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\cos(\widehat{n, z}) = (\operatorname{grad}\varphi)_n = v_n,$$

причем для большей определенности дальнейших выводов условимся проводить нормаль *внутрь* поверхности S.

Формула (17.3) представляет собой специализацию для случая безвихревого движения формулы (12.1), справедливой для всякого движения (безвихревого или вихревого) несжимаемой жидкости.

2. *Ни в одной точке внутри жидкости потенциал скорости φ не может иметь максимума или минимума.* В самом деле, предположив что φ в некоторой точке имеет максимум и окружив эту точку достаточно малой замкнутой поверхностью S так, чтобы поверхность была целиком внутри жидкости мы будем иметь для каждой точки поверхности $\partial\varphi/\partial n > 0$ и значит тогда $\int \frac{\partial\varphi}{\partial n} dS$ будет > 0, что противоречит (17.3).

3. *Ни в одной точке внутри жидкости величина скорости v не может иметь максимума.* Предположим, что в некоторой точке A скорость имеет максимум v_A, выберем оси координат так, чтобы ось x имела направление скорости в рассматриваемой точке; тогда для этой точки будет

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_A = v_A.$$

Рассмотрим поведение функции $\partial\varphi/\partial x$ по соседству с точкой A; дифференцируя по x уравнение Лапласа, мы непосредственно убеждаемся, что функция $\partial\varphi/\partial x$ будет также ему удовлетворять:

$$\frac{\partial^2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)}{\partial z^2} = 0$$

т. е. будет гармонической, а тогда в силу предыдущего свойства $\partial\varphi/\partial x$ не сможет иметь максимума или минимума в точке A, следовательно, по соседству с A найдутся такие точки в которых будет

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} > \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_A = v_A$$

и в которых тогда и подавно будет

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2 > v_A^2 \quad \text{или} \quad v > v_A,$$

что противоречит нашему предположению.

Это рассуждение не позволяет сделать никаких заключений о возможности для скорости достигать минимума; впоследствии мы увидим, что в безвихревом движении могут существовать точки, в которых скорость имеет минимум (например, $v = 0$).

4. *Среднее значение потенциала* скорости на любой сферической поверхности которой ограничивается объем целиком лежащий в жидкости равно значению потенциала для центра сферы. В самом

деле, обозначая радиус сферы через r, а телесный угол (с вершиной в центре сферы), опирающийся на элемент поверхности dS, через $d\omega$, имеем:

$$\frac{d\varphi}{dn} = -\frac{\partial\varphi}{\partial r}, \quad dS = r^2\, d\omega;$$

применяя формулу (17.3) и сокращая на r^2, остающееся постоянным при интегрировании по поверхности сферы, получаем:

$$\int_S \frac{\partial\varphi}{\partial r}\, d\omega = 0, \quad \text{или} \quad \frac{\partial}{\partial r}\int_S \varphi\, d\omega = 0,$$

откуда заключаем, что интеграл

$$\int_S \varphi\, d\omega = \text{const},$$

не зависит от радиуса сферы. Уменьшая r до нуля и стягивая сферу в точку A — ее центр, будем иметь:

$$\int_S \varphi\, d\omega = 4\pi\varphi_A,$$

или

$$\varphi_A = \frac{1}{4\pi}\int_S \varphi\, d\omega = \frac{1}{4\pi r^2}\int_S \varphi\, dS. \tag{17.4}$$

5. Если потенциал скорости φ сохраняет постоянное значение на границах односвязного объема, то он остается постоянным во всех точках внутри объема в силу известного соотношения

$$\int\int\int_V \left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 - \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right] dv - \int\int_S \varphi\frac{d\varphi}{dn}\, dS = 0.$$

В этом случае скорость во всех точках жидкости равна нулю.

6. В односвязном объеме жидкости, ограниченном со всех сторон *твердыми* стенками, не может существовать *безвихревое* движение. В самом деле, в § 12 было показано, что внутри такого объема линии тока не могут начинаться или обрываться. При наличии же твердых стенок, на которых нормальная слагающая скорости $v_n = 0$, линии тока не могут вытекать из границ или втекать в них, следовательно, линии тока могут быть только замкнутыми; выше же при формуле (16.5) было отмечено, что при существовании потенциала скорости внутри односвязного объема замкнутые линии тока не могут иметь места; значит, жидкость либо остается в покое, либо приходит

в вихревое движение. Отсюда мы можем еще сделать вывод: что если в односвязном объеме жидкости, частично заключенном в твердые стенки и частично ограниченном свободной поверхностью, возникает безвихревое движение, то последнее сопровождается непременно изменением формы свободной поверхности, т. е. образованием волн.

7. Если односвязный объем жидкости ограничен со всех сторон неподвижной поверхностью, на одних частях которой потенциал скорости φ сохраняет одно и то же постоянное значение, на прочих же частях равна нулю нормальная составляющая скорости $d\varphi/dn$, то внутри объема не может существовать безвихревое движение. В самом деле мы видели, что внутри жидкости линии тока не могут ни начинаться ни заканчиваться и не может быть замкнутых линий тока, следовательно, линии тока могли бы лишь выходить и входить в тех частях границы, где потенциал φ сохраняет постоянное значение, ибо в прочих частях границы $d\varphi/dn = 0$, т. е. линии тока проходят, касаясь стенок; но тогда, для вдоль такой линии тока, мы не получили бы на ее концах одинакового значения потенциала φ, так как вдоль линии тока потенциал изменяется монотонно.

Из свойств (5), (6) и (7) вытекает важное *следствие о единственности* безвихревого движения внутри односвязного объема, если на границах объема заданы: а) либо значения потенциала Φ, б) либо значения нормальной составляющей скорости $d\varphi/dn$, в) либо значения φ на одних частях границы и значения $d\varphi/dn$ на прочих. В самом деле, если предположить существование двух различных внутри жидкости потенциалов φ_1 и φ_2, то их разность $\varphi_1 - \varphi_2$, удовлетворяя уравнению Лапласа и условиям свойств либо (5), либо (6), либо (7), была бы постоянной внутри жидкости, т. е. движение с потенциалом φ_1 было бы тождественно с движением, обладающим потенциалом φ_2.

Заметим без доказательства, что наши выводы касались *внутреннего* односвязного объема, ограниченного замкнутой поверхностью, но все рассмотренные свойства распространяются и на случай жидкости, заполняющей *внешний* простирающийся в бесконечность *односвязный* объем и текущий снаружи одной или нескольких замкнутых поверхностей, которые можно таким образом рассматривать как внутренние границы объема, при этом лишь приходится исключать из рассмотрения самую бесконечно далекую точку, окружив внутренние границы достаточно от них удаленною замкнутою поверхностью и причисляя последнюю к внешней границе упомянутого объема.

§ 18. Безвихревое движение в многосвязном объеме. Все предыдущие свойства были установлены для *односвязного* объема жидкости. Напомним, что объем называется *связным*, если две любые его точки могут быть соединены непрерывной линией, нигде не вы-

ходящей из границ объема, далее, связный объем называется *односвязным*, если любая замкнутая линия, в нем заключающаяся, может быть стянута в точку непрерывным образом, не выходя из границ объема, таков например, объем, заключенный внутри сферы, или объем между двумя концентрическими сферами, или, например, бесконечный объем снаружи одной или нескольких отдельных сфер (т. е таких, что ни одна сфера не заключает в себе прочих). Назовем *диафрагмой* поверхность, целиком заключающуюся в объеме и опирающуюся на замкнутую линию которая лежит на границах объема

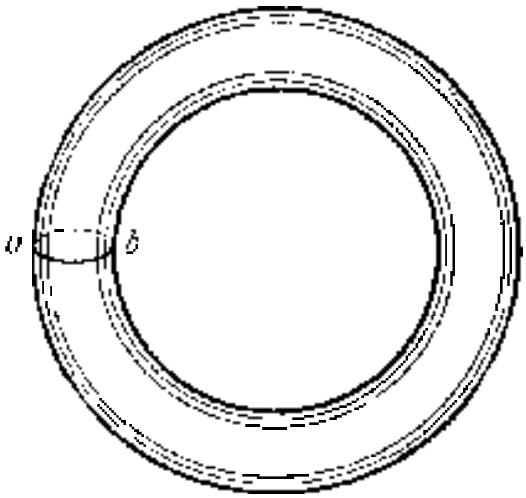

Рис. 13

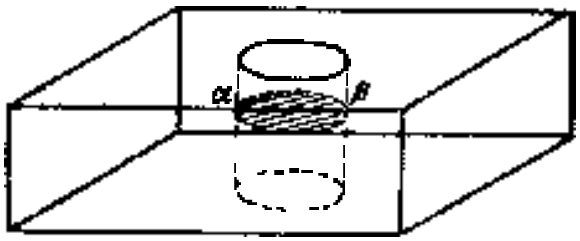

Рис. 14

Очевидно, что в односвязном объеме нельзя провести ни одной диафрагмы без нарушения связности объема. Если в объеме можно провести максимум n диафрагм без нарушения связности, то такой объем называется $n+1$-*связным*. Например, объем внутри кольца (тор) является двусвязным так как можно провести только одну диафрагму ab (рис. 13) без нарушения связности, объем, внешний по отношению к кольцу, также является двусвязным, так как только одна диафрагма вида $\alpha\beta$ (рис. 14) не нарушает связности. Доска с двумя пробитыми в ней отверстиями (рис. 15) представляет пример трехсвязного объема (как внутреннего, так и внешнего); так, для внутреннего объема можно провести только две диафрагмы, например вида $abcd$ и $efgh$, без нарушения связности объема.

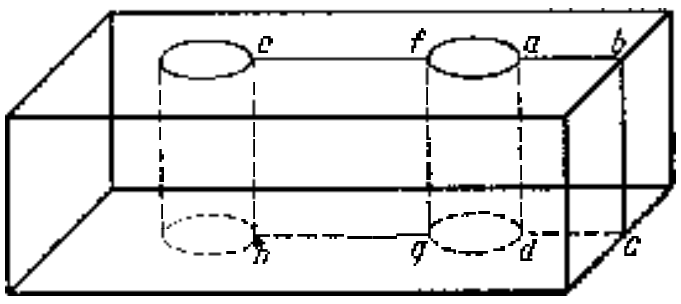

Рис. 15

Обращаясь к рассмотрению безвихревого движения жидкости в многосвязном пространстве порядка связности $n+1$, разберем вопрос о вычислении циркуляции скорости $\oint_L \mathbf{v}\cdot d\mathbf{r}$ по некоторому замкнутому контуру L, лежащему целиком в жидкости. Легко видеть,

что $\oint_l \boldsymbol{v}\, d\boldsymbol{r} = 0$, если контур L может быть стянут в точку непрерывным образом, не пересекая грани жидкости; действительно при таком контуре можно превратить рассматриваемый объем в односвязный, проведя нужное число диафрагм так, чтобы последние не пересекали контура L, что, очевидно, возможно в силу предположения о характере контура, тогда контур L очутится целиком в односвязном объеме, для которого было показано равенство нулю циркуляции скорости. Если же контур L не может быть стянут в точку, то рассекая его надлежащим образом дополнительными линиями мы всегда можем разбить его: а) на известное число таких растягиваемых в точку контуров, чтобы каждый из них пересекал *по разу* только *одну* диафрагму, и б) на известное число стягиваемых в точку контуров. Замечая, что циркуляция по объемлющему контуру равна сумме циркуляций по объемлемым контурам, мы таким образом приходим к формуле.

$$\int_L v_s\, dr = p_1 K_1 + p_2 K_2 + \ldots + p_n K_n, \qquad (18.1)$$

где $p_1, p_2, \ldots, p_n$ — некоторые целые положительные или отрицательные, или равные нулю числа, а $K_1, K_2, \ldots, K_n$ — циркуляции по простым контурам типа (а); эти последние величины носят название *циклических постоянных*

Из формулы (18.1) непосредственно вытекает что потенциал скорости φ в многосвязном пространстве будет *многозначной* функцией точки, и различные значения φ в данной точке будут между собой отличаться на целое число циклических постоянных. Из рассмотренных нами выше семи свойств потенциала φ первые пять остаются в силе при всяких величинах циклических постоянных, последние же два свойства и следствие о единственности определения потенциала по пограничным значениям φ и $d\varphi/dn$ будут справедливы если *все* циклические постоянные обращаются в нуль

§ 19. Вихревое поле и его свойства. Состояние движения жидкости называется *вихревым*, если существуют области, в точках которых вихрь скорости отличен от нуля; введем в дальнейшем для краткости обозначение $\operatorname{rot} v = \Omega$, так что

$$\Omega_x = \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}, \quad \Omega_y = \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}, \quad \Omega_z = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}. \qquad (19.1)$$

Считая, что точки, в которых вектор Ω отличен от нуля, сплошным образом заполняют некоторый объем, мы получаем таким образом возможность рассмотреть новое векторное поле — поле вихрей скорости подобно тому как в § 9 было рассмотрено поле скоростей

Это поле вихрей является соленоидальным полем, т. е. в каждой точке поля расхождение вихря равно нулю

$$\operatorname{div} \Omega = 0, \tag{19.2}$$

или

$$\frac{\partial \Omega_x}{\partial x} + \frac{\partial \Omega_y}{\partial y} + \frac{\partial \Omega_z}{\partial z} = 0 \tag{19.3}$$

в чем убеждаемся непосредственным вычислением.

Из (19.2) на основании теоремы Гаусса вытекает, что поток вихря сквозь любую замкнутую поверхность равен нулю.

$$\int_S \Omega_n \, dS = 0. \tag{19.4}$$

Проведем в поле вихрей векторные линии, в каждой точке которых касательная совпадает с направлением вектора вихря; эти линии носят название *вихревых* линий.

Через каждую точку поля будет, вообще говоря, проходить одна вихревая линия дифференциальное уравнение которой будет

$$\frac{dx}{\Omega_x} = \frac{dy}{\Omega_y} = \frac{dz}{\Omega_z} \tag{19.5}$$

Взяв в вихревом поле малый замкнутый контур и проведя через каждую точку последнего вихревую линию мы получим трубчатую поверхность, которая именуется *вихревой трубкой* (рис 16); применяя формулу (19.4) к замкнутой поверхности образованной самой вихревой трубкой и двумя любыми нормальными ее сечениями с площадями σ_1 и σ_2, мы получаем (с точностью до малых величин высших порядков) соотношение

$$\Omega_1 \sigma_1 = \Omega_2 \sigma_2 \tag{19.6}$$

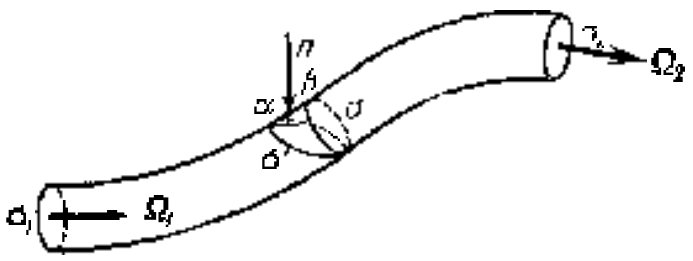

Рис. 16

Так как для элементарной площадки σ_1 будет $\Omega_n = \Omega_1$, для площадки σ_2 будет $\Omega_n = -\Omega_2$, и для поверхности самой трубки $\Omega_n = 0$. Произведение $\Omega\sigma$ из величины вихря на площадь нормального сечения носит название *интенсивности вихревой трубки* или, проще, интенсивности вихря, и соотношение (19.6) показывает, что интенсивность вихря остается постоянной вдоль вихревой трубки. Разобьем все поле вихрей на вихревые трубки определенной интенсивности, например единичные; тогда мы вправе заключить, что внутри жидкости вихревые трубки не могут начинаться или прерываться, ибо формула (19.4) выражает,

что число входящих в любую замкнутую поверхность трубок равно числу выходящих из поверхности трубок. Вихревые трубки могут или начинаться и заканчиваться у границы жидкости, или же замыкаться сами на себя образуя кольцеобразную поверхность (рис. 17).

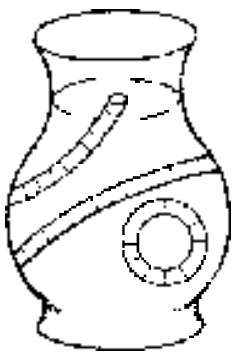

Рис. 17.

Интенсивность вихревой трубки весьма просто связана с циркуляцией скорости Γ по любому замкнутому контуру, который лежит на поверхности трубки и охватывает ее. В самом деле, взяв для простоты плоское сечение трубки, хотя бы и не нормальное, и применяя теорему Стокса получаем.

$$\Gamma = \oint_L v_x\,dx - v_y\,dy + v_z\,dz = \Omega_n \sigma' = \Omega \sigma' \cos(n, \Omega) = \Omega_n \sigma, \qquad (19.7)$$

где σ' есть площадь сечения σ, и σ — площадь нормального сечения σ (рис. 18).

§ 20. Упражнения. 1. Жидкость вращается вокруг оси Oz как твердое тело с угловой скоростью ω. Определить поле вихрей скорости.

Ответ: Вихревые линии представляют собой прямые параллельные оси Oz; величина вихря во всех точках одинакова: $\Omega = 2\omega$.

2. Определить поле вихрей скорости при сдвиге принимая координатную плоскость Oxz за плоскость сдвига и считая, что скорости точек жидкости параллельны оси Ox так что

$$v_x = cy, \quad v_y = 0, \quad v_z = 0.$$

Ответ: Все вихревые линии суть прямые параллельные оси Oz; величина вихря во всех точках одинакова: $\Omega = c$.

3. Скорости частиц жидкости пропорциональны расстояниям частиц от оси Ox и параллельны последней, так что

$$v_x = c\sqrt{y^2 + z^2}, \quad v_y = 0, \quad v_z = 0.$$

Определить поле вихрей.

Ответ: Вихревые линии суть окружности $y^2 + z^2 = \text{const}$, $x = \text{const}$; величина вихря везде одинакова $\Omega = c$.

4. Частицы жидкости вращаются вокруг оси Oz со скоростями обратно пропорциональными расстояниям частиц от этой оси так что

$$v_x = \frac{c}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cos(\widehat{v, x}) = -\frac{cy}{x^2 + y^2},$$

$$v_y = \frac{c}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cos(\widehat{v, y}) = \frac{cx}{x^2 + y^2},$$

$$v_z = 0.$$

Определить поле вихрей.

Ответ: Движение безвихревое во всех точках кроме точек, лежащих на самой оси Oz, в которых v_x и v_y обращаются в бесконечность; окружив

ось Oz бесконечно тонким и бесконечно длинным цилиндром и приклеивая последний к границе жидкости, мы получим двусвязное пространство снаружи цилиндра, в точках которого потенциал скорости $\varphi = c\,\mathrm{arctg}\,(x/y)$ будет многозначен, циркуляция скорости Γ при однократном обходе вокруг цилиндра по любому контуру будет конечной величиной $\Gamma = 2\pi c$, вследствие чего такого рода движение можно назвать изолированной вихревой нитью или изолированным вихрем с интенсивностью $2\pi c$.

5. Выразить градиент скалярной функции $\operatorname{grad}\varphi$ в криволинейных ортогональных координатах q_1, q_2, q_3.

Решение. По основному свойству градиента

$$(\operatorname{grad}\varphi)_s = \frac{\partial\varphi}{\partial s},$$

где s — произвольное направление а ds — элементарное перемещение по этому направлению. Беря за s по очереди каждое из направлений осей криволинейных координат, имеем (см. элементарных перемещений вдоль последних известные из кинематики выражения:

$$ds_1 = H_1\,dq_1 \quad ds_2 = H_2\,dq_2, \quad ds_3 = H_3\,dq_3,$$

где H_1, H_2 H_3 суть параметры Ламэ (см. стр. 29).

Таким образом получаем

$$(\operatorname{grad}\varphi)_q = \frac{1}{H_1}\frac{\partial\varphi}{\partial q_1}; \quad (\operatorname{grad}\varphi)_{q_2} = \frac{1}{H_2}\frac{\partial\varphi}{\partial q_2}; \quad (\operatorname{grad}\varphi)_{q_3} = \frac{1}{H_3}\frac{\partial\varphi}{\partial q_3}.$$

Если через i_1, i_2, i_3 обозначить орты взятые по осям криволинейных координат q_1, q_2, q_3, то выражение градиента в криволинейных координатах будет

$$\nabla\varphi \equiv \operatorname{grad}\varphi = \frac{1}{H_1}\frac{\partial\varphi}{\partial q_1}\,i_1 + \frac{1}{H_2}\frac{\partial\varphi}{\partial q_2}\,i_2 + \frac{1}{H_3}\frac{\partial\varphi}{\partial q_3}\,i_3. \tag{20.1}$$

В частности, для цилиндрических координат r, θ, z будет

$$H_1 = 1, \quad H_2 = r, \quad H_3 = 1$$

и градиент выразится

$$\nabla\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial r}\,i_1 + \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\,i_2 + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\,i_3. \tag{20.2}$$

Для сферических координат r, θ и имеем

$$H_1 = 1, \quad H_2 = r, \quad H_3 = r\sin\theta,$$

и выражение градиента будет

$$\nabla\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial r}\,i_1 + \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\,i_2 + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\varphi}{\partial\psi}\,i_3. \tag{20.3}$$

6. Найти выражения для вихря и расхождения некоторого вектора a в криволинейных ортогональных координатах q_1, q_2, q_3.

Решение. Положив в предыдущей формуле для градиента (задача 5) $\varphi = q_1$, имеем.

$$\operatorname{grad} q_1 = \frac{1}{H_1}\,i_1.$$

Взяв операцию вихря от обеих частей этого равенства и замечая что

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad} q_1 = 0,$$

$$\operatorname{rot}\left(\frac{1}{H_1} i_1\right) = \frac{1}{H_1}\operatorname{rot} i_1 + \operatorname{grad}\left(\frac{1}{H_1}\right) \times i_1$$

и что

$$\operatorname{grad}\left(\frac{1}{H_1}\right) = -\frac{1}{H_1^2}\operatorname{grad} H_1,$$

имеем:

$$0 = \frac{1}{H_1}\operatorname{rot} i_1 - \frac{1}{H_1^2}\operatorname{grad} H_1 \times i_1,$$

откуда

$$\operatorname{rot} i_1 = \frac{1}{H_1}\operatorname{grad} H_1 \times i_1 \tag{20.4}$$

Вычисляя векторное произведение, имеем

$$\operatorname{rot} i_1 = \frac{1}{H_1}\{(\operatorname{grad} H_1)_{q_2} i_2 - (\operatorname{grad} H_1)_{q_3} i_3\},$$

но в силу формулы (20.1) предыдущей задачи

$$(\operatorname{grad} H_1)_{q_2} = \frac{1}{H_2}\frac{\partial H_1}{\partial q_2}, \quad (\operatorname{grad} H_1)_{q_3} = \frac{1}{H_3}\frac{\partial H_1}{\partial q_3},$$

и, значит,

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{rot} i_1 &= \frac{1}{H_1 H_3}\frac{\partial H_1}{\partial q_3} i_2 - \frac{1}{H_1 H_2}\frac{\partial H_1}{\partial q_2} i_3, \\ \text{аналогично} \quad \operatorname{rot} i_2 &= \frac{1}{H_2 H_1}\frac{\partial H_2}{\partial q_1} i_3 - \frac{1}{H_2 H_3}\frac{\partial H_2}{\partial q_3} i_1, \\ \operatorname{rot} i_3 &= \frac{1}{H_3 H_2}\frac{\partial H_3}{\partial q_2} i_1 - \frac{1}{H_3 H_1}\frac{\partial H_3}{\partial q_1} i_2. \end{aligned}\right\} \tag{20.5}$$

Найденные выражения (20.5) для вихрей единичных векторов, отложенных по осям криволинейных векторов, дают возможность вычислить расхождения тех же векторов. В самом деле в силу соотношения $i_1 = i_2 \times i_3$ и известной формулы, имеем.

$$\operatorname{div} i_1 = \operatorname{div}(i_2 \times i_3) = i_3 \cdot \operatorname{rot} i_2 - i_2 \cdot \operatorname{rot} i_3$$

и в силу соотношений ортогональности $i_1 \cdot i_2 = 0$, $i_2 \cdot i_3 = 0$ $i_3 \cdot i_1 = 0$ получаем:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{div} i_1 &= \frac{1}{H_2 H_1}\frac{\partial H_2}{\partial q_1} + \frac{1}{H_3 H_1}\frac{\partial H_3}{\partial q_1}, \\ \text{и аналогично:} \quad \operatorname{div} i_2 &= \frac{1}{H_3 H_2}\frac{\partial H_3}{\partial q_2} + \frac{1}{H_1 H_2}\frac{\partial H_1}{\partial q_2}, \\ \operatorname{div} i_3 &= \frac{1}{H_1 H_3}\frac{\partial H_1}{\partial q_3} + \frac{1}{H_2 H_3}\frac{\partial H_2}{\partial q_3} \end{aligned}\right\} \tag{20.6}$$

Нетрудно теперь перейти к выражению расхождения и вихря любого вектора a, разложив последний по ортам

$$a = a_1 i_1 + a_2 i_2 + a_3 i_3,$$

основываясь на известных формулах векторного анализа.

Таким образом получаем.

$$\operatorname{div} a = a_1 \operatorname{div} i_1 + a_2 \operatorname{div} i_2 + a_3 \operatorname{div} i_3 + i_1 \cdot \operatorname{grad} a_1 + i_2 \cdot \operatorname{grad} a_2 + i_3 \cdot \operatorname{grad} a_3 =$$
$$= \frac{a_1}{H_2 H_3}\frac{\partial H_2}{\partial q_1} + \frac{a_1}{H_3 H_1}\frac{\partial H_3}{\partial q_1} + \frac{a_2}{H_3 H_2}\frac{\partial H_3}{\partial q_2} + \frac{a_2}{H_1 H_2}\frac{\partial H_1}{\partial q_2} + \frac{a_3}{H_1 H_3}\frac{\partial H_1}{\partial q_3} +$$
$$- \frac{a_3}{H_2 H_3}\frac{\partial H_2}{\partial q_3} + \frac{1}{H_1}\frac{\partial a_1}{\partial q_1} + \frac{1}{H_2}\frac{\partial a_2}{\partial q_2} + \frac{1}{H_3}\frac{\partial a_3}{\partial q_3} =$$
$$= \frac{1}{H_1 H_2 H_3}\left[\frac{\partial (a_1 H_2 H_3)}{\partial q_1} + \frac{\partial (a_2 H_3 H_1)}{\partial q_2} + \frac{\partial (a_3 H_1 H_2)}{\partial q_3}\right]. \quad (20.7)$$

Полагая в последней формуле $a = \operatorname{grad} \varphi$, получаем выражение для оператора Лапласа в криволинейных координатах

$$\nabla^2 \varphi = \frac{1}{H_1 H_2 H_3}\left[\frac{\partial\left(\frac{H_2 H_3}{H_1}\frac{\partial \varphi}{\partial q_1}\right)}{\partial q_1} + \frac{\partial\left(\frac{H_3 H_1}{H_2}\frac{\partial \varphi}{\partial q_2}\right)}{\partial q_2} + \frac{\partial\left(\frac{H_1 H_2}{H_3}\frac{\partial \varphi}{\partial q_3}\right)}{\partial q_3}\right] \quad (20.8)$$

Наконец, применяя формулы (20.5), находим для вихря вектора a выражение.

$$\operatorname{rot} a = \frac{1}{H_2 H_3}\left[\frac{\partial (H_3 a_3)}{\partial q_2} - \frac{\partial (H_2 a_2)}{\partial q_3}\right] i_1 + \frac{1}{H_3 H_1}\left[\frac{\partial (H_1 a_1)}{\partial q_3} - \frac{\partial (H_3 a_3)}{\partial q_1}\right] i_2 +$$
$$+ \frac{1}{H_1 H_2}\left[\frac{\partial (H_2 a_2)}{\partial q_1} - \frac{\partial (H_1 a_1)}{\partial q_2}\right] i_3. \quad (20.9)$$

ГЛАВА ВТОРАЯ

ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДИНАМИКИ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

§ 1. Силы массовые и поверхностные. Выделим в жидкости некоторый объем τ ограниченный замкнутой поверхностью S (рис. 18). Силы, приложенные к выделенному объему жидкости, можно разбить на два класса. К одному классу мы отнесем силы, действующие на каждый элемент объема $d\tau$ независимо от того, существуют или нет рядом с объемом $d\tau$ другие части жидкости. Эти силы мы назовем *массовыми*, иногда не вполне правильно они называются объемными силами. Если назвать через F вектор массовой силы отнесенный к единице *массы*, то к элементу объема $d\tau$ жидкости, плотность которой ρ, будет приложена массовая сила $F\rho\, d\tau$; главный вектор массовых сил, приложенных ко всему объему τ, выразится векторным интегралом

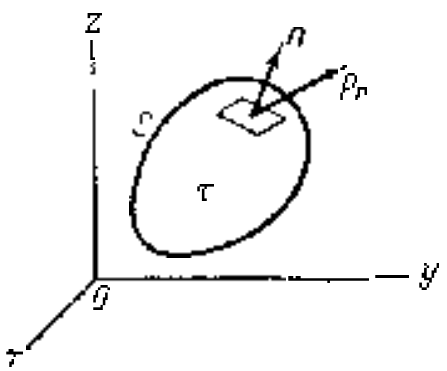

Рис. 18

$$\int_{\tau} F\rho\, d\tau,$$

распространенным по объему τ, а проекции главного вектора на оси декартовых координат Ox, Oy, Oz будут соответственно:

$$\int_{\tau} X\rho\, d\tau, \quad \int_{\tau} Y\rho\, d\tau, \quad \int_{\tau} Z\rho\, d\tau,$$

где X, Y, Z суть проекции вектора F.

Главный момент массовых сил, приложенных к объему τ, относительно начала координат выразится векторным интегралом

$$\int_{\tau} (r \times F)\rho
$$

где r — радиус-вектор частицы $d\tau$, проекциями главного момента на координатные оси будут соответственно служить интегралы

$$\int_\tau (yZ - zY)\rho\, d\tau, \quad \int_\tau (zX - xZ)\rho\, d\tau \quad \int_\tau (xY - yX)\rho\, d\tau.$$

Примером массовой силы является сила тяжести, сила инерции и др.

К другому классу сил, действующих на рассматриваемый объем τ, мы отнесем силы взаимодействия между различными частицами жидкости. В силу принципа равенства действия и противодействия произойдет уравновешивание сил взаимодействия между всеми внутренними частицами объема τ, лежащими внутри поверхности S, и, значит, могут остаться неуравновешенными только силы взаимодействия, исходящие от частиц, лежащих снаружи поверхности S, и приложенные к *поверхностным* частицам объема τ. Такие силы мы назовем *поверхностными*. Если через p_n обозначить вектор поверхностной силы, отнесенной к единице площади, то на элементарной площадке dS поверхности S будет приложена к объему τ исходящая от внешних частиц сила $p_n\, dS$; значок n указывает на то, что мы считаем вектор p_n зависящим от ориентировки площадки dS, т. е. от направления *внешней* нормали (рис. 18); кроме того, вектор p_n может зависеть от координат площадки dS, а также от времени. Если через $-n$ обозначить противоположное направление нормали внутрь поверхности S, то это направление окажется внешней нормалью для той же площадки dS по отношению к наружным частицам жидкости, согласно нашему обозначению, поверхностная сила, действующая на элемент площади dS наружного слоя частиц и исходящая от частиц лежащих внутри поверхности S будет $p_{-n}\, dS$; вследствие принципа равенства действия и противодействия имеет место соотношение

$$p_{-n} = -p_n. \tag{1.1}$$

Направление вектора поверхностной силы p_n может вообще составлять некоторый угол с внешней нормалью n, проекция p_n на внешнюю нормаль называется *нормальным растяжением* или *нормальным давлением* смотря по тому, будет ли p_n составлять острый или тупой угол с внешней нормалью. Проекция же p_n на площадку dS носит название *касательного напряжения* или, иначе, *силы трения*.

Главный вектор и главный момент поверхностных сил приложенных к объему τ выразятся интегралами

$$\int_S p_n\, dS \quad \text{и} \quad \int_S (r \times p_n)\, dS,$$

распространенными по всей замкнутой поверхности S.

§ 2. Общее уравнение движения. Применим начало Даламбера гласящее, что в каждый момент движения любой материальной

системы все силы, приложенные к ней, включая и силы инерции, взаимно уравновешиваются; тогда

$$\int (F - w)\rho\, d\tau + \int_S p_n\, dS = 0 \qquad (2.1)$$

где w есть ускорение элемента $d\tau$; при этом $-\int w\rho\, d\tau$ выражает главный вектор сил инерции.

§ 3. Гидродинамическое давление в идеальной жидкости. В идеальной жидкости не проявляются силы трения, и малейшее нормальное растяжение влечет разрыв сплошности жидкости; следовательно, поверхностные силы, приложенные к элементам поверхности dS объема τ идеальной жидкости, представляют собою *нормальные давления* направленные внутрь объема; иначе говоря, вектор p_n направлен по внутренней нормали к элементу dS. Покажем, что для идеальной жидкости величина p_n этого вектора не зависит от ориентировки площадки dS. Для этого рассмотрим в жидкости элементарный объем тетраэдра $KABC$ (рис. 19), три грани которого KBC, KAC и KAB параллельны координатным плоскостям, так что внешние нормали к этим граням направлены соответственно *противоположно* осям Ox Oy и Oz; обозначим далее через α, β, γ косинусы углов, образованных с осями координат внешней нормалью Dn к четвертой наклонной грани ABC; пусть, наконец, площадь грани ABC есть dS, тогда площади граней KBC, KAC, KAB, являясь проекциями dS, будут соответственно $\alpha\, dS$, $\beta\, dS$, $\gamma\, dS$

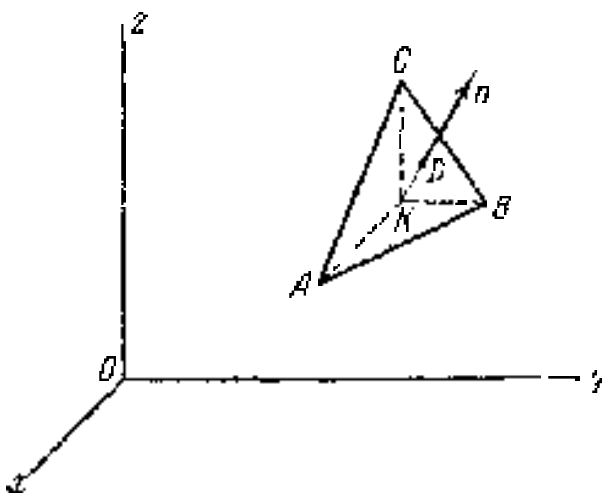

Рис. 19.

Применяя уравнение (2.1) к объему $d\tau$ тетраэдра имеем.

$$(F - w)\rho\, d\tau + p_{-x}\alpha\, dS + p_{-y}\beta\, dS + p_{-z}\gamma\, dS + p_n dS = 0. \qquad (3.1)$$

В силу свойства (1.1), можно произвести замену

$$p_{-x} = -p_x; \quad p_{-y} = -p_y; \quad p_{-z} = -p_z;$$

обозначая затем через h высоту KD тетраэдра, получим:

$$d\tau = \frac{1}{3} h\, dS,$$

и таким образом уравнение (3.1) по сокращении на dS примет вид

$$\frac{1}{3}(F-w)\rho h-\alpha p_x-\beta p_y-\gamma p_z+p_n=0,$$

откуда, переходя к пределу, при $h\to 0$, мы приходим к основному свойству поверхностных сил:

$$p_n=\alpha p_x+\beta p_y+\gamma p_z, \tag{3.2}$$

показывающему, что вектор p_n при произвольной ориентировке внешней нормали n может быть определен, коль скоро заданы три основных вектора p_x, p_y, p_z, выражающих поверхностные силы для площадок, внешние нормали которых параллельны и одинаково направлены с осями Ox, Oy Oz. Свойство, выражаемое формулой (3.2), показывает, что совокупность векторов p_n, получаемая при всевозможных ориентировках площадок, образует тензор; он называется *тензором упругих напряжений*.

Применим теперь формулу (3.2), справедливую для любой жидкости, к случаю идеальной жидкости. В этом случае векторы p_n, p_x, p_y, p_z будут направлены противоположно внешним нормалям On, Ox, Oy, Oz и, проектируя (3.2) последовательно на Ox Oy, Oz, получим:

$$-p_n\alpha=-\alpha p_x;\quad -p_n\beta=-\beta p_y;\quad -p_n\gamma=-\gamma p_z,$$

откуда

$$p_n=p_x=p_y=p_z, \tag{3.3}$$

т. е. величина нормального давления для идеальной жидкости не зависит от ориентировки площадки, к которой оно приложено. Вследствие этого можно отбросить значок в обозначении, не указывая ориентировки площадки и помня, что гидродинамическое давление направлено по внутренней нормали к площадке.

§ 4. Общие уравнения движения идеальной жидкости. Уравнение (2.1) для случая идеальной жидкости принимает вид:

$$\int_\tau (F-w)\rho\,d\tau-\int_S p\,dS=0 \tag{4.1}$$

причем вектор гидродинамического давления p направлен *по внутренней* нормали к поверхности S. Вводя в рассмотрение орт n *внешней* нормали, имеем:

$$p=-pn,$$

и предыдущее уравнение принимает вид:

$$\int_\tau (F-w)\,d\tau-\int_S pn\,dS=0. \tag{4.2}$$

Применяя к последнему интегралу преобразование Гаусса, получаем:

$$\int_{\tau} [(\boldsymbol{F} - \boldsymbol{w})\rho - \operatorname{grad} p]\, d\tau = 0.$$

В силу произвольности рассматриваемого объема τ подынтегральное выражение должно быть равно нулю в каждой точке жидкости и в любой момент движения. Таким образом приходим к основному уравнению движения идеальной жидкости:

$$\boldsymbol{F} - \boldsymbol{w} - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p = 0 \tag{4.3}$$

или в проекциях:

$$\left.\begin{aligned} X - w_x - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad Y - w_y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} = 0, \\ Z - w_z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{4.4}$$

§ 5. Уравнения движения в форме Эйлера. *а) Декартовы координаты.* Выражая проекции ускорения в переменных Эйлера по кинематическим формулам (8.4) главы I:

$$\begin{aligned} w_x &= \frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{\partial v_x}{\partial x} v_x + \frac{\partial v_x}{\partial y} v_y + \frac{\partial v_x}{\partial z} v_z, \\ w_y &= \frac{\partial v_y}{\partial t} + \frac{\partial v_y}{\partial x} v_x + \frac{\partial v_y}{\partial y} v_y + \frac{\partial v_y}{\partial z} v_z, \\ w_z &= \frac{\partial v_z}{\partial t} + \frac{\partial v_z}{\partial x} v_x + \frac{\partial v_z}{\partial y} v_y + \frac{\partial v_z}{\partial z} v_z \end{aligned}$$

и разрешая уравнения (4.4) относительно w_x, w_y, w_z, мы получаем так называемые гидродинамические уравнения Эйлера:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{\partial v_x}{\partial x} v_x + \frac{\partial v_x}{\partial y} v_y + \frac{\partial v_x}{\partial z} v_z = X - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}, \\ \frac{\partial v_y}{\partial t} + \frac{\partial v_y}{\partial x} v_x + \frac{\partial v_y}{\partial y} v_y + \frac{\partial v_y}{\partial z} v_z = Y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}, \\ \frac{\partial v_z}{\partial t} + \frac{\partial v_z}{\partial x} v_x + \frac{\partial v_z}{\partial y} v_y + \frac{\partial v_z}{\partial z} v_z = Z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} \end{aligned}\right\} \tag{5.1}$$

б) Цилиндрические координаты. Проекции скорости точки M на оси цилиндрических координат (r), (φ), (z) будут

$$v_r = \dot{r}, \quad v_\varphi = r\dot{\varphi}, \quad v_z = \dot{z},$$

как показывается в кинематике точки. Отложив по осям цилиндрических координат три единичных вектора $\boldsymbol{i}_1$, $\boldsymbol{i}_2$, $\boldsymbol{i}_3$, мы можем вектор скорости точки M (рис. 20) представить в форме

$$\boldsymbol{v} = \dot{r}\boldsymbol{i}_1 + r\dot{\varphi}\boldsymbol{i}_2 + \dot{z}\boldsymbol{i}_3$$

и, дифференцируя по времени, получаем для ускорения

$$w = \ddot{r}i_1 + \frac{d}{dt}(r\dot{\varphi})i_2 + \ddot{z}i_3 + \dot{r}\frac{di_1}{dt} + r\dot{\varphi}\frac{di_2}{dt} + \dot{z}\frac{di_3}{dt};$$

но

$$\frac{di_1}{dt} = \dot{\varphi}i_2, \quad \frac{di_2}{dt} = -\dot{\varphi}i_1, \quad \frac{di_3}{dt} = 0\ ^1),$$

и тогда после простых выкладок получим

$$w = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)i_1 + \frac{1}{r}\frac{d(r^2\dot{\varphi})}{dt}i_2 + \ddot{z}i_3 = \left(v_r - \frac{v_\varphi^2}{r}\right)i_1 + \frac{1}{r}\frac{d(rv_\varphi)}{dt}i_2 + \dot{v}_z i_3.$$

откуда заключаем, что

$$w_r = \dot{v}_r - \frac{v_\varphi^2}{r}; \quad w_\varphi = \frac{1}{r}\frac{d(rv_\varphi)}{dt}; \quad w_z = \dot{v}_z.$$

Далее, так как по основному свойству градиента мы имеем

$$(\operatorname{grad} p)_s = \frac{\partial p}{\partial s},$$

где s – любое направление и так как элементы тут координатных линий для цилиндрических координат будут соответственно dr, $r\,d\varphi$ и dz, то

$$(\operatorname{grad} p)_r = \frac{\partial p}{\partial r},$$

$$(\operatorname{grad} p)_\varphi = \frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \varphi},$$

$$(\operatorname{grad} p)_z = \frac{\partial p}{\partial z}.$$

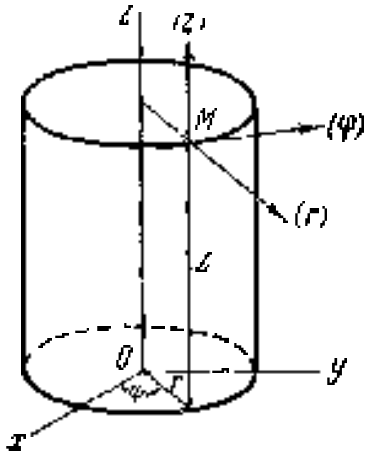

Рис. 20.

Проектируя теперь на оси цилиндрических координат уравнение движения

$$w = F - \frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p,$$

получаем:

$$\dot{v}_r - \frac{v_\varphi^2}{r} = F_r - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}; \quad \frac{d(rv_\varphi)}{dt} = rF_\varphi - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial \varphi}; \quad \dot{v}_z = F_z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}$$

---

1) При выводе этих соотношений можно использовать известные формулы, дающие $\partial i_j/\partial q_k$ (см., например, Кочин Н. Е., Векторное исчисление и..., II, § 18)

$$\frac{\partial i_1}{\partial q_1} = -\frac{1}{H_2}\frac{\partial H_1}{\partial q_2}i_2 - \frac{1}{H_3}\frac{\partial H_1}{\partial q_3}i_3,$$

$$\frac{\partial i_1}{\partial q_2} = \frac{1}{H_1}\frac{\partial H_2}{\partial q_1}i_2, \quad \frac{\partial i_1}{\partial q_3} = \frac{1}{H_1}\frac{\partial H_3}{\partial q_1}i_3,$$

и аналогичные формулы для производных от i_2 и i_3.

Заменим в этих уравнениях полные производные по формулам

$$\dot{v}_r = \frac{\partial v_r}{\partial r}\dot{r} + \frac{\partial v_r}{\partial \varphi}\dot{\varphi} + \frac{\partial v_r}{\partial z}\dot{z} + \frac{\partial v_r}{\partial t} = \frac{\partial v_r}{\partial r}v_r + \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \varphi}v_\varphi + \frac{\partial v_r}{\partial z}v_z + \frac{\partial v_r}{\partial t},$$

и аналогично для

$$\frac{d(rv_\varphi)}{dt} \quad \text{и} \quad \dot{v}_z,$$

приходим к дифференциальным уравнениям типа Эйлера:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial v_r}{\partial r}v_r + \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \varphi}v_\varphi + \frac{\partial v_r}{\partial z}v_z + \frac{\partial v_r}{\partial t} - \frac{1}{r}v_\varphi^2 = F_r - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r},\\
&\frac{1}{r}v_r v_\varphi + \frac{\partial v_\varphi}{\partial r}v_r + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi}v_\varphi + \frac{\partial v_\varphi}{\partial z}v_z + \frac{\partial v_\varphi}{\partial t} = F_\varphi - \frac{1}{r\rho}\frac{\partial p}{\partial \varphi},\\
&\frac{\partial v_z}{\partial r}v_r + \frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \varphi}v_\varphi + \frac{\partial v_z}{\partial z}v_z + \frac{\partial v_z}{\partial t} = F_z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}.
\end{aligned}\right\} \qquad (3.2)$$

в) Сферические координаты. Проекции скорости точки M на оси сферических координат (r), (θ), (ψ) будут:

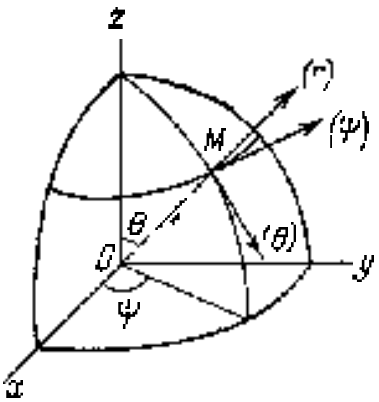

Рис. 21.

$$v_r = \dot{r},$$
$$v_\theta = r\dot{\theta},$$
$$v_\psi = r\sin\theta\dot{\psi}.$$

Отложив по осям сферических координат три единичных вектора i_1, i_2, i_3, мы можем вектор скорости в точке M (рис. 21) представить в форме

$$v = \dot{r}i_1 + r\dot{\theta}i_2 + r\sin\theta\dot{\psi}i_3.$$

Таким образом, для ускорения w получаем

$$w = \ddot{r}i_1 + \frac{d}{dt}(r\dot{\theta})i_2 + \frac{d}{dt}(r\sin\theta\dot{\psi})i_3 + r\frac{di_1}{dt} + r\dot{\theta}\frac{di_2}{dt} + r\sin\theta\dot{\psi}\frac{di_3}{dt}.$$

С другой стороны,

$$\frac{di_1}{dt} = i_2\dot{\theta} + i_3\sin\theta\dot{\psi}; \quad \frac{di_2}{dt} = -i_1\dot{\theta} + i_3\cos\theta\dot{\psi};$$
$$\frac{di_3}{dt} = -(\sin\theta i_1 + \cos\theta i_2)\dot{\psi}.$$

Поэтому

$$w = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\sin^2\theta\dot{\psi}^2)i_1 + \left(\frac{dr\dot{\theta}}{dt} + \dot{r}\dot{\theta} - r\sin\theta\cos\theta\dot{\psi}^2\right)i_2 +$$
$$+ \left[\frac{d}{dt}(r\sin\theta\dot{\psi}) + \sin\theta\dot{r}\dot{\psi} + r\cos\theta\dot{\theta}\dot{\psi}\right]i_3.$$

Отсюда

$$w_r = \dot{v}_r - \frac{1}{r} v_\theta^2 - \frac{1}{r} v_\psi^2; \quad w_\theta = \dot{v}_\theta + \frac{1}{r} v_r v_\theta - \frac{1}{r} \operatorname{ctg} \theta v_\psi^2;$$
$$w_\psi = \dot{v}_\psi + \frac{1}{r} v_r v_\psi + \frac{1}{r} \operatorname{ctg} \theta v_\theta v_\psi.$$

Проектируя уравнение движения на оси сферических координат, мы получим:

$$\frac{dv_r}{dt} - \frac{v_\theta^2 + v_\psi^2}{r} = F_r - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r}, \quad \frac{dv_\theta}{dt} + \frac{v_r v_\theta - \operatorname{ctg} \theta v_\psi^2}{r} = F_\theta - \frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \theta},$$
$$\frac{dv_\psi}{dt} + \frac{v_\psi}{r} (v_r + \operatorname{ctg} \theta v_\theta) = F_\psi - \frac{1}{\rho r \sin \theta} \frac{\partial p}{\partial \psi}.$$

Заменяя $\frac{dv_r}{dt}$ по формуле

$$\frac{dv_r}{dt} = \frac{\partial v_r}{\partial r} r + \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \theta + \frac{\partial v_r}{\partial \psi} \psi + \frac{\partial v_r}{\partial t} =$$
$$= \frac{\partial v_r}{\partial r} v_r + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} v_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \psi} v_\psi + \frac{\partial v_r}{\partial t},$$

и аналогичным образом $\frac{dv_\theta}{dt}$, $\frac{dv_\psi}{dt}$, получим уравнения типа Эйлера в сферических координатах:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{v_\psi}{r \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \psi} - \frac{v_\theta^2 + v_\psi^2}{r} = F_r - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r}, \\
&\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_\psi}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \psi} + \frac{v_r v_\theta}{r} - \frac{\operatorname{ctg} \theta}{r} v_\psi^2 = \\
&\qquad = F_\theta - \frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \theta}, \\
&\frac{\partial v_\psi}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\psi}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\psi}{\partial \theta} + \frac{v_\psi}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\psi}{\partial \psi} + \frac{v_r v_\psi}{r} + \frac{\operatorname{ctg} \theta v_\theta v_\psi}{r} = \\
&\qquad = F_\psi - \frac{1}{\rho r \sin \theta} \frac{\partial p}{\partial \psi}.
\end{aligned}\right\} \qquad (5.3)$$

г) *Общие криволинейные координаты.* Для вывода применим рассуждения, аналогичные тем, какие применялись в динамике системы для вывода уравнений Лагранжа.

Считая, что выбрана определенная система криволинейных координат q_1, q_2, q_3, т. е. что выбраны определенные зависимости:

$$x = \varphi(q_1, q_2, q_3, t); \quad y = \psi(q_1, q_2, q_3, t); \quad z = \theta(q_1, q_2, q_3, t),$$

мы имеем для всякой функции $f(x, y, z, t)$ от декартовых координат следующие соотношения:

$$\frac{\partial f}{\partial q_i} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial q_i} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial q_i} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial q_i} \qquad (i = 1, 2, 3),$$

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial q_1}\frac{dq_1}{dt} + \frac{\partial f}{\partial q_2}\frac{dq_2}{dt} + \frac{\partial f}{\partial q_3}\frac{dq_3}{dt} + \frac{\partial f}{\partial t}. \qquad (5.4)$$

В частности будет

$$\frac{\partial p}{\partial q_i} = \frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial q_i} + \frac{\partial p}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial q_i} + \frac{\partial p}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial q_i} \qquad (i = 1, 2, 3),$$

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{\partial x}{\partial q_1}\frac{dq_1}{dt} + \frac{\partial x}{\partial q_2}\frac{dq_2}{dt} + \frac{\partial x}{\partial q_3}\frac{dq_3}{dt} + \frac{\partial x}{\partial t} =$$

$$= \frac{\partial x}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial x}{\partial q_2}\dot{q}_2 + \frac{\partial x}{\partial q_3}\dot{q}_3 + \frac{\partial x}{\partial t} \qquad (5.5)$$

и аналогично для v_y и v_z.

Соотношение (5.5) показывает, что если v_x рассматривать как функцию от $q_1, q_2, q_3, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3, t$ то будет:

$$\frac{\partial v_x}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial x}{\partial q_i} \qquad (i = 1, 2, 3). \qquad (5.6)$$

Кроме того, дифференцируя (5.5) по q_i, имеем:

$$\frac{\partial v_x}{\partial q_i} = \frac{\partial^2 x}{\partial q_1 \partial q_i}\dot{q}_1 + \frac{\partial^2 x}{\partial q_2 \partial q_i}\dot{q}_2 + \frac{\partial^2 x}{\partial q_3 \partial q_i}\dot{q}_3 + \frac{\partial^2 x}{\partial t \partial q_i}. \qquad (5.7)$$

С другой стороны, применяя (5.4) к функции $\frac{\partial x}{\partial q_i}$, имеем:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x}{\partial q_i}\right) = \frac{\partial^2 x}{\partial q_i \partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial^2 x}{\partial q_i \partial q_2}\dot{q}_2 + \frac{\partial^2 x}{\partial q_i \partial q_3}\dot{q}_3 + \frac{\partial^2 x}{\partial q_i \partial t},$$

сравнивая с предыдущим равенством, получаем

$$\frac{\partial v_x}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x}{\partial q_i}\right). \qquad (5.8)$$

Установив соотношения (5.6) и (5.8), берем уравнения Эйлера

$$\frac{dv_x}{dt} = X - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}; \quad \frac{dv_y}{dt} = Y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}; \quad \frac{dv_z}{dt} = Z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}$$

и после умножения на $\frac{\partial x}{\partial q_i}$, $\frac{\partial y}{\partial q_i}$, $\frac{\partial z}{\partial q_i}$ и сложения находим:

$$\frac{\partial x}{\partial q_i}\frac{dv_x}{dt} + \frac{\partial y}{\partial q_i}\frac{dv_y}{dt} + \frac{\partial z}{\partial q_i}\frac{dv_z}{dt} =$$

$$= X\frac{\partial x}{\partial q_i} + Y\frac{\partial y}{\partial q_i} + Z\frac{\partial z}{\partial q_i} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial q_i} \qquad (i = 1, 2, 3). \qquad (5.9)$$

Сделав преобразование

$$\frac{\partial x}{\partial q_i}\frac{dv_x}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x}{\partial q_i}v_x\right) - v_x\frac{d\left(\frac{\partial x}{\partial q_i}\right)}{dt}$$

и применив (5.6) и (5.8), получаем:

$$\frac{\partial x}{\partial q_i}\frac{dv_x}{dt} = \frac{d}{dt}\left(v_x\frac{\partial v_x}{\partial \dot{q}_i}\right) - v_x\frac{\partial v_x}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\frac{\partial\left(\frac{1}{2}v_x^2\right)}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial\left(\frac{1}{2}v_x^2\right)}{\partial q_i}$$

и аналогично для двух других слагаемых в (5.9). Вводя обозначения

$$T = \frac{1}{2}\left(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2\right)$$

для живой силы единицы массы жидкости и

$$Q_i = X\frac{\partial x}{\partial q_i} + Y\frac{\partial y}{\partial q_i} + Z\frac{\partial z}{\partial q_i} \qquad (i = 1, 2, 3)$$

для обобщенной массовой силы, мы приходим к искомым уравнениям движения в криволинейных координатах

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial q_i} \qquad (i = 1, 2, 3). \qquad (5.10)$$

Если массовые силы имеют потенциал V, то, очевидно, будет

$$Q_i = -\frac{\partial V}{\partial q_i} \qquad (i = 1, 2, 3),$$

и уравнения движения примут вид

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = -\frac{\partial V}{\partial q_i} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial q_i} \qquad (i = 1, 2, 3). \qquad (5.11)$$

Уравнения вида (5.10) или (5.11) справедливы для любых криволинейных координат (не только ортогональных).

Проекции скорости на оси криволинейных координат будут выражаться формулами

$$v_1 = H_1\dot{q}_1, \quad v_2 = H_2\dot{q}_2, \quad v_3 = H_3\dot{q}_3,$$

где H_1, H_2, H_3 суть коэффициенты Ламе (см. стр. 29).

В случае ортогональности криволинейных координат живая сила будет иметь вид

$$T = \frac{1}{2}\left(H_1^2\dot{q}_1^2 + H_2^2\dot{q}_2^2 + H_3^2\dot{q}_3^2\right)$$

§ 6. Векторные формы уравнений движения. Написав уравнение (4.3) в виде

$$w = F - \frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p, \quad \text{или} \quad \frac{dv}{dt} = F - \frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p \qquad (6.1)$$

и выражая полную производную dv/dt по формуле векторного анализа

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + (v \cdot \nabla) v,$$

приходим к векторной форме уравнений движения

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (v \cdot \nabla) v = F - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p, \tag{6.2}$$

или в других обозначениях:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (v \cdot \nabla) v = F - \frac{1}{\rho} \nabla p. \tag{6.3}$$

Проекциями уравнения (6.2) и служат гидродинамические уравнения Эйлера. Применяя известное из векторного анализа преобразование

$$\frac{1}{2} \operatorname{grad} v^2 = (v \cdot \nabla) v + v \times \operatorname{rot} v,$$

мы приходим к другой форме того же векторного уравнения

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \operatorname{grad} \left(\frac{1}{2} v^2 \right) - v \times \operatorname{rot} v = F - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p, \tag{6.4}$$

или в других обозначениях:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \nabla \left(\frac{1}{2} v^2 \right) - v \times \operatorname{rot} v = F - \frac{1}{\rho} \nabla p. \tag{6.5}$$

§ 7. Уравнения движения в форме Ламба. Проектируя уравнение (6.5) на оси Ox, Oy, Oz и вводя для краткости обозначение $\operatorname{rot} v = \Omega$, мы приходим к системе уравнений, носящих название *гидродинамических уравнений Ламба*

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2} v^2 \right) - (v_y \Omega_z - v_z \Omega_y) &= X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \\ \frac{\partial v_y}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{2} v^2 \right) - (v_z \Omega_x - v_x \Omega_z) &= Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}, \\ \frac{\partial v_z}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{2} v^2 \right) - (v_x \Omega_y - v_y \Omega_x) &= Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}, \end{aligned}\right\} \tag{7.1}$$

где

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2,$$

$$\Omega_x = \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}, \quad \Omega_y = \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}, \quad \Omega_z = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}.$$

Уравнения Ламба, по существу, не отличаются от уравнений Эйлера, представляя простое преобразование последних. Независимыми переменными в уравнениях Эйлера и Ламба служат одни и

те же величины t, x, y, z, функциями которых являются v_x, v_y, v_z, p, ρ, X, Y, Z.

Запишем еще уравнения Ламба в криволинейных координатах. На основании (6.4) получим очевидно:

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} + \frac{1}{H_1}\frac{\partial}{\partial q_1}\frac{v^2}{2} + v_3\Omega_2 - v_2\Omega_3 = F_1 - \frac{1}{\rho H_1}\frac{\partial p}{\partial q_1},$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial t} + \frac{1}{H_2}\frac{\partial}{\partial q_2}\frac{v^2}{2} + v_1\Omega_3 - v_3\Omega_1 = F_2 - \frac{1}{\rho H_2}\frac{\partial p}{\partial q_2},$$

$$\frac{\partial v_3}{\partial t} + \frac{1}{H_3}\frac{\partial}{\partial q_3}\frac{v^2}{2} + v_2\Omega_1 - v_1\Omega_2 = F_3 - \frac{1}{\rho H_3}\frac{\partial p}{\partial q_3},$$

[при этом

$$\Omega_1 = \frac{1}{H_2H_3}\left(\frac{\partial H_3v_3}{\partial q_2} - \frac{\partial H_2v_2}{\partial q_3}\right); \quad \Omega_2 = \frac{1}{H_1H_3}\left(\frac{\partial H_1v_1}{\partial q_3} - \frac{\partial H_3v_3}{\partial q_1}\right);$$

$$\Omega_3 = \frac{1}{H_1H_2}\left(\frac{\partial H_2v_2}{\partial q_1} - \frac{\partial H_1v_1}{\partial q_2}\right)$$

Для цилиндрических координат (r, φ, z)

$$H_1 = 1, \quad H_2 = r, \quad H_3 = 1.$$

и мы будем иметь:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial v_r}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial r}\frac{v^2}{2} + v_z\Omega_\varphi - v_\varphi\Omega_z = F_r - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r},\\
&\frac{\partial v_\varphi}{\partial t} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}\frac{v^2}{2} + v_r\Omega_z - v_z\Omega_r = F_\varphi - \frac{1}{\rho r}\frac{\partial p}{\partial \varphi},\\
&\frac{\partial v_z}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{v^2}{2} + v_\varphi\Omega_r - v_r\Omega_\varphi = F_z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z},
\end{aligned}\right\} \qquad (7.2)$$

причем $v^2 = v_r^2 + v_\varphi^2 + v_z^2$,

$$\Omega_r = \frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial v_\varphi}{\partial z}, \quad \Omega_\varphi = \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r},$$

$$\Omega_z = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial rv_\varphi}{\partial r} - \frac{\partial v_r}{\partial \varphi}\right).$$

В сферических координатах (r, θ, ψ) будет

$$H_1 = 1 \quad H_2 = r, \quad H_3 = r\sin\theta,$$

так что уравнения примут вид

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial v_r}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r}\frac{v^2}{2} + v_\theta\Omega_\psi - v_\psi\Omega_\theta = F_r - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r},\\
&\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\frac{v^2}{2} + v_r\Omega_\psi - v_\psi\Omega_r = F_\theta - \frac{1}{\rho r}\frac{\partial p}{\partial \theta},\\
&\frac{\partial v_\psi}{\partial t} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \psi}\frac{v^2}{2} + v_\theta\Omega_r - v_r\Omega_\theta = F_\psi - \frac{1}{\rho r\sin\theta}\frac{\partial p}{\partial \psi},
\end{aligned}\right\} \qquad (7.3)$$

где

$$v^2 = v_r^2 + v_\theta^2 + v_\varphi^2,$$

а

$$\Omega_r = \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta v_\varphi) - \frac{\partial v_\theta}{\partial\varphi}\right], \quad \Omega_\theta = \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial v_r}{\partial\varphi} - \frac{\partial r\sin\theta v_\varphi}{\partial r}\right),$$

$$\Omega_\varphi = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial r v_\theta}{\partial r} - \frac{\partial v_r}{\partial\theta}\right).$$

Приведем еще уравнения относительного движения жидкости, а также уравнения абсолютного движения жидкости, отнесенные к подвижной системе координат.

Наряду с неподвижной системой координат $Oxyz$ введем в рассмотрение подвижную систему координат $O'x'y'z'$; движение последней характеризуется вектором скорости v_0 начала подвижной системы координат и вектором ω угловой скорости вращения этой системы. Будем считать, что в рассматриваемый момент времени обе системы координат совпадают друг с другом, и обозначим через r радиус-вектор частицы жидкости. Обозначим через v_r вектор относительной скорости частицы жидкости, т. е. ее скорости по отношению к подвижной системе координат; через

$$v_e = v_0 + \omega \times r$$

вектор переносной скорости и через

$$v_a = v_r + v_e \tag{7.4}$$

вектор абсолютной скорости частицы жидкости. Обозначая через w_r относительное ускорение, через

$$w_e = \frac{dv_0}{dt} + \frac{d\omega}{dt} \times r + \omega \times (\omega \times r)$$

переносное и через w_a абсолютное ускорение частицы жидкости, будем иметь равенство

$$w_a = w_r + w_e + w_c, \tag{7.5}$$

где

$$w_c = 2(\omega \times v_r) \tag{7.6}$$

есть ускорение Кориолиса.

В основное уравнение движения (6.1) входит абсолютное ускорение, поэтому, вследствие (7.5), уравнение Эйлера для относительного движения жидкости примет вид

$$w_r = F - \frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p - w_e - 2(\omega \times v_r). \tag{7.7}$$

Вследствие преобразований предыдущего параграфа, мы можем написать

$$\boldsymbol{w}_r = \frac{\partial' \boldsymbol{v}_r}{\partial t} + \operatorname{grad} \frac{1}{2} \boldsymbol{v}_r^2 - (\boldsymbol{v}_r \times \operatorname{rot} \boldsymbol{v}_r),$$

где штрих у производной по t означает, что дифференцирование совершается в подвижной системе координат.

Поэтому уравнения относительного движения (7.7) записываются так

$$\frac{\partial' \boldsymbol{v}_r}{\partial t} + \operatorname{grad} \frac{1}{2} \boldsymbol{v}^2 - \boldsymbol{v}_r \times \operatorname{rot} \boldsymbol{v}_r + 2(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_r) = \boldsymbol{F} - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p - \boldsymbol{w}_e \quad (7.8)$$

В некоторых случаях удобно, пользуясь подвижной системой координат рассматривать абсолютное движение жидкости. Заметим прежде всего что если мы имеем абсолютный покой жидкости так что $\boldsymbol{v}_a = 0$, то $\boldsymbol{v}_r = -\boldsymbol{v}_e$ и поэтому предыдущая формула, в которой надо, конечно, положить $\boldsymbol{F} = 0$, $p = \text{const}$, приводит к соотношению

$$\frac{\partial' \boldsymbol{v}_e}{\partial t} + \operatorname{grad} \frac{1}{2} \boldsymbol{v}_e^2 - \boldsymbol{v}_e \times \operatorname{rot} \boldsymbol{v}_e + 2(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_e) = \boldsymbol{w}_e, \quad (7.9)$$

это тождество может быть впрочем, установлено и непосредственно. Сложим теперь равенства (7.8) и (7.9), воспользовавшись (7.4), получим:

$$\frac{\partial' \boldsymbol{v}_a}{\partial t} - \operatorname{grad} \frac{1}{2} (\boldsymbol{v}_r^2 - \boldsymbol{v}_e^2) - \boldsymbol{v}_r \times \operatorname{rot} \boldsymbol{v}_r + \boldsymbol{v}_e \times \operatorname{rot} \boldsymbol{v}_e + 2\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_a = \boldsymbol{F} - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p.$$

Заметим теперь, что

$$\boldsymbol{v}_r^2 - \boldsymbol{v}_e^2 = (\boldsymbol{v}_a - \boldsymbol{v}_e)(\boldsymbol{v}_a + \boldsymbol{v}_e) = \boldsymbol{v}_a^2 - \boldsymbol{v}_e^2 - 2\boldsymbol{v}_a \boldsymbol{v}_e,$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{v}_e = \operatorname{rot} (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}) = 2\boldsymbol{\omega}, \quad \boldsymbol{v}_e \times \operatorname{rot} \boldsymbol{v}_e = 2\boldsymbol{v}_e \times \boldsymbol{\omega},$$

$$\boldsymbol{v}_r \times \operatorname{rot} \boldsymbol{v}_r = \boldsymbol{v}_r \times \operatorname{rot} \boldsymbol{v}_a - \boldsymbol{v}_r \times \operatorname{rot} \boldsymbol{v}_e = (\boldsymbol{v}_a - \boldsymbol{v}_e) \times \operatorname{rot} \boldsymbol{v}_a - 2\boldsymbol{v}_r \times \boldsymbol{\omega},$$

вследствие этих равенств предыдущее соотношение принимает вид,

$$\frac{\partial' \boldsymbol{v}_a}{\partial t} + \operatorname{grad} \left(\frac{\boldsymbol{v}_a^2}{2} - \boldsymbol{v}_a \boldsymbol{v}_e \right) - (\boldsymbol{v}_a - \boldsymbol{v}_e) \times \operatorname{rot} \boldsymbol{v}_a = \boldsymbol{F} - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p \quad (7.10)$$

Это и есть уравнение абсолютного движения жидкости в подвижной системе координат

§ 8. Уравнения движения в форме Лагранжа. Чтобы получить уравнения движения исходя из точки зрения Лагранжа, мы должны за независимые переменные принять время t и параметры a, b, c,

определяющие начальное положение частиц жидкости в момент $t = 0$, все прочие величины фигурирующие в уравнениях движения должны считаться функциями аргументов t, a, b, c. Обращаясь к общим уравнениям движения (6.1), заменим в них w_x, w_y, w_z по кинематическим формулам (6.4) главы I, тогда найдем.

$$\left.\begin{aligned} X - \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} &= \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}, \\ Y - \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}, \\ Z - \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} &= \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}. \end{aligned}\right\} \qquad (8.1)$$

Остается в последних уравнениях выразить $\partial p/\partial x$, $\partial p/\partial y$ $\partial p/\partial z$ через $\partial p/\partial a$, $\partial p/\partial b$, $\partial p/\partial c$.

Умножив уравнения (8.1) соответственно на $\partial x/\partial a$, $\partial y/\partial a$ $\partial z/\partial a$ и сложив, получим в правой части

$$\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial a} + \frac{\partial p}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial a} + \frac{\partial p}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial a}\right) = \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial a}.$$

Аналогично после умножения (8.1) на $\partial x/\partial b$ $\partial y/\partial b$ $\partial z/\partial b$ и сложения найдем в правой части $\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial b}$, а после умножения на $\partial x/\partial c$, $\partial y/\partial c$ $\partial z/\partial c$ и сложения получим $\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial c}$. Таким образом мы приходим к следующим *уравнениям движения в форме Лагранжа*:

$$\left.\begin{aligned} \left(X - \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\right)\frac{\partial x}{\partial a} + \left(Y - \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right)\frac{\partial y}{\partial a} + \left(Z - \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\right)\frac{\partial z}{\partial a} &= \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial a}, \\ \left(X - \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\right)\frac{\partial x}{\partial b} + \left(Y - \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right)\frac{\partial y}{\partial b} + \left(Z - \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\right)\frac{\partial z}{\partial b} &= \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial b}, \\ \left(X - \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\right)\frac{\partial x}{\partial c} + \left(Y - \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right)\frac{\partial y}{\partial c} + \left(Z - \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\right)\frac{\partial z}{\partial c} &= \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial c}. \end{aligned}\right\} \qquad (8.2)$$

§ 9. Общая постановка задач гидродинамики. Рассматривая жидкость как совокупность материальных частиц (сплошным образом заполняющих пространство или его часть), между которыми появляются внутренние силы взаимодействия, выражающиеся в идеальной жидкости при посредстве гидродинамического давления, мы можем общую задачу гидродинамики формулировать так: определить под действием заданных внешних сил движение каждой частицы и внутренние силы, т. е. гидродинамическое давление, в каждой точке жидкости и в каждый момент движения

Рассмотрим отдельно случаи несжимаемой и сжимаемой жидкости, считая в обоих случаях жидкость идеальной и для простоты однородной. Постановка задач гидродинамики вязкой (не идеальной) жидкости будет рассмотрена во второй части курса.

§ 10. Случай несжимаемой жидкости. В несжимаемой жидкости плотность ρ есть некоторая постоянная, служащая физической характеристикой данного сорта жидкости и считаемая известной. Взяв уравнения Эйлера (или Ламба), мы видим, что в них неизвестными величинами являются четыре: v_x, v_y, v_z, p, зависящие каждая от аргументов x, y, z, t, величины же X, Y, Z суть заданные функции тех же аргументов; присоединяя к трем дифференциальным уравнениям Эйлера четвертое дифференциальное уравнение — уравнение неразрывности — мы приходим к задаче определения четырех неизвестных функций v_x, v_y, v_z, p из системы четырех дифференциальных уравнений

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{\partial v_x}{\partial x} v_x + \frac{\partial v_x}{\partial y} v_y + \frac{\partial v_x}{\partial z} v_z &= X - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}, \\ \frac{\partial v_y}{\partial t} + \frac{\partial v_y}{\partial x} v_x + \frac{\partial v_y}{\partial y} v_y + \frac{\partial v_y}{\partial z} v_z &= Y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}, \\ \frac{\partial v_z}{\partial t} + \frac{\partial v_z}{\partial x} v_x + \frac{\partial v_z}{\partial y} v_y + \frac{\partial v_z}{\partial z} v_z &= Z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}, \\ \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} &= 0. \end{aligned}\right\} \quad (10.1)$$

Если эту систему удается проинтегрировать, то будут определены векторное поле скорости и скалярное поле давления для каждого момента времени, т. е. будут найдены функции:

$$p = f(x, y, z, t), \qquad v_x = f_1(x, y, z, t),$$
$$v_y = f_2(x, y, z, t), \qquad v_z = f_3(x, y, z, t),$$

удовлетворяющие системе (10.1). Чтобы довести задачу до конца и определить уравнения движения каждой частицы, т. е. зависимости координат частицы x, y, z от времени t и начальных значений координат x_0, y_0, z_0, остается проинтегрировать еще систему трех уравнений.

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f_1(x, y, z, t), \qquad \frac{dy}{dt} = f_2(x, y, z, t), \\ \frac{dz}{dt} &= f_3(x, y, z, t). \end{aligned}\right\} \quad (10.2)$$

Аналогично обстоит дело, если мы возьмем уравнения движения в форме Лагранжа: в этом случае задача сводится к определению четырех неизвестных функций x, y, z, p, зависящих каждая от

аргументов t, a, b, c из системы четырех дифференциальных уравнений:

$$\left.\begin{aligned}
&\left(X-\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\right)\frac{\partial x}{\partial a}+\left(Y-\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right)\frac{\partial y}{\partial a}+\left(Z-\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\right)\frac{\partial z}{\partial a}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial a},\\
&\left(X-\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\right)\frac{\partial x}{\partial b}+\left(Y-\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right)\frac{\partial y}{\partial b}+\left(Z-\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\right)\frac{\partial z}{\partial b}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial b},\\
&\left(X-\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\right)\frac{\partial x}{\partial c}+\left(Y-\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right)\frac{\partial y}{\partial c}+\left(Z-\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\right)\frac{\partial z}{\partial c}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial c},\\
&\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial a} & \frac{\partial y}{\partial a} & \frac{\partial z}{\partial a}\\ \frac{\partial x}{\partial b} & \frac{\partial y}{\partial b} & \frac{\partial z}{\partial b}\\ \frac{\partial x}{\partial c} & \frac{\partial y}{\partial c} & \frac{\partial z}{\partial c}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x_0}{\partial a} & \frac{\partial y_0}{\partial a} & \frac{\partial z_0}{\partial a}\\ \frac{\partial x_0}{\partial b} & \frac{\partial y_0}{\partial b} & \frac{\partial z_0}{\partial b}\\ \frac{\partial x_0}{\partial c} & \frac{\partial y_0}{\partial c} & \frac{\partial z_0}{\partial c}\end{vmatrix}.
\end{aligned}\right\} \qquad (10.3)$$

§ 11. Случай сжимаемой жидкости. Баротропность и бароклинность. Уравнение притока энергии. Перейдем к задаче определения движения сжимаемой жидкости. Математически простейшим будет тот частный случай, когда во всем движении плотность есть заранее известная функция от давления

$$\rho = \Phi(p). \qquad (11.1)$$

Среды, в которых плотность есть функция одного давления, носят название *баротропных*. Для баротропных жидкостей уравнение неразрывности (11.3) главы I и три уравнения движения (5.1) настоящей главы замыкаются в том смысле, что эти четыре уравнения содержат как раз четыре искомые функции, ибо, пользуясь (11.1), мы можем всюду исключить ρ, оставив в качестве неизвестных v_x, v_y, v_z и p.

Простейшим примером закона для $\Phi(p)$ будет

$$\Phi(p) = \text{const}.$$

Это — случай несжимаемой жидкости.

Движения для которых

$$\Phi(p) = Cp,$$

где C — постоянная, называются *«изотермическими»*.

Если

$$\Phi(p) = Cp^n,$$

где C и n — постоянные, то говорят о *«политропических»* процессах, причем величина $1/n$ называется *показателем политропы*. Таковы простейшие и притом наиболее употребительные виды функций $\Phi(p)$ для баротропной жидкости.

Среды, в которых плотность не есть функция одного только давления т. е. для которых нельзя подобрать никакой функции $\Phi(p)$, такой что имеет место (11.1), носят название *бароклинных*. Здесь плотность ρ является пятой неизвестной функцией, подлежащей определению равноправной с функциями v_x, v_y, v_z, p, и потому четырех наших уравнений (уравнение неразрывности и три уравнения движения) недостаточно для решения задачи. Для исследования движения в общем случае бароклинной сжимаемой жидкости оказывается необходимым учет нового фактора — притока энергии. Это обстоятельство вводит в рассмотрение две новые величины температуру (абсолютную) жидкости T и так называемую *плотность тепловой мощности притока энергии* ε, т. е. количество энергии, получаемое единицей объема жидкости в единицу времени.

Чтобы установить, на что расходуется этот приток энергии, обратимся к первому началу термодинамики. Именно, мы должны написать, что энергия

$$\varepsilon' \int_{t_1}^{t_2} \int_{(\tau)} \varepsilon \, d\tau \, dt, \tag{11.2}$$

притекающая за промежуток времени от t_1 до t_2 к некоторому жидкому объему (τ), расходуется отчасти на повышение температуры T жидкости этого объема, отчасти на совершение работы внутренних сил, действующих в жидкости, т. е. на работу, производимую давлением путем уменьшения или увеличения объема сжимаемой жидкости. Обозначая через c_v теплоемкость при постоянном объеме, мы получим часть ε_1' притекшей энергии, израсходованную на увеличение температуры (при постоянстве объема) в виде

$$\varepsilon_1' \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{(\tau)} c_v \frac{dT}{dt} \rho \, d\tau \tag{11.3}$$

Обозначая далее через A термический эквивалент работы ($A = 1/E$, где E — механический эквивалент тепла) мы будем иметь часть ε_2' нашей тепловой энергии, израсходованную на внутреннюю работу, в виде

$$\varepsilon_2' = A \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{(\tau)} p \frac{d}{dt} d\tau \tag{11.4}$$

Но по механическому смыслу расхождения скорости имеем

$$\frac{d\,d\tau}{dt} = d\tau \operatorname{div} v$$

или, заменяя $\operatorname{div} v$ его значением из уравнения неразрывности (11.1) главы I, получим

$$\frac{d}{dt}\frac{d\tau}{dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt}\,d\tau.$$

Вспоминая, что $\varepsilon' = \varepsilon'_1 + \varepsilon'_2$, получим

$$\int_{t}^{t_1}\int_{(\tau)}\varepsilon\,d\tau\,dt = \int_{t}^{t_1}\int_{(\tau)}\left(c_v\frac{dT}{dt}\rho - \frac{Ap}{\rho}\frac{d\rho}{dt}\right)d\tau\,dt.$$

Предполагая непрерывность подынтегральных функций, получим окончательно

$$\varepsilon = c_v\rho\frac{dT}{dt} - A\frac{p}{\rho}\frac{d\rho}{dt}. \tag{11.5}$$

Это соотношение носит название *уравнения притока энергии*, или *уравнения притока тепла*.

Приведенный здесь вывод дан А. А. Фридманом [1]; во второй части нашего курса в главах, посвященных «газовой динамике» и «вязкой жидкости», мы дадим другие выводы этого весьма важного уравнения.

Кроме уравнения (11.5), мы должны еще написать соотношение, связывающее p, ρ и T. Для совершенных газов таким соотношением является уравнение Клапейрона

$$p = R\rho T, \tag{11.6}$$

где R — газовая постоянная.

Таким образом, мы имеем шесть уравнений: уравнение неразрывности (11.3) главы I, три уравнения движения (5.1) настоящей главы, уравнение притока энергии и уравнение состояния. Эти уравнения содержат как раз шесть неизвестных функций: v_x, v_y, v_z, p, ρ, T. К сожалению в (11.5) входит еще величина ε, которую не всегда можно считать известной. Простейшим и важным случаем будет отсутствие притока тепла извне, т. е. случай, когда

$$\varepsilon = 0, \tag{11.7}$$

В данном случае мы можем, сначала используя (11.6), написать (11.5) в виде

$$0 = c_v\frac{1}{T}\frac{dT}{dt} - RA\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt},$$

а затем, пользуясь еще раз (11.6), исключить T. В результате получим:

$$0 = c_v\left(\frac{1}{p}\frac{dp}{dt} - \frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt}\right) - AR\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt},$$

[1]) Фридман А. А., Опыт гидромеханики сжимаемой жидкости, ОНТИ 1934.

или, собирая члены с p и ρ,

$$0 = c_v \frac{d \ln p}{dt} - (c_v + R) \frac{d \ln \rho}{dt}.$$

Вспоминая соотношение термодинамики

$$c_p - c_v = AR,$$

где c_p — теплоемкость при постоянном давлении, мы получим окончательно для случая, когда $\varepsilon = 0$, уравнение притока энергии в виде

$$\frac{d}{dt} \frac{p}{\rho^\varkappa} = 0, \tag{11.8}$$

где

$$\varkappa = \frac{c_p}{c_v} \tag{11.9}$$

есть отношение теплоемкости при постоянном давлении к теплоемкости при постоянном объеме. Мы имеем здесь дело с так называемым *адиабатическим движением*. Величина $p/\rho^\varkappa$ связана с энтропией S соотношением

$$S = \frac{c_v}{A} \ln \frac{p}{\rho^\varkappa} + \text{const}. \tag{11.10}$$

В силу (11.8) энтропия при $\varepsilon = 0$ сохраняется в *частице* (хотя может меняться от точки к точке).

В частном случае может оказаться, что $p/\rho^\varkappa$ будет постоянным во всей среде. Уравнение (11.8) при этом удовлетворится. В этом случае мы будем иметь дело с баротропной жидкостью. В термодинамике, приведенной выше, это будет политропический процесс с показателем политропы $\varkappa$. Процесс этот называют *изэнтропическим* из-за постоянства энтропии.

Основные виды притока тепла, входящего в ε (когда (11.7) не выполняется), связаны с теплопроводностью, вязкостью и излучением. Для первых двух видов притока тепла мы можем выразить ε через наши шесть элементов и, таким образом, замкнуть при помощи уравнения состояния и уравнения притока тепла нашу систему. Во второй части этого курса в главе о вязкой жидкости мы увидим, как это конкретно делается. Введение излучения представляет следующее усложнение в том смысле, что интенсивность излучения появляется в качестве новой, седьмой неизвестной величины, для которой следует составить седьмое уравнение[1]). Однако в механике сжимаемой жидкости существует большое количество теорем общего

[1]) Кузнецов Е. С. Лучистый теплообмен в движущейся жидкой среде. Изв. АН СССР, серия географии и геофизики, 1941, № 1.

характера, которые выводятся без привлечения уравнения притока тепла и только из уравнения неразрывности и уравнений движения. Имеют эти общие теоремы и будут даны в первой части нашего курса, когда речь будет идти о сжимаемой жидкости (см., например, главу V).

§ 12. Начальные и граничные условия. Решения дифференциальных уравнений гидродинамики будут содержать произвольные функции и произвольные постоянные, которые нужно подчинить ряду добавочных условий для достижения определенности в решении конкретных задач о движении жидкости. Эти условия могут быть двоякого рода. Одни из них, называемые *начальными*, должны быть выполнены в начальный момент движения $t = 0$ во всех точках пространства, занятого жидкостью; другие, как называемые *граничные* условия, должны выполняться на границах жидкости в любой момент ее движения.

Если рассматривать движение идеальной несжимаемой жидкости в переменных Эйлера, то начальные условия состоят в том, что задается состояние движения, т. е. поле скоростей в начальный момент и, значит, решения $v_x(x, y, z, t)$, $v_y(x, y, z, t)$, $v_z(x, y, z, t)$ уравнений (10.1) должны при $t = 0$ обращаться в наперед заданные функции координат точек поля:

$$\left.\begin{aligned} v_x(x, y, z, 0) &= \varphi_1(x, y, z), \\ v_y(x, y, z, 0) &= \varphi_2(x, y, z), \\ v_z(x, y, z, 0) &= \varphi_3(x, y, z). \end{aligned}\right\} \tag{12.1}$$

Граничные условия могут быть нескольких видов.

Если жидкость среди своих границ имеет неподвижную стенку, сквозь которую жидкость не проникает и к которой жидкость прилегает без пустот во время движения, то такого рода граничное условие состоит в том, что во всех точках вдоль поверхности стенки скорость частиц жидкости должна быть перпендикулярна нормали к поверхности. Если $F(x, y, z) = 0$ представляет уравнение поверхности стенки, то последнее условие выразится очевидно соотношением

$$\frac{\partial F}{\partial x} v_x + \frac{\partial F}{\partial y} v_y + \frac{\partial F}{\partial z} v_z = 0. \tag{12.2}$$

Если стенка представляет собой подвижную поверхность, изменяющую при движении свою форму, так что уравнение поверхности будет вида

$$F(x, y, z, t) = 0, \tag{12.3}$$

и по-прежнему жидкость должна прилегать к стенке, не пропуская сквозь нее, то граничное условие, очевидно, будет состоять в том,

что скорость перемещения любой точки поверхности и скорость частицы жидкости, прилегающей в этой точке к поверхности, должны иметь одинаковые проекции на нормаль к поверхности. Пусть точка поверхности, имеющая в момент t координаты x, y, z, получит в следующий момент $t + dt$ координаты $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$, так как точка остается на поверхности (12.3), то

$$F(x + dx,\ y + dy,\ z + dz,\ t + dt) = 0, \tag{12.4}$$

или, разлагая в ряд Тейлора и ограничиваясь первыми членами разложения:

$$\frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy + \frac{\partial F}{\partial z}dz + \frac{\partial F}{\partial t}dt = 0. \tag{12.5}$$

Разделив (12.5) на dt и замечая, что

$$\frac{dx}{dt} = v_x,\quad \frac{dy}{dt} = v_y,\quad \frac{dz}{dt} = v_z$$

суть проекции скорости частицы, находим искомое граничное условие.

$$\frac{\partial F}{\partial x}v_x + \frac{\partial F}{\partial y}v_y + \frac{\partial F}{\partial z}v_z + \frac{\partial F}{\partial t} = 0. \tag{12.6}$$

Упомянутые здесь виды граничных условий не исчерпывают все возможные случаи. Своеобразные краевые условия возникают, например, на поверхностях разрыва, отделяющих рассматриваемую часть жидкости от других частей той же (или другой) жидкости. Так, например, если жидкость граничит с пустотой (или с воздухом), то во всех точках свободной поверхности [уравнение последней пусть будет $F(x, y, z, t) = 0$], кроме условия (12.6) должно выполняться для идеальной жидкости условие

$$p(x, y, z, t) = \text{const}.$$

Другие виды поверхностей разрыва и соответствующих краевых условий мы рассмотрим во второй части книги, в главе, посвященной вопросам газовой динамики.

§ 13. Применение закона количеств движения и закона моментов количеств движения. Эти законы установлены для всякой системы материальных точек, между которыми действуют внутренние силы взаимодействия, попарно равные и противоположные, так что главный вектор и главный момент внутренних сил равны нулю в каждое мгновение движения. В частности, оба закона будут приложимы для жидкости как идеальной, так и вязкой. В случае установившегося движения жидкости закон количеств движения и закон моментов допускают простую геометрическую интерпретацию, к установлению которой мы перейдем, ограничиваясь для простоты идеальной жидкостью и начав для большей наглядности с частного случая

Рассмотрим установившееся движение в элементарной трубке тока (рис. 22) и разберем изменение за бесконечно малый промежуток времени dt количества движения жидкого объема, заключенного в отрезке трубки ab. Пусть скорости в сечениях a и b v_1 и v_2 и пусть за время dt рассматриваемый объем перейдет в положение $a'b'$, так что

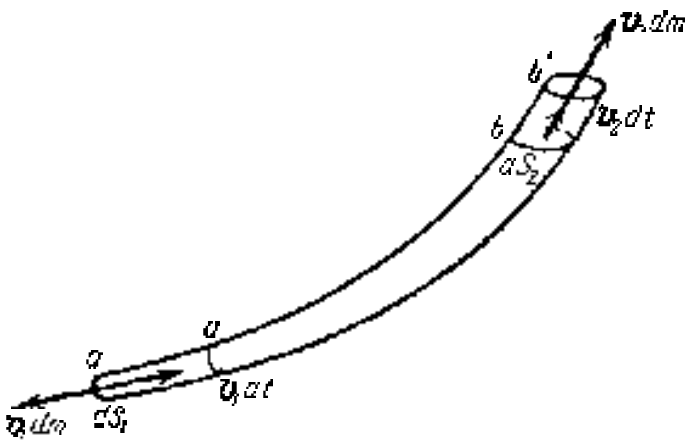

Рис. 22

$$\overrightarrow{aa'} = v_1\,dt \qquad \overrightarrow{bb'} = v_2\,dt.$$

Так как движение — установившееся, то общие части $a'b$ рассматриваемых двух объемов ab и $a'b'$ будут обладать одинаковыми количествами движения. Следовательно, искомое изменение количества движения выразится геометрической разностью количеств движения объемов bb' и aa'. Вследствие неразрывности движения массы жидкости, протекающей за время dt сквозь сечения a и b будут одинаковы, т. е.

$$dm = \rho_1 v_1\,dt\,dS_1 = \rho_2 v_2\,dt\cdot\rho_2\,dS_2,$$

где ρ_1 dS_1 и ρ_2, dS_2 суть плотности и площади в сечениях a и b. Таким образом, искомое изменение количества движения dK будет:

$$dK = v_2\,dm - v_1\,dm.$$

С другой стороны, вследствие закона количеств движения, dK будет равняться элементарному импульсу всех внешних сил, приложенных к объему ab, т. е. всех массовых сил и сил гидродинамических давлений, приложенных как к боковой поверхности трубки так и к сечениям a и b. Если массовые силы отсутствуют или если ими можно пренебречь по сравнению с силами давлений, то обозначая главный вектор последних через $\boldsymbol{P}$ имеем:

$$dK = v_2\,dm - v_1\,dm = \boldsymbol{P}\,dt. \tag{13.1}$$

Аналогично, применяя закон моментов количеств движения и повторяя предыдущее рассуждение, мы придем к соотношению:

$$dl = \boldsymbol{r}_2 \times v_2\,dm - \boldsymbol{r}_1 \times v_1\,dm = \boldsymbol{L}\,dt, \tag{13.2}$$

где $\boldsymbol{l}$ есть момент количеств движения жидкого объема ab, $\boldsymbol{r}_1$ и $\boldsymbol{r}_2$ — радиусы-векторы сечений a и b, $\boldsymbol{L}$ — главный момент сил гидродинамических давлений, приложенных ко всей замкнутой поверхности объема ab.

Равенства (13.1) и (13.2) могут быть объединены при помощи единой формулировки известной под названием *теоремы Эйлера*: *при отсутствии массовых сил совокупность гидродинамических давлений, приложенных ко всей поверхности некоторого отрезка трубки тока, эквивалентна в случае установившегося движения двум силам:*

$$v_2 \frac{dm}{dt} \quad \text{и} \quad -v_1 \frac{dm}{dt},$$

приложенным к концам отрезка и численно равным секундным количествам движения жидкости, вытекающей и втекающей в трубку через сечения на ее концах.

Если эти две силы пересекаются, то совокупность гидродинамических давлений есть такая совокупность сил, которая, будучи приложена к твердому телу может быть уравновешена одной силой равной $(v_1 - v_2)\frac{dm}{dt}$ и приложенной в точке пересечения векторов v_2 и v_1.

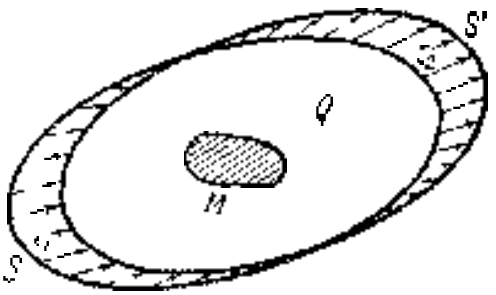

Рис. 23

Применим теперь закон количеств движения и закон моментов к любому связному объему жидкости конечных размеров.

Пусть, например, проведена неподвижная замкнутая поверхность S в потоке жидкости, обтекающем неподвижное твердое тело M (рис. 23). Жидкий объем, заключенный внутри S, имеет своей наружной границей поверхность S, а внутренней границей — поверхность твердого тела M. Через бесконечно малый промежуток времени dt жидкий объем переместится в положение S', которое мы получим отложив от каждого элемента поверхности S вектор $v\,dt$.

В случае установившегося течения жидкости количества движений в общей части Q объемов, заключенных в S и S', одинаковы, следовательно, изменение количества движения жидкого объема S за время dt выразится геометрической разностью:

$$dK = \int_{S'} v\,dm - \int_{S} v\,dm,$$

которая вследствие закона количеств движения при отсутствии массовых сил будет равна элементарному импульсу всех гидродинамических давлений, приложенных к границам жидкого объема, т. е. к поверхности S и поверхности M:

$$\int_{S'} v\,dm - \int_{S} v\,dm = P^S\,dt + P^M\,dt, \qquad (13.3)$$

где P^S и P^M – главные векторы давлений, приложенных к S и M.

Аналогично, применяя закон моментов количеств движений, приходим к равенству:

$$\int_{\tau} (r \times v)\, dm - \int_{\tau_1} (r \times v)\, dm = \boldsymbol{L}^S\, dt + \boldsymbol{L}^M\, dt. \qquad (13.4)$$

Оба равенства (13.3) и (13.4) выражают, что совокупность гидродинамических давлений на поверхностях S и M эквивалентна совокупности векторов приложенных к элементам поверхности S, численно равных секундным количествам движений жидкости протекающей через элементы этой поверхности, и направленных по течению в тех элементах, где жидкость вытекает, и противоположно там, где она втекает в поверхность S, которая при этом считается неподвижной.

Этот результат можно получить и чисто аналитическим путем. Если рассматривается установившееся движение жидкости, в котором можно пренебречь массовыми силами, то применение законов количеств движений и моментов количеств движений к объему τ, заключенному между неподвижной (так называемой контрольной) поверхностью S и поверхностью твердого тела M, дает

$$\frac{dK}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{\tau} v \rho\, d\tau = \boldsymbol{P}^S + \boldsymbol{P}^M$$

$$\frac{dl}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{\tau} (r \times v) \rho\, d\tau = \boldsymbol{L}^S + \boldsymbol{L}^M$$

Так как при нахождении полной производной d/dt мы следуем за частицами объема τ при их движении и так как при этом масса частицы $\rho\, d\tau$ остается неизменной, то знак производной d/dt можно отнести к векторам v и $r \times v$.

$$\frac{dK}{dt} = \int_{\tau} \frac{dv}{dt} \rho\, d\tau, \qquad (13.5)$$

$$\frac{dl}{dt} = \int_{\tau} \frac{d(r \times v)}{dt} \rho\, d\tau. \qquad (13.6)$$

Взяв проекцию (13.5) на неподвижную ось Ox, имеем:

$$\frac{dK_x}{dt} = \int_{\tau} \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} v_x + \frac{\partial v_x}{\partial y} v_y + \frac{\partial v_x}{\partial z} v_z \right) \rho\, d\tau$$

так как $\partial v_x/\partial t = 0$ вследствие того что движение установившееся. Применяя преобразования

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} v_x \rho = \frac{\partial \left(v_x^2 \rho\right)}{\partial x} - v_x \frac{\partial (v_x \rho)}{\partial x},$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} v_y \rho = \frac{\partial (v_x v_y \rho)}{\partial y} - v_x \frac{\partial (v_y \rho)}{\partial y},$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial z} v_z \rho = \frac{\partial (v_x v_z \rho)}{\partial z} - v_x \frac{\partial (v_z \rho)}{\partial z},$$

получаем

$$\frac{dK_x}{dt} = \int_\tau \left[\frac{\partial (v_x^2 \rho)}{\partial x} + \frac{\partial (v_x v_y \rho)}{\partial y} + \frac{\partial (v_x v_z \rho)}{\partial z} \right] d\tau - \int_\tau v_x \left[\frac{\partial (v_x \rho)}{\partial x} + \frac{\partial (v_y \rho)}{\partial y} + \frac{\partial (v_z \rho)}{\partial z} \right] d\tau.$$

Второй интеграл обращается в нуль вследствие уравнения неразрывности, которое при установившемся движении имеет вид

$$\frac{\partial (\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial (\rho v_z)}{\partial z} = 0.$$

Разбивая первый интеграл на три слагаемых и применяя к каждому преобразование Гаусса, находим:

$$\frac{dK_x}{dt} = \int_S \left[v_x^2 \rho \cos(n, x) + v_x v_y \rho \cos(n, y) + v_x v_z \rho \cos(n, z) \right] dS,$$

или

$$\frac{dK_x}{dt} = \int_S v_x \rho v_n \, dS,$$

аналогичным путем получаем для других равенства:

$$\frac{dK_y}{dt} = \int_S v_y \rho v_n \, dS, \qquad \frac{dK_z}{dt} = \int_S v_z \rho v_n \, dS,$$

которые вместе с первым можно объединить одним векторным

$$\frac{dK}{dt} = \int_S \rho v v_n \, dS \tag{13.7}$$

Применяя аналогичные рассуждения, приходим к следующему выражению производной от момента количеств движения:

$$\frac{dl}{dt} = \int_S (r \times v) \rho v_n \, dS \tag{13.8}$$

Так как $\rho v_n \, dS$ есть масса жидкости протекающая в единицу времени через элемент поверхности dS, то выражения (13.7) и (13.8) показывают, что dK/dt и dl/dt можно рассматривать как главный вектор и главный момент системы векторов $\rho v v_n \, dS$, распределенных по поверхности S, и мы приходим к объединяющей оба закона (13.5) и (13.6) формулировке:

Совокупность поверхностных сил гидродинамических давлений приложенных к поверхности S объема τ при установившемся движении, эквивалентна совокупности количеств движения жидкости, ежесекундно уносимых сквозь поверхность S.

Эта интерпретация закона количеств движения и закона моментов может оказаться полезной для расчета суммарного эффекта давлений установившегося потока на неподвижное твердое тело, погруженное

в поток полностью или частично. В последнем случае контрольную поверхность S следует провести в непосредственной близости к телу со стороны жидкости.

Рассмотрим для примера, следуя Прандтлю, косой удар двумерной струи несжимаемой жидкости на плоскую пластинку (рис. 24)

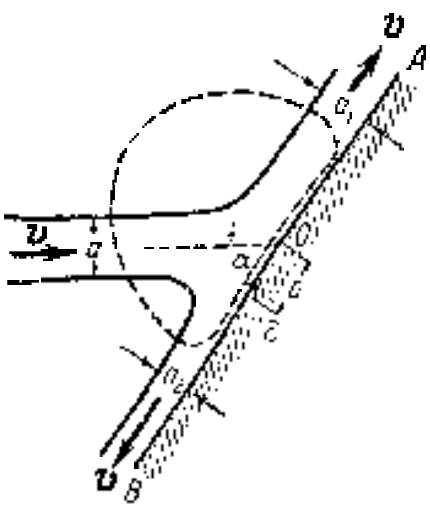

Рис. 24

Пусть плоская струя воды, текущая из бесконечности прямолинейно со скоростью v одинаковой для всех точек поперечного сечения ширины a, встречает под углом α плоскую бесконечную пластинку AB и разветвляется на две струи, линии тока которых по мере удаления от места разветвления асимптотически становятся параллельными пластинке; пусть ширина этих струй в бесконечности будет a_1 и a_2. Заметим, что скорости струй в сечениях a_1 и a_2 будут одинаковы со скоростью (в бесконечности) неразветвленной струи. В самом деле принимая плоскость течения за плоскость Oxy, имеем $v_z = 0$, и первые два уравнения Ламба (7.1) примут вид:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}v^2\right) - v_y\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x},$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{2}v^2\right) + v_x\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right) = -\frac{\partial p}{\partial y};$$

при этом движение считается установившимся, массовые силы отсутствующими и $\rho = 1$.

Умножая эти уравнения на dx и dy, взятые вдоль *одной и той же линии тока*:

$$dx = v_x\,dt \quad dy = v_y\,dt,$$

и складывая находим без труда интеграл (Бернулли)

$$\frac{1}{2}v^2 + p = \text{const},$$

справедливый для данной линии тока. Считая давление p на свободной поверхности струи повсюду одинаковым и равным атмосферному давлению p_0, мы приходим к заключению, что будут повсюду одинаковы и скорости частиц у свободной поверхности струи, а так как в сечении a скорости всех частиц равны v, то такой же скоростью будут обладать все частицы в сечениях a_1 и a_2. Для расчета сил давлений на пластинку возьмем контур контрольной поверхности S, показанный пунктиром на рис. 24, так, чтобы он прилегал к пластинке между двумя достаточно удаленными сечениями a_1 и a_2 и пересекал неразветвленную струю также в доста-

точно удаленном сечении a. Самую поверхность S можно представлять как полную поверхность цилиндра единичной высоты, для которого упомянутый контур в плоскости течения служит основанием и образующие которого перпендикулярны к плоскости течения. Форма контура на участке между сечениями a_1, a, a_2 остается произвольной, и можно, например, за этот контур взять свободную границу струи. Как было отмечено, давление p_0 на части поверхности S, не прилегающей к пластинке, постоянно; переменное же давление на части прилегающей к пластинке, можно представить в виде

$$p = p_0 + (p - p_0)$$

Замечая, что при интегрировании по *замкнутой* поверхности S

$$\int_S p_0 \, dS = 0$$

и что система параллельных сил $(p - p_0)\,dS$, или что то же $(p - p_0)\,a\,b$, сложится в одну силу

$$P = \int (p - p_0)\,dS,$$

приложенную в некоторой точке, называемой *центром давления*, мы имеем по теореме импульсов

$$P = \int_{(a_1)} v\,dm + \int_{(a_2)} v\,dm - \int_{(a)} v\,dm = a_1 v v_1 + a_2 v v_2 - a v v$$

Проектируя на параллельное и перпендикулярное пластинке направления, находим

$$P = a v^2 \sin\alpha, \quad 0 = a_1 v^2 - a_2 v^2 - a v^2 \cos\alpha.$$

Из последнего уравнения имеем

$$a_1 - a_2 = a\cos\alpha$$

и, так как вследствие уравнения неразрывности должно быть $a_1 + a_2 = a$, то

$$a_1 = \frac{1 + \cos\alpha}{2}\,a; \quad a_2 = \frac{1 - \cos\alpha}{2}\,a.$$

Для определения положения центра давлений воспользуемся теоремой о моментах импульсов. Обозначая через O точку пересечения пластинки с осью неразветвленной струи, по которой направлен импульс avv, приложенный в сечении a, возьмем точку O за центр моментов, тогда импульсы $a_1 v v_1$ и $a_2 v v_2$, приложенные в сечениях

a_1 и a_2 и их серединах, будут иметь плечи $a_1/2$ и $a_2/2$, и теорема моментов дает

$$a_1 v^2 \frac{a_1}{2} - a_2 v^2 \frac{a_2}{2} = Pe,$$

где e — расстояние центра давлений от точки O.

Заменяя здесь P через его предыдущее выражение, находим

$$e = \frac{a}{2} \operatorname{ctg} \alpha.$$

§ 14. Уравнение энергии. Умножим скалярно обе части уравнения (6.1) на $v\,dt$, получим:

$$F \cdot v\,dt - v \cdot dv = \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p \cdot v\,dt, \tag{14.1}$$

или

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz - d\left(\frac{1}{2} v^2\right) = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial x} v_x + \frac{\partial p}{\partial y} v_y + \frac{\partial p}{\partial z} v_z\right) dt. \tag{14.2}$$

Если поле внешних массовых сил стационарно и силы имеют потенциал V_1, который можно назвать потенциальной энергией *единицы массы* движущейся жидкости, т. е

$$X = -\frac{\partial V_1}{\partial x}, \quad Y = -\frac{\partial V_1}{\partial y}, \quad Z = -\frac{\partial V_1}{\partial z},$$

то (14.2) принимает вид:

$$dV_1 + d\left(\frac{1}{2} v^2\right) = -\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial x} v_x + \frac{\partial p}{\partial y} v_y + \frac{\partial p}{\partial z} v_z\right) dt. \tag{14.3}$$

Вспоминая определение индивидуальной (полной) производной

$$\frac{dp}{dt} = \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} v_x + \frac{\partial p}{\partial y} v_y + \frac{\partial p}{\partial z} v_z,$$

мы можем представить (14.3) еще в таком виде:

$$d(T_1 + V_1) = -\frac{1}{\rho}\left(\frac{dp}{dt} - \frac{\partial p}{\partial t}\right) dt, \tag{14.4}$$

где $T_1 = v^2/2$.

Последнее уравнение представляет собой выражение закона живой силы для *единицы массы* жидкости.

Вводя обозначение

$$p_1 = \frac{1}{\rho}\left(\frac{dp}{dt} - \frac{\partial p}{\partial t}\right),$$

можно написать:

$$d(T_1 + V_1) = -p_1\,dt. \tag{14.5}$$

умножая (14.5) на элементарную массу $\rho\, d\tau$ и интегрируя по некоторому жидкому объему τ, ограниченному замкнутой поверхностью S, имеем:

$$\int_{\tau} d(T_1 + V_1)\rho\, d\tau = -\int_{\tau} \mu_1 \rho\, dt\, d\tau.$$

Так как рассматривается жидкий движущийся объем состоящий из одних и тех же частиц, то $\rho\, d\tau$ не зависит от времени и можно написать:

$$d\int_{\tau} (T_1 + V_1)\rho\, d\tau = -dt \int_{\tau} \mu_1 \rho\, d\tau,$$

или

$$\frac{d}{dt}\int_{\tau} T_1 \rho\, d\tau + \frac{d}{dt}\int_{\tau} V_1 \rho\, d\tau = -\int_{\tau} \left(\frac{dp}{dt} - \frac{\partial p}{\partial t}\right) d\tau. \qquad (14.6)$$

Выражение

$$\int_{\tau} T_1 \rho\, d\tau = \int_{\tau} \frac{1}{2}\rho v^2\, d\tau$$

представляет собою живую силу, или кинетическую энергию T рассматриваемого жидкого объема интеграл $\int_{\tau} V_1 \rho\, d\tau$ может быть назван потенциальной энергией V всего жидкого объема τ, а $\int_{\tau} \mu_1 \rho\, d\tau$ — мерой диссипативности объема; таким образом:

$$\frac{d}{dt}(T + V) = -\int_{\tau} \left(\frac{dp}{dt} - \frac{\partial p}{\partial t}\right) d\tau. \qquad (14.7)$$

Заменяя в правой части разность $\frac{dp}{dt} - \frac{\partial p}{\partial t}$ через

$$\frac{\partial p}{\partial x} v_x + \frac{\partial p}{\partial y} v_y + \frac{\partial p}{\partial z} v_z$$

и применяя преобразования:

$$\frac{\partial p}{\partial x} v_x = \frac{\partial (p v_x)}{\partial x} - p\frac{\partial v_x}{\partial x},$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} v_y = \frac{\partial (p v_y)}{\partial y} - p\frac{\partial v_y}{\partial y},$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} v_z = \frac{\partial (p v_z)}{\partial z} - p\frac{\partial v_z}{\partial z},$$

мы приведем соотношение (14.7) к виду

$$\frac{d}{dt}(T + V) = -\int_{\tau} \operatorname{div}(p\mathbf{v})\, d\tau + \int_{\tau} p \operatorname{div} \mathbf{v}\, d\tau.$$

Применяя, наконец, преобразование Гаусса:

$$\int_\tau \operatorname{div}(\rho \mathbf{v})\, d\tau = \int_S \rho v_n\, dS,$$

мы приходим к соотношению

$$\frac{d}{dt}(T+V) = -\int_S p(\alpha v_x + \beta v_y + \gamma v_z)\, dS + \int_\tau p\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right) d\tau, \quad (14.8)$$

где α, β, γ суть косинусы углов, образованных внешней нормалью к поверхности S с координатными осями. Последнее уравнение носит название *уравнения энергии*. Поверхностный интеграл

$$-\int_S p(\alpha v_x + \beta v_y + \gamma v_z)\, dS$$

можно рассматривать как отнесенную к единице времени работу поверхностных сил гидродинамических давлений, приложенных к поверхности S жидкого объема. Интеграл же

$$\int_\tau p\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right) d\tau$$

можно рассматривать как секундную работу внутренних сил, связанную с расширением каждого элемента объема τ, ибо, как было показано в кинематике, расхождение скорости $\partial v_x/\partial x + \partial v_y/\partial y + \partial v_z/\partial z$ есть не что иное, как секундное относительное кубическое расширение жидкости. Для несжимаемой жидкости этот член в уравнении (14.8) выпадает, и уравнение энергии принимает вид

$$\frac{d}{dt}(T+V) = -\int_S p(\alpha v_x + \beta v_y + \gamma v_z)\, dS. \quad (14.9)$$

Если, кроме того, жидкий объем заключен в неподвижные границы, вдоль которых

$$\alpha v_x + \beta v_y + \gamma v_z = 0,$$

то (14.9) принимает вид

$$\frac{d}{dt}(T+V) = 0,$$

откуда заключаем, что в таком объеме сумма кинетической и потенциальной энергии остается с течением времени неизменной:

$$T + V = \text{const}. \quad (14.10)$$

§ 15. Упражнения. 1. Тяжелая несжимаемая жидкость, налитая в вертикальный цилиндрический круговой сосуд, вращается как твердое тело с постоянной угловой скоростью ω вокруг оси цилиндра (рис. 25). Определить давление в каждой точке вращающейся жидкости, если известно, что в состоянии покоя жидкость имела уровень h от дна сосуда и что над поверхностью жидкости нет давления.

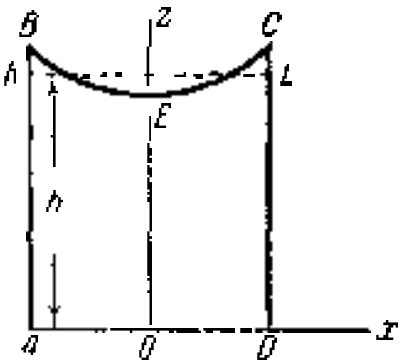

Рис. 25.

Решение. Приняв ось цилиндра за ось Oz и взяв начало координат у дна, имеем по задаче

$$v_x = -\omega y, \quad v_y = \omega x, \quad v_z = 0, \quad \rho = \text{const}.$$

Уравнения Эйлера дают,

$$-\omega^2 x = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}, \quad -\omega^2 y = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y},$$

$$0 = -g - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z},$$

откуда по умножении на dx, dy, dz и сложении получим для dp выражение

$$dp = \omega^2\rho\,(x\,dx + y\,dy) - \rho g\,dz$$

или

$$dp = d\left[\frac{1}{2}\omega^2\rho\,(x^2+y^2) - g\rho z\right]$$

и после интегрирования:

$$p = \frac{1}{2}\omega^2\rho\,(x^2+y^2) - g\rho z + C.$$

На поверхности жидкости $p = 0$; уравнение поверхности

$$\frac{1}{2}\omega^2\rho\,(x^2+y^2) - g\rho z + C = 0$$

дает параболоид вращения, вводя обозначение $OL = h'$, имеем:

$$C = g\rho h'.$$

Для определения h' имеем условие сохранения объема в полое и при вращении

$$\pi a^2 h = \int_0^{2\pi}\int_0^a zr\,dr\,d\varphi,$$

где r и φ — полярные координаты. Вычисляя, имеем:

$$\pi a^2 h = \int_0^{2\pi}\int_0^a \left(h' + \frac{\omega^2}{2g}r^2\right) r\,dr\,d\varphi \quad \text{или} \quad \pi a^2 h = \pi a^2\left(h' + \frac{\omega^2}{4g}a^2\right),$$

откуда

$$h' = h - \frac{\omega^2}{4g}a^2$$

и давление в любой точке будет

$$p = g\rho(h - z) + \frac{1}{2}\omega^2\rho\left[x^2 + y^2 - \frac{1}{2}a^2\right].$$

2. По условиям предыдущей задачи вычислить полное давление на дно сосуда.

Ответ. $P = \pi g\rho a^2 h =$ давлению в состоянии покоя.

3. Некоторый объем жидкости занимает длину $2l$, находясь в прямой трубке с малой постоянной площадью сечения. На каждую частицу жидкости действует внешняя сила, направленная вдоль трубки к постоянной точке и пропорциональная расстоянию частицы от этой точки. Определить движение жидкости и давление в каждой ее частице. (Рамсей)

Решение. Взяв ось трубки за ось Ox и приняв начало координат в постоянной точке, имеем из уравнения неразрывности:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = 0$$

ибо

$$v_y = 0 \quad \text{и} \quad v_z = 0$$

тогда уравнения Эйлера получают вид

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = -\mu x - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}; \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = 0.$$

Интегрируя по x, находим

$$x\frac{\partial v_x}{\partial t} = -\frac{1}{2}\mu x^2 - \frac{p}{\rho} + C,$$

ибо v_x и $\partial v_x/\partial t$ от x не зависят.

Граничные условия дают $p = 0$ при $x = z$ и при $x = z + 2l$ т. е.

$$z\frac{\partial v_x}{\partial t} = C - \frac{1}{2}\mu z^2; \quad (z + 2l)\frac{\partial v_x}{\partial t} = C - \frac{1}{2}\mu(z + 2l)^2,$$

откуда

$$C = z\frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{1}{2}\mu z^2, \quad \frac{\partial v_x}{\partial t} = -\mu(z + l)$$

Но

$$v_x = -\frac{dz}{dt} = z$$

и значит

$$\ddot{z} + \mu(z + l) = 0,$$

откуда, интегрируя получаем

$$z + l = A\sin(\sqrt{\mu}t + \varepsilon)$$

и значит

$$\frac{p}{\rho} = C - \frac{1}{2}\mu x^2 - x\frac{\partial v_x}{\partial t} = (z - x)\frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{1}{2}\mu(z^2 - x^2) =$$

$$= -\mu(z + l)(z - x) + \frac{1}{2}\mu(z^2 - x^2) = \frac{1}{2}\mu(x - z)(z + 2l - x),$$

т. е. давление определено для каждой точки жидкости при любом положении всего жидкого объема, совершающего гармонические колебания около начала координат.

Для середины объема будет $\frac{p}{\rho} = \frac{1}{2} \mu l^2$

4. Убедиться, что при взрыве мины под водой взрывное давление изменяется обратно пропорционально расстоянию от места взрыва

Решение. Эффект взрыва в точке O состоит в сообщении за весьма малый промежуток времени Δt скоростей частицам жидкости, расположенным вокруг O. Считая картину явления симметричной, будем предполагать, что скорости всех точек направлены по радиусам-векторам и зависят только от удаления их от точки взрыва; окружим эту точку двумя концентрическими сферами S_1 радиуса l и S радиуса r и назовем скорости частиц жидкости на этих сферах через v_1 и v (рис. 26).

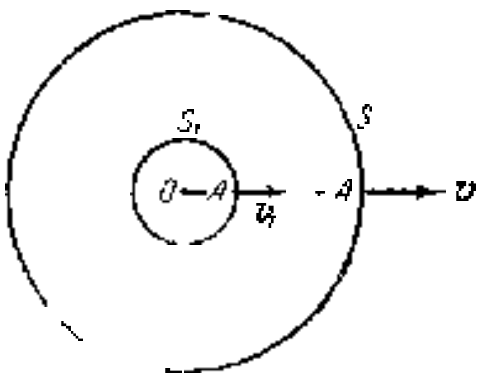

Рис. 26.

В силу несжимаемости жидкости через сферы S_1 и S за время Δt протечет одинаковый объем жидкости, т. е. $4\pi v_1 \Delta t = 4\pi r^2 v \Delta t$, откуда

$$v = \frac{v_1}{r^2}$$

или векторно, для точек A_1 и A, лежащих на одном радиусе,

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{v}_1}{r^2}.$$

Применяя уравнение Эйлера в векторной форме, имеем

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{k} - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p.$$

За время Δt скорость частицы в точке A изменилась от 0 до v_1/r^2, значит ускорение dv/dt приближенно равно $v_1/r^2 \Delta t$ и велико по сравнению с массовой силой F; отбрасывая последнюю имеем:

$$\operatorname{grad} p = -\frac{\rho v_1}{r^2 \Delta t} = -\frac{k}{r^2},$$

где для краткости положено

$$k = \frac{\rho v_1}{\Delta t},$$

т. е. градиент взрывного давления направлен к центру.

Отсюда заключаем

$$p = \frac{k}{r}.$$

5. Вертикальная трубка AB малого постоянного сечения (рис. 27) разветвляется в нижнем конце на две горизонтальные трубки BC и BD, сечения которых тоже постоянны и равны каждое половине сечения вертикальной трубки; при стыке труб имеются краны, запирающие горизонтальные трубки. Краны заперты и вертикальная трубка наполнена жидкостью до высоты $AB = a$. Определить движение после того, как краны будут одновременно открыты.

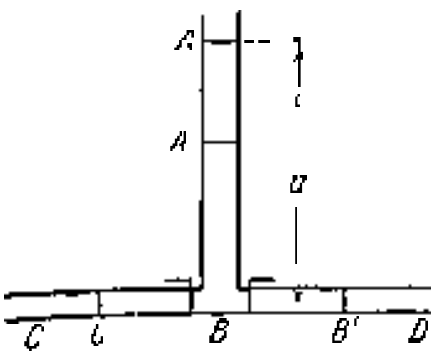

Рис. 27.

Решение. Обозначим через z переменную высоту жидкости $A'B$ по прошествии времени t от начала движения, а через z' длину $BB' = BC'$ жидкости в тот же момент в горизонтальных трубках. Так как объем жидкости остается неизменным, то $z + z' = a$.

Если p есть давление, а u — скорость в некоторой точке столба BA' на расстоянии x от B, то уравнение неразрывности дает $\partial u/\partial x = 0$ и уравнение Эйлера для этой точки принимает вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -g - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}.$$

Интегрируя по x, находим

$$x\frac{\partial u}{\partial t} = f(t) - gx - \frac{p}{\rho},$$

где $f(t)$ — произвольная функция времени. Пренебрегая атмосферным давлением, имеем $p = 0$ при $x = z$, и значит

$$z\frac{\partial u}{\partial t} = f(t) - gz.$$

Исключая из двух последних равенств $f(t)$, получаем

$$\frac{p}{\rho} = (z - x)\left(g + \frac{\partial u}{\partial t}\right)$$

и, в частности, для точки B будет

$$\frac{p}{\rho} = z\left(g + \frac{\partial u}{\partial t}\right). \tag{15.1}$$

Аналогично, называя через p' и u' давление и скорость в некоторой точке горизонтальной трубки в расстоянии x' от B, имеем

$$\frac{\partial u'}{\partial x'} = 0 \text{ — уравнение неразрывности,}$$

$$\frac{\partial u'}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p'}{\partial x'} \text{ — уравнение Эйлера.}$$

Интегрируя и исключая произвольную функцию, получаем

$$\frac{p'}{\rho} = (z' - x')\frac{\partial u'}{\partial t},$$

и для точки B:

$$\frac{p}{\rho} = -x'\frac{\partial u}{\partial t}. \tag{15.2}$$

Сравнивая (15.1) и (15.2) для одной и той же точки B имеем $p = p'$ и значит

$$z' \frac{du'}{dt} = z\left(g + \frac{du}{dt}\right), \tag{15.3}$$

но

$$u = \frac{dz}{dt} = \dot{z}, \quad u' = \frac{dz'}{dt} = \dot{z}';$$

кроме того

$$z + z' = a$$

и значит

$$z' = -\dot{z}$$

Исключая из (15.3) z и u' получаем

$$-(a - z)\ddot{z} = z(g + \ddot{z}) \quad \text{или} \quad a\ddot{z} - g = 0$$

Общий интеграл последнего уравнения есть

$$z = A\sin\left(\sqrt{\frac{g}{a}}\, t + \alpha\right).$$

Удовлетворяя начальным условиям $z = a$, $\dot{z} = 0$ при $t = 0$, находим, что движение уровня жидкости в вертикальной трубке будет выражаться формулой

$$z = a\cos\left(\sqrt{\frac{g}{a}}\, t\right)$$

до тех пор, пока трубка не опорожнится, что произойдет через время $t = (\pi/2)\sqrt{a/g}$. Этот же результат можно получить сразу, применяя интеграл живой силы (14.10):

$$\frac{1}{2}\rho\omega z^2 - \rho g z \frac{z^2}{2} = \rho g z \frac{a^2}{2},$$

где ω — площадь поперечного сечения трубки AB. Отсюда

$$z = -\sqrt{\frac{g}{a}}\sqrt{a^2 - z^2}$$

и после интегрирования

$$z = a\cos\left(\sqrt{\frac{g}{a}}\, t\right)$$

6. Газ движется при постоянной температуре по прямолинейной трубке постоянного сечения. Пренебрегая силой тяжести, составить дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет скорость v, считая что она во всех точках одного и того же поперечного сечения в момент t одинакова и направлена вдоль трубки.

Направив ось Ox вдоль трубки и фиксировав начало координат, имеем уравнение Эйлера

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} v = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x},$$

уравнение неразрывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho v)}{\partial x} = 0$$

и уравнение состояния, выражающее закон Бойля — Мариотта,

$$p = k\rho$$

Задача сводится к составлению одного уравнения, содержащего только v. Дифференцируя по t уравнение Эйлера, имеем:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x\, \partial t} v + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{k}{\rho} \frac{\partial^2 \rho}{\partial x\, \partial t} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial t} \frac{\partial \rho}{\partial x}$$

или

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial x}\left(v \frac{\partial v}{\partial t}\right) = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{k}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t}\right),$$

заменяя $\partial \rho / \partial t$ из уравнения неразрывности и вынося в правой части дифференцирование, находим:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial x}\left(v \frac{\partial v}{\partial t}\right) = k \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x}\left(k v \frac{\partial \rho}{\partial x}\right)$$

Вследствие уравнения состояния и уравнения Эйлера будем иметь:

$$\frac{k v}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{v}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = -v \frac{\partial v}{\partial t} - v^2 \frac{\partial v}{\partial x};$$

подставляя в предыдущее равенство, приходим к искомому уравнению после переноса двух последних членов в левую часть

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial x}\left(2v \frac{\partial v}{\partial t} + v^2 \frac{\partial v}{\partial x}\right) = k \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}.$$

7. Показать, что для сжимаемой жидкости, движущейся в условиях задачи 6, будет справедливо соотношение

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\left(v^2 + k\right)\rho\right].$$

Решение. Имеем уравнение Эйлера

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} v = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x},$$

которое при $p/\rho = k$ принимает вид

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} v = -\frac{k}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x},$$

и уравнение неразрывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho v)}{\partial x} = 0.$$

Дифференцируя последнее по t, находим

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 (\rho v)}{\partial x\, \partial t} = 0, \tag{15.4}$$

С другой стороны, уравнение Эйлера дает

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} = -\left(\rho v \frac{\partial v}{\partial x} + k \frac{\partial \rho}{\partial x}\right), \tag{15.5}$$

а уравнение неразрывности дает

$$v \frac{\partial \rho}{\partial t} = -v \frac{\partial (\rho v)}{\partial x} = -\left(\rho v \frac{\partial v}{\partial x} + v^2 \frac{\partial \rho}{\partial x}\right). \tag{15.6}$$

Складывая (15.5) и (15.6), находим

$$\frac{\partial (\rho v)}{\partial t} = -\left[2\rho v \frac{\partial v}{\partial x} + (v^2 + k) \frac{\partial \rho}{\partial x}\right] = -\frac{\partial}{\partial x}[(v^2 + k)\rho]. \tag{15.7}$$

Дифференцируя (15.7) по x и подставляя в (15.1), приходим к искомому соотношению.

8. Два одинаковых закрытых цилиндрических сосуда высотою c, основания которых лежат в одной горизонтальной плоскости и соединены трубкой с краном, наполнены — один водою, другой воздухом, давление которого p_0 может уравновесить столб воды высоты h, причем $h < c$ (рис. 28). В некоторый момент кран открывается и устанавливается сообщение между сосудами. Найти наибольшую высоту поднятия воды во втором сосуде, считая, что воздух в нем сжимается изотермически.

Решение. Обозначим через p давление и через τ — объем воздуха в сосуде B, когда вода в нем поднялась на некоторую высоту x; тогда по закону Бойля — Мариотта будет

$$\frac{p}{p_0} = \frac{\tau_0}{\tau} = \frac{c}{c - x},$$

откуда

$$p - \frac{cp_0}{c - x} = \frac{chg\rho}{c - x}. \tag{15.8}$$

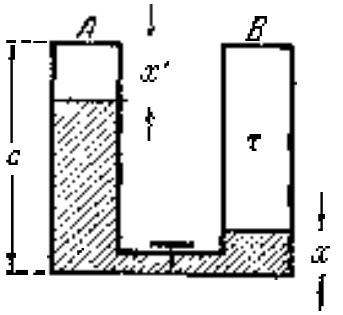

Рис. 28.

Применяя уравнение энергии (14.9) ко всему объему жидкости, имеем

$$\frac{d(T + V)}{dt} = -\int p \frac{dx}{dt} dS = -p \frac{dx}{dt} S,$$

где интеграл распространен только на поверхность воды в сосуде B, так как в сосуде $Ap = 0$, а вдоль твердых стенок $\alpha v_x + \beta v_y + \gamma v_z = 0$.

Вследствие (15.8) имеем

$$d(T + V) = -\frac{Schg}{c - x} dx,$$

откуда интегрируя по x, имеем:

$$T + V = Schg \lg (c - x) + C.$$

Потенциальная энергия V жидкого объема равна весу всего объема, умноженному на высоту x_c центра тяжести:

$$V = cgS \cdot x_c = (c - x) Sg \frac{c - x}{2} + xSg \frac{x}{2} = \frac{c^2}{2} Sg - cxSg + x^2 Sg.$$

Подставляя в предыдущее равенство, находим:

$$T + \frac{1}{2} Sgc^2 - Sgcx + Sgx^2 - Sgch \lg (c - x) = C$$

В начале движения при $x = 0$ будет $T = 0$ и мы определяем значение постоянной C.

$$\frac{1}{2} Sgc^2 - Sgch \lg c = C.$$

Таким образом,

$$T - Sgcx + Sgx^2 - Sgch \lg \frac{c - x}{c} = 0.$$

В тот момент когда вода достигает наибольшей высоты в сосуде B, скорость каждой частицы обращается в нуль и, значит, $T = 0$. Следовательно, высота наибольшего подъема служит корнем уравнения

$$cx - x^2 + ch \lg \frac{c - x}{c} = 0.$$

ГЛАВА ТРЕТЬЯ

ГИДРОСТАТИКА

А. ГИДРОСТАТИЧЕСКОЕ ДАВЛЕНИЕ

§ 1. Уравнения равновесия. Для покоящейся жидкости гидродинамическое уравнение (6 I) предыдущей главы принимает вид:

$$F - \frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p = 0 \qquad (1.1)$$

или в проекциях

$$X = \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}, \quad Y = \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}, \quad Z = \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}. \qquad (1.2)$$

Последние уравнения называются *уравнениями равновесия*.

В случае отсутствия массовых сил уравнения равновесия примут вид:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = 0,$$

т. е давление одинаково во всех точках жидкости, это соотношение известно под названием *закона Паскаля*.

Для тяжелой жидкости уравнения равновесия дают:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = \rho g, \qquad (1.3)$$

если направить ось Oz вертикально вниз. Первые два уравнения выражают, что $p = \text{const}$ для всех точек на любой горизонтальной плоскости, которые являются, таким образом поверхностями равного давления или так называемыми *поверхностями уровня*. Третье уравнение (1 3) для несжимаемой жидкости дает:

$$p = \rho g z + C, \qquad (1.4)$$

считая g постоянной величиной в некоторой ограниченной области близ земной поверхности.

Если покоящаяся жидкость имеет свободную поверхность, к которой приложено одинаковое во всех точках внешнее давление p_0, то эта поверхность должна быть горизонтальной плоскостью. Взяв

на ней начало координат, имеем из (1.1) $C = p_0$ при $z = 0$ и получаем таким образом соотношение

$$p = p_0 - \rho g z, \tag{1.5}$$

выражающее известный гидростатический закон: давление на глубине z от поверхности равно внешнему давлению, сложенному с весом столба жидкости, высота которого есть z, а площадь основания равна единице. Этот закон остается справедливым и для сжимаемой жидкости, так как и в этом случае из уравнений (1.3) следует:

$$p_2 - p_1 = \int_{z_1}^{z_2} g\rho\, dz = \text{весу столба высотою } z_2 - z_1,$$

где g и ρ суть некоторые функции от z.

§ 2. Условие для сил. Уравнения равновесия дают нам некоторое ограничение на характер массовых сил, способных создать равновесие жидкости. Чтобы вывести искомое условие, напишем очевидные соотношения, получаемые из уравнений равновесия после предварительного умножения на ρ и последующих дифференцирований:

$$\frac{\partial(\rho Z)}{\partial y} = \frac{\partial(\rho Y)}{\partial z} = \frac{\partial^2 p}{\partial y\,\partial z},$$
$$\frac{\partial(\rho X)}{\partial z} = \frac{\partial(\rho Z)}{\partial x} = \frac{\partial^2 p}{\partial x\,\partial z},$$
$$\frac{\partial(\rho Y)}{\partial x} = \frac{\partial(\rho X)}{\partial y} = \frac{\partial^2 p}{\partial x\,\partial y}.$$

Выполняя дифференцирование, находим:

$$\rho\left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right) = Y\frac{\partial \rho}{\partial z} - Z\frac{\partial \rho}{\partial y},$$
$$\rho\left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}\right) = Z\frac{\partial \rho}{\partial x} - X\frac{\partial \rho}{\partial z},$$
$$\rho\left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right) = X\frac{\partial \rho}{\partial y} - Y\frac{\partial \rho}{\partial x}.$$

Умножая на X, Y, Z и складывая, получаем искомое условие:

$$X\left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right) + Y\left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}\right) + Z\left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right) = 0, \tag{2.1}$$

которое можно короче представить в векторной форме:

$$\boldsymbol{F} \cdot \operatorname{rot} \boldsymbol{F} = 0. \tag{2.2}$$

В геометрии доказывается, что при соблюдении условия (2.1) система силовых линий

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \frac{dz}{Z}$$

может быть пересечена системой ортогональных к ним поверхностей.

В случае однородной несжимаемой жидкости $\rho = \text{const}$, и уравнения равновесия (1.2) дают непосредственно

$$X = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{p}{\rho}\right), \quad Y = -\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{p}{\rho}\right), \quad Z = -\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{p}{\rho}\right),$$

т. е. массовые силы при равновесии должны иметь потенциал

$$V = -\frac{p}{\rho} + C,$$

так что

$$\boldsymbol{F} = -\operatorname{grad} V.$$

В этом случае условие (2.1) выполняется само собой, так как

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{F} = -\operatorname{rot}\operatorname{grad} V = 0.$$

§ 3. Барометрическая формула. Рассматривая атмосферу как покоящуюся сжимаемую жидкость можно установить приближенную зависимость между высотой над поверхностью земли и атмосферным давлением на рассматриваемой высоте, известную под названием *барометрической формулы*.

Взяв начало координат на уровне моря и направив ось Oz вертикально вверх, напишем уравнения равновесия:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g'. \tag{3.1}$$

Здесь ρ есть плотность на некоторой высоте z, связанная с давлением p и абсолютной температурой T уравнением состояния (Клапейрона).

$$p = R\rho T,$$

где R — газовая постоянная. Вводя обычную температуру τ в градусах Цельсия

$$T = 273 + \tau$$

и обозначая $1/273 = \alpha$ (коэффициент температурного расширения воздуха), напишем уравнение Клапейрона в форме

$$\frac{p}{\rho(1+\alpha\tau)} = 273R. \tag{3.2}$$

Вводя для удобства обозначение $273R = 1/k$, имеем из (3.2):

$$\rho = \frac{kp}{1+\alpha\tau}.$$

Подставляя в уравнение (3.1), получаем:

$$\frac{dp}{p} = -\frac{kg'}{1+a\tau}dz. \tag{3.3}$$

Величина ускорения силы тяжести g' на высоте z изменяется обратно пропорционально квадрату расстояния от центра земли, как это следует непосредственно из закона тяготения, если пренебречь при этом вращением земли. Принимая землю за шар радиуса a и обозначая через g величину ускорения силы тяжести на уровне моря, имеем:

$$\frac{g'}{g} = \frac{a^2}{(a+z)^2}.$$

Определенное отсюда значение g' подставим в уравнение (3.3)

$$\frac{dp}{p} = -\frac{kga^2}{1+a\tau}\frac{dz}{(a+z)^2}$$

и интегрируя между высотами z_1 и z_2, на которых давление обозначим через p_1 и p_2 получаем:

$$\ln\frac{p_2}{p_1} = -kga^2\int_{z_1}^{z_2}\frac{1}{1+a\tau}\frac{dz}{(a+z)^2}.$$

Здесь τ есть некоторая неизвестная функция от z. Сделав приближенное допущение

$$\tau = \frac{\tau_1+\tau_2}{2} = \text{const.},$$

где τ_1 и τ_2 — температуры на высотах z_1 и z_2, мы приходим к приближенной формуле

$$\ln\frac{p_2}{p_1} = -\frac{kga^2}{1+a\tau}\int_{z_1}^{z_2}\frac{dz}{(a+z)^2},$$

или

$$\ln\frac{p_2}{p_1} = -\frac{kga^2}{1+a\tau}\left(\frac{1}{a+z_2}-\frac{1}{a+z}\right),$$

откуда получаем, обозначив $z_2 - z_1 = \Delta z$:

$$\Delta z = \frac{1+a\tau}{kg}\left(1+\frac{z_1}{a}\right)\left(1+\frac{z_1+\Delta z}{a}\right)\ln\frac{p_1}{p_2}. \tag{3.4}$$

Вычисления по этой формуле ведутся последовательными приближениями: сначала в правой части полагают $\Delta z = 0$ и вычисляют первое приближение для Δz; внося эту величину в правую часть формулы, находим второе приближение для Δz и т. д.

Для небольших превышений Δz можно получить более простую приближенную формулу, приняв непосредственно в уравнении (3.3)

$$p = \text{const.} = \frac{p_1 + p_2}{2},$$

где p_1 и p_2 — давления на высотах z_1 и z_2, тогда обозначая

$$p_1 - p_2 = \Delta p$$

и принимая $g' = g$, имеем

$$2\frac{p_1 - p_2}{p_1 + p_2} = \left(1 + \frac{kg}{\alpha z}\right)\Delta z,$$

откуда

$$\Delta z = \frac{2}{kg}\,\frac{p_1 - p_2}{p_1 + p_2}\,(1 + \alpha z).$$

Численное значение множителя $2/kg$ составляет около 16 000 если высоты взяты в метрах, а давление — в миллиметрах ртутного столба, таким образом, мы приходим к приближенной формуле Бабине

$$\Delta z = 16\,000\,\frac{p_1 - p_2}{p_1 + p_2}(1 + \alpha z)$$

§ 4. Условия на поверхности раздела. Рассмотрим изменение давления dp при бесконечно малом перемещении вдоль границы раздела двух несжимаемых несмешивающихся жидкостей с плотностями ρ_1 и ρ_2.

Так как на границе давление и массовые силы одинаковы для обеих жидкостей, то, умножая уравнения равновесия на проекции перемещения dx, dy dz и складывая, получаем:

$$dp = \rho_1(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz) = \rho_2(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz), \quad (4.1)$$

отсюда заключаем, что при $\rho_1 = \rho_2$ должно быть

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = 0, \quad (4.2)$$

а тогда и

$$dp = 0$$

Таким образом, на поверхности раздела давление постоянно, т. е поверхность раздела служит поверхностью уровня давлений и одновременно является поверхностью уровня и для потенциала массовых сил, как показывает уравнение (4.2), которое можно написать в форме $dV = 0$, так как при равновесии несжимаемой жидкости должен существовать потенциал массовых сил.

Отсюда мы заключаем, что границей раздела двух соприкасающихся и находящихся в равновесии тяжелых жидкостей является горизонтальная плоскость.

§ 5. Общие формулы для определения давления на твердую поверхность. В заданном поле массовых сил давление является определенной функцией точки, определяемой из уравнений равновесия и добавочного уравнения состояния вида $f(p, \rho, T) = 0$, устанавливающего зависимость между давлением, плотностью и температурой. Для несжимаемой жидкости уравнение состояния есть $\rho = \text{const}$; для сжимаемой же жидкости уравнением состояния будет уравнение Клапейрона,

$$p = RgT,$$

причем для определенности температура рассматривается как заданная наперед функция точки. При определении давления на погруженные в жидкость тела обычно рассматривается изотермическое равновесие жидкости, при котором $T = \text{const}$.

Совокупность сил гидродинамических давлений, приложенных к некоторой твердой поверхности S, рассматриваемой как часть границы жидкости, приводится, как известно из статики твердого тела, к одной силе, равной главному вектору давлений

$$\boldsymbol{P} = \int_S p\, d\boldsymbol{S} \tag{5.1}$$

и к одной паре с моментом

$$\boldsymbol{I} = \int_S (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p})\, dS \tag{5.2}$$

или в проекциях

$$\left.\begin{aligned} P_x &= \int_S p \cos(\widehat{n, x})\, dS, \\ P_y &= \int_S p \cos(\widehat{n, y})\, dS, \\ P_z &= \int_S p \cos(\widehat{n, z})\, dS, \end{aligned}\right\} \tag{5.3}$$

$$\left.\begin{aligned} L_x &= \int p\,[y \cos(\widehat{n, z}) - z \cos(\widehat{n, y})]\, dS, \\ L_y &= \int p\,[z \cos(\widehat{n, x}) - x \cos(\widehat{n, z})]\, dS, \\ L_z &= \int p\,[x \cos(\widehat{n, y}) - y \cos(\widehat{n, x})]\, dS, \end{aligned}\right\} \tag{5.4}$$

где через n обозначено направление внешней по отношению к жидкости нормали к поверхности S.

§ 6. Давление тяжелой несжимаемой жидкости. Рассматривая в дальнейшем до конца главы равновесие тяжелой несжимаемой

жидкости с горизонтальной свободной поверхностью, к которой приложено постоянное атмосферное давление p_0, мы будем иметь на глубине z от поверхности

$$p = g\rho z + p_0.$$

Давление атмосферы можно заменить весом фиктивного слоя той же самой несжимаемой жидкости, высота такого слоя будет, очевидно,

$$z_0 = \frac{p_0}{g\rho};$$

горизонтальная плоскость, проведенная на высоте z_0 над свободной поверхностью жидкости, носит название *приведенного уровня*.

Отсчитывая глубины z' от приведенного уровня, мы будем иметь

$$z' = z + \frac{p_0}{g\rho} \quad \text{или} \quad z = z' - \frac{p_0}{g\rho}, \tag{6.1}$$

и формула для давления получит более простой вид:

$$p = g\rho z'. \tag{6.2}$$

Предыдущие формулы (5.3) и (5.4) для вычисления главного вектора и главного момента сил давлений принимают в этом случае вид:

$$\left.\begin{aligned} P_x &= g\rho \int z' \cos(\widehat{n, x})\, dS, \\ P_y &= g\rho \int z' \cos(\widehat{n, y})\, dS, \\ P_z &= g\rho \int z \cos(\widehat{n, z})\, dS, \end{aligned}\right\} \tag{6.3}$$

$$\left.\begin{aligned} L_x &= g\rho \int [yz' \cos(\widehat{n, z}) - z'^2 \cos(\widehat{n, y})]\, dS, \\ L_y &= g\rho \int [z'^2 \cos(\widehat{n, x}) - xz' \cos(\widehat{n, z})]\, dS \\ L_z &= g\rho \int [xz' \cos(\widehat{n, y}) - yz' \cos(\widehat{n, x})]\, dS, \end{aligned}\right\} \tag{6.4}$$

где все интегралы распространены по поверхности S. Как известно из статики, для того чтобы совокупность сил давлений, действующих на поверхность S, приводилась к одной равнодействующей, должно быть выполнено условие $\boldsymbol{P} \perp \boldsymbol{L}$ или иначе

$$P_x L_x + P_y L_y + P_z L_z = 0. \tag{6.5}$$

Это условие, вообще говоря, при произвольном виде поверхности S не выполняется. Мы рассмотрим два важных частных случая, когда совокупность гидростатических давлений приводится к одной равнодействующей; это будут случай давления на плоскую стенку и случай давления на твердое тело, целиком погруженное в жидкость.

§ 7. Давление на плоскую стенку. В этом случае гидростатические давления представляют собою систему параллельных сил, действующих в одну сторону и перпендикулярных к плоскости стенки. Такая система приводится к одной равнодействующей, равной арифметической сумме всех сил и приложенной в центре параллельных сил. Для определения равнодействующей давлений, приложенных к площадке S, плоскость которой Q наклонена к горизонту под углом θ, возьмем начало координат в плоскости приведенного уровня на линии пересечения с плоскостью площадки, приняв линию пересечения за ось Oy' и направив ось Oz' вертикально вниз; кроме того, в плоскости площадки проведем вспомогательные оси Ox и Oy, совместив Oy с Oy' (рис. 29).

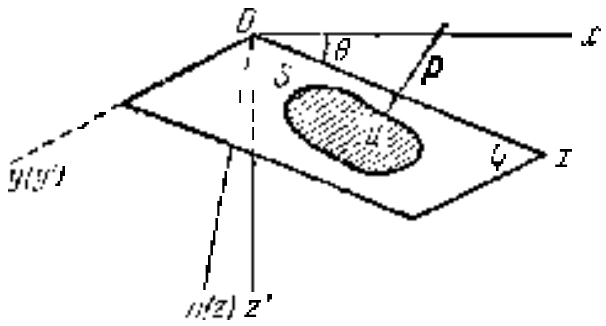

Рис. 29

Тогда формулы (6.3) для величины равнодействующей примут вид:

$$P_x = \rho p \int_S z' \cos(\widehat{n, x'})\, dS = -\rho g \sin\theta \int_S z\, dS,$$

$$P_y = -g\rho \int_S z' \cos(\widehat{n, y'})\, dS = 0,$$

$$P_z = -g\rho \int_S z' \cos(\widehat{n, z'})\, dS = g\rho \cos\theta \int_S z'\, dS,$$

откуда

$$P = \sqrt{P_x^2 + P_y^2 + P_z^2} = g\rho \int_S z'\, dS.$$

Последний интеграл есть не что иное, как площадь площадки S, умноженная на координату z'_c центра инерции C этой площади; таким образом

$$P = g\rho S z'_c; \qquad (7.1)$$

но произведение Sz'_c выражает собой объем цилиндрического столба с площадью основания S и высотою z'_c, и мы приходим к заключению, что *давление тяжелой жидкости на плоскую площадку измеряется весом цилиндрического столба этой жидкости, который был бы расположен над площадкой, если бы она лежала горизонтально на глубине своего центра инерции.*

Для того чтобы найти точку приложения этой равнодействующей или так называемый *центр давления Ц*, имеем следующие условия для координат $x'_ц$, $y'_ц$, $z'_ц$ центра параллельных сил в системе осей Ox', Oy', Oz':

$$\left.\begin{aligned} Px'_ц &= \int_S x' p\, dS = g\rho \int_S x' z'\, dS \\ Py'_ц &= \int_S y' p\, dS = g\rho \int_S y' z'\, dS \\ Pz'_ц &= \int_S z' p\, dS = g\rho \int_S z'^2\, dS \end{aligned}\right\} \qquad (7.2)$$

Координаты той же точки $x_ц$ $y_ц$ $z_ц$ в системе осей Ox, Oy, Oz, связанных с площадкой будут, как видно из чертежа:

$$x_ц = \frac{x'_ц}{\cos\theta} = \frac{z'_ц}{\sin\theta}; \quad y_ц = y'_ц, \quad z_ц = 0,$$

или вследствие (7.2):

$$x_ц = \frac{g\rho \int x'z'\, dS}{P\cos\theta} = \frac{\int x'z'\, dS}{\cos\theta \int z'\, dS} = \frac{\int z'^2\, dS}{\sin\theta \int z'\, dS},$$

$$y_ц = \frac{g\rho \int y'z'\, dS}{P} = \frac{\int y'z'\, dS}{\int z'\, dS}.$$

Выражая, наконец, координаты x', y', z' через координаты x и y, связанные с площадкой имеем:

$$x_ц = \frac{\int x^2\, dS}{\int x\, dS} = \frac{\int x^2\, dS}{Sx_c}; \quad y_ц = \frac{\int xy\, dS}{\int x\, dS} = \frac{\int xy\, dS}{Sx_c}; \quad z_ц = 0 \qquad (7.3)$$

Последние формулы показывают, что положение центра давления на площадке не зависит от наклона последней к горизонту. Заметим при этом, что интеграл $\int x^2\, dS$ выражает момент инерции площади S относительно оси Oy, а интеграл $\int xy\, dS$ есть центробежный момент той же площади.

§ 8. Закон Архимеда. Другим случаем, когда силы гидростатического давления приводятся к одной равнодействующей, является случай давления на замкнутую поверхность погруженного в жидкость твердого тела. Применяя преобразование Гаусса к поверхностным интегралам в формулах (6.3) и (6.4) и опуская для простоты письма

штрих над координатой z, имеем:

$$P_x = 0, \quad P_y = 0, \quad P_z = -g\rho \int_\tau dz = -g\rho\tau. \tag{8.1}$$

так как формула преобразования Гаусса при внутренней нормали к замкнутой поверхности S имеет вид

$$\int_S f(x, y, z)\cos(\widehat{n, x})\,dS = -\int_\tau \frac{\partial f}{\partial x}\,d\tau.$$

Далее имеем:

$$\left.\begin{aligned} L_x &= -g\rho \int_\tau y\,d\tau = -g\rho\tau y_c = P_z y_c, \\ L_y &= g\rho \int_\tau x\,dz = g\rho\tau x_c = -P_z x_c, \\ L_z &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{8.2}$$

где x_c и y_c суть координаты центра тяжести объема τ, т. е. объема жидкости, вытесненного телом.

Так как условие (6.5) в этом случае выполняется, то формулы (8.1) и (8.2) показывают, что силы гидростатических давлений жидкости на замкнутую поверхность погруженного твердого тела приводятся к одной равнодействующей, равной весу вытесненного объема жидкости; эта сила направлена вертикально снизу вверх и приложена в центре тяжести вытесненного объема (точнее, приложена в точках вертикали, проходящей через упомянутый центр тяжести).

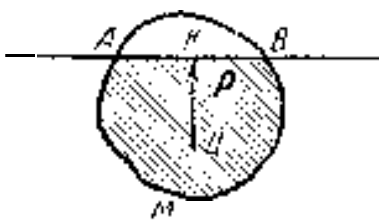

Рис. 30

Если тело погружено в жидкость частично то, продолжив мысленно горизонтальную свободную поверхность жидкости внутри тела (рис. 30) и считая на этой плоскости AKB давление постоянным (равным атмосферному), мы можем применить предыдущие рассуждения к замкнутой поверхности $AKBM$, ограничивающей объем τ погруженной части тела. Таким образом, получается, что совокупность давлений на частично погруженное тело приводится к одной равнодействующей P, равной весу вытесненного объема жидкости, направленной вертикально вверх и приложенной к центру тяжести C вытесненного объема τ. Аналогично рассматривается случай погружения тела в несколько слоев жидкости различной плотности.

§ 9. Давление на криволинейную стенку. Совокупность давлений на криволинейную твердую стенку S вообще не приводится к одной равнодействующей. Нетрудно дать указания для расчета главного вектора и главного момента давлений.

Для расчета главного вектора проведем через контур криволинейной площади S (рис. 31) три цилиндрические поверхности, образующие которых параллельны координатным осям Ox, Oz и Oy (последняя поверхность не изображена на рисунке). Эти поверхности вырежут на координатных плоскостях площадки S_x, S_y S_z, являющиеся проекциями криволинейной площади S присоединяя эти площадки, а также поверхность S к упомянутым цилиндрическим поверхностям, мы получаем три замкнутые поверхности На основании закона Архимеда, совокупность давлений на каждую такую замкнутую поверхность приведется к силе, равной весу заключенного в ней объема жидкости и направленной вертикально вверх. Взяв замкнутую поверхность с образующими, параллельными оси Ox, и проектируя все силы на эту ось, имеем.

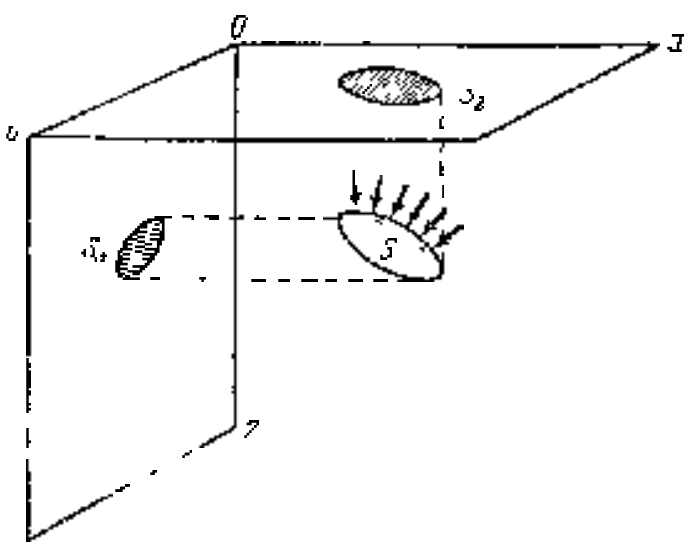

Рис. 31

$$P_x - S_x p_c = 0,$$

где p_c — давление в центре тяжести плоской площадки S_x, так как давления на цилиндрическую часть этой замкнутой поверхности будут перпендикулярны к оси Ox Аналогичным путем можно вычислить P_y

При расчете P_z примем что начало координат взято на поверхности приведенного уровня тогда давление на площадку S_z равно нулю и, проектируя на ось Oz все силы, приложенные к замкнутой поверхности с образующими параллельными оси Oz, получаем, что P_z равно весу столба жидкости над криволинейной поверхностью S.

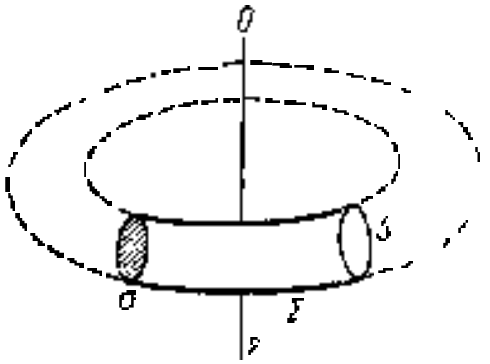

Рис. 32

Для расчета момента L_z вокруг вертикальной оси Oz может быть применено следующее построение Будем вращать площадку S вокруг оси Oz и рассмотрим замкнутую поверхность, образованную площадкой S частью Σ поверхности вращения тороидального вида и плоским меридиональным сечением σ поверхности вращения (рис. 32). В силу закона Архимеда, совокупность давлений, приложенных к частям S, Σ и σ рассматриваемой замкнутой поверхности приводится к одной силе, направленной вертикально, дающей, следовательно, момент равный нулю, относительно оси Oz Кроме того

ные силы, приложенные к части Σ, пересекают Oz и также дают моменты равные нулю. Таким образом, получается что

$$L_z - L'_z = 0,$$

где L_z — момент относительно Oz сил давлений приложенных к плоской площадке σ, последний же момент, на основании предыдущего, будет иметь выражение:

$$L'_z = \sigma p_c r_c,$$

где p_c — давление в центре тяжести площадки σ, r_c — расстояние от оси Oz центра давления площади σ.

§ 10. Упражнения. 1. Объем τ несжимаемой жидкости находится в равновесии под действием массовых сил, направленных к неподвижному центру и пропорциональных расстоянию от этого центра. Определить форму свободной поверхности, вычислить давление в центре для воды, если $\tau = 1000\ м^3$ и сила притяжения 1 грамм-массы = 1 дине при удалении на 1 *см*.

Решение. Приняв центр за начало координат имеем

$$\boldsymbol{F} = -\mu \boldsymbol{r},$$

где μ — коэффициент пропорциональности, откуда

$$X = -\mu x, \quad Y = -\mu y, \quad Z = -\mu z.$$

Далее,

$$dp = \rho (X\,dx + Y\,dy + Z\,dz) = -\mu\rho (x\,dx + y\,dy + z\,dz) = -\frac{1}{2}\mu\rho\,dr^2,$$

откуда

$$p = C - \frac{1}{2}\mu\rho r^2 \tag{10.1}$$

На свободной поверхности $p = 0$, и уравнение ее будет иметь вид

$$r^2 = \frac{2C}{\mu\rho}.$$

Следовательно, свободная поверхность имеет форму сферы.

Произвольную постоянную определяем из условия

$$\tau = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{2C}{\mu\rho}\right)^{3/2}, \quad \text{откуда} \quad C = \frac{\mu\rho}{2}\left(\frac{3\tau}{4\pi}\right)^{2/3}.$$

Давление в центре найдем, полагая в (10.1) $r = 0$.

$$p_c = C = \frac{\mu\rho}{2}\left(\frac{3\tau}{4\pi}\right)^{2/3}.$$

Подставляя числовые значения $\rho = 1$, $\mu = 1$, $\tau = 10^9$, имеем:

$$p_c = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4\pi}\cdot 10^9\right)^{2/3} \approx 192\,500 \text{ дин на } 1\ см^2 \text{ или около } 2\ кг \text{ на } 1\ см^2.$$

2. Частицы несжимаемой жидкости притягиваются к неподвижному центру по закону тяготения Ньютона. Найти уравнение поверхности уровня $p = 1$, если задан объем жидкости τ, и сила на единице расстояния равна μ.

Ответ. Сфера радиуса $\dfrac{\mu\rho}{1+\mu\rho\sqrt[3]{\dfrac{4\pi}{3\tau}}}$.

3. Дано поле массовых сил $X = y^2 + 2\lambda yz + z^2$, $Y = z^2 + 2\mu zx + x^2$, $Z = x^2 + 2\nu xy + y^2$, где λ, μ и ν — параметры. При каких численных значениях λ, μ и ν в указанном поле возможно равновесие жидкости?

Ответ. При $\lambda = \mu = \nu = \dfrac{1}{2}$.

4. Частицы газа, рассеянного по неограниченному пространству, притягиваются к неподвижному центру с силами, пропорциональными удалениям частиц. Определить давление в центре при изотермическом равновесии, если дана масса газа M и сила притяжения на единицу массы равна μ при удалении от центра, равном единице.

Ответ. $p_0 = M\sqrt{\dfrac{\mu^3}{8\pi^3 RT}}$, где R — газовая постоянная, T — абсолютная температура.

5. Определить давление в центре Земли, если бы последняя представляла собой шар радиуса R из несжимаемой жидкости плотности ρ, если известно, что массовая сила веса, равная g на поверхности земли убывает к центру, будучи пропорциональной расстоянию до центра земли.

Ответ. $p_1 = \dfrac{1}{2} g\rho R$.

6. Определить давление и положение центра давления на вертикальный плоский квадрант радиуса a, одна из сторон которого Ox совпадает со свободной горизонтальной поверхностью жидкости, на которой давление равно нулю (рис. 33).

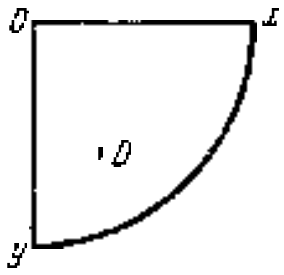

Рис. 33

Ответ. $P = \dfrac{1}{4} g\rho a^3$, $x_D = \dfrac{3}{8} a$, $y_D = \dfrac{3}{16} \pi a$.

7. Определить положение центра давления на вертикальный круговой диск радиуса a, центр которого имеет глубину h от приведенного уровня.

Ответ. Центр давления лежит на одной вертикали с центром диска, ниже последнего на величину $\dfrac{a^2}{4h}$.

8. Полусфера радиуса a с вертикальной осью наполнена до краев жидкостью. Определить результат давлений на четверть полусферы, отсекаемую двумя вертикальными взаимно перпендикулярными плоскостями.

Ответ. Совокупность давлений на рассматриваемую часть сферы $Oxyz$ (рис. 31) приводится к одной силе $P = \dfrac{1}{6} g\rho a^3\sqrt{\pi^2 + 8}$, длина действия которой OD имеет уравнения $x = y = \dfrac{2}{\pi} z$.

9. Определить положение центра давления на вертикальный прямоугольный щит шлюза, если нижнее ребро щита имеет глубину a.

Ответ. Центр давления лежит на средней вертикали на глубине $\dfrac{2}{3} a$.

10. (Парадокс Жуковского.) В вертикальную стенку сосуда, наполненного жидкостью, вделан однородный круглый цилиндр, способный без трения вращаться вокруг горизонтальной оси, лежащей в плоскости стенки, так что половина цилиндра остается все время погруженной в жидкость и испытывает, в силу закона Архимеда, давление, направленное снизу вверх, которое, казалось бы, должно заставить цилиндр вращаться. Таким образом, казалось бы, можно было получать работу без затраты энергии, т. е. можно бы осуществить perpetuum mobile. Объяснить, почему цилиндр не вращается.

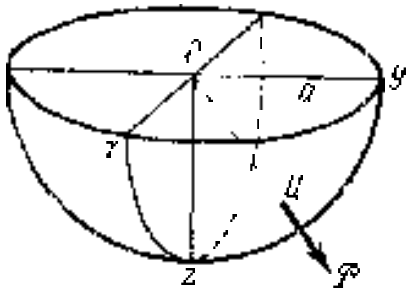

Рис. 34.

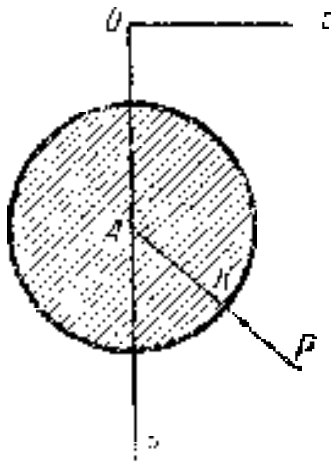

Рис. 35.

Ответ. Каждая сила давления, действующая на элемент поверхности цилиндра, направлена по радиусу и не дает момента относительно оси. Совокупность всех давлений приводится к одной равнодействующей (рис. 35) величина которой

$$P = \frac{1}{2} g\rho\pi \sqrt{\pi^2 a^2 + 16h^2}$$

где a — радиус цилиндра, h — глубина оси от приведенного уровня. Сила эта, лежащая в вертикальной плоскости, перпендикулярной к оси и делящей ее пополам, проходит через ось цилиндра и точку K с координатами

$$x_K = \frac{4a}{3\pi}, \quad z_K = \frac{a^2}{3h}.$$

5. РАВНОВЕСИЕ ПЛАВАЮЩИХ ТЕЛ

§ 11. Условия равновесия плавающего тела. Закон Архимеда дает простой критерий для суждения о поведении тела, погруженного в жидкость. Совокупность гидростатических давлений приводится к одной силе, равной весу вытесненного объема жидкости, приложенной к центру тяжести объема, погруженного в жидкость, и направленной вертикально вверх. Если тело целиком погружено в однородную жидкость и однородно, то центр тяжести всего тела совпадает с центром тяжести погруженного объема и тогда, очевидно, для равновесия необходимо и достаточно, чтобы плотность тела ρ_1 равнялась плотности жидкости ρ. Если $\rho_1 > \rho$ — тело тонет, если $\rho_1 < \rho$ — тело всплывает. Если неоднородное тело погружено в жидкость, которая также может состоять из горизонтальных слоев

различной плотности, то упомянутые центры могут не совпадать, и тогда для равновесия необходимо и достаточно, чтобы эти центры лежали на одной вертикали и чтобы средняя плотность тела равнялась средней плотности жидкости в объеме, занимаемом телом.

Для равновесия тела, плавающего на поверхности жидкости, очевидно необходимо и достаточно: 1) чтобы вес вытесненного объема жидкости равнялся весу тела и 2) чтобы центр тяжести объема, погруженного в жидкость, лежал на одной вертикали с центром тяжести всего тела.

§ 12. Поверхность сечений. Необходимым (но не достаточным) условием равновесия тела, плавающего на поверхности жидкости, является, таким образом, постоянство объема τ_1 части тела, погруженной в жидкость, считаемую однородной. Условимся называть *плоскостью плавания* всякую плоскость, отсекающую от тела упомянутый объем τ_1, а площадь сечения назовем *площадью плавания*. Огибающая всех плоскостей плавания называется *поверхностью сечений*. Легко заметить, что поверхность сечений есть не что иное как геометрическое место центров инерции площадей плавания. В самом деле, примем какую-нибудь определенную плоскость плавания за плоскость Oxy (рис. 36) и возьмем за ось Oy линию пересечения этой плоскости с *произвольной* соседней плоскостью плавания AB, наклоненной к первой плоскости под бесконечно малым углом θ. Положение начала координат на прямой yy' остается пока неопределенным. Так как обе плоскости плавания должны отсекать от тела одинаковые объемы, то клиновидные объемы $Axyy'$ и $Bx'yy'$ должны быть равны, что с точностью до бесконечно малых второго порядка может быть выражено равенством

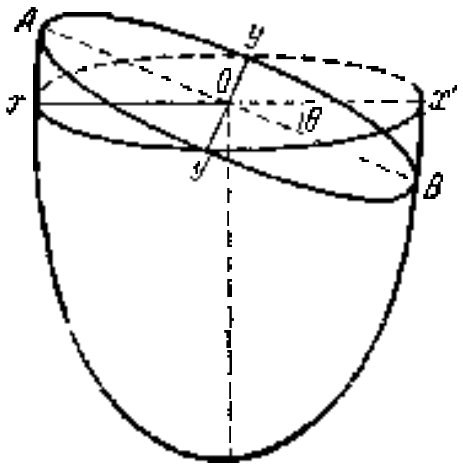

Рис. 36.

$$-\int\limits_{\text{пл } xy} \int z\,dx\,dy = \int\limits_{\text{пл } xy'} \int z\,dx\,dy,$$

где z есть координата точек плоскости AB; при этом первый интеграл распространен на части $x'yy'$ площади плавания, где координата z отрицательна, вследствие чего для выражения положительной величины — объема — перед интегралом взят знак минус. Переписав предыдущее равенство в виде

$$\int\int z\,dx\,dy = 0,$$

где интеграл распространен на всю площадь плавания, и замечая из чертежа, что $z = x \operatorname{tg} \theta$ получаем

$$\operatorname{tg}\theta \int\int x\, dx\, dy = 0,$$

откуда заключаем, что координата x_c центра инерции площади $xyx'y'$ выражающаяся формулой

$$x_c = \frac{\int\int x\, dx\, dy}{\text{пл. } xyx'y'},$$

равна нулю, т. е. центр инерции площади плавания тоже лежать на прямой пересечения взятой плоскости плавания с соседней плоскостью. Так как положение последней произвольно, то все такие пересечения должны проходить через одну точку — центр инерции рассматриваемой площади плавания $xyx'y'$. С другой стороны огибающая поверхность должна касаться каждой из плоскостей плавания, и точку касания на некоторой плоскости плавания можно рассматривать как предельное положение точки встречи двух линий пересечения взятой плоскости с двумя другими бесконечно близкими плоскостями плавания. Таким образом, мы приходим к заключению, что поверхность сечений можно рассматривать как геометрическое место центров инерции различных площадей плавания.

§ 13. Поверхность центров. Каждой плоскости плавания соответствует определенная форма постоянного объема, отсекаемого ею от тела, и значит соответствует определенное положение центра тяжести этого объема. Геометрическое место центров тяжести объемов отсекаемых различными плоскостями плавания, носит название *поверхности центров*. Согласно сказанному в § 11, разыскание положения равновесия плавающего тела сводится к отысканию на поверхности центров такой точки, чтобы прямая, соединяющая ее с центром тяжести всего тела, была перпендикулярна к соответствующей плоскости плавания. Это отыскание облегчается следующим свойством поверхности центров: можно убедиться, что касательная плоскость к поверхности центров параллельна той плоскости плавания которая соответствует точке касания.

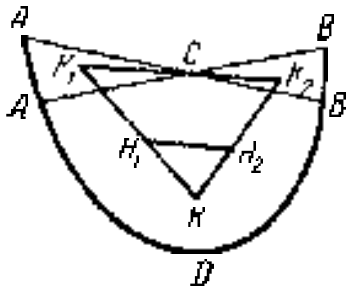

Рис. 37.

В самом деле если пересечь определенную плоскость плавания AB (рис. 37) другой произвольной бесконечно близкой плоскостью плавания $A'B'$, то как мы видели, объемы клиновидных частей ACA' и BCB' будут одинаковы. Пусть центры тяжести этих объемов будут K_1 и K_2, а K — центр тяжести объема $ACB'D$. Тогда центры тяжести H_2 и H_1 одинаковых объемов ABD и $AB'D$, отсекаемых плоскостями плавания, будут лежать на прямых KK_2 и KK_1,

и положение точек H_2 и H_1 определится из известных соотношений

$$\frac{KH_2}{KK_2} = \frac{\text{объем } BCB'}{\text{объем } ABD}, \qquad \frac{KH_1}{KK_1} = \frac{\text{объем } ACA'}{\text{объем } ABD},$$

откуда заключаем, что

$$\frac{KH_2}{KK_2} = \frac{KH_1}{KK_1}$$

и, следовательно,

$$H_1H_2 \parallel K_1K_2.$$

В пределе, когда $A'B'$ сольется с AB секущая прямая на поверхности центров H_1H_2 примет направление касательной к этой поверхности, а прямая K_1K_2 будет лежать в плоскости плавания. Следовательно получается, что произвольная касательная прямая к поверхности центров будет параллельна плоскости плавания, что и оправдывает наше утверждение.

Таким образом, разыскание положений равновесия плавающего тела сводится к задаче о проведении из центра тяжести всего тела нормалей к поверхности центров.

Заметим, что предыдущее геометрическое рассмотрение приводит нас к заключению о том, что поверхность центров есть поверхность, выпуклая в каждой своей точке, т. е. что эта поверхность по соседству с точкой касания лежит вся по одну сторону от касательной плоскости в любой ее точке. В самом деле, так как $H_2H_1 \parallel K_2K_1$ и так как K_1 выше K_2, то и H_1 будет выше H_2, предельное же направление H_1H_2 горизонтально; это означает, что если в H_2 проведена касательная плоскость, которая будет горизонтальна, то все точки поверхности центров по соседству с H_2 будут лежать выше, т. е. расположатся по одну сторону от касательной плоскости. Последнее можно, как известно из геометрии, формулировать еще иначе, указав, что индикатриссой для поверхности центров в любой точке служит эллипс, т. е. что всякая секущая плоскость, бесконечно близкая и параллельная касательной плоскости, будет пересекать поверхность центров по бесконечно малому эллипсу.

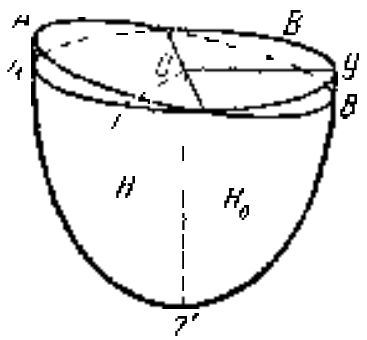

Рис. 38

§ 14. Радиусы кривизны главных нормальных сечений поверхности центров. Фиксируем некоторую плоскость плавания AB (рис. 38) и проведем в ней оси Ox и Oy, взяв начало координат в центре инерции площади плавания, соответствующее положение центра тяжести погруженного объема обозначим через H_0 с координатами x_0, y_0, z_0; проведем другую плоскость плавания $A'B'$, близкую к AB, и отметим соответствующий ей центр H с координатами x, y, z. Положительную ось Oz будем считать направленной

вертикально вверх. Уравнение плоскости $A'B'$ может быть написано в виде

$$z = \alpha x + \beta y,$$

где α и β — произвольные малые параметры, так как при $\alpha = 0$ и $\beta = 0$ получаем $z = 0$ — уравнение плоскости AB.

Для определения координат точек H и H_0 на поверхности центров служат известные формулы

$$x_0 = \frac{1}{\tau_0}\int_{\tau_0} x\,d\tau, \quad x = \frac{1}{\tau}\int_{\tau} x\,d\tau,$$

$$y_0 = \frac{1}{\tau_0}\int_{\tau_0} y\,d\tau, \quad y = \frac{1}{\tau}\int_{\tau} y\,d\tau,$$

$$z_0 = \frac{1}{\tau_0}\int_{\tau_0} z\,d\tau, \quad z = \frac{1}{\tau}\int_{\tau} z\,d\tau,$$

где τ и τ_0 означают равные объемы $A'B'z'$ и ABz'. Отсюда находим:

$$\tau(x - x_0) = \int x\,d\tau; \quad \tau(y - y_0) = \int y\,d\tau; \quad \tau(z - z_0) = \int z\,d\tau,$$

причем последние интегралы распространены только на клиновидный объем между плоскостями AB и $A'B'$. Выражая элемент этого последнего объема $d\tau$ через $z\,dx\,dy$ где z — координата переменной точки плоскости $A'B$, мы приведем последние формулы к виду

$$\left.\begin{aligned}
\tau(x - x_0) &= \int\int xz\,dx\,dy = \alpha\int\int x^2\,dx\,dy + \beta\int\int xy\,dx\,dy,\\
\tau(y - y_0) &= \int\int yz\,dx\,dy = \alpha\int\int xy\,dx\,dy + \beta\int\int y^2\,dx\,dy\\
\tau(z - z_0) &= \frac{1}{2}\int\int z^2\,dx\,dy = \frac{1}{2}\alpha^2\int\int x^2\,dx\,dy +\\
&\qquad + \alpha\beta\int\int xy\,dx\,dy + \frac{1}{2}\beta^2\int\int y^2\,dx\,dy
\end{aligned}\right\} \quad (14.1)$$

где все двойные интегралы распространены по площади плавания AB (коэффициент $\frac{1}{2}$ поставлен потому, что координаты центра тяжести элементарного объема $z\,dx\,dy$ суть x, y, $\frac{1}{2}z$).

Вводя обозначения:

для момента инерции площади плавания относительно Oy:

$$B' = \int\int x^2\,dx\,dy,$$

для момента инерции площади плавания относительно Ox:

$$A' = \int\int y^2\,dx\,dy,$$

для центробежного момента:

$$F = \int\int xy\,dx\,dy,$$

перепишем предыдущие формулы в виде

$$\left.\begin{aligned} \tau(x - x_0) &= B'\alpha + F\beta, \\ \tau(y - y_0) &= F\alpha + A'\beta, \\ \tau(z - z_0) &= \frac{1}{2}(B'\alpha^2 + 2F\alpha\beta + A'\beta^2), \end{aligned}\right\} \qquad (14.2)$$

откуда, решая первые два уравнения относительно α и β и подставляя в третье, получаем уравнение поверхности центров по соседству с точкой H_0:

$$2\tau(z - z_0) = \frac{\tau}{A}\frac{\tau}{B'} - F^2\,[A'(x - x_0)^2 - 2F(x - x_0)(y - y_0) + B'(y - y_0)^2]. \qquad (14.3)$$

Последнее уравнение упрощается, если за оси Ox и Oy взять главные оси инерции площади плавания AB, тогда, как известно, будет $F = 0$, а A' и B' превратятся в главные моменты инерции A и B, и уравнение (14.3) примет вид

$$2(z - z_0) = \frac{\tau}{B}(x - x_0)^2 + \frac{\tau}{A}(y - y_0)^2. \qquad (14.4)$$

Если, наконец, при сохранении направлений осей перенести начало координат в точку $H_0(x_0, y_0, z_0)$, то уравнение поверхности центров еще более упростится и примет вид

$$2z = \frac{\tau}{B}x^2 + \frac{\tau}{A}y^2 \qquad (14.5)$$

С другой стороны, из геометрии известно, что если взять начало координат в точке касания, а оси Ox и Oy в касательной плоскости, направив их по главным нормальным сечениям, то уравнение всякой поверхности вблизи точки касания представится в виде

$$2z = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)_0 x^2 + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)_0 y^2, \qquad (14.6)$$

причем радиусы кривизны главных нормальных сечений R_1 и R_2 выражаются формулами

$$\frac{1}{R_1} = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)_0, \qquad \frac{1}{R_2} = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)_0.$$

Сравнивая уравнения (14.5) и (14.6), приходим к заключению:

1) что главные нормальные сечения поверхности центров параллельны главным осям инерции площади плавания, соответствующей точке касания;

2) что радиусы кривизны главных нормальных сечений связаны с главными моментами инерции площади плавания простыми соотношениями

$$R_1 = I_1/v, \quad R_2 = I_2/v \tag{14.7}$$

(I_1 обозначает либо A, либо B, а тогда I_2 соответственно B или A).

§ 15. Устойчивость равновесия. Рассмотрим вопрос об устойчивости равновесия лишь по отношению к таким перемещениям, которые выводят из равновесия плавающее тело с сохранением объема, погруженного в жидкость. Такие перемещения, как было показано в § 12, сводятся к повороту тела вокруг горизонтальной оси, лежащей в плоскости плавания и проходящей через центр инерции площади плавания. Вопрос об устойчивости равновесия по отношению к перемещениям иного вида очевиден, так как по отношению к любому вертикальному поступательному перемещению равновесие всегда является устойчивым, по отношению же к любому горизонтальному поступательному перемещению и по отношению к любому повороту вокруг вертикальной оси — равновесие плавающего тела будет безразличным.

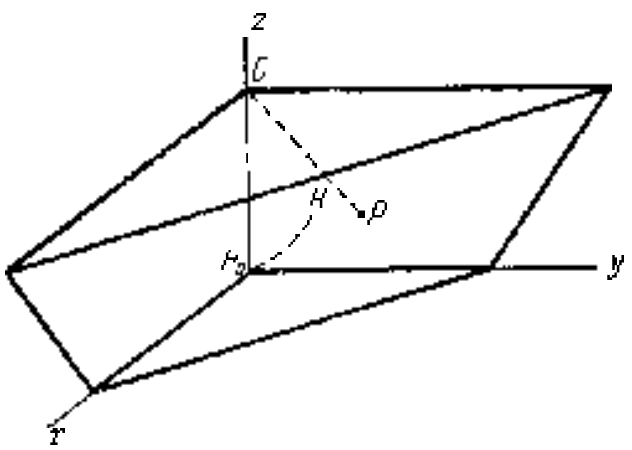

Рис. 39

Обращаясь к рассмотрению устойчивости равновесия при перемещениях, не меняющих вытесненного объема жидкости, возьмем начало координат в центре тяжести H_0 объема, погруженного в жидкость (рис. 39), и направим ось Oz вертикально вверх. Тогда, при равновесии тела плоскость H_0xy будет касательной к поверхности центров, и координаты центра тяжести всего тела C будут $0, 0, \overline{z}$. Взяв на поверхности центров точку H, близкую к H_0, проведем к ней касательную плоскость, уравнение которой на основании (14.5) будет иметь вид

$$\zeta - z = -\frac{x}{I_1}(\xi - x) + \frac{y}{I_2}(\eta - y) \tag{15.1}$$

где ξ, η, ζ — текущие координаты. Обозначив через d длину перпендикуляра CP, опущенного из точки C на эту касательную плоскость,

дием по известной формуле аналитической геометрии

$$d = \frac{\overline{z} - z - \frac{\tau x^2}{I_1} + \frac{\tau y^2}{I_2}}{\sqrt{1 + \frac{\tau^2 x^2}{I_1^2} + \frac{\tau^2 y^2}{I_2^2}}}.$$

Разлагая множитель $\left(1 + \frac{\tau^2 x^2}{I_1^2} + \frac{\tau^2 y^2}{I_2^2}\right)^{-1/2}$ в ряд и удерживая в нем и при дальнейшем умножении члены наинизшего порядка малости относительно малых величин x и y последовательно находим применяя еще уравнение (14.5):

$$d = \left(\overline{z} - z - \frac{\tau x^2}{I_1} + \frac{\tau y^2}{I_2}\right)\left(1 - \frac{\tau^2 x^2}{2I_1^2} - \frac{\tau^2 y^2}{2I_2^2}\right) =$$

$$= \left(\overline{z} + \frac{\tau x^2}{2I_1} + \frac{\tau y^2}{2I_2}\right)\left(1 - \frac{\tau^2 x^2}{2I_1^2} - \frac{\tau^2 y^2}{2I_2^2}\right) =$$

$$= z + \frac{\tau^2 x^2}{2I_1^2}\left(\frac{I_1}{\tau} - z\right) + \frac{\tau^2 y^2}{2I_2^2}\left(\frac{I_2}{\tau} - \overline{z}\right). \qquad (15.2)$$

Применим теперь критерий Дирихле для суждения об устойчивости равновесия; для того чтобы равновесие тела было устойчивым достаточно, чтобы потенциал сил, приложенных к телу, имел минимум в положении равновесия. Силы, приложенные к телу, сводятся к двум вертикальным силам: силе веса Q приложенной к точке C и действующей вниз, и равнодействующей P гидростатических давлений приложенной в центре тяжести погруженного объема и действующей вверх; при равновесии тела $P = Q$ причем равенство сохраняется при перемещениях тела, не изменяющих вытесненного объема. После такого перемещения центра H_0 в положение H касательная плоскость (15.1) сделается горизонтальной, а отрезок CP — вертикальным и если обозначить после перемещения вертикальные координаты точек C и P через $\overline{z}'$ и z', то будем иметь

$$\overline{z}' - z' = d. \qquad (15.3)$$

Потенциал сил, приложенных к телу при направлении оси Oz вверх, выразится как известно из механики, формулой

$$V = P(\overline{z}' - z')$$

или в силу уравнений (15.2) и (15.3)

$$V = P\left[\overline{z} + \frac{\tau^2 x^2}{2I_1^2}\left(\frac{I_1}{\tau} - z\right) + \frac{\tau^2 y^2}{2I_2^2}\left(\frac{I_2}{\tau} - z\right)\right]. \qquad (15.4)$$

Из последнего выражения видно, что если разности $\frac{I_1}{\tau} - z$ и $\frac{I_2}{\tau} - z$ будут одновременно положительными, то значение потенциала $V = Pz$ в положении равновесия ($x = 0$, $y = 0$) будет являться минимумом, и тогда в силу критерия Дирихле рассматриваемое равновесие будет устойчивым. Точки, отложенные вверх по вертикали H_0C в расстоянии I_1/τ и I_2/τ от H_0, носят название *большого и малого метацентров* (считаем $I_1 \geq I_2$). В силу равенства (14.7) можно еще определить метацентры как *центры кривизны главных нормальных сечений поверхности центров*. Таким образом, мы приходим к выводу, что положение равновесия плавающего на поверхности жидкости тела будет устойчивым по отношению к повороту вокруг горизонтальной оси, не меняющему вытесненного объема жидкости, если центр тяжести тела, который находится в положении равновесия на одной вертикали с метацентрами, лежит ниже нижнего (малого) из них.

§ 16. Упражнения. 1. Однородное тело плотности σ, имеющее форму параболоида вращения $x^2 + y^2 = 2az$, усеченного плоскостью, перпендикулярной к оси на расстоянии h от вершины, плавает на поверхности однородной жидкости плотности ρ так, что ось параболоида вертикальна и вершина обращена вниз. Определить глубину z погружения вершины.

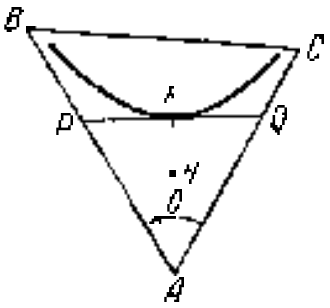

Рис. 10.

Ответ. $z = h\sqrt{\rho/\sigma}$.

2. Определить поверхность сечений для трехгранной однородной призмы, плавающей так, что ребра призмы остаются горизонтальными.

Решение. Из условий задачи очевидно, что поверхность сечений представляет собою цилиндрическую поверхность, образующие которой будут параллельны ребрам призмы; поэтому достаточно определить вид направляющей кривой в сечении ABC, перпендикулярном ребрам (рис. 10). Пусть PQ есть след плоскости плавания тогда, если взять прямые AB и AC за косоугольные оси x и y с углом при вершине θ, то условие сохраняемости погруженного объема дает

$$\text{площадь } APQ = \text{const} \quad \text{или} \quad \frac{1}{2} xy \sin\theta = \text{const},$$

откуда

$$xy = c^2, \tag{16.1}$$

где c — постоянная, определяемая из условия равновесия

$$\frac{1}{2} \rho xy \sin\theta = \frac{1}{2} \sigma ab \sin\theta$$

(где ρ и σ суть плотности жидкости и тела, а a и b — длины сторон AB и AC), или

$$c^2\rho = ab\sigma. \tag{16.2}$$

Остается найти уравнение огибающей прямых PQ; уравнение этой прямой есть

$$\frac{x}{x} + \frac{y}{y} = 1,$$

где ξ и η — текущие координаты. Выражая y через x на основании (16.1) и дифференцируя затем по параметру x, имеем последовательно:

$$\frac{\xi}{x} + \frac{\eta x}{c^2} = 1;$$

$$-\frac{\xi}{x^2} + \frac{\eta}{c^2} = 0.$$

Исключая из последних уравнений параметр x, находим уравнение огибающей

$$4\xi\eta = c^2,$$

что дает гиперболу, асимптоты которой суть AB и AC.

3. Определить поверхность центров в условиях предыдущей задачи.

Решение. По известному свойству гиперболы, точка касания K будет делить пополам отрезок касательной PQ, заключенный между асимптотами; центр же тяжести измещенного объема жидкости будет совпадать с центром тяжести H площади APQ среднего перпендикулярного сечения. Последний же лежит, как известно, на прямой AK на расстоянии $^2/_3\,AK$ от вершины, следовательно, координаты ξ_1 и η_1 точки H будут:

$$\xi_1 = {}^2/_3\,\xi, \quad \eta_1 = {}^2/_3\,\eta,$$

где ξ и η — координаты точки K, удовлетворяющие уравнению

$$4\xi\eta = c^2 \tag{16.3}$$

Выражая ξ и η через ξ_1 и η_1, находим уравнение кривой центров

$$9\xi_1\eta_1 = c^2, \tag{16.4}$$

что выражает гиперболу, подобную (16.3).

4. Определить поверхность сечений и поверхность центров для четырехгранной призмы прямоугольного сечения плавающей так, что ребра остаются горизонтальными.

Решение. Рассматривая аналогично предыдущему среднее перпендикулярное сечение $ABCD$ (рис. 41), без труда заключаем, что все возможные положения плоскости плавания PQ будут пересекаться в одной точке K — середине PQ. Следовательно, в этом случае кривая сечений вырождается в точку. Для определения вида кривой центров отметим центр тяжести H измещенного объема в том положении призмы, когда грань AB горизонтальна, а значит, и параллельна плоскости плавания PQ. Взяв точку H за начало координат, проведем ось Hx параллельно грани AB. Рассматривая некоторое соседнее положение плоскости плавания $P'Q'$ и вводя обозначения $PK = KQ = a$, $PP' = b$, $KH = c$, площадь $PQAB = S$, имеем для координат x и y нового положения центра тяжести H' очевидные формулы:

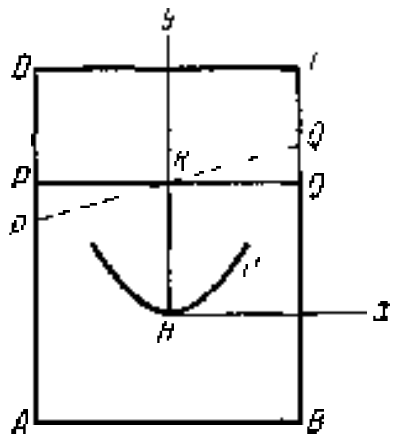

Рис. 41

$$x = \frac{\frac{1}{2}\,ab\,\frac{2}{3}\,a - \frac{1}{2}\,ab\left(-\frac{2}{3}\,a\right)}{S} = \frac{2}{3}\,\frac{a^2b}{S},$$

$$y = \frac{\frac{1}{2}\,ab\left(c + \frac{b}{3}\right) - \frac{1}{2}\,ab\left(c - \frac{b}{3}\right)}{S} = \frac{1}{3}\,\frac{ab^2}{S},$$

Исключая b, находим:

$$x^2 = \frac{4a^3y}{3S},$$

или заменяя S через $4ac$

$$x^2 = \frac{a^2y}{3c},$$

т. е. кривая центров есть парабола.

3. Определить поверхность сечений и поверхность центров для плавающего однородного кругового конуса.

Решение. Пусть $ABDE$ будет одна из плоскостей плавания (рис. 42); это сечение есть эллипс. Проведем в последнем главные оси: $AB = 2a$ и $DE = 2b$.

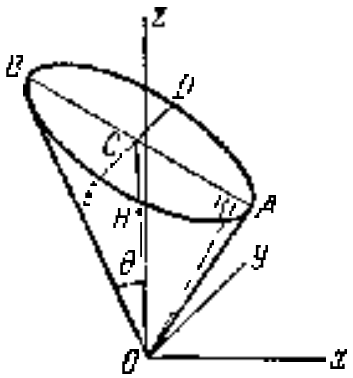

Рис. 42

Возьмем ось конуса за ось Oz, вершину — за начало координат и направим ось Ox в плоскости OAB. Обозначив через p перпендикуляр OK на плоскость плавания, выразим условие постоянства вытесненного объема жидкости:

$$\frac{1}{3}p\ \pi ab = \text{const}$$

Произведение ab выражает площадь $\triangle OAB$, которая может быть иначе выражена через $\frac{1}{2}l_1l_2\sin 2\theta$, где $l_1 = OA$, $l_2 = OB$ и θ — угол между осью конуса и образующей. Таким образом, предыдущее соотношение примет вид после разделения на постоянные множители.

$$l_1l_2\ b = \text{const}. \tag{16.5}$$

Покажем, далее, что малая полуось $b = \sin\theta\sqrt{l_1l_2}$.

В самом деле, так как эта полуось параллельна оси Oy, то $b = y_D$. Если уравнение конуса есть

$$z^2 = k^2(x^2 + y^2),$$

где

$$k = \operatorname{ctg}\theta,$$

то для точки D:

$$y_D = \sqrt{\frac{z_D^2}{k^2} - x_D^2},$$

или, замечая, что $x_D = x_C$ и $z_D = z_C$, имеем:

$$b = \sqrt{\frac{z_C^2}{k^2} - x_C^2}.$$

Так как точка C есть середина AB, то

$$x_C = \frac{x_A + x_B}{2}, \quad z_C = \frac{z_A + z_B}{2}.$$

Чтобы найти координаты точек A и B, ищем пересечение прямых OA и OB, уравнения которых в плоскости Oxz суть

$$z = kx, \quad z = -kx,$$

с прямой AB, уравнение которой в нормальной форме будет

$$\alpha x + \beta z = p,$$

где α и β — косинусы углов образованных перпендикуляром OA с осями Ox и Oz, так что $\alpha^2 + \beta^2 = 1$.

Находим

$$x_A = \frac{p}{\alpha + k\beta}, \qquad z_A = \frac{kp}{\alpha + k\beta}$$

$$x_B = \frac{p}{\alpha - k\beta}, \qquad z_B = \frac{kp}{k\beta - \alpha}$$

и

$$x_C = \frac{\alpha}{k^2\beta^2 - \alpha^2}\, p, \qquad z_C = \frac{k^2\beta}{k^2\beta^2 - \alpha^2}\, p$$

и тогда

$$b = \frac{p}{\sqrt{k^2\beta^2 - \alpha^2}}.$$

С другой стороны, имеем

$$l_1 = \sqrt{x_A^2 + z_A^2} = \frac{\sqrt{1 + k^2}}{\alpha + k\beta}\, p;$$

$$l_2 = \sqrt{x_B^2 + z_B^2} = \frac{\sqrt{1 + k^2}}{k\beta - \alpha}\, p$$

и

$$\sqrt{l_1 l_2} = \frac{\sqrt{1 + k^2}}{\sqrt{k^2\beta^2 - \alpha^2}}\, p = b\sqrt{1 + k^2} = b/\sin\theta,$$

откуда

$$b = \sin\theta \sqrt{l_1 l_2}.$$

Вставляя последнее выражение в (16.5), заключаем, что

$$(l_1 l_2)^{3/2} = \text{const}, \quad \text{или} \quad l_1 l_2 = \text{const}. \tag{16.6}$$

Как было показано в задаче 2, огибающая семейства прямых AB, обладающих свойством (16.6), есть гипербола с асимптотами OA и OB.

Таким образом, приходим к заключению, что поверхность сечений есть часть поверхности двуполого гиперболоида вращения, которого будут касаться различные плоскости плавания своими центрами C. Так как центр вытесненного объема H лежит на $^3/_4$ отрезка OC, то заключаем, что поверхность центров есть подобный гиперболоид вращения.

6 Определить поверхность сечений и поверхность центров для однородного эллипсоида.

Решение. Найдем решение задачи сначала для однородного шара с радиусом, равным единице:

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$$

Очевидно что огибающей плоскостей плавания PQ, отсекающих от шара некоторый объем τ, будет поверхность концентрического шара (рис 43), радиус которого найдем из соотношения

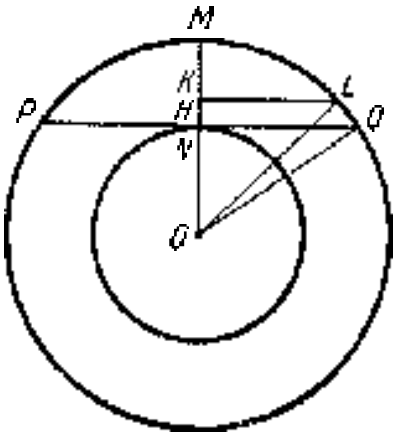

Рис 43

$$\int_r^1 \pi (1 - u^2)\, du = \tau,$$

где

$$r = ON, \quad 1 = OM,$$
$$u = OK,$$
$$KL = \sqrt{1 - u^2}.$$

Выполняя интегрирование, находим:

$$\frac{1}{3}\pi (1 - r^2)(2 + r) = \tau. \tag{16.7}$$

Положение центра тяжести H отсеченного объема найдется по известной формуле:

$$R = \frac{\int_r^1 \pi u (1 - u^2)\, du}{\tau}$$

или

$$R = \frac{\frac{1}{4}\pi (1 - r^2)^2}{\frac{1}{3}\pi (1 - r)^2 (2 + r)} = \frac{3}{4}\frac{(1 + r)^2}{(2 + r)}. \tag{16.8}$$

Следовательно, поверхностью центров будет служить концентрическая сферическая поверхность радиуса R.

Обращаясь к эллипсоиду

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

произведем преобразование к новым переменным ξ, η, ζ по формулам

$$x = a\xi, \quad y = b\eta, \quad z = c\zeta$$

Такое преобразование выражает деформацию, складывающуюся из сжатий вдоль осей Ox, Oy, Oz с коэффициентами a, b, c. В результате сжатий эллипсоид перейдет в шар

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1,$$

объем которого будет в abc раз меньше объема эллипсоида

Если плоскость плавания отсекала от эллипсоида некоторый объем V, то от шара она будет отсекать объем V/abc Для шара поверхность сечений и поверхность центров суть концентрические сферы, радиусы r и R которых найдутся из соотношений

$$(1 - r)^2 (2 + r) = \frac{3V}{\pi abc}, \quad R = \frac{3}{4}\frac{(1 + r)^2}{(2 - r)}.$$

Возвращаясь к прежним переменным x, y, z, т. е. совершив обратную деформацию растяжения, мы приходим к заключению, что для эллипсоида поверхностями сечений и центров будут служить поверхности подобных эллипсоидов:

$$\frac{x^2}{(ar)^2} + \frac{y^2}{(br)^2} + \frac{z^2}{(cr)^2} = 1$$

и

$$\frac{x^2}{(aR)^2} + \frac{y^2}{(bR)^2} - \frac{z^2}{(cR)^2} = 1.$$

7. Определить поверхность центров для прямого однородного цилиндра произвольной формы сечения.

Ответ. Эллиптический параболоид

$$\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} = \frac{2z - c}{V},$$

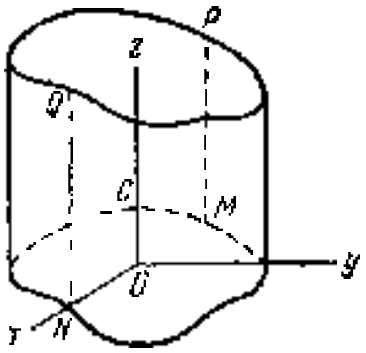

Рис. 44

если начало координат взять в центре инерции O площади перпендикулярного сечения MN (основания цилиндра) и оси Ox и Oy направить по главным осям инерции площади этого сечения (рис. 44); A и B суть главные моменты инерции площади

$$A = \int\int x^2\,dx\,dy, \qquad B = \int\int y^2\,dx\,dy,$$

c — отрезок Oz до плоскости основания, V — измеренный объем $MPQN$, при постоянстве V остается постоянным и отрезок c.

ГЛАВА ЧЕТВЕРТАЯ

ПРОСТЕЙШИЕ СЛУЧАИ ДВИЖЕНИЯ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

А. ИНТЕГРАЛЫ БЕРНУЛЛИ И КОШИ

§ 1. Установившееся движение. Дифференциальные уравнения движения идеальной жидкости допускают интегралы, аналогичные интегралу живой силы, в двух простейших случаях движения жидкости: 1) *установившегося* и 2) *безвихревого*

Рассмотрим случай установившегося движения. В этом случае режим движения в каждой точке, занятой жидкостью, не изменяется с течением времени, и поле скоростей, поле вихрей, поле гидродинамических давлений, поле массовых сил суть поля постоянные, или стационарные. Линии тока при установившемся движении совпадают с траекториями жидких частиц.

Умножая скалярно основное уравнение движения

$$F - \frac{dv}{dt} = \frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p$$

на элементарное перемещение жидкой частицы $v\,dt$ *вдоль линии тока*, получаем:

$$F \cdot v\,dt - \frac{dv}{dt} \cdot v\,dt = \frac{1}{\rho}(\operatorname{grad} p \cdot v\,dt)$$

или

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz - d\left(\frac{1}{2}v^2\right) = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial x}dx + \frac{\partial p}{\partial y}dy + \frac{\partial p}{\partial z}dz\right).$$

Так как при установившемся движении $\partial p/\partial t = 0$, то выражение $\frac{\partial p}{\partial x}dx + \frac{\partial p}{\partial y}dy + \frac{\partial p}{\partial z}dz$ является полным дифференциалом dp и можно написать

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz - d\left(\frac{1}{2}v^2\right) = dp/\rho.$$

Последнее уравнение выражает собой не что иное, как закон живой силы для жидкой частицы (см. § 14 главы II).

Это уравнение может быть без труда проинтегрировано при соблюдении двух условий. 1) если массовые силы имеют потенциал, который мы теперь обозначим через V, так что

$$X = -\partial V/\partial x \quad Y = -\partial V/\partial y \quad Z = -\partial V/\partial z,$$

2) если жидкость баротропна. В таком случае имеем:

$$-dV - d\left(\frac{1}{2}v^2\right) = dP,$$

где (см. § 11 главы II)

$$P = \int \frac{dp}{\Phi(p)}. \tag{1.1}$$

и все дифференциалы взяты при перемещении вдоль некоторой линии тока, или, иначе:

$$d\left(V + \frac{1}{2}v^2 - P\right) = 0,$$

откуда получаем так называемый интеграл Бернулли

$$V + \frac{1}{2}v^2 - P = \Gamma \tag{1.2}$$

где Γ есть величина, сохраняющая постоянное значение *на данной линии тока*, но, вообще говоря, изменяющаяся при переходе от одной линии к другой.

Если массовые силы суть силы тяжести, то, направив ось Oz вертикально вверх, имеем:

$$V = gz,$$

и интеграл Бернулли принимает вид

$$gz + \frac{1}{2}v^2 + P = \Gamma.$$

Для несжимаемой жидкости по формуле (1.1) имеем:

$$P = p/\rho.$$

Разделив на g и вводя обозначение $\gamma = \rho g$ для удельного веса напишем еще интеграл Бернулли в виде

$$z + \frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\gamma} = \Gamma. \tag{1.3}$$

В уравнении (1.3) первое слагаемое z выражает высоту рассматриваемой жидкой частицы в данной трубке тока над некоторой горизонтальной плоскостью и называется *геометрической высотой*. Второе слагаемое $v^2/2g$ выражает высоту, на которую могла бы подняться

в пустоте материальная точка, брошенная вертикально вверх с начальной скоростью v: это слагаемое называется *скоростной высотой*. Наконец, третье слагаемое выражает высоту которую должен бы иметь покоящийся столб жидкости, чтобы получить давление p у основания столба, это слагаемое называется *пьезометрической высотой*

Таким образом, интеграл Бернулли выражает, что *при установившемся движении несжимаемой жидкости сумма геометрической, скоростной и пьезометрической высот остается неизменной для частиц одной и той же трубки тока*, что может быть еще записано так:

$$z_1 + \frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} = z_2 + \frac{v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma}, \qquad (1\ 4)$$

или, если, в частности, геометрическая высота вдоль линий тока не меняется, то

$$\frac{v_1^2}{2g} - \frac{v_2^2}{2g} = \frac{p_2 - p_1}{\gamma}. \qquad (1\ 5)$$

Из баротропных случаев остановимся на изотермических и изэнтропических движениях (см. § 11 главы II)

В изотермическом движении

$$P = \int \frac{dp}{Cp} = \frac{1}{C} \ln p,$$

и интеграл Бернулли (1.2) примет вид (по-прежнему в качестве сил берем силу тяжести):

$$gz + \frac{v^2}{2} + \frac{1}{C} \ln p = \text{const}.$$

Для движений адиабатических

$$P = \int \frac{dp}{Cp^{\frac{1}{\varkappa}}} = \frac{1}{C} \frac{\varkappa}{\varkappa - 1} p^{\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}},$$

и интеграл, аналогичный (1 5), примет вид

$$\frac{v_1^2}{2} - \frac{v_2^2}{2} = \frac{1}{C} \frac{\varkappa}{\varkappa - 1} \left(p_2^{\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}} - p_1^{\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}} \right).$$

Так как

$$\rho_1 = C p_1^{1/\varkappa},$$

то мы можем записать этот закон еще в виде

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(1 - \frac{\varkappa - 1}{\varkappa} \frac{\rho_1}{p_1} \frac{v_1^2 - v_2^2}{2} \right)^{\frac{\varkappa}{\varkappa - 1}}. \qquad (1\ 6)$$

Для воздуха можно считать $\varkappa \approx 1{,}4$. Если v_1 и v_2 не слишком велики, то, как легко видеть, влияние сжимаемости будет незначительным. В самом деле, пусть, например, скорость v_1 имеет порядок $3 \cdot 10^3$ *см/сек*, $v_2 = 0$, $\rho \approx 1{,}3 \cdot 10^{-3}$ *г/см*^{3}, $p_1 = 1$ *атм* $\approx 10^6$ *г/см сек*^{2}. Тогда получим:

$$\frac{\varkappa - 1}{\varkappa} \frac{v_1^2 - v_2^2}{p_1} \frac{v_1^2 - v_2^2}{2} \approx \frac{0{,}4 \cdot 1{,}3 \cdot 10^{-3}}{1{,}4 \cdot 10^6} \frac{9 \cdot 10^6}{2} \approx 1{,}67 \cdot 10^{-3},$$

Но тогда в разложении правой части (1 6) в ряд

$$\frac{p_2}{p_1} = 1 + \frac{\varkappa}{\varkappa - 1}\left(\frac{\varkappa}{\varkappa - 1} - 1\right)\left(\frac{\varkappa - 1}{\varkappa} \frac{\rho_1}{p_1} \frac{v_1^2 - v_2^2}{2}\right)^2 + \ldots$$

мы можем ограничиться первыми двумя членами и вновь получим уравнение (1 5),

§ 2. Безвихревое движение. Если во время движения в каждой точке поля скоростей движущейся жидкости отсутствует вихрь, т. е

$$\operatorname{rot} v = 0,$$

и, следовательно, скорость является потенциальным вектором

$$v = \operatorname{grad} \varphi,$$

так что

$$v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad v_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z},$$

то основное уравнение движения (6 4) главы второй упрощается, принимая вид

$$\frac{\partial \operatorname{grad} \varphi}{\partial t} + \operatorname{grad}\left(\frac{1}{2} v^2\right) = F - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p. \qquad (2\ 1)$$

При этом движение может быть неустановившимся, так что потенциал скорости нужно рассматривать как функцию четырех аргументов x, y, z, t. Так как, очевидно,

$$\frac{\partial \operatorname{grad} \varphi}{\partial t} = \operatorname{grad}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right),$$

то из уравнения (2 1) получается

$$F = \operatorname{grad}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right) + \operatorname{grad}\left(\frac{1}{2} v^2\right) + \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p. \qquad (2.2)$$

Для несжимаемой однородной жидкости будет справедливо очевидное соотношение

$$\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p = \operatorname{grad}\left(\frac{p}{\rho}\right), \qquad (2\ 3)$$

так как ρ постоянна для всех точек поля.

Для сжимаемой жидкости можно установить аналогичное соотношение в том случае, когда жидкость *баротропна*. В этом случае введем вновь обозначение

$$\frac{dp}{\rho} = dP \text{ или } P = \int \frac{dp}{\rho}, \tag{2.4}$$

и тогда можно написать

$$\frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p = \operatorname{grad} P, \tag{2.5}$$

ибо из (2.4) имеем:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}dx + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}dy + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}dz + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial t}dt =$$
$$= \frac{\partial P}{\partial x}dx + \frac{\partial P}{\partial y}dy + \frac{\partial P}{\partial z}dz + \frac{\partial P}{\partial t}dt.$$

Сравнивая коэффициенты при дифференциалах аргументов находим:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial x};\quad \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial y},\quad \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial z},$$

откуда следует (2.5), соотношение (2.3) является очевидно частным случаем (2.5).

Таким образом для рассматриваемых случаев безвихревого движения уравнение (2.2) примет вид

$$F = \operatorname{grad}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}v^2 + P\right),$$

т. е. в этих случаях массовые силы должны являться потенциальным вектором. Обозначая потенциал сил через V,

$$F = -\operatorname{grad} V,$$

мы приведем уравнение движения (2.2) к виду

$$\operatorname{grad}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}v^2 + V + P\right) = 0, \tag{2.6}$$

показывающему, что выражение, заключенное в скобки, не зависит от координат x, y z и является только функцией времени t:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}v^2 + V + P = F(t), \tag{2.7}$$

вид которой остается произвольным. Этот интеграл уравнений движения носит название *интеграла Коши*. При наличии только сил тяжести $V = gz$ интеграл Коши принимает вид

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}v^2 + gz + P = F(t) \tag{2.8}$$

Для несжимаемой жидкости будет

$$P = \frac{p}{\rho},$$

и интеграл Коши получается в виде

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{1}{2} v^2 + gz + \frac{p}{\rho} = F(t). \tag{2.9}$$

Так как в последнем случае уравнение неразрывности имеет вид

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0, \tag{2.10}$$

то мы заключаем, что полное решение задачи об определении безвихревого движения несжимаемой жидкости сводится к отысканию одной функции φ, удовлетворяющей уравнению Лапласа (2.10), а также граничным и начальным условиям. Гидродинамическое давление p найдется тогда из соотношения (2.9), причем вид произвольной функции $F(t)$ определится, если будет наперед задана зависимость p от времени в одной точке поля.

В случае, когда рассматривается абсолютное движение жидкости в подвижной системе координат $Oxyz$, основное уравнение движения может быть записано в виде (7.10) главы второй

$$\frac{\partial^2 v_a}{\partial t} + \operatorname{grad}\left(\frac{v_a^2}{2} - v_a \cdot v_e\right) - (v_a - v_e) \times \operatorname{rot} v_a = F - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p. \tag{2.11}$$

Будем опять считать, что абсолютное движение жидкости — безвихревое, т. е. что

$$v_a = \operatorname{grad} \varphi; \tag{2.12}$$

если, кроме того, примем, что сила имеет потенциал и плотность есть функция давления, то, повторяя предыдущие рассуждения, придем к следующей форме интеграла Коши:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t} + \frac{v_a^2}{2} - v_a \cdot v_e + V + P = F(t), \tag{2.13}$$

или

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2\right] -$$
$$- (v_{ox} + \omega_y z - \omega_z y)\frac{\partial \varphi}{\partial x} - (v_{oy} + \omega_z x - \omega_x z)\frac{\partial \varphi}{\partial y} -$$
$$- (v_{oz} + \omega_x y - \omega_y x)\frac{\partial \varphi}{\partial z} + V + P = F(t), \tag{2.14}$$

где v_{ox}, v_{oy}, v_{oz} — проекции на оси подвижной системы координат скорости v_0 начала этой системы, а ω_x ω_y ω_z — проекции на те же оси вектора угловой скорости вращения подвижной системы координат ω.

Этот результат можно получить также непосредственно из уравнения (2.7). В последнее уравнение входит производная от φ по времени, взятая в неподвижной системе координат $\bar{O}\bar{x}\bar{y}\bar{z}$:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial\varphi}{\partial t}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, t).$$

Производная же $\partial\varphi/\partial t$ вычисляется в подвижной системе координат, т. е. для точки M, неизменно связанной с подвижной системой координат и имеющей относительно последней координаты x, y, z. Ясно, что $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ будут функциями от x, y, z t, причем производные этих функций по времени определяют проекции переносной скорости v_e точки M:

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = v_{ex} = v_{ox} + \omega_y z - \omega_z y \quad \frac{d\bar{y}}{dt} = v_{ey} = v_{oy} + \omega_z x - \omega_x z,$$

$$\frac{d\bar{z}}{dt} = v_{ez} = v_{oz} - \omega_x y - \omega_y x.$$

Считая x, y, z постоянными, будем поэтому иметь по правилу дифференцирования сложных функций:

$$\frac{d'\varphi}{dt} = \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{\partial\varphi}{\partial\bar{x}}\frac{d\bar{x}}{dt} + \frac{\partial\varphi}{\partial\bar{y}}\frac{d\bar{y}}{dt} + \frac{\partial\varphi}{\partial\bar{z}}\frac{d\bar{z}}{dt} = \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \operatorname{grad}\varphi\cdot v_e =$$

$$= \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{\partial\varphi}{\partial x}(v_{ox} + \omega_y z - \omega_z y) + \frac{\partial\varphi}{\partial y}(v_{oy} + \omega_z x - \omega_x z) +$$

$$+ \frac{\partial\varphi}{\partial z}(v_{oz} + \omega_x y - \omega_y x).$$

Находя отсюда $\partial\varphi/\partial t$ и вставляя полученное значение в (2.7), мы и получим (2.14).

§ 3. Установившееся безвихревое движение. В этом случае поле скоростей и поле давлений будут стационарными, поэтому $\partial\varphi/\partial t = 0$ произвольная функция $F(t)$ превращается в произвольную постоянную C, и интеграл Коши (2.8) принимает вид:

$$\frac{1}{2}v^2 + gz + P = C, \tag{3.1}$$

где

$$P = \int\frac{dp}{\rho},$$

В случае несжимаемой жидкости равенство (3.1) перепишется так:

$$\frac{1}{2}v^2 + gz + \frac{p}{\rho} = C \tag{3.2}$$

или после деления на g:

$$\frac{v^2}{2g} + z + \frac{p}{\gamma} = C, \tag{3.3}$$

где $\gamma = \rho g$; мы получим равенство, одинаковое по форме с интегралом Бернулли (1.3). Отличие от последнего заключается в том, что постоянная C интеграла Бернулли является постоянной лишь для частиц одной и той же линии тока и принимает различные значения для различных линий тока, тогда как в интеграле установившегося безвихревого движения постоянная C сохраняет одно и то же значение для в с е х частиц движущейся жидкости. Интеграл вида (3.1), (3.2), (3.3) иногда называется *интегралом Бернулли — Эйлера*.

§ 4. Ограничения, налагаемые на скорость. Существование интегралов Бернулли, Коши, Бернулли — Эйлера ставит для величины скорости известный предел, превзойти который движущаяся жидкость не может без разрыва сплошности. Рассмотрим, например, установившееся безвихревое движение несжимаемой тяжелой жидкости.

Пусть в некоторой точке поля на высоте z_0 скорость и давление равны соответственно v_0 и p_0; тогда интеграл (3.3) примет вид

$$\frac{v^2}{2g} + z + \frac{p}{\gamma} = \frac{v_0^2}{2g} + z_0 + \frac{p_0}{\gamma},$$

откуда

$$\frac{p}{\gamma} = \frac{v_0^2}{2g} + z_0 + \frac{p_0}{\gamma} - \frac{v^2}{2g} - z.$$

Последнее соотношение показывает, что величина v не может оказаться чрезмерно большой ни в одной точке жидкости, так как давление p в идеальной жидкости не может быть отрицательным. Например, для точек на той же высоте $z = z_0$ получается неравенство

$$\frac{v_0^2}{2g} + \frac{p_0}{\gamma} - \frac{v^2}{2g} \geqslant 0,$$

откуда находим предел для величины скорости v:

$$v^2 \leqslant v_0^2 + \frac{2p_0}{\rho}.$$

Если, например, вода, находящаяся в большом сосуде, вытекает в пустоту под действием только атмосферного давления p_0, то на

поверхности сосуда можно принять величину v_0 близкой к нулю, и для скорости истечения получается ограничительное условие

$$v \leqslant \sqrt{\frac{2p_1}{\rho}}.$$

Например при $p_1 = 10\,000$ *кг/м*^{2} для воды имеем: $v \leqslant 14$ *м/сек*.

§ 5. Формула Торичелли. Интеграл Бернулли имеет фундаментальное значение в вопросах гидравлики. Применим его для определения скорости истечения несжимаемой тяжелой жидкости из большого открытого сосуда через малое отверстие. Если обозначить через S площадь свободной поверхности жидкости в сосуде, через s — площадь отверстия, через V и v — скорости на поверхности и в отверстии, то уравнение неразрывности дает:

$$SV = sv.$$

Считая движение установившимся и безвихревым и применяя интеграл Бернулли — Эйлера имеем:

$$\frac{p_2}{\rho} + \frac{1}{2}v^2 - gz = \frac{p_1}{\rho} + \frac{1}{2}V^2, \tag{5.1}$$

если начало координат взять на свободной поверхности и ось Oz направить вертикально вниз, так как давление в отверстии на глубине z, где вытекающая жидкость образует также свободную поверхность, будет равно атмосферному давлению p_0. Из равенства (5.1) имеем:

$$v^2 - V^2 = 2gz \quad \text{или} \quad v^2 - \frac{s^2}{S^2}v^2 = 2gz,$$

откуда

$$v^2 = 2gz\,\frac{1}{1 - \left(\frac{s}{S}\right)^2}.$$

Если отношение s/S мало, то пренебрегая членом $(s/S)^2$, получаем для скорости истечения приближенную *формулу Торичелли*

$$v^2 = 2gz.$$

§ 6. Истечение газов. Можно получить аналогичную приближенную формулу для оценки скорости истечения газа из большого сосуда через малое отверстие. Пусть давление и плотность газа в сосуде будут p_1 и ρ_1, атмосферное давление и плотность воздуха обозначим через p_0 и ρ_0. Будем полагать, что размеры сосуда настолько велики, что истечение можно рассматривать как установившееся и притом безвихревое движение (в некотором интервале времени) и что на достаточном расстоянии внутри сосуда от отверстия можно пренебречь скоростью газа.

Считая далее что расширение газа через отверстие происходит адиабатически, пренебрегая силой тяжести и применяя интеграл движения к двум точкам — внутри сосуда, где скорость ничтожна, и у отверстия, имеем:

$$\frac{1}{2} v^2 + \int_{p_1}^{p_0} \frac{dp}{\rho} = 0, \tag{6.1}$$

где

$$p = k\rho^{\varkappa}, \qquad \varkappa = \frac{c_p}{c_v}.$$

На уравнения (6.1) получаем

$$v^2 = -2k\varkappa \int_{\rho_1}^{\rho_0} \rho^{\varkappa-2}\, d\rho = \frac{2k\varkappa}{\varkappa-1}\left(\rho_1^{\varkappa-1} - \rho_0^{\varkappa-1}\right) =$$

$$= \frac{2\varkappa}{\varkappa-1}\left(\frac{p_1}{\rho_1} - \frac{p_0}{\rho_0}\right) = \frac{2\varkappa}{\varkappa-1}\frac{p_1}{\rho_1}\left(1 - \frac{\rho_1 p_0}{\rho_0 p_1}\right)$$

или окончательно:

$$v^2 = \frac{2\varkappa}{\varkappa-1}\frac{p_1}{\rho_1}\left[1 - \left(\frac{p_0}{p_1}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}\right]. \tag{6.2}$$

§ 7. Действие мгновенных сил. Допустим что к жидкости прилагаются мгновенные массовые и поверхностные силы действующие в течение весьма короткого промежутка времени τ, но достигающие весьма больших величин. Чтобы определить действие таких сил на движение жидкости, применим основное уравнение движения, в правой части которого выделим явно мгновенную массовую силу F' и мгновенное давление p'.

$$\frac{dv}{dt} = F - F' - \frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p - \frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p'$$

Примем за начальный момент начало действия мгновенных сил, интегрируя тогда от $t = 0$ до $t = \tau$ и замечая что импульсами обычных сил можно пренебречь ввиду малой величины этих импульсов по сравнению с импульсами мгновенных сил, имеем:

$$v' - v = J - \int_0^{\tau} \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p'\, dt$$

где v и v' суть скорости одной и той же частицы непосредственно до начала и по окончании действия мгновенных сил, а J есть импульс мгновенных массовых сил:

$$J = \int_0^{\tau} F'\, dt.$$

Вследствие малости τ можно пренебречь перемещением частицы за время τ и, таким образом, скорости v' и v можно отнести к одной и той же точке поля. Ограничимся рассмотрением движения несжимаемой жидкости.

Тогда, обозначая через π импульс мгновенных давлений

$$\pi = \int_0^{\tau} p'\,dt,$$

будем очевидно, иметь:

$$v' - v = J = \operatorname{grad}\left(\frac{\pi}{\rho}\right). \tag{7.1}$$

Это соотношение показывает, что действие мгновенных сил вызывает внезапное изменение скоростей в каждой точке поля. При отсутствии мгновенных массовых сил и при действии только мгновенных давлений имеем:

$$v' - v = -\operatorname{grad}\left(\frac{\pi}{\rho}\right). \tag{7.2}$$

Обратно, если происходит внезапное изменение поля скоростей что, например, имеет место, если внезапно изменятся границы жидкости (подводный взрыв) то такое изменение вызовет появление в каждой точке жидкости мгновенных давлений, импульс которых связан уравнением (7.2) с изменением скоростей. Взяв операцию div от обеих частей равенства (7.2) и замечая что $\operatorname{div} v = 0$ и $\operatorname{div} v' = 0$, вследствие несжимаемости жидкости, и что по формулам векторного анализа расхождение от градиента есть оператор Лапласа мы видим, что импульс мгновенных давлений должен удовлетворять уравнению Лапласа:

$$\frac{\partial^2 \pi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \pi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \pi}{\partial z^2} = 0.$$

Далее, можно заключить, что если движение жидкости до начала действия мгновенных давлений было безвихревым, то оно останется безвихревым и по окончании действия. В самом деле, если

$$v = \operatorname{grad} \varphi,$$

то вследствие (7.2)

$$v' = \operatorname{grad}\left(\varphi - \frac{\pi}{\rho}\right). \tag{7.3}$$

Называя потенциал скоростей после действия мгновенных давлений через φ':

$$v' = \operatorname{grad} \varphi',$$

имеем вследствие (7.3):

$$\varphi' = \varphi - \frac{\pi}{\rho} + C_1$$

где C — произвольная постоянная, одинаковая для всех частиц жидкости.

Равенство (7.2) показывает, что если ко всем частицам несжимаемой жидкости применить *одинаковое* мгновенное давление, то не произойдет никакого изменения скоростей, так как при $\pi = \text{const}$ будет:

$$\mathfrak{v}' - \mathfrak{v} = -\operatorname{grad}\left(\frac{\pi}{\rho}\right) = 0, \quad \text{т. е.} \quad \mathfrak{v}' = \mathfrak{v}$$

Равенство (7.3) дает возможность установить новую точку зрения на возникновение безвихревого движения. Если в (7.3) положить $\varphi = \text{const}$, то

$$\varphi' = -\frac{\pi}{\rho} + C,$$

т. е. безвихревое движение, характеризуемое потенциалом φ', может возникнуть из состояния покоя $\varphi = \text{const}$ после действия мгновенных давлений с импульсом $\pi = -\rho\varphi' + C$.

Если же в (7.3) положить $\mathfrak{v}' = \text{const}$, то мы видим, что данное безвихревое движение, обладающее потенциалом скорости φ, может быть полностью во всей жидкости остановлено после применения импульса давлений

$$\pi = \rho\varphi + C.$$

Вместе с тем мы заключаем, что никаким подбором мгновенных сил давлений нельзя ни образовать, ни уничтожить вихревого движения, так как в противном случае, полагая, например, $\mathfrak{v}' = 0$, по (7.2) мы имели бы:

$$\mathfrak{v} = \operatorname{grad}\left(\frac{\pi}{\rho}\right), \quad \text{т. е.} \quad \operatorname{rot}\mathfrak{v} = 0.$$

§ 8. Кинетическая энергия безвихревого движения. Ограничиваясь случаем несжимаемой жидкости, движущейся с однозначным потенциалом скорости φ, имеем для живой силы, заключенной в некотором односвязном объеме τ, ограниченном замкнутой поверхностью S, выражение

$$T = \frac{1}{2}\int_{\tau}\rho v^2 d\tau = \frac{1}{2}\rho\int\int\int\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right] dx\,dy\,dz. \quad (8.1)$$

Известное преобразование Грина для двух любых функций φ и φ' дает:

$$\int_{(\tau)}\int\int\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\varphi'}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\varphi'}{\partial y} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial\varphi'}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz =$$

$$= -\int_{(S)}\int\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial n}\,dS - \int_{(\tau)}\int\int\varphi\left(\frac{\partial^2\varphi'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi'}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi'}{\partial z^2}\right) dx\,dy\,dz, \quad (8.2)$$

где ν есть направление внутренней нормали к поверхности S. Полагая $\varphi = \varphi'$ и замечая, что если φ есть потенциал скорости, то

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0, \tag{8.3}$$

мы получаем для живой силы жидкости, заключенной внутри поверхности S, выражение

$$T = -\frac{1}{2}\rho \int_{(S)}\int \varphi \frac{\partial\varphi}{\partial n}\, dS. \tag{8.4}$$

Эта формула показывает, что живая сила несжимаемой жидкости в односвязном объеме, движущейся с однозначным потенциалом скорости, зависит исключительно от движения на границах этого объема. В частности, если на границах нет протечения, т. е. если $\partial\varphi/\partial n = 0$, или если на границах потенциал имеет постоянное значение, которое всегда можно считать нулем, так как потенциал содержит произвольную добавочную постоянную, то формула (8.4) дает $T = 0$, т. е. жидкость не имеет никакого движения внутри односвязного объема. Этот результат был нами получен ранее (гл. I, § 17).

§ 9. Теорема В. Томсона. В. Томсон (лорд Кельвин) доказал, что живая сила несжимаемой жидкости, движущейся в односвязном объеме с потенциалом скоростей, меньше живой силы во всяком другом движении, при котором на границах объема жидкость обладает движением, одинаковым с безвихревым, внутри же обладает вихрями. В самом деле, пусть живая сила в безвихревом движении будет T, а во всяком другом — T', при условии, что на границах объема нормальная составляющая скорости v' последнего движения одинакова с нормальной составляющей скорости v безвихревого движения.

$$\alpha v_x + \beta v_y + \gamma v_z = \alpha v'_x + \beta v'_y + \gamma v'_z. \tag{9.1}$$

Здесь α, β, γ — косинусы углов, образованных внутренней нормалью к граничной поверхности S с осями координат. Кроме того, по условию:

$$v_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \quad v_y = \frac{\partial\varphi}{\partial y}; \quad v_z = \frac{\partial\varphi}{\partial z};$$

в силу уравнения неразрывности:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial v'_x}{\partial x} + \frac{\partial v'_y}{\partial y} + \frac{\partial v'_z}{\partial z} = 0 \tag{9.2}$$

Составляя разность живых сил имеем:

$$T' - T = \frac{1}{2}\rho \int\int\int (v_x'^2 + v_y'^2 + v_z'^2)\, dx\, dy\, dz - \frac{1}{2}\rho \int\int\int \left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right] dx\, dy\, dz =$$

$$= \frac{1}{2}\rho \int\int\int 2\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x}\left(v_x' - \frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\left(v_y' - \frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\left(v_z' - \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)\right] dx\, dy\, dz + \frac{1}{2}\rho \int\int\int \left[\left(v_x' - \frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(v_y' - \frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(v_z' - \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right] dx\, dy\, dz. \quad (9.3)$$

Преобразуем первый интеграл правой части, а именно: в силу очевидных соотношений

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}\left(v_x' - \frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left[\varphi\left(v_x' - \frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)\right] - \varphi\left(\frac{\partial v_x'}{\partial x} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right),$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}\left(v_y' - \frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left[\varphi\left(v_y' - \frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)\right] - \varphi\left(\frac{\partial v_y'}{\partial y} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right),$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z}\left(v_z' - \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right) = \frac{\partial}{\partial z}\left[\varphi\left(v_z' - \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)\right] - \varphi\left(\frac{\partial v_z'}{\partial z} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right),$$

имеем, принимая во внимание (9.2)

$$\int\int\int \left[\frac{\partial\varphi}{\partial x}\left(v_x' - \frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\left(v_y' - \frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\left(v_z' - \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)\right] dx\, dy\, dz =$$

$$= \int\int\int \left\{\frac{\partial}{\partial x}\left[\varphi\left(v_x' - \frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\varphi\left(v_y' - \frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[\varphi\left(v_z' - \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)\right]\right\} dx\, dy\, dz.$$

Применяя к каждому слагаемому правой части формулу Гаусса преобразования объемного интеграла в поверхностный, находим:

$$\int\int\int \frac{\partial}{\partial x}\left[\varphi\left(v_x' - \frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)\right] dx\, dy\, dz = -\int\int \varphi\left(v_x' - \frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)\alpha\, dS,$$

$$\int\int\int \frac{\partial}{\partial y}\left[\varphi\left(v_y' - \frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)\right] dx\, dy\, dz = -\int\int \varphi\left(v_y' - \frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)\beta\, dS,$$

$$\int\int\int \frac{\partial}{\partial z}\left[\varphi\left(v_z' - \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)\right] dx\, dy\, dz = -\int\int \varphi\left(v_z' - \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)\gamma\, dS,$$

откуда, складывая и принимая во внимание (9.1), получаем

$$\int\int\int \left\{\frac{\partial}{\partial x}\left[\varphi\left(v_x' - \frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\varphi\left(v_y' - \frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[\varphi\left(v_z' - \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)\right]\right\} dx\, dy\, dz = 0,$$

и таким образом соотношение (9.3) принимает вид

$$T' - T = \frac{1}{2}\rho \int\int\int \left[\left(v'_x - \frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(v'_y - \frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(v'_z - \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right] dx\,dy\,dz, \qquad (9.4)$$

$$T' - T > 0$$

если хоть в одной точке внутри объема скорость v' отличается от скорости безвихревого движения v

§ 10. Упражнения. 1. При установившемся истечении газа из тонкой конической трубки траектории частиц представляют собой прямые, сходящиеся в вершине конуса. Предполагая, что движение совершается изотермически, найти соотношение между скоростями V и v в сечениях AB и ab, площади которых суть S и s (рис. 45).

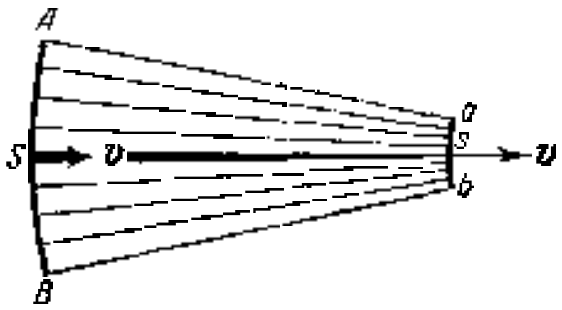

Рис. 45.

Решение. Из условия изотермичности имеем.

$$\frac{p}{\rho} = k = \text{const}.$$

Пренебрегая силой тяжести и применяя интеграл Бернулли — Эйлера

$$\frac{1}{2}v^2 - \int \frac{dp}{\rho} = C$$

к сечениям AB и ab, имеем.

$$\frac{1}{2}V^2 + k\ln P = \frac{1}{2}v^2 + k\ln p, \qquad (10.1)$$

где P и p — давление в этих сечениях.

Условие неразрывности дает

$$VPS = vps,$$

откуда

$$\frac{P}{p} = \frac{vs}{VS},$$

и интеграл преобразуется к виду

$$k\ln\frac{P}{p} = \frac{v^2 - V^2}{2} \quad \text{или} \quad k\ln\frac{vs}{VS} = \frac{v^2 - V^2}{2},$$

откуда

$$\frac{v}{V} = \frac{S}{s}e^{\frac{v^2 - V^2}{2k}}.$$

2. Определить форму сосуда, употребляемого для водяных часов (клепсидры).

Решение. Показателем времени в водяных часах служит высота уровня в верхнем сосуде, которая должна уменьшаться равномерно с постоянной скоростью V. Обозначая площадь верхнего уровня через S, площадь малого отверстия в нижней части сосуда через s и скорость истечения в отверстие — через v (рис. 46), имеем вследствие уравнения неразрывности:

$$SV = sv. \tag{10.2}$$

По формуле Торичелли $v = \sqrt{2gy}$, площадь же верхнего уровня $S = \pi x^2$. Подставляя в (10.2), имеем:

$$\pi V x^2 = s\sqrt{2gy},$$

откуда находим уравнение образующей кривой

$$x^4 = ay, \quad \text{где} \quad a = \frac{2gs^2}{\pi^2 V^2},$$

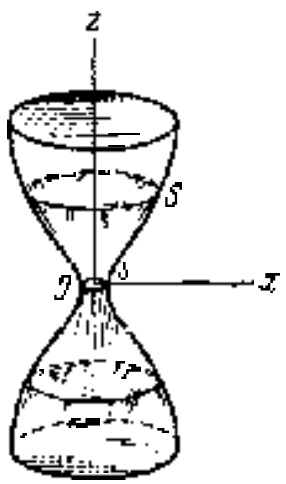

Рис. 46

3. Показать, что при безвихревом движении с потенциалом φ живая сила несжимаемой жидкости, заключенной в трубке тока малого сечения между нормальными сечениями $\varphi = c_1$, $\varphi = c_2$, может быть выражена формулой $T = \frac{1}{2} M (c_2 - c_1)$, где M — секундная масса жидкости, протекающей через трубку.

Решение. Если обозначить площади сечений через S_1 и S_2, то применяя формулу (8.4) к рассматриваемому объему жидкости, имеем:

$$T = -\frac{1}{2}\rho\left[c_1\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)_1 S_1 + c_2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)_2 S_2\right],$$

так как вдоль боковой поверхности трубки $\frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0$.

Замечая, что

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)_1 = v_1, \quad \left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)_2 = -v_2,$$

имеем:

$$T = \frac{1}{2}\rho\,(v_1 S_2 c_2 - v_1 S_1 c_1).$$

Но вследствие уравнения неразрывности $\rho v_2 S_2 = \rho v_1 S_1 = M$ и, значит,

$$T = \frac{1}{2} M (c_2 - c_1).$$

4. Из несжимаемой жидкости, заполняющей все пространство, внезапно удаляется сферический объем радиуса c. Определить время, потребное для заполнения образовавшейся полости, считая, что в бесконечно удаленных точках действует постоянное давление p_0 и что никаких других сил к жидкости не приложено.

Решение. После образования полости частицы жидкости потекут к центру по радиусам, и поле скоростей будет симметрично по отношению

к центру полости. Взяв последний за начало сферических координат, имеем одно уравнение движения вида Эйлера для точки, удаленной на расстояние r', скорость которой обозначим через v', а давление через p'.

$$\frac{\partial v'}{\partial t} + v' \frac{\partial v'}{\partial r'} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial r'}.$$

Условие несжимаемости дает

$$r'^2 v' = f(t), \tag{10.3}$$

так как в любой момент рассматриваемого неустановившегося движения объем проскакивающей жидкости через сферу любого радиуса r' не зависит от последнего, но является некоторой функцией времени, ибо движение неустановившееся. Из последнего соотношения

$$v' = \frac{F(t)}{r'^2},$$

взяв *частную* производную по t и подставляя в первое уравнение, получаем:

$$\frac{F'(t)}{r'^2} + v' \frac{\partial v'}{\partial r'} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial r'}, \quad \text{где} \quad F'(t) = \frac{dF}{dt}.$$

Интегрируя по r' в пределах от r до радиуса R заполняющейся полости, $(r < R)$, имеем:

$$-\frac{F'(t)}{r} + \frac{1}{2} v^2 = \frac{p_0}{\rho}, \tag{10.1}$$

где v означает скорость у поверхности сжимающейся полости, давление на этой поверхности равно нулю, так же как и скорость в бесконечности. Написав соотношение (10.3) для части поверхности полости

$$r^2 v = F(t)$$

и взяв полную производную по t, имеем

$$F'(t) = 2rv \frac{dr}{dt} + r^2 \frac{dv}{dt} = 2rv^2 + r^2 \frac{dv}{dr} \frac{dr}{dt} = 2rv^2 + r^2 v \frac{dv}{dr};$$

подставляя в (10.4), получаем дифференциальное уравнение, связывающее v и r

$$-2v^2 - rv \frac{dv}{dr} + \frac{1}{2} v^2 = \frac{p_0}{\rho} \quad \text{или} \quad -\frac{3}{2} v^2 - \frac{1}{2} r \frac{dv^2}{dr} = \frac{p_0}{\rho} \tag{10.5}$$

или, по разделении переменных,

$$-\frac{d(v^2)}{3v^2 + \frac{2p_0}{\rho}} = \frac{dr}{r}.$$

Интегрируя в пределах от некоторого r до c и замечая, что в начале движения при $r = c$ скорость $v = 0$, находим

$$\int_0^v -\frac{d(v^2)}{3v^2 + \frac{2p_0}{\rho}} = \int_c^r \frac{dr}{r}, \quad \text{или} \quad \ln\left(\frac{3v^2 + \frac{2p_0}{\rho}}{\frac{2p_0}{\rho}}\right) = 3 \ln \frac{c}{r},$$

откуда

$$\frac{3v^2}{2}+\frac{2p_0}{\rho}=\left(\frac{c}{r}\right)^3\frac{2p_0}{\rho}\quad\text{и}\quad v=\frac{dr}{dt}=-\sqrt{\frac{2p_0}{3\rho}\left(\frac{c^3}{r^3}-1\right)}.$$

Разделяя переменные и интегрируя в пределах от начала движения $t=0$ до конца $t=\tau$, когда будет $r=0$, получаем:

$$\tau=-\sqrt{\frac{3\rho}{2p_0}}\int_c^0\frac{dr}{\sqrt{\frac{c^3}{r^3}-1}}.$$

Вводя подстановку $r=cu$, находим

$$\tau=c\sqrt{\frac{3\rho}{2p_0}}\int_0^1\frac{du}{\sqrt{u^{-3}-1}}=c\sqrt{\frac{3\rho}{2p_0}}\int_0^1 u^{\frac{1}{2}}(1-u^3)^{-\frac{1}{2}}\,du.$$

Полагая далее $u=x^{\frac{1}{3}}$ и приходим к интегралу Эйлера вида $B(p,q)$

$$\tau=\sqrt{\frac{3c^2\rho}{2p_0}}\cdot\frac{1}{3}\int_0^1 x^{-\frac{1}{6}}(1-x)^{-\frac{1}{2}}\,dx=\sqrt{\frac{c^2\rho}{6p_0}}\,B\left(\frac{5}{6},\frac{1}{2}\right).$$

По известному свойству $B(p,q)=\dfrac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$ имеем:

$$\tau=\sqrt{\frac{c^2\rho}{6p_0}}\,\frac{\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)},$$

или, так как $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$, а $\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)=\frac{1}{3}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)$, то окончательно

$$\tau=\sqrt{\frac{3c^2\rho\pi}{2p_0}}\,\frac{\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}.$$

5. Определить давление при взрыве сферической бомбы внутри несжимаемой жидкости в частицах жидкости, непосредственно прилегающих к поверхности бомбы.

Решение. Обозначая через p искомое давление и повторяя ход решения предыдущей задачи, приходим к уравнениям, аналогичным (10.4) и (10.5) с той разницей, что теперь на сферической поверхности p не равно нулю

$$-\frac{F(t)}{r}+\frac{1}{2}v^2=-\frac{p_0}{\rho}+\frac{p}{\rho}\quad\text{и}\quad -2v^2-rv\frac{dv}{dr}+\frac{1}{2}v^2=-\frac{p_0}{\rho}-\frac{p}{\rho},\qquad(10.6)$$

откуда можно найти p в зависимости от v и r. Можно выразить p в функции от r и t. В самом деле, замечаем, что

$$\frac{d(r^4)}{dt}=2r\frac{dr}{dt}=2rv\quad\text{и поэтому}\quad\frac{d^2(r^4)}{dt^2}=2v^2+2r\frac{dv}{dt}=2v^2+2rv\frac{dv}{dr},$$

откуда

$$-rv\frac{dv}{dr}=v^2-\frac{1}{2}\frac{d^2(r^2)}{dt^2},$$

и соотношение (10.6) приводится к виду

$$-2v^2-v^2-\frac{1}{2}\frac{d^2(r^2)}{dt^2}+\frac{1}{2}v^2=\frac{F_0}{\rho}-\frac{p}{\rho},$$

откуда

$$p=p_0+\frac{\rho}{2}\left[\frac{d^2(r^2)}{dt^2}-\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right].$$

6. Показать, что если река имеет закругление, то у берега A с внутренней стороны закругления скорость течения больше, а уровень ниже, чем у берега B с наружной стороны (рис. 47).

Решение. Считая движение установившимся и безвихревым, примем центр кривизны закругления струи у точки A за начало цилиндрических координат r и φ, направив ось Oz вертикально. Тогда проекции скорости v на оси цилиндрических координат будут

$$v_r=0,\quad v_\varphi=v,\quad v_z=0 \qquad (10.7)$$

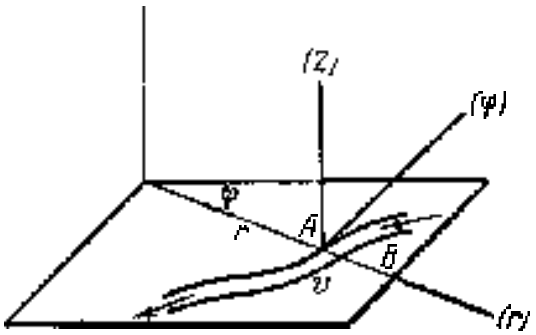

Рис. 47

Вспоминая выражения для проекций вихря на оси цилиндрических координат [см. (§ 7) главы II]

$$(\operatorname{rot} v)_r=\frac{1}{r}\left[\frac{\partial v_z}{\partial\varphi}-\frac{\partial(rv_\varphi)}{\partial z}\right];$$

$$(\operatorname{rot} v)_\varphi=\frac{\partial v_r}{\partial z}-\frac{\partial v_z}{\partial r};$$

$$(\operatorname{rot} v)_z=\frac{1}{r}\left[\frac{\partial(rv_\varphi)}{\partial r}-\frac{\partial v_r}{\partial\varphi}\right]$$

и выражая, что движение безвихревое, находим в силу (10.7)

$$\frac{\partial(rv_\varphi)}{\partial z}=0;\quad\frac{\partial(rv_\varphi)}{\partial r}=0$$

Кроме того уравнение неразрывности, написанное в цилиндрических координатах

$$\frac{1}{r}\frac{\partial(rv_r)}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial v_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{\partial v_z}{\partial z}=0,$$

дает

$$\frac{\partial v_\varphi}{\partial\varphi}=0\quad\text{или}\quad\frac{\partial(rv)}{\partial\varphi}=0.$$

Таким образом,

$$rv=k=\text{const},\quad v=\frac{k}{r}.$$

Это соотношение показывает, что при правильной форме закругления, когда оба берега у точек A и B имеют общий центр кривизны, так что $r_B>r_A$ — будет $v_B<v_A$

На основании же интеграла Бернулли — Эйлера (называя через Z_A и Z_B высоты уровней в точках A и B, имеем у поверхности:

$$Z_A + \frac{v_A^2}{2g} = Z_B + \frac{v_B^2}{2g},$$

так как давления у поверхности одинаковы (атмосферное).

Из последнего соотношения заключаем что

$$Z_A < Z_B.$$

7. Показать, что если несжимаемая жидкость имеет установившееся безвихревое движение, причем внешние массовые силы обладают потенциалом, то давление p удовлетворяет неравенству

$$\nabla^2 p = \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} < 0.$$

Указание. Нужно предварительно непосредственным вычислением показать что $\nabla^2 (v^2) > 0$, где v — скорость, а затем применить оператор Лапласа к интегралу Бернулли — Эйлера.

8. Показать, что в установившемся безвихревом движении несжимаемой жидкости, при котором траектории частиц суть плоские кривые, параллельные одной и той же плоскости (плоское движение), кривизна K линий тока выражается формулой

$$K = \frac{1}{v^2} \frac{d\left(\frac{p}{\rho} + V\right)}{dn},$$

где p — давление, ρ — плотность, V — потенциал внешних массовых сил, dn — элемент нормали к линии тока, взятый в направлении от центра кривизны.

Указание. Применить ход решения задачи 6 и из формулы $v = \frac{K}{r}$, где r — радиус кривизны, получить

$$\frac{d\left(\frac{1}{2} v^2\right)}{dn} = -\frac{v^2}{r},$$

после чего использовать интеграл Бернулли — Эйлера.

Б. ПЛОСКОЕ БЕЗВИХРЕВОЕ ДВИЖЕНИЕ

§ 11. Введение. Движение жидкости называется *плоским*, если все частицы, лежащие на одном и том же перпендикуляре к некоторой неподвижной плоскости, имеют одинаковое движение, параллельное этой плоскости. Очевидно, что в этом случае движение будет двуразмерным и достаточно рассмотреть движение в плоскости Oxy, принимая за нее ту плоскость, параллельно которой совершается движение.

Говоря в дальнейшем о потоке жидкости через некоторую кривую в плоскости Oxy, мы будем под последним понимать поток через

цилиндрическую поверхность, для которой данная кривая служит направляющей, образующие параллельны оси Oz и высота равна единице.

§ 12. Функция тока. Не делая пока предположения об отсутствии вихрей в жидкости можно показать, что уже одно уравнение неразрывности налагает на поле скоростей условие, получающееся в плоском движении простому кинематическому истолкованию. В самом деле, уравнение неразрывности дает для несжимаемой жидкости

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \quad \text{или иначе} \quad \frac{\partial v_x}{\partial x} = -\frac{\partial (-v_y)}{\partial y}. \tag{12.1}$$

Если взять дифференциальное уравнение линий тока

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} \quad \text{или} \quad -v_y\,dx + v_x\,dy = 0$$

то уравнение неразрывности (12.1) показывает, что левая часть последнего уравнения представляет собой полный дифференциал [1]) некоторой функции ψ

$$d\psi = 0, \tag{12.2}$$

так что

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad -v_y = \frac{\partial \psi}{\partial x} \tag{12.3}$$

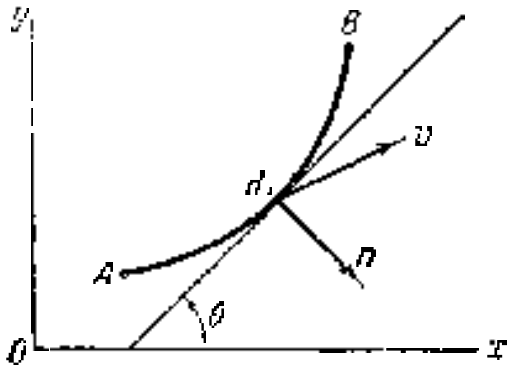

Рис. 48

Функция $\psi(x, y)$ носит название *функции тока*, так как на каждой линии тока она сохраняет свое постоянное значение $\psi(x, y) = C$, различное вообще для различных линий тока.

Если между двумя точками $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$ провести некоторую кривую (рис. 48), то нетрудно усмотреть, что поток жидкости через эту кривую выразится разностью значений функций тока в точках A и B, независимо от формы кривой. В самом деле,

$$\int_{(B)}^{(A)} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}\,ds = \int_{(B)}^{(A)} [v_x \cos(\widehat{n, x}) + v_y \cos(\widehat{n, y})]\,ds =$$

$$= \int_{(B)}^{(A)} (v_x \sin\theta - v_y \cos\theta)\,ds = \int_{(B)}^{(A)} -v_y\,dx + v_x\,dy =$$

$$= -\int_{(A_1)}^{(B)} d\psi = \psi(x_1, y_1) - \psi(x_2, y_2), \tag{12.4}$$

где θ означает угол между ds и Ox.

---

[1]) В случае неустановившегося движения время t рассматривается как параметр.

Легко найти также выражение для вихря через функцию тока. Имеем по определению вихря.

$$\Omega_x = \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} = 0,$$

$$\Omega_y = \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} = 0,$$

$$\Omega_z = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}.$$

Отсюда заключаем, что в случае безвихревого плоского движения функция тока должна удовлетворять уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0. \tag{12.5}$$

§ 13. Связь функции тока с потенциалом скорости. При существовании в плоском движении потенциала скорости φ будут иметь место равенства

$$v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \tag{13.1}$$

сравнивая которые с (12.3), устанавливаем

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \tag{13.2}$$

или иначе:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial y} = 0 \tag{13.3}$$

Последнее соотношение показывает, что каждая кривая семейства $\varphi = \text{const}$ пересекается под прямым углом с любой кривой семейства линий $\psi = \text{const}$, иначе говоря, линии тока являются ортогональными траекториями семейства изопотенциальных линий. Всякая определенная форма плоского движения жидкости интерпретируется определенной картиной распределения кривых $\varphi = \text{const}$ и $\psi = \text{const}$ в плоскости. В силу взаимной ортогональности кривых этих семейств является безразличным с геометрической точки зрения, какие из них принять за линии тока, а какие за изопотенциальные кривые. На этом основании функции φ и ψ называются *сопряженными*, и мы приходим к заключению, что если удастся найти решение некоторой определенной плоской гидродинамической задачи, т. е. если удастся подобрать потенциал скорости φ (а значит, и функцию тока ψ) так, чтобы поле скоростей удовлетворяло определенным пограничным условиям, то мы одновременно получаем решение другой плоской задачи, в которой — ψ будет служить потенциалом, а φ — функцией тока. Условия (13.2) позволяют без труда выразить одну из сопряженных функций через другую в квадратурах. В самом деле если, например, известен потенциал скорости $\varphi(x, y)$, то для нахождения

функции тока достаточно взять одно из соотношений (13.2). Взяв, например, второе из них и интегрируя по x в пределах от некоторого значения a до x, получаем

$$\psi = -\int_a^x \frac{\partial \varphi}{\partial y}\, dx + \theta(y), \tag{13.4}$$

где $\theta(y)$ — некоторая неопределенная пока функция; для нахождения последней достаточно дифференцировать (13.4) по y:

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = -\int_a^x \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}\, dx + \theta'(y),$$

или вследствие первого из соотношений (13.2) и вследствие того, что потенциал φ удовлетворяет уравнению Лапласа, имеем:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\int_a^x \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\, dx + \theta'(y), \quad \text{или} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}\Big|_a^x + \theta'(y),$$

откуда

$$\theta'(y) = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_{x=a},$$

а интегрируя в пределах от некоторого значения b до y, получаем:

$$\theta(y) = \int_b^y \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_{x=a} dy.$$

и значит,

$$\psi = -\int_a^x \frac{\partial \varphi}{\partial y}\, dx + \int_b^y \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_{x=a} dy. \tag{13.5}$$

Если бы для нахождения θ мы взяли первое из соотношений (13.2), то получили бы другую форму, эквивалентную (13.5):

$$\psi = \int_b^y \frac{\partial \varphi}{\partial v}\, dy - \int_a^x \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)_{y=b} dx. \tag{13.6}$$

Применяя формулу (8.4), нетрудно установить следующее выражение для живой силы жидкости, заключенной внутри простого замкнутого контура L:

$$T = \frac{1}{2}\rho \int_L \varphi\, d\psi, \tag{13.7}$$

причем направление обхода L при интегрировании должно быть такое, чтобы интеграл получился положительным.

§ 14. Комплексная скорость и комплексный потенциал. Условия (13.2), выражающие связь между сопряженными функциями φ и ψ, суть не что иное, как известные условия Коши — Римана, выражающие то обстоятельство, что комплексное выражение $w = \varphi + \psi i$ является *аналитической* функцией комплексного аргумента $z = x + yi$.

$$w = f(z);\ \varphi + \psi i = f(x + yi). \tag{14.1}$$

т. е. что функция $f(z)$ будет иметь определенную производную

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial x} i = \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial y} i \tag{14.2}$$

Последняя формула показывает, что производная dw/dz тесно связана со скоростью

$$\frac{dw}{dz} = v_x - v_y i. \tag{14.3}$$

Если рассматривать вещественную единицу $+1$ и мнимую единицу i как единичные векторы (орты), отложенные по осям Ox и Oy, то комплексное число $v_x - v_y i$ может быть изображено вектором скорости v, отложенным от начала координат (рис. 49); сопряженное же число $\frac{dw}{dz} = v_x - v_y i$ изобразится вектором $\bar{v}$, который служит зеркальным отражением вектора скорости по отношению к вещественной оси Ox. На этом основании комплексное число dw/dz носит название *комплексной скорости*, модуль комплексной скорости дает величину скорости:

$$\left|\frac{dw}{dz}\right| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = |v|.$$

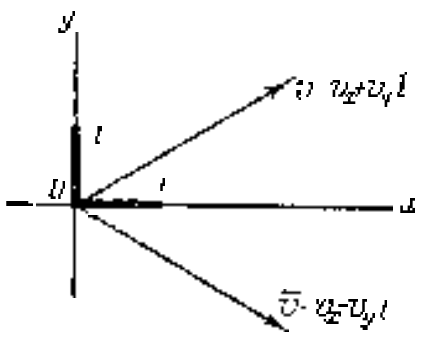

Рис. 49

Функция $w = \varphi + \psi i$ носит название *комплексного потенциала*.

Заметим, что если в (14.1) рассматривать z как обратную функцию комплексного потенциала w:

$$z = F(w),\quad x + yi = F(\varphi + \psi i), \tag{14.4}$$

то производная этой функции dz/dw изобразит вектор *одинаково* направленный со скоростью v и имеющий длину $1/|v|$, в самом деле:

$$\frac{dz}{dw} = \frac{1}{\frac{dw}{dz}} = \frac{1}{v_x - v_y i} = \frac{v_x + v_y i}{v_x^2 - v_y^2} = \frac{v}{|v^2|}. \tag{14.5}$$

§ 15. Связь плоской гидродинамической задачи с теорией функций комплексного переменного. Соотношение (14.1) показывает, что каждый определенный выбор аналитической функции $f(z)$ дает определенную систему линий тока $\psi = \text{const}$ и изопотенциальных линий $\varphi = \text{const}$ и значит, устанавливает определенную кинематическую картину поля скоростей (точнее говоря, две картины в силу сопряженности функций φ и ψ). Таким образом, кинематическое изучение плоского движения жидкости теснейшим образом связывается с теорией функций комплексного переменного и можно наперед ожидать, что многие положения этой глубоко развитой ветви математического анализа найдут свое гидродинамическое истолкование. Не имея возможности в рамках настоящего учебного курса исчерпать все возможные применения теории функций комплексного аргумента, мы ограничимся гидродинамическим истолкованием некоторых важнейших свойств аналитических функций.

§ 16. Примеры комплексного потенциала. 1. *Функция* $w = az$ при a вещественном. Имеем:

$$\varphi + \psi i = ax + iay$$

откуда заключаем, что линии тока

$$\psi = ay = \text{const}$$

суть прямые, параллельные оси Ox; линии равного потенциала:

$$\varphi = ax = \text{const},$$

суть прямые, параллельные оси Oy, скорость во всем поле постоянна и при $a > 0$ направлена вдоль оси Ox (рис. 50)

$$v_x = a \qquad v_y = 0$$

Такой поток мы назовем *однородным поступательным*. Легко видеть, что при a комплексном $(a = \alpha + \beta i)$ характер потока сохранится, изменится лишь направление скорости, которая изобразится вектором $\alpha - \beta i$.

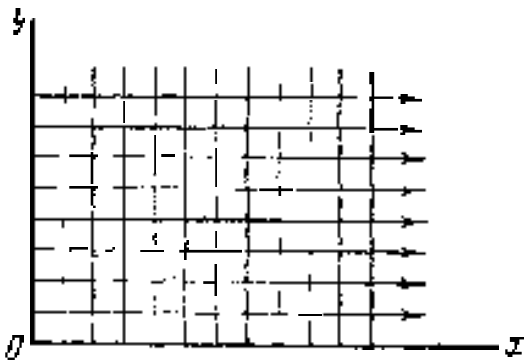

Рис. 50

2. *Функция* $w = az^2$ при a вещественном. Имеем

$$\varphi + \psi i = a(x + yi)^2 = a(x^2 - y^2) + 2axyi$$

Линии тока

$$\psi = 2axy = \text{const}$$

суть равнобочные гиперболы, для которых координатные оси служат асимптотами рис. (51).

Изопотенциальные линии

$$\varphi = a(x^2 - y^2) = \text{const}.$$

являются также гиперболами, для которых координатные оси служат осями симметрии.

Комплексная скорость в некоторой точке M

$$\frac{dw}{dz} = 2az$$

показывает, что вектор скорости v направлен по зеркальному отражению OM' радиуса-вектора z этой точки и имеет величину, пропорциональную удалению точки от начала координат. Так как за возможные твердые границы жидкости можно принять, очевидно, одну из линий тока и так как координатные оси $x = 0$, $y = 0$ служат линией тока, $\psi = 0$, то мы заключаем, что установившееся безвихревое движение внутри прямого угла является кинематически возможным.

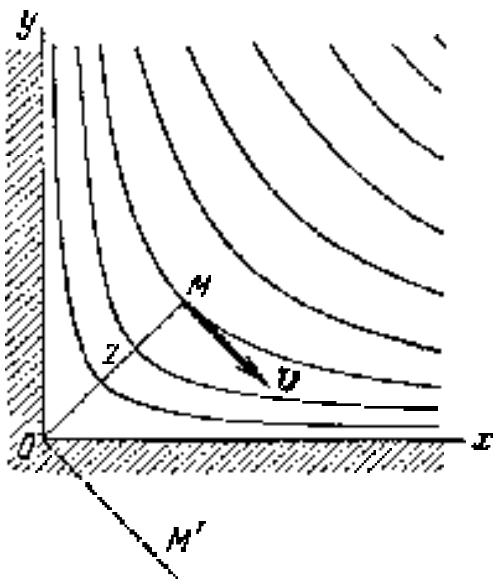

Рис. 51

3. *Функция* $w = 1/z$. Имеем:

$$\varphi + i\psi = \frac{1}{x + yi} = \frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{y}{x^2 + y^2} i.$$

Линии тока представляют собой систему окружностей

$$\frac{y}{x^2 + y^2} = \text{const} = C$$

или

$$x^2 + y^2 - \frac{1}{C} y = 0,$$

касающихся оси Ox в начале координат, эквипотенциальные линии

$$\frac{x}{x^2 + y^2} = \text{const},$$

дают другую систему окружностей, касающихся оси Oy в начале координат (рис. 52).

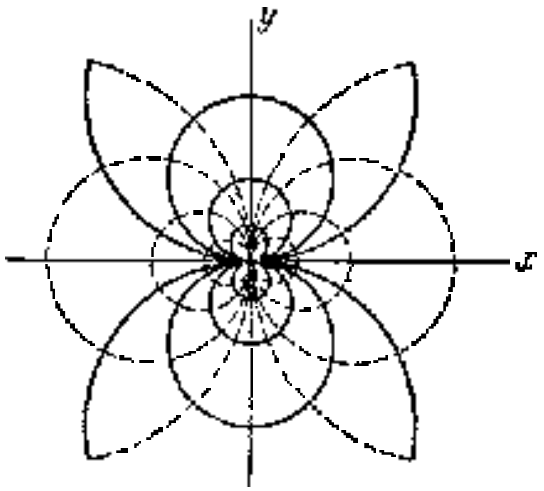

Рис. 52

Выражение комплексной скорости

$$\frac{dw}{dz} = -\frac{1}{z^2}$$

показывает, что величина скорости становится бесконечно большой в начале координат, следовательно, для возможности применения предыдущих формул нужно исключить из рассмотрения начало координат, окружив эту точку произвольной замкнутой кривой. В этом случае начало координат служит особой точкой для комплексного

потенциала (простой полюс) и для комплексной скорости (двукратный полюс).

4. *Функция* $w = \ln z$. Вводя в рассмотрение модуль r и аргумент θ для комплексной переменной

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta},$$

имеем

$$\omega + i\lambda = \ln(re^{i\theta}) = \ln r + i\theta$$

Отсюда заключаем, что линии тока суть прямые $\theta = \text{const}$, лучеобразно исходящие из начала координат, изопотенциальные кривые суть концентрические окружности $r = \text{const}$ с центром в начале координат (рис. 53).

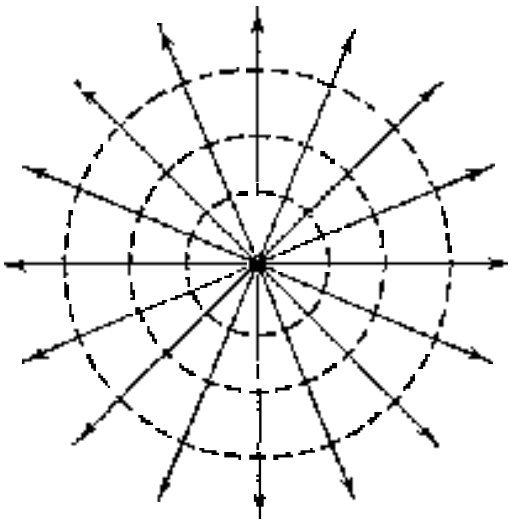

Рис. 53.

Выражение для комплексной скорости

$$\frac{dw}{dz} = \frac{1}{z}$$

показывает, что и в этом случае начало координат является особой точкой, именно — логарифмической для комплексного потенциала и простым полюсом для комплексной скорости.

§ 17. Источники и стоки. Рассматривая движение жидкости мы делали до сих пор предположение о непрерывности и конечности поля скоростей. Разбирая примеры комплексного потенциала, мы встретились с возможностью существования поля скоростей, непрерывного и конечного во всех точках плоскости, за исключением отдельных изолированных точек. Наиболее простое гидродинамическое истолкование можно дать картине, изображенной на рис. 53, когда комплексный потенциал имеет изолированную логарифмическую точку. В этом случае линии тока радиально расходятся из начала координат, так что можно представить, что из начала координат вытекает в каждую секунду некоторое количество жидкости m, такую точку мы назовем *источником*, а секундное количество вытекающей жидкости — *мощностью* или *обильностью* источника, при отрицательном m происходит поглощение жидкости, такая точка называется *стоком*.

Если начало координат служит источником с мощностью m и в бесконечности жидкость остается в покое, и других источников и стоков в плоскости Oxy нет, то, описав вокруг начала координат, как центра, окружность радиуса r, мы найдем, что поток жидкости через окружность будет иметь постоянную величину m, независимо от радиуса r, так как вследствие несжимаемости внутри окружности

не может произойти накопления жидкости. С другой стороны, этот поток выразится произведением $2\pi r\, d\varphi/dr$, так как вследствие симметрии поля скоростей потенциал скорости будет функцией только расстояния r, — так что нормальная скорость вдоль окружности будет равна $d\varphi/dr$. Таким образом имеем:

$$2\pi r \frac{d\varphi}{dr} = m, \quad \text{откуда} \quad \varphi = \frac{m}{2\pi} \ln r.$$

Далее находим:

$$\psi = \frac{m}{2\pi} \theta,$$

а для комплексного потенциала получается

$$w = \frac{m}{2\pi} \ln z \tag{17.1}$$

Нетрудно заключить, что если в точках плоскости $z = a_1$, $z = a_2$, ..., $z = a_n$ находятся источники или стоки с обильностями (мощностями) m_1, m_2, ..., m_n то комплексный потенциал течения, ими создаваемого, выразится функцией

$$w = \frac{m_1}{2\pi} \ln (z - a_1) + \ldots + \frac{m_n}{2\pi} \ln (z - a_n) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{n} m_k \ln (z - a_k), \tag{17.2}$$

откуда найдутся следующие выражения для потенциала скорости и функции тока:

$$\varphi = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{n} m_k \ln \rho_k, \tag{17.3}$$

$$\psi = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{n} m_k \theta_k, \tag{17.4}$$

где ρ_k и θ_k означают модуль и аргумент комплексного числа $z - a_k$.

Формула (17.2) может быть распространена и на случай непрерывного распределения точечных источников вдоль некоторой линии. Пусть, например, на отрезке $(-a\ a)$ вещественной оси равномерно распределены точечные источники одинаковой обильности и пусть k означает общую обильность источников, заключенных в единице длины отрезка. Тогда формула (17.2) приведется к виду

$$w = \frac{k}{2\pi} \int_{-a}^{a} \ln (z - \xi)\, d\xi =$$

$$= \frac{k}{2\pi} [(z + a) \ln (z + a) - (z - a) \ln (z - a) - 2a] \tag{17.5}$$

§ 18. Дублеты. Совокупность источника и стока с мощностями $+m$ и $-m$, помещенных на бесконечно малом расстоянии δs друг от друга, называется *дублетом*. Произведение $M = m\,\delta s$, которое мы будем предполагать конечным (так что m будет неограниченно возрастать при уменьшении δs), можем назвать по аналогии с магнитом, *моментом* дублета и считать векторной величиной направленной одинаково с δs от стока к источнику:

$$M = m\,\delta s,$$

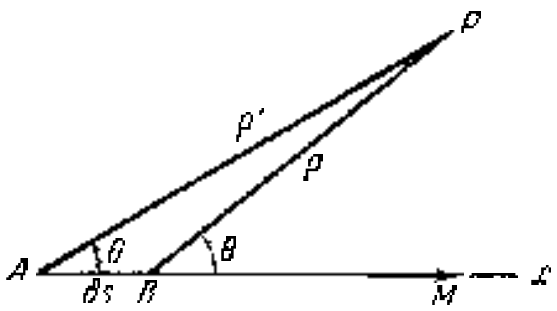

Рис. 54

это направление мы назовем *осью дублета*.

Для потенциала скорости потока, создаваемого таким дублетом, имеем (рис. 54), согласно (17.3),

$$\varphi = \frac{1}{2\pi}\left(m \ln \rho - m \ln \rho'\right) = \frac{m}{2\pi} \ln \frac{\rho}{\rho'} = \frac{m}{2\pi} \ln\left(1 - \frac{\rho' - \rho}{\rho'}\right).$$

С точностью до малых величин второго порядка малости можно положить $\rho' - \rho = \delta s \cos\theta$, так как проектируя соотношение $\vec{\rho}' - \vec{\rho} = \vec{\delta s}$ на направление вектора $\vec{\rho}$, имеем: $\rho' \cos(\theta' - \theta) - \rho = \delta s \cdot \cos\theta$.

Разлагая $\ln\left(1 - \frac{\rho' - \rho}{\rho'}\right)$ в ряд, имеем в пределе при $\delta s \to 0$

$$\varphi = -\frac{M \cos\theta}{2\pi r}. \tag{18.1}$$

Для сопряженной функции тока находим по формулам (13.5),

$$\psi = \frac{M \sin\theta}{2\pi r}, \tag{18.2}$$

а для комплексного потенциала получается выражение

$$w = -\frac{M}{2\pi} \frac{\cos\theta - i \sin\theta}{r} = -\frac{M}{2\pi} \frac{1}{r(\cos\theta - i\sin\theta)} = -\frac{M}{2\pi} \frac{1}{z}, \tag{18.3}$$

и, следовательно простой полюс $z = 0$ комплексного потенциала, дающий для поля скоростей картину изображенную на рис. 52, может быть гидродинамически истолкован как дублет в начале координат, ось которого направлена по Ox.

Нетрудно видеть, что если ось дублета составляет угол α с осью Ox то выражение для комплексного потенциала будет:

$$w = -\frac{Me^{i\alpha}}{2\pi z}. \tag{18.4}$$

Если на плоскости Oxy в точках $z = a_1$, $z = a_2$, ..., $z = a_n$ помещены дублеты, моменты которых равны M_1, M_2, ..., M_n, а оси обра-

ют углы $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ с вещественною осью Ox, то комплексный потенциал выразится формулой

$$w = -\frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{n} \frac{M_k e^{\alpha_k i}}{z - a_k}. \qquad (18\,5)$$

§ 19. Вихревые точки. Можно дать еще иное гидродинамическое истолкование логарифмической точке в комплексном потенциале, чем то, которое было дано в § 17, где показывалось, что поле скоростей, определяемое комплексным потенциалом

$$w = \frac{m}{2\pi} \ln z$$

может быть получено если поместить в начале координат источник мощности m. Чтобы получить новое истолкование, достаточно, как было показано выше в § 13, переменить роли линий тока и потенциальных линий, т. е. за потенциал скорости принять $-\psi$, за функцию тока взять функцию φ § 17. Такая замена равносильна умножению комплексного потенциала на i. Положив, следовательно,

$$w = -\frac{mi}{2\pi} \ln z, \qquad (19\,1)$$

мы имеем для потенциала скорости выражение

$$\varphi = -\frac{m}{2\pi} \theta, \qquad (19\,2)$$

показывающее, что потенциал уже нельзя рассматривать как однозначную функцию тока на плоскости Oxy так как при обходе вокруг начала координат по произвольному простому контуру величина потенциала изменится на $\pm m$ (знак в зависимости от направления обхода). Для функции тока получается из (19 1) выражение

$$\psi = \frac{m}{2\pi} \ln r \qquad (19\,3)$$

которое показывает, что линии тока представляют собой концентрические окружности с центром в начале координат. При этом движение жидкости во всех точках плоскости будет безвихревым, за исключением начала координат, где скорость по формуле (19 1) будет бесконечно велика. Эту точку мы назовем *вихревой*, а величину циркуляции скорости Γ, равную $-m$ при положительном направлении обхода вокруг начала координат, назовем *интенсивностью* или *напряжением* вихревой точки; при этом величина циркуляции не зависит от формы контура, по которому совершается обход. Таким образом получается, что вихревая точка $z = 0$ создает плоское движение, определяемое комплексным потенциалом

$$w = -\frac{i}{2\pi} \Gamma \ln z = \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln z. \qquad (19\,4)$$

Очевидно, что если вихревой точкой служит не начало координат, а точка $z = a$, то выражение комплексного потенциала будет

$$w = \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln (z - a). \tag{19.5}$$

Если в плоскости Oxy имеется несколько изолированных вихревых точек $z = a_1$, $z = a_2$, ..., $z = a_n$ с интенсивностями $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_n$, то движение будет определяться комплексным потенциалом

$$w = -\frac{i}{2\pi} \sum_{k=1}^{n} \Gamma_k \ln (z - a_k). \tag{19.6}$$

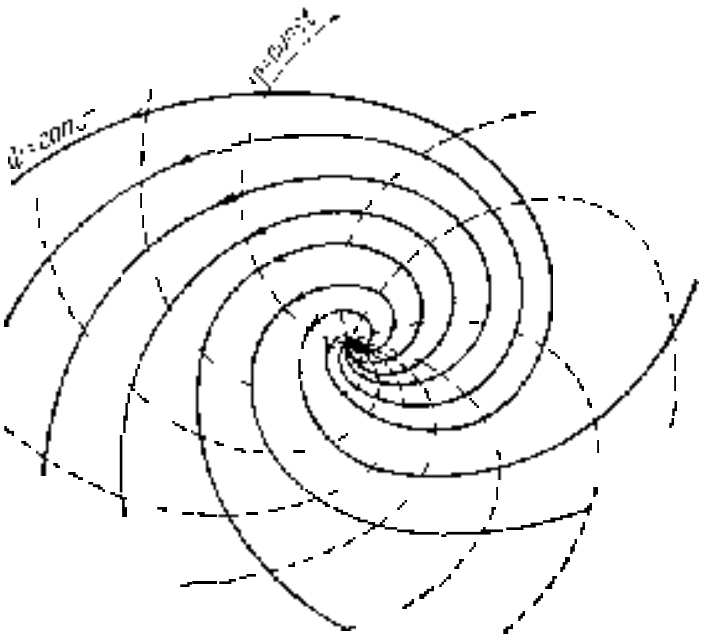

Рис. 55.

§ 20. Вихреисточники.

Рассмотрим течение, определяемое комплексным потенциалом

$$w = \frac{q}{2\pi} \ln z, \tag{20.1}$$

где q — некоторое комплексное число, которое мы представим в форме

$$q = m - i\Gamma. \tag{20.2}$$

Если q вещественно, то начало координат служит источником с обильностью m; если же q чисто мнимое, то начало координат является вихревой точкой с интенсивностью Γ. В общем случае, когда q комплексно, начало координат представляет особенность, которая носит название *вихреисточника*. В этом случае плоское течение, определяемое комплексным потенциалом (20.1), можно трактовать как результат наложения друг на друга течения, созданного вихревой точкой $z = 0$ с интенсивностью Γ, и течения, созданного источником обильности m, помещенным тоже в начале координат. Полагая $z = re^{i\theta}$ и выделяя в комплексном потенциале

$$w = \frac{m - i\Gamma}{2\pi} (\ln r + \theta i)$$

вещественную и мнимую части, мы найдем для потенциала скорости φ и для функции тока ψ выражения

$$\varphi = \frac{1}{2\pi} (m \ln r + \Gamma\theta); \quad \psi = \frac{1}{2\pi} (m\theta - \Gamma \ln r).$$

Эти выражения показывают, что линиями тока служит семейство логарифмических спиралей (рис. 55)

$$r = C_1 e^{\frac{m}{\Gamma}\theta},$$

а изопотенциальными линиями — другое семейство спиралей

$$r = C_2 e^{\frac{\Gamma}{\pi}\theta},$$

ортогональных к спиралям первого семейства.

§ 21. Вычеты комплексной скорости, циркуляция и поток скорости. Как известно из теории функций комплексного переменного структура аналитической функции $F(z)$ вполне определяется распределением в плоскости z особых точек функции и их характером.

Теория вычетов даст возможность без труда выразить циркуляцию и поток скорости по любому контуру, если для комплексной скорости $\bar{v} = dw/dz$ известны распределение простых полюсов и им соответствующие вычеты. В самом деле, если простые полюсы функции $\bar{v}$ лежат в точках $z = a_1$, $z = a_2$, ..., $z = a_n$ и вычеты, им соответствующие суть A_1, A_2, ..., A_n то линейный интеграл от функции $\bar{v}$ по любому замкнутому контуру L, заключающему в себе полюсы a_1, a_2, ..., a_n даст

$$\int_L \bar{v}\, dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} A_k. \tag{21 1}$$

С другой же стороны, отделяя вещественную часть от мнимой, имеем:

$$\oint_L v\, dz = \oint_L (v_x - v_y i)(dx + dy i) =$$
$$= \oint_L (v_x\, dx + v_y\, dy) + i \oint_L (v_x\, dy - v_y\, dx). \tag{21 2}$$

Вещественная часть $\oint_L v_x\, dx + v_y\, dy$ представляет собой циркуляцию скорости по контуру L

$$\Gamma = \oint_L v_x\, dx + v_y\, dy.$$

Коэффициент же мнимой части согласно (12 4) есть не что иное, как поток Π скорости сквозь контур L, выражающий секундное объемное количество жидкости, вытекающее из источников, лежащих внутри контура:

$$\Pi = \oint_L (v_x\, dy - v_y\, dx).$$

Выделяя вещественную и мнимую части каждого вычета

$$A_k = \alpha_k + \beta_k i$$

и сравнивая вещественные части в (21.1) и (21.2), находим выражение циркуляции скорости через вычеты комплексной скорости

$$\Gamma = -2\pi \sum_{k=1}^{n} \beta_k. \tag{21.3}$$

Аналогично для потока скорости получаем:

$$\Pi = 2\pi \sum_{k=1}^{n} \alpha_k. \tag{21.4}$$

§ 22. Упражнения. (Во всех задачах рассматривается плоское безвихревое движение несжимаемой жидкости.)

1. Исследовать движение, определяемое потенциалом скорости

$$\varphi = ax(x^2 - 3y^2) \qquad (a > 0).$$

Какой объем жидкости V протекает каждую секунду через отрезок прямой линии, соединяющей точки $z_1 = 0$ и $z_2 = 1 + i$?

Ответ. $w = az^3$, $\psi = ay(3x^2 - y^2)$, линиями тока служат в частности прямые $y = 0$ $y = \sqrt{3}x$, так что можно поставить стенки, идущие вдоль положительной оси Ox и под углом 60° к ней; $V = 2a$.

2. Рассмотреть движение, определяемое комплексным потенциалом

$$w = a\sqrt{z} \qquad (a > 0)$$

в области, получающейся, если вдоль положительной оси Ox поставить стенку. Показать, что линиями тока служат параболы

Ответ. Линии тока суть параболы $y^2 = 4c^2(x + c^2)$, охватывающие положительную ось Ox; линиями равного потенциала скорости служат ортогональные параболы $y^2 = 4c^2(c^2 - x)$ (здесь c — произвольная постоянная).

3. Исследовать движение, определяемое комплексным потенциалом

$$w = m \ln\left(z - \frac{1}{z}\right) \qquad (m > 0).$$

В каких точках находятся источники и стоки? Найти полагая $z = re^{i\theta}$, потенциал скорости и функцию тока и показать, что можно рассматривать движение в квадранте ограниченном осями координат и окружностью $r = 1$.

Найти, какой объем жидкости V протекает через линию, соединяющую точки $z_1 = i$, $z_2 = 1/2$.

Ответ. 2 источника в точке $z = +1$ и $z = -1$ один сток в точке $z = 0$,

$$\varphi = m \ln \frac{\sqrt{r^4 - 2r^2\cos 2\theta + 1}}{r}; \quad \psi = m \operatorname{arctg}\left[\frac{(r^2 - 1)\operatorname{tg}\theta}{r^2 - 1}\right];$$

уравнение линий тока в декартовых координатах

$$(x^2 + y^2 + 1)y = c(x^2 + y^2 - 1),$$

в частности, линиями тока являются оси координат и окружность $x^2 + y^2 = 1$; $V = \frac{m\pi}{2}$.

4. Пусть в верхней полуплоскости $y > 0$ имеется несколько источников интенсивности m_k в точках z_k и несколько вихрей интенсивности Γ_l в точках z_l. Показать, что если поместить еще в нижней полуплоскости в точках z_k,

симметричных точкам z_k относительно вещественной оси, источники той же интенсивности m_k, а в точках $\bar{z}_l$ вихри интенсивности $-\Gamma_l$ (как говорят, если отразить источники и вихри от оси Ox), то ось Ox сделается линией тока и может быть поэтому заменена твердой стенкой.

5. Найти комплексный потенциал и уравнение линий тока в полярных координатах для движения жидкости в квадранте, ограниченном осями координат x и y, если известно, что в точке $z = 1 + i$ находится источник интенсивности m, в точке $z = 0$ — сток той же интенсивности m. Найти еще величину скорости v_1 в точке $z = 1$.

Указание. На основании предыдущей задачи отражаем систему источников сначала от оси Ox, после чего всю систему источников отражаем от оси Oy.

Ответ. $w = \frac{m}{2\pi} \ln\left(1 + \frac{4}{z^4}\right)$, $\sin 4\theta = c\,(r^4 + 4\cos 4\theta)$, $v_1 = -\frac{8m}{5\pi}$.

6. Найти функцию тока для движения в верхней полуплоскости, ограниченной стенкой, идущей вдоль оси Ox, если известно, что в точке $z = i$ находится дублет интенсивности m, имеющий направление положительной оси Ox. Показать, что та же функция определяет движение жидкости внутри некоторого полукруга.

Указание. Воспользоваться задачей 4.

Ответ. $\psi = \frac{m\,(r^2 - 1)\,r\sin\theta}{\pi\,(r^4 + 2r^2\cos 2\theta + 1)} = \frac{m\,(x^2 + y^2 - 1)\,y}{\pi\,[(x^2 + y^2)^2 + 2\,(x^2 - y^2) + 1]}$.

7. Дано движение, определяемое комплексным потенциалом

$$w = (1 + i)\ln(z^2 - 1) + (2 - 3i)\ln(z^2 + 1) + \frac{1}{z}.$$

Найти, какой объем жидкости протекает через окружность $x^2 + y^2 = 9$ и чему равна циркуляция скорости Γ по этой окружности.

Ответ. $V = 12\pi$, $\Gamma = 8\pi$.

ГЛАВА ПЯТАЯ

ВИХРЕВЫЕ ДВИЖЕНИЯ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

А. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ГЕОРИИ ВИХРЕЙ И ТЕОРЕМЫ ГЕЛЬМГОЛЬЦА О СОХРАНЕНИИ ВИХРЕЙ

§ 1. Введение. В главе четвертой был рассмотрен ряд таких движений идеальной жидкости, в которых существовал потенциал скорости φ, так что вектор скорости v, представлялся в виде градиента этой функции:

$$v = \operatorname{grad} \varphi$$

или

$$v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad v_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z}; \tag{1.1}$$

эти движения идеальной жидкости называются *движениями с потенциалом скорости* или *безвихревыми движениями жидкости*. Последнее название объясняется тем обстоятельством, что для движений с потенциалом скорости вихрь скорости обращается в нуль. В самом деле, вихрь скорости $\Omega = \operatorname{rot} v$ есть вектор, составляющие которого определяются формулами:

$$\Omega_x = \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}; \quad \Omega_y = \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}; \quad \Omega_z = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \tag{1.2}$$

и обращаются в нуль в случае выполнения условий (1.1); например, для составляющей вихря скорости по оси Ox имеем:

$$\Omega_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \, \partial z} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \, \partial y} = 0.$$

Итак, если $v = \operatorname{grad} \varphi$, то

$$\Omega = \operatorname{rot} v = 0. \tag{1.3}$$

Вообще для любой функции φ всегда будет

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} \varphi = 0. \tag{1.4}$$

Отметим, что, обратно, из условия (1.3) вытекают уравнения (1.1), как показывается в векторном исчислении. Таким образом, в безвихревом движении наверное существует потенциал скорости.

Задачей этой главы является рассмотрение таких движений идеальной жидкости, в которых вектор Ω – вихрь вектора скорости — отличен от нуля, по крайней мере, в некоторой части рассматриваемой жидкости. Такие движения мы будем называть *вихревыми движениями жидкости*.

Вихревые движения жидкости могут быть обнаружены при самом элементарном наблюдении. Таково, например, движение воды реки в тех местах, где она обтекает быки моста: за последними обнаруживаются ясно видимые вихревые области. При движении какого-нибудь тела в жидкости например корабля, за ним также образуются вихри. На образование этих вихрей нужно затратить некоторую энергию; очевидно, что эта энергия получается за счет энергии тела, которое, таким образом, должно преодолевать некоторое сопротивление жидкости. Это сопротивление, вызываемое образованием вихрей, можно назвать *вихревым сопротивлением*. Циклоны и антициклоны, обусловливающие до некоторой степени погоду тех мест земли, над которыми они находятся, рассматриваемые с гидродинамической точки зрения, тоже представляют собой вихревые образования еще более резкой формой вихревых образований в атмосфере являются смерчи.

Кинематика вихревых движений была отчасти рассмотрена в главе первой. Вспомним некоторые определения и результаты этой главы.

При рассмотрении движения частицы жидкости в § 1 главы первой было выяснено, что это движение можно разложить на три части: поступательное движение частицы деформацию частицы и вращение частицы. Вихрь вектора скорости определяет именно вращение частицы. Если бы частица жидкости была твердой и вращалась с угловой скоростью ω, то вихрь скорости Ω был бы вдвое больше ω и имел бы то же направление, что вектор угловой скорости ω. Итак, вихрь скорости Ω характеризует вращение *отдельных* частиц жидкости, а не их поступательное движение. Можно представить себе такое движение жидкости, в котором каждая частица жидкости будет двигаться только поступательно, так что это движение будет безвихревое, а между тем вся масса жидкости, как целое будет двигаться по кругу. Для этого заставим прямоугольный сосуд с жидкостью (рис. 56) перемещаться параллельно самому себе причем так, чтобы центр его описывал окружность. Мы получим тогда безвихревое движение жидкости, находящейся в сосуде.

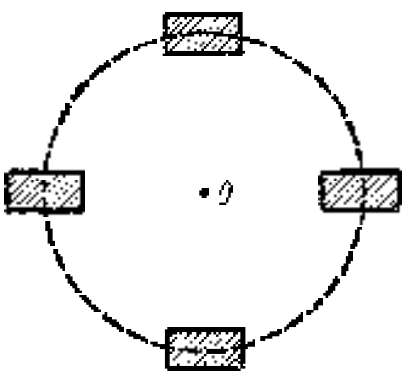

Рис. 56.

Обратным примером является движение жидкости слоями (рис 57), определяемое формулами

$$v_x = ay, \quad v_y = 0; \quad v_z = 0,$$

в котором каждый слой жидкости, параллельный плоскости Oxz движется параллельно оси Ox, причем скорость движения тем больше, чем дальше рассматриваемый слой отстоит от плоскости Oxz

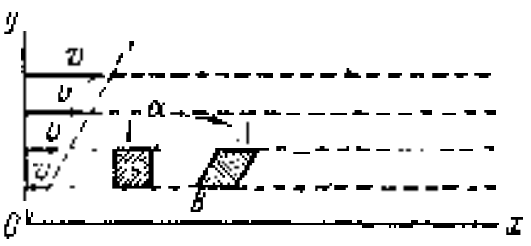

Рис 57

В этом движении

$$\Omega_x = 0, \quad \Omega_y = 0 \quad \Omega_z = -a,$$

следовательно, рассматриваемая жидкость всюду завихрена. Дело в том что квадрат I, состоящий из жидких частиц, при своем движении деформируется, превращаясь в параллелограмм II, причемм эту деформацию можно разложить, как было показано в главе первой, на чистую деформацию (в данном случае растяжение вдоль линии α и сжатие вдоль линии β) и последующее вращение деформированного квадрата в направлении, указанном стрелкой (от оси Oy к оси Ox)

Итак, нужно иметь в виду разницу между обыденным понятием о вихревом движении как о движении по кругам и т. п. и гидродинамическим понятием о вихре, разъясненным в главе первой и только что выше Может быть, следовало бы оттенить эту разницу в терминологии, однако мы будем придерживаться общепринятой терминологии

Вспомним определение вихревой линии. вихревой линией называется такая линия, во всякой точке которой вихрь скорости направлен по касательной к этой линии. Поэтому уравнения вихревой линии имеют вид

$$\frac{dx}{\Omega_x} = \frac{dy}{\Omega_y} = \frac{dz}{\Omega_z}.$$

Если взять замкнутую линию и через каждую точку ее провести вихревую линию, то совокупность всех таких вихревых линий ограничит вихревую трубку.

В § 19 главы I было указано на очень тесную связь понятия вихря вектора с понятием циркуляции вектора по замкнутому контуру L, на котором выбрано определенное направление.

$$\Gamma = \oint_L \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{s} = \oint_L v_x\,dx + v_y\,dy + v_z\,dz. \tag{1.5}$$

А именно если взять бесконечно малый плоский контур L, то циркуляция скорости v по этому контуру равна произведению площади σ, охватываемой контуром, на составляющую вихря скорости

$\Omega = \operatorname{rot} v$, взятую на направление n, перпендикулярное к плоскости контура L:

$$\Gamma = \Omega_n \sigma \tag{1.6}$$

При этом, поскольку мы пользуемся правой системой координат, следует брать направление в ту сторону пространства откуда ориентировка контура L кажется направленной против стрелки часов.

Так как проекция вектора на свое собственное направление имеет наибольшую величину по сравнению с проекциями вектора на какое-либо другое направление, то, при поворачивании плоскости контура L различными способами, циркуляция по этому контуру будет максимальной в том случае, когда плоскость контура будет стоять перпендикулярно к направлению вихря и будет равна

$$\Gamma = \Omega \sigma \tag{1.7}$$

Формула (1.6) может быть обобщена на случай любого контура L конечной величины, на котором выбрано определенное направление обхода, и этом случае она называется *формулой Стокса* и имеет следующий вид:

$$\Gamma = \oint_L v \cdot ds = \int\int_{(\Sigma)} \Omega_n \, d\sigma. \tag{1.8}$$

Здесь Σ есть поверхность, ограниченная контуром L; $d\sigma$ — элемент этой поверхности Ω_n — проекция вектора вихря Ω на направление перпендикуляра к элементу поверхности $d\sigma$, выбранное согласно вышеуказанному.

Было отмечено далее, что расхождение вихря всегда равно нулю.

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} v = 0,$$

и при помощи этого была доказана следующая теорема о постоянстве циркуляции вдоль вихревой трубки значения циркуляции по любому замкнутому контуру, охватывающему данную вихревую трубку, равны между собой.

Это значение циркуляции было названо интенсивностью вихревой трубки Для бесконечно малой вихревой трубки ее интенсивность равна по формуле (1.7) произведению величины вихря на площадь бесконечно малого поперечного сечения трубки нормального к ее оси.

Теорема о постоянстве интенсивности вихревой трубки вдоль ее оси была установлена Гельмгольцем создателем теории вихрей.

§ 2. Теорема Томсона. В 1858 году Гельмгольц в своем знаменитом мемуаре установил дифференциальные уравнения для вектора вихря Ω, из которых он вывел фундаментальные теоремы о сохранении вихревых линий и интенсивностей вихревых трубок Впоследствии теоремы Гельмгольца были иным путем доказаны В. Томсоном Метод

Томсона основан на широком применении понятия циркуляции скорости, понятия, как мы знаем, тесно связанного с понятием вихря скорости.

Мы начнем изучение вихревых движений с изложения метода Томсона. Рассмотрим в момент времени t_0 какую-нибудь линию A_0B_0, проведенную в жидкости. Мы будем рассматривать эту линию как жидкую линию, т. е. составленную из жидких частиц. В любой другой момент времени t частицы, составляющие линию A_0B_0, образуют новую линию AB.

Рассмотрим теперь линейный интеграл от скорости v по линии AB, т. е. выражение

$$J = \int_{AB} v \cdot ds = \int_{AB} (v_x\,dx + v_y\,dy + v_z\,dz). \tag{2.1}$$

В случае замкнутости линии AB интеграл J обращается в циркуляцию скорости по замкнутому контуру AB. В момент $t' = t + \Delta t$ жидкие частицы образуют линию $A'B'$, а линейный интеграл по $A'B'$ будет иметь значение

$$J' = \int_{A'B'} v' \cdot ds = \int_{A'B'} (v'_x\,dx + v'_y\,dy + v'_z\,dz),$$

где v' есть вектор скорости в момент t'. Чтобы охарактеризовать изменение J с течением времени, составим производную от J по времени, т. е. составим следующее выражение:

$$\frac{dJ}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{J' - J}{\Delta t},$$

где $\Delta t = t' - t$. Нашей первой задачей будет вычисление величины dJ/dt.

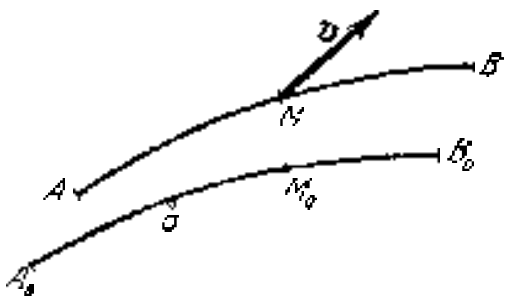

Рис. 58.

Рассмотрим жидкие частицы, расположенные в момент t_0 на кривой A_0B_0 (рис. 58). Каждую такую частицу будем характеризовать своим значением некоторого параметра σ. Можно, например, взять за этот параметр длину дуги кривой A_0B_0, отсчитываемую от точки A_0. Ясно, что декартовы координаты x, y, z любой жидкой частицы, лежавшей в момент времени t_0 на кривой A_0B_0, будут функциями как от σ, так и от t:

$$x = x(\sigma, t), \quad y = y(\sigma, t), \quad z = z(\sigma, t); \tag{2.2}$$

иными словами радиус-вектор точки M относительно начала координат O есть функция от σ и t

$$r = r(\sigma, t). \tag{2.3}$$

Выражение циркуляции (2.1) запишется следующим образом:

$$J = \int_{AB} \left(v_x \frac{\partial x}{\partial \sigma} + v_y \frac{\partial y}{\partial \sigma} + v_z \frac{\partial z}{\partial \sigma} \right) d\sigma = \int_{AB} \left(\mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \sigma} \right) d\sigma \qquad (2.4)$$

Так как σ и t являются в формулах (2.2) и (2.3) независимыми переменными, то при дифференцировании J по t нужно $d\sigma$ рассматривать как постоянную величину. Ясно далее, по определению скорости, что

$$\frac{d\mathbf{r}(\sigma, t)}{\partial t} = \mathbf{v}(\sigma, t),$$

следовательно,

$$\frac{\partial^2 \mathbf{r}(\sigma, t)}{\partial t\, \partial \sigma} = \frac{\partial \mathbf{v}(\sigma, t)}{\partial \sigma},$$

и точно так же

$$\frac{\partial \mathbf{v}(\sigma, t)}{\partial t} = \boldsymbol{\omega}(\sigma, t)$$

где $\boldsymbol{\omega}(\sigma, t)$ есть ускорение частицы. Поэтому

$$\frac{dJ}{dt} = \int_{AB} \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \sigma} \right) d\sigma + \int_{AB} \left(\mathbf{v} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial \sigma\, \partial t} \right) d\sigma =$$

$$= \int_{AB} \left(\boldsymbol{\omega} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \sigma} \right) d\sigma + \int_{AB} \left(\mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \sigma} \right) d\sigma. \qquad (2.5)$$

Первый член справа построен совершенно аналогично выражению (2.4) и есть линейный интеграл от ускорения

$$\int_{AB} \left(\boldsymbol{\omega} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \sigma} \right) d\sigma = \int_{AB} \left(\omega_x \frac{\partial x}{\partial \sigma} + \omega_y \frac{\partial y}{\partial \sigma} + \omega_z \frac{\partial z}{\partial \sigma} \right) d\sigma = \int_{AB} (\boldsymbol{\omega}\ d\mathbf{s}), \qquad (2.6)$$

что же касается второго члена, то мы имеем очевидную формулу

$$d(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) = d\mathbf{v}\ \mathbf{v} + \mathbf{v}\ d\mathbf{v} = 2(\mathbf{v} \cdot d\mathbf{v}),$$

следовательно,

$$\mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \sigma} d\sigma = \frac{1}{2} \frac{\partial v^2}{\partial \sigma} d\sigma, \qquad (2.7)$$

и, значит,

$$\int_{AB} \left(\mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \sigma} \right) d\sigma = \frac{1}{2} \int_{AB} \frac{\partial v^2}{\partial \sigma} d\sigma = \frac{1}{2} (v_B^2 - v_A^2). \qquad (2.8)$$

Возвращаясь к эйлеровым переменным, будем пользоваться обозначением

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}. \qquad (2.9)$$

и тогда вследствие (2.6) и (2.8) формула (2.5) примет вид

$$\frac{dJ}{dt} = \int_{AB} \frac{dv}{dt}\, ds + \frac{1}{2} v_B^2 - \frac{1}{2} v_A^2. \tag{2.10}$$

Это и есть искомое соотношение.

Если контур AB есть замкнутая линия l, то точки B и A совпадают, $v_B = v_A$, и, следовательно, формула упрощается, принимая вид

$$\frac{d}{dt} \oint_l v \cdot ds = \oint_l \frac{dv}{dt} \cdot ds. \tag{2.11}$$

Таким образом имеет место следующая теорема.

Теорема *Производная по времени от циркуляции скорости v по некоторому замкнутому контуру равна циркуляции от ускорения dv/dt по тому же контуру.*

Возьмем теперь основные уравнения движения идеальной жидкости в форме *Эйлера*

$$\frac{dv}{dt} = F - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p \tag{2.12}$$

и сделаем два следующих предположения.

1. Сила F, действующая на единицу массы жидкости, имеет потенциал V, так что

$$F = -\operatorname{grad} V, \quad F_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial V}{\partial z} \tag{2.13}$$

2. Жидкость считаем баротропной (см. § 11 главы II), т. е.

$$\rho = \Phi(p), \quad p = \Psi(\rho). \tag{2.14}$$

В таком случае

$$\int \frac{dp}{\rho} = P(p), \tag{2.15}$$

и следовательно

$$\operatorname{grad} P = \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p.$$

Уравнения Эйлера принимают вид

$$\frac{dv}{dt} = -\operatorname{grad}(V + P). \tag{2.16}$$

Подставим это выражение для ускорения в формулу (2.10) для $\frac{dJ}{dt}$:

$$\frac{dJ}{dt} = -\int_{AB} \operatorname{grad}(V + P) \cdot ds + \frac{1}{2} v_B^2 - \frac{1}{2} v_A^2;$$

но по самому определению grad φ имеют место формулы

$$\operatorname{grad}\varphi \cdot d\boldsymbol{s} = d\varphi, \quad \int\limits_{AB} \operatorname{grad}\varphi \cdot d\boldsymbol{s} = \varphi_B - \varphi_A,$$

и значит,

$$\frac{dI}{dt} = -(V + P)_B + (V + P)_A + \frac{1}{2} v_B^2 - \frac{1}{2} v_A^2,$$

т. е.

$$\frac{d}{dt} \int\limits_{AB} \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{s} = -\left(V + P - \frac{1}{2} v^2\right)_B + \left(V + P - \frac{1}{2} v^2\right)_A. \quad (2\ 17)$$

В случае замкнутого контура L точки B и A совпадают, и уравнение (2 17) принимает вид

$$\frac{d}{dt} \oint\limits_L \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{s} = 0$$

откуда после интегрирования сразу получается

$$\oint\limits_L \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{s} = \text{const}. \quad (2\ 18)$$

В этом равенстве и состоит основная теорема Томсона.

Теорема Томсона. *Если массовые силы допускают потенциал и идеальная жидкость баротропна то циркуляция скорости по любому замкнутому контуру во все время движения жидкости остается неизменной*

Непосредственным следствием этой теоремы является теорема Лагранжа

§ 3. Теорема Лагранжа. *Пусть* 1) *жидкость идеальная,* 2) *сила* $\boldsymbol{F}$, *действующая на единицу массы жидкости, имеет потенциал* V *и* 3) *плотность жидкости является функцией давления* $\rho = \Phi(p)$; *тогда если в начальный момент времени в некоторой части жидкости не имелось вихрей, то их не было раньше и не будет позже в этой части жидкости*

Подчеркнем, что здесь речь идет об определенной массе жидкости, а не об определенной части пространства. Для доказательства теоремы Лагранжа заметим, что, по условию, в начальный момент времени в рассматриваемой части жидкости $\boldsymbol{\Omega} = 0$; поэтому, в силу формулы (1 8) циркуляция скорости по любому замкнутому контуру, лежавшему в рассматриваемой части жидкости, равна нулю

$$\oint\limits_L \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{s} = 0$$

По теореме Томсона циркуляция скорости по жидкому контуру L будет равна нулю и во все время движения. Но тогда из той же

формулы (1.8) вытекает, что для любой поверхности, целиком лежащей в рассматриваемой части жидкости,

$$\int\int \Omega_n \, d\sigma = 0.$$

Но это может быть только, если в любой точке рассматриваемой части жидкости и для любого направления n окажется $\Omega_n = 0$. Иными словами, в любой точке рассматриваемой части жидкости и в любой момент должно быть $\Omega = 0$, что и доказывает теорему Лагранжа.

Так как отсутствие вихрей равносильно существованию потенциала скорости, то теорему Лагранжа можно высказать еще в такой форме.

Если в начальный момент времени движение обладало потенциалом скорости, то оно будет обладать потенциалом и скорости и во все время движения.

§ 4. Теоремы Гельмгольца. Докажем теперь две основные теоремы Гельмгольца.

Теорема о сохранении вихревых линий. *Если сделать те же предположения, что в теореме Лагранжа, то частицы жидкости, образующие в некоторый момент времени вихревую линию, во все время движения образуют вихревую линию.*

Для доказательства мы рассмотрим сперва вихревую поверхность, т. е. поверхность, в каждой точке которой вихрь скорости Ω касается этой поверхности; такую поверхность можно получить, выбирая какую-нибудь линию (которая должна быть отличной от вихревой линии) и проводя через каждую точку этой линии вихревые линии. Докажем, что частицы жидкости, составлявшие в некоторый момент вихревую поверхность S, будут образовывать во все время движения вихревую поверхность. В самом деле, возьмем на поверхности S бесконечно малый контур L. По формуле (1.8)

$$\oint_L v \cdot ds = \int\int \Omega_n \, dS.$$

Циркуляция скорости по этому контуру равна нулю, так как во всякой точке поверхности S нормальная составляющая вихря Ω_n равна нулю (ибо Ω лежит в касательной плоскости к S). В следующий момент времени t' жидкий контур L примет положение L', причем, конечно, L' будет лежать на поверхности S', образованной теми частицами жидкости, которые раньше составляли поверхность S; по теореме Томсона, циркуляция скорости по кривой L' в момент t' равна циркуляции скорости по кривой L в момент t, т. е. равна нулю:

$$\int_{L'} v' \cdot ds = 0.$$

Ре тогда из формулы (1 8) выходит

$$\int\int_{S'} \Omega'_n \, dS = 0,$$

при этом контур L' можно взять сколь угодно малым и где угодно лежащим на поверхности S', но тогда непременно во всякой точке поверхности S'

$$\Omega'_n = 0,$$

а это и значит, что поверхность S' есть вихревая поверхность.

Возьмем теперь в момент t вихревую линию l; через нее можно провести две пересекающиеся вихревые поверхности S и Σ. В какой-либо другой момент времени частицы, составлявшие поверхности S и Σ, образуют соответственно поверхности S' и Σ', при этом частицы, составлявшие линию пересечения l поверхностей S и Σ, образуют линию пересечения l' поверхностей S' и Σ'. В каждой точке кривой l вихрь скорости Ω' должен лежать в касательной плоскости как к поверхности S', так и к поверхности Σ', т. е. Ω' должен быть направлен по пересечению этих касательных плоскостей, а это пересечение представляет как раз касательную к линии l'. Итак, линия l' есть вихревая линия, и теорема доказана

Итак в рассматриваемом случае каждая вихревая линия сохраняет свою индивидуальность в том смысле что каждая вихревая линия перемещается в пространстве вместе с частицами жидкости ее составляющими. Это свойство мы будем называть *свойством сохраняемости вихревых линий*, и тогда название доказанной теоремы становится совершенно понятным

Следствие. При тех же предположениях любая вихревая трубка во время движения будет оставаться вихревой трубкой, так как она ограничена вихревыми линиями, которые все время остаются вихревыми линиями Точнее говоря, это следствие надо понимать таким образом, что частицы жидкости, образующие в некоторый момент времени вихревую трубку, в любой следующий (или предыдущий) момент времени тоже образуют вихревую трубку.

Теорема о сохранении интенсивности вихревых трубок. Если сделать те же предположения, что в теореме Лагранжа, то интенсивность любой вихревой трубки во все время движения остается постоянной

В самом деле, интенсивность вихревой трубки в момент t определяется как раз циркуляцией скорости по контуру, охватывающему один раз рассматриваемую вихревую трубку

$$\Gamma = \oint_L v \cdot ds.$$

Но тогда рассматриваемая теорема есть непосредственное следствие теоремы Томсона по которой

$$\oint_L \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{s} = \oint_{L'} \boldsymbol{v}' \cdot d\boldsymbol{s}$$

§ 5. Сохраняемость векторных линий. Ввиду важности установленных только что теорем Гельмгольца, мы докажем их еще раз иным методом, исходя из дифференциальных уравнений для вихря скорости. Но предварительно нам нужно остановиться на общем вопросе об условиях сохраняемости векторных линий.

Пусть мы имеем какую-либо движущуюся среду, поле скоростей которой дается вектором $\boldsymbol{v}(r\ t)$, зависящим, вообще говоря, и от времени. Рассмотрим кроме того еще какой либо другой вектор $\boldsymbol{a}(r, t)$, как, например, вектор ускорения $d\boldsymbol{v}/dt$ или вихрь скорости $\operatorname{rot}\boldsymbol{v}$. Проведем векторные линии вектора $\boldsymbol{a}$, т. е. линии, в каждой точке которых вектор $\boldsymbol{a}$ имеет направление касательной к этой линии. Уравнение этих линий в векторной форме есть

$$d\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{a} = 0$$

или в декартовых координатах:

$$\frac{dx}{a_x(x, y, z, t)} = \frac{dy}{a_y(x, y, z, t)} = \frac{dz}{a_z(x, y, z, t)}.$$

Совершенно ясно что для двух разных моментов времени t и t' мы получим, вообще говоря, разные совокупности векторных линий.

Рассматривая какую-нибудь векторную линию соответствующую моменту t' мы обнаружим вообще говоря, что она состоит из частиц среды, которые в момент t принадлежали различным векторным линиям. Но, в частном случае, может оказаться что частицы среды, составляющие к моменту t' векторную линию в момент t тоже образовывали векторную линию. Если это последнее обстоятельство имеет место для любых моментов времени t и t' и для любых векторных линий данного вектора $\boldsymbol{a}$, то мы будем говорить, что векторные линии вектора $\boldsymbol{a}$ обладают свойством сохраняемости.

Если векторные линии вектора $\boldsymbol{a}$ обладают свойством сохраняемости, то каждая векторная трубка будет во все время движения сплошной среды оставаться векторной трубкой, так как она ограничена совокупностью векторных линий, каждая из которых остается все время векторной линией. Но в этом случае опять-таки можно различить два подслучая: первым подслучаем будет тот, когда интенсивность векторной трубки

$$\int\int_{(S)} a_n\, d\sigma,$$

где Σ — поперечное сечение трубки, меняется с течением времени; вторым же подслучаем будет тот, когда интенсивность любой векторной трубки во все время движения сохраняет свою величину. В этом последнем подслучае мы будем говорить, что интенсивность векторных трубок обладает свойством сохраняемости.

Мы уже имели выше пример вектора для которого векторные линии и интенсивности векторных трубок обладают свойством сохраняемости, а именно, по доказанным выше теоремам Гельмгольца таким вектором является вихрь скорости в любом движении идеальной баротропной жидкости, которая находится под действием сил, имеющих потенциал.

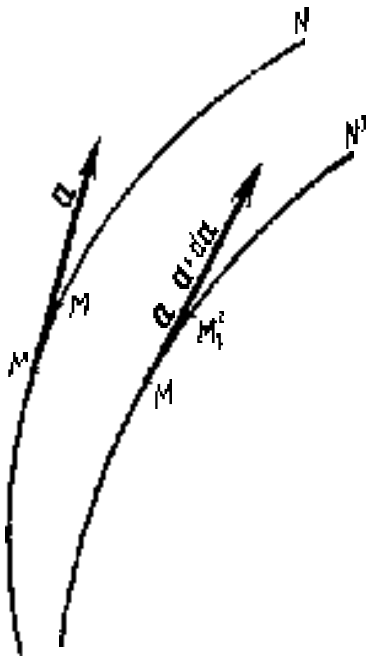

Рис. 59

Мы будем в дальнейшем предполагать, что в рассматриваемой области векторы $\boldsymbol{v}$ и $\boldsymbol{a}$ непрерывны вместе с их первыми частными производными и что величина вектора $\boldsymbol{a}$ отлична от нуля. Тогда через каждую точку рассматриваемой области будет проходить одна и только одна векторная линия.

Докажем теперь следующую основную теорему, принадлежащую А. А. Фридману [1])

Теорема. *Условие необходимое и достаточное для того, чтобы сохранялись как векторные линии вектора $\boldsymbol{a}$, так и интенсивности векторных трубок состоит в выполнении равенства*

$$\frac{d\boldsymbol{a}}{dt} - (\boldsymbol{a} \cdot \nabla)\boldsymbol{v} + \boldsymbol{a}\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{v} = 0 \qquad (5.1)$$

во всей рассматриваемой области для всех рассматриваемых моментов времени t.

Доказательство этой теоремы мы разобьем на три части.

I. Покажем прежде всего, что необходимое условие для сохраняемости векторных линий вектора $\boldsymbol{a}$ состоит в выполнении равенства

$$\left[\frac{d\boldsymbol{a}}{dt} - (\boldsymbol{a} \cdot \nabla)\boldsymbol{v}\right] \times \boldsymbol{a} = 0. \qquad (5.2)$$

В самом деле, пусть MN (рис. 59) есть некоторая векторная линия в момент t, а $M'N'$ — линия составленная к моменту $t' = t - \Delta t$ из тех жидких частиц, которые в момент t образовывали линию MN. Пусть при этом точка M перешла в точку M', а бесконечно близкая к M точка M_1 перешла в точку M_1'. По условию,

[1]) Фридман А. А., Опыт гидромеханики сжимаемой жидкости, ОНТИ, 1934.

линия $M'N'$ есть векторная линия в момент t, следовательно вектор

$$a' = a - da$$

касается линии $M'N'$ в точке M'. Если мы введем обозначение

$$\delta r = \overrightarrow{MM_1},$$

то ясно, что

$$\overrightarrow{M'M_1} = \delta r + d\,\delta r.$$

Так как MN есть векторная линия, то

$$\delta r \times a = 0, \tag{5.3}$$

или иначе

$$\delta r = \varepsilon a, \tag{5.4}$$

где ε есть некоторое бесконечно малое скалярное число.

Совершенно аналогично условие, что $M'N'$ есть векторная линия, запишется так:

$$(\delta r + d\,\delta r) \times (a + da) = 0,$$

или

$$\delta r \times a + d\,\delta r \times a + \delta r \times da + d\,\delta r \times da = 0.$$

Первый член слева равен нулю в силу (5.3), последний же член может быть отброшен как бесконечно малая величина более высокого порядка чем остальные члены. Деля оставшиеся члены на dt мы получаем условие

$$\frac{d}{dt}\,\delta r \times a - \frac{da}{dt} \times \delta r = 0. \tag{5.5}$$

Заметим теперь, что

$$\frac{d}{dt}\,\delta r = \delta \frac{dr}{dt}, \tag{5.6}$$

ибо знаки d и δ можно переставить (знак d относится к дифференцированию по времени, а знак δ — к дифференцированию вдоль кривой MN); а так как

$$\frac{dr}{dt} = v,$$

то

$$\frac{d\,\delta r}{dt} = \delta v = \delta x \frac{\partial v}{\partial x} + \delta y \frac{\partial v}{\partial y} + \delta z \frac{\partial v}{\partial z} = (\delta r \cdot \nabla)\, v, \tag{5.7}$$

и наконец, по формуле (5.4)

$$\frac{d\,\delta r}{dt} = \varepsilon (a \cdot \nabla)\, v, \quad \delta r = \varepsilon a \tag{5.8}$$

Подставляя эти значения в (5.5) и производя сокращение на ε, мы придем к равенству (5.2), что и требовалось доказать.

II. Покажем теперь, что равенство (5.1) есть необходимое условие того, чтобы сохранялись не только векторные линии вектора a, но и интенсивности векторных трубок.

Доказательство протекает совершенно аналогично, нужно только учесть добавочное условие сохраняемости интенсивностей векторных трубок. Рассмотрим бесконечно тонкую векторную трубку; ее интенсивность равна

$$I = a\sigma,$$

где σ есть площадь поперечного сечения трубки в точке M (рис. 60). Через промежуток времени dt векторная трубка займет новое положение, и для ее интенсивности мы будем иметь выражение

$$I' = a'\sigma',$$

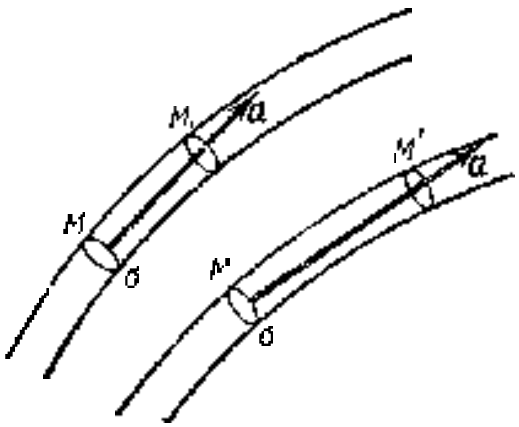

Рис. 60.

где σ' есть площадь поперечного сечения трубки в точке M'. По условию должно быть $I = I'$, т. е.

$$a\sigma = a'\sigma'. \tag{5.9}$$

Используем теперь условие, что в новом положении векторная трубка заполнена теми же самыми частицами, что и в первоначальном положении.

Масса бесконечно малого цилиндра, вырезанного из вихревой трубки и имеющего основанием поперечное сечение трубки σ а высотой длину $MM_1 = |\delta r|$, равна

$$m = \rho\sigma\,|\delta r|,$$

где ρ есть плотность среды в момент t в точке M. Указанный бесконечно малый объем перейдет в цилиндрический объем трубки поперечным сечением которого будет σ', ребром $M'M_1' = |\delta r + d\,\delta r|$, а массой

$$m' = \rho'\sigma'\,|\delta r + d\,\delta r|,$$

где ρ' есть плотность в момент t' в точке M'. Так как массы указанных двух объемов должны быть одинаковы, то мы будем иметь $m = m'$, т. е.

$$\rho a_1\,|\delta r| = \rho'\sigma'\,|\delta r + d\,\delta r|.$$

Сравнивая это равенство с (5.9), найдем, что

$$\rho\,\frac{|\delta r|}{a} = \frac{\rho'\,|\delta r + d\,\delta r|}{a'}. \tag{5.10}$$

Введем еще, для краткости письма, в рассмотрение новый вектор

$$A = \frac{a}{\rho}, \tag{5.11}$$

тогда мы можем переписать (5.10) в виде

$$\frac{\delta r}{A} = \frac{\delta r + d\,\delta r}{A'} = \eta, \tag{5.12}$$

где через η обозначена общая величина предыдущих отношений. Но мы знаем, что векторы δr и A имеют одинаковое направление; поэтому имеет место не только скалярное равенство (5.12), но и векторное:

$$\delta r = \eta A, \tag{5.13}$$

и

$$\delta r + d\,\delta r = \eta A' = \eta (A + dA) = \eta A + \eta\, dA.$$

Вследствие равенства (5.13) это последнее соотношение упрощается:

$$\frac{a\,\delta r}{dt} = \eta \frac{dA}{dt}. \tag{5.14}$$

Применяя формулу (5.7), будем иметь

$$(\delta r \cdot \nabla)\, v = \eta \frac{dA}{dt},$$

и, наконец, пользуясь (5.13) и сокращая на η, получим

$$\frac{dA}{dt} - (A \cdot \nabla)\, v = 0 \tag{5.15}$$

Итак, мы нашли искомое необходимое условие в следующей форме:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{a}{\rho}\right) - \frac{1}{\rho}(a \cdot \nabla)\, v = 0. \tag{5.16}$$

Нетрудно преобразовать это условие к виду (5.1). В самом деле, мы имеем очевидно:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{a}{\rho}\right) = \frac{1}{\rho}\frac{da}{dt} - a\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\rho}\right) = \frac{1}{\rho}\frac{da}{dt} - \frac{a}{\rho^2}\frac{d\rho}{dt}.$$

Но по уравнению непрерывности

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho \operatorname{div} v$$

поэтому

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{a}{\rho}\right) = \frac{1}{\rho}\left(\frac{da}{dt} + a \operatorname{div} v\right). \tag{5.17}$$

Подставляя это значение в равенство (5.16) и сокращая на $1/\rho$, приходим к требуемому равенству

$$\frac{d\boldsymbol{a}}{dt} - (\boldsymbol{a} \nabla)\boldsymbol{v} + \boldsymbol{a}\operatorname{div}\boldsymbol{v} = 0,$$

вполне эквивалентному равенству (5.16).

III. Покажем, наконец, что предыдущее условие является достаточным для сохраняемости как векторных линий вектора $\boldsymbol{a}$ так и интенсивностей векторных трубок.

Построим векторные линии вектора $\boldsymbol{a}$ в начальный момент времени t_0. Построим теперь для любого момента времени t поле вектора $\tilde{\boldsymbol{a}}$ следующим образом. Берем произвольную точку M_0 и проводим через нее векторную линию L_0 для момента t_0. Пусть жидкие частицы, составляющие эту векторную линию, образуют к моменту времени t жидкую линию L и пусть точка M_0 перейдет в точку M, тогда мы направляем вектор $\tilde{\boldsymbol{a}}$ в точке M в момент времени t по касательной к линии L, причем приписываем вектору $\tilde{\boldsymbol{a}}$ такую величину, чтобы интенсивность бесконечно малой векторной трубки охватывающей линию L_0, тоже сохранялась.

Построенный вектор $\tilde{\boldsymbol{a}}$ обладает свойством сохраняемости векторных линий и интенсивностей векторных трубок, поэтому должно выполняться соотношение

$$\frac{d\tilde{\boldsymbol{a}}}{dt} - (\tilde{\boldsymbol{a}} \nabla)v + \tilde{\boldsymbol{a}}\operatorname{div} v = 0.$$

При $t = t_0$ вектор $\tilde{\boldsymbol{a}}$ приводится к $\boldsymbol{a}$. При этом вектор $\boldsymbol{a}$, по условию, тоже удовлетворяет уравнению (5.1). Но дифференциальное уравнение (5.1), будучи линейным относительно $\boldsymbol{a}$, имеет единственное решение, принимающее в начальный момент времени определенные начальные значения. Поэтому вектор $\boldsymbol{a}$ должен совпасть с вектором $\tilde{\boldsymbol{a}}$ и, следовательно, векторные линии и интенсивности векторных трубок вектора $\boldsymbol{a}$ должны обладать свойством сохраняемости.

Итак, высказанная нами теорема доказана теперь полностью.

Вследствие важности вектора, стоящего в левой части равенства (5.1), Фридман ввел для него особое название и обозначение, а именно: *этот вектор называется полным гельмгольцевым вектора* $\boldsymbol{a}$, обозначается через

$$\operatorname{Helm}\boldsymbol{a} = \frac{d\boldsymbol{a}}{dt} - (\boldsymbol{a} \cdot \nabla)\boldsymbol{v} + \boldsymbol{a}\operatorname{div}\boldsymbol{v} \qquad (5.18)$$

и читается «гельм вектора $\boldsymbol{a}$».

Итак, необходимое и достаточное условие сохранения векторных линий и интенсивностей векторных трубок вектора $\boldsymbol{a}$ состоит в равенстве нулю гельма этого вектора.

§ 6. Уравнения Фридмана. Уравнения Гельмгольца. Напишем основные уравнения гидромеханики идеальной жидкости [г.л. II, (6.4)]:

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \operatorname{grad}\left(\frac{1}{2} v^2\right) - \boldsymbol{v} \times \operatorname{rot} \boldsymbol{v} = \boldsymbol{F} - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p. \tag{6.1}$$

Из этих уравнений можно вывести другие, определяющие изменение вихрей с течением времени. Для этого применим к обеим частям предыдущего равенства операцию rot, будем при этом пользоваться обычным обозначением

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{v} = \boldsymbol{\Omega}.$$

Так как

$$\operatorname{rot} \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} = \frac{\partial \operatorname{rot} \boldsymbol{v}}{\partial t} = \frac{\partial \boldsymbol{\Omega}}{\partial t}$$

и так как

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} \varphi = 0,$$

то в результате получим:

$$\frac{\partial \boldsymbol{\Omega}}{\partial t} - \operatorname{rot}(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{\Omega}) = \operatorname{rot} \boldsymbol{F} - \operatorname{rot}\left(\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p\right). \tag{6.2}$$

Применяя формулу векторного анализа

$$\operatorname{rot}(\varphi \boldsymbol{a}) = \varphi \operatorname{rot} \boldsymbol{a} + \operatorname{grad} \varphi \times \boldsymbol{a},$$

легко найдем, что

$$\operatorname{rot}\left(\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p\right) = \frac{1}{\rho} \operatorname{rot} \operatorname{grad} p + \operatorname{grad} \frac{1}{\rho} \times \operatorname{grad} p = -\frac{1}{\rho^2} (\operatorname{grad} \rho \times \operatorname{grad} p).$$

Точно так же вследствие равенств

$$\operatorname{rot}(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{b} \cdot \nabla) \boldsymbol{a} - (\boldsymbol{a} \cdot \nabla) \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \operatorname{div} \boldsymbol{b} - \boldsymbol{b} \operatorname{div} \boldsymbol{a}$$

и

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\Omega} = \operatorname{div} \operatorname{rot} \boldsymbol{v} = 0$$

легко получим:

$$\operatorname{rot}[\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{\Omega}] = (\boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla) \boldsymbol{v} - (\boldsymbol{v} \cdot \nabla) \boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\Omega} \operatorname{div} \boldsymbol{v}.$$

Равенство (6.2) принимает поэтому форму

$$\frac{\partial \boldsymbol{\Omega}}{\partial t} + (\boldsymbol{v} \cdot \nabla) \boldsymbol{\Omega} - (\boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla) \boldsymbol{v} + \boldsymbol{\Omega} \operatorname{div} \boldsymbol{v} = \operatorname{rot} \boldsymbol{F} + \frac{1}{\rho^2} (\operatorname{grad} \rho \times \operatorname{grad} p).$$

Заметим, наконец, что по определению полной производной

$$\frac{\partial \boldsymbol{\Omega}}{\partial t} + (\boldsymbol{v} \cdot \nabla) \boldsymbol{\Omega} = \frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt},$$

получаем окончательно основное соотношение

$$\frac{d\Omega}{dt} = (\Omega \cdot \nabla) v + \Omega \operatorname{div} v = \operatorname{rot} F + \frac{1}{\rho^2} (\operatorname{grad} \rho \times \operatorname{grad} p), \quad (6.3)$$

указанное Фридманом. Смысл этого уравнения будет выяснен несколько ниже.

Сделаем теперь два предположения

1 Сила F, действующая на единицу массы жидкости, имеет потенциал V, так что

$$F = -\operatorname{grad} V \quad (6.4)$$

и следовательно,

$$\operatorname{rot} F = 0$$

2 Плотность ρ есть функция давления

$$\rho = \Phi(p), \quad (6.5)$$

в этом случае

$$\operatorname{grad} \rho = \Phi'(p) \operatorname{grad} p,$$

так что векторы $\operatorname{grad} \rho$ и $\operatorname{grad} p$ коллинеарны, и следовательно,

$$\operatorname{grad} \rho \times \operatorname{grad} p = 0. \quad (6.6)$$

Уравнение (6.3) в силу сделанных предположений сильно упрощается, принимая вид

$$\frac{d\Omega}{dt} = (\Omega \cdot \nabla) v + \Omega \operatorname{div} v = 0. \quad (6.7)$$

Это уравнение мы будем называть *уравнением Гельмгольца*

В частности, если жидкость несжимаемая, так что $\operatorname{div} v = 0$ то получается уравнение

$$\frac{d\Omega}{dt} = (\Omega \cdot \nabla) v, \quad (6.8)$$

которое было впервые получено Гельмгольцем и на основе которого он вывел свои знаменитые теоремы о вихрях.

§ 7. Теоремы Гельмгольца. *Если 1) сила F имеет потенциал и 2) плотность есть функция давления, то вихревые линии и интенсивности вихревых трубок обладают свойством сохраняемости*

На основе полученных результатов доказательство этих теорем получается сразу. В самом деле, вследствие сделанных предположений имеет место уравнение Гельмгольца (6.7) или, короче,

$$\operatorname{hel} \Omega = 0 \quad (7.1)$$

Но в § 5 было выяснено, что при выполнении этого условия векторные линии и интенсивности векторных трубок вектора Ω

обладают свойством сохраняемости, иными словами как вихревые линии, так и интенсивности вихревых трубок сохраняются, что и требовалось доказать. В частности, при отсутствии вихрей в начальный момент времени их не будет и в любой следующий момент времени. Поэтому движения бывшие безвихревыми в некоторый момент времени, всегда останутся безвихревыми, движения же вихревые в некоторый момент времени, всегда будут вихревыми. Таким образом мы получаем резкое разграничение всех движений на два класса безвихревые движения или движения с потенциалом скорости и вихревые движения.

Если не сделанные в теоремах Гельмгольца предположения не выполняются то теоремы Гельмгольца перестают иметь место и становятся возможными возникновение и разрушение вихрей. Итак, вихри могут возникать или разрушаться под действием трех главных причин: 1) если силы, действующие на единицу массы жидкости, не имеют потенциал; 2) если плотность не является функцией одного только давления, а зависит и от других факторов (например температуры; наконец, 3) если жидкость не идеальная, как мы постоянно предполагали до сих пор, а вязкая. Возможны еще некоторые причины вихреобразования, на которых мы однако, не останавливаемся.

Вопрос о влиянии вязкости на вихревые движения будет разобран в главе о вязкой жидкости. Сейчас же мы остановимся на вопросе о том как происходит вихреобразование вследствие двух первых причин. Заметим что уравнение Фридмана (6.3) которое можно написать в виде

$$\frac{d\Omega}{dt} = \operatorname{rot} F - \frac{1}{\rho^2}(\operatorname{grad}\rho \times \operatorname{grad} p), \tag{7.2}$$

дает как раз количественное выражение тех изменений вихрей, которые происходят в силу отсутствия потенциала у внешних сил и в силу бароклинности жидкости. Нам будет удобнее однако пользоваться при изучении вихреобразования методом Томсона.

§ 8. Образование вихрей. Теорема В. Бьеркнеса. Рассмотрим сначала случай, когда не выполняется соотношение $\rho = \Phi(p)$, т. е. когда плотность определяется не только давлением, но и другими факторами, например температурой или влажностью (для воздуха), или соленостью (для морской воды) и т. д. В этом случае уравнение (2.12) может быть написано в виде

$$\frac{dv}{dt} = -\operatorname{grad} V - \frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p, \tag{8.1}$$

из уравнения (2.11) для производной от циркуляции скорости по замкнутому контуру L:

$$\Gamma = \oint_L v \cdot ds$$

получается

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \oint_l \frac{dv}{dt}\, ds = -\oint_l \operatorname{grad} V\, ds - \oint_L \frac{1}{\rho}\,(\operatorname{grad} p\, ds),$$

но

$$\operatorname{grad} V\, ds = -dV, \quad \oint_l dV = 0, \quad \operatorname{grad} p\, ds = dp,$$

поэтому

$$\frac{d\Gamma}{dt} = -\oint_L \frac{1}{\rho}\, dp. \tag{8.2}$$

Это уравнение, определяющее изменение циркуляции по жидкому контуру L, было установлено В. Бьеркнесом. Мы установим, следуя ему, значение правой части уравнения (8.2) и после этого сформулируем теорему.

Вместо плотности ρ удобнее рассматривать в данном случае обратную величину

$$\omega = \frac{1}{\rho}, \tag{8.3}$$

которая представляет, очевидно, объем единицы массы жидкости и называется *удельным объемом*.

Рассмотрим поверхности $p = \text{const}$, такие поверхности называются *изобарическими* поверхностями. Рассмотрим еще другие поверхности, на которых ω имеет одно и то же значение $\omega = \text{const}$, и назовем их *изостерическими* поверхностями (т. е. поверхностями равного удельного объема).

Если бы $\rho = \Phi(p)$, то на изобарической поверхности p имело бы одно и то же значение, т. е. изобарические и изостерические поверхности совпадали бы между собою. В рассматриваемом же нами случае изобарические и изостерические поверхности будут пересекаться между собою. Если мы проведем изобарические поверхности, отвечающие ряду значений p, отличающихся друг от друга на единицу, и точно так же построим изостерические поверхности, отвечающие ряду значений ω, отличающихся друг от друга на единицу, то все пространство разобьется на ряд трубок, образованных двумя последовательными изобарическими поверхностями и двумя последовательными изостерическими поверхностями. Назовем эти трубки изобаро-изостерическими единичными трубками.

Рассмотрим теперь нашу кривую L и подсчитаем, сколько изобаро-изостерических единичных трубок она охватывает. Предварительно вычислим, чему равняется интеграл $-\oint_l \omega\, dp$, взятый по

контуру l, охватывающему изобаро-изостерическую единичную трубку (рис. 61) $ADCB$.

На линиях BA и DC давление $p = \text{const}$, поэтому $dp = 0$; на линии CB $\omega = \omega_0 - 1$ p же изменяется от $p_0 + 1$ до p_0, поэтому

$$-\int_{CB} \omega\, dp = -(\omega_1 - 1)\int_{p_0+1}^{p_0} dp = \omega_1 - 1.$$

На линии AD $\omega = \omega_0$, p же изменяется от p_1 до $p_0 + 1$, поэтому

$$-\int_{AD} \omega\, dp = -\omega_1 \int_{p_1}^{p_0+1} dp = -\omega_1;$$

окончательно

$$-\oint_l \omega\, dp = 1.$$

Если бы мы ориентировали контур l в противоположную сторону, мы получили бы

$$-\oint_l \omega\, dp = -1.$$

Итак, интеграл $-\oint_l \omega\, dp$ по контуру, охватывающему одну единичную трубку, равен ± 1, при этом, как видно из чертежа, знак плюс берется в том случае, когда направление стрелки, идущей от $\operatorname{grad} p$ к $\operatorname{grad} \omega$, одинаково с направлением обхода контура (на рис. 61 обход контура l совершается по часовой стрелке и стрелка от $\operatorname{grad} p$ к $\operatorname{grad} \omega$ идет по часовой стрелке). Знак минус берется в противоположном случае.

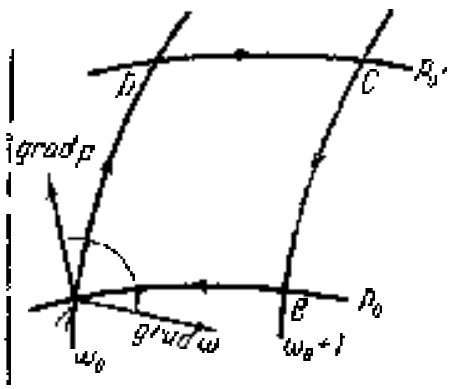

Рис. 61

Будем теперь различать положительные и отрицательные единичные трубки, смотря по тому, будет ли вышеуказанный интеграл $-\oint \omega\, dp$, взятый по контуру, охватывающему трубку, равняться $+1$ или -1. Если контур l будет охватывать N' положительных трубок (или N'' отрицательных), то распространенный по этому контуру интеграл будет равняться N' (или $-N''$)

$$-\oint_l \omega\, dp = N'; \quad \oint_l \omega\, dp = -N''$$

Поэтому в общем случае, когда контур L охватывает ряд трубок как положительных, так и отрицательных, мы можем провести добавочные прямо противоположные контуры λ (рис. 62) и образовать таким образом два контура L' и L'', причем контур L' охватывает только положительные трубки, контур L'' только отрицательные; при этом очевидно

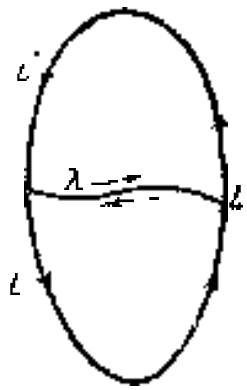

Рис. 62

$$\oint_L \omega\, dp = \oint_{L'} \omega\, dp + \oint_{L''} \omega\, dp$$

и так как

$$-\oint_{L'} \omega\, dp = N \qquad \oint_{L''} \omega\, dp = N''$$

где N' число положительных единичных трубок, охватываемых контуром L, а N'' – число отрицательных единичных трубок, охватываемых тем же контуром, то

$$\oint_L \omega\, dp = N' - N'' \tag{8.4}$$

т. е. интеграл $-\oint_L \omega\, dp$ представляет разность числа положительных изобаро-изостерических единичных трубок, пересекающих контур L, и числа отрицательных единичных трубок, пересекающих тот же контур.

Теперь формула (8.2) может быть переписана следующим образом:

$$\frac{d\Gamma}{dt} = N' - N'' \tag{8.5}$$

и сформулирована так:

Теорема В. Бьеркнеса. *Производная по времени от циркуляции скорости по какому-либо жидкому контуру L равна разности числа положительных и отрицательных единичных изобаро-изостерических трубок, пересекающих контур L.* При этом предполагается, что жидкость идеальная и что силы, действующие на единицу массы жидкости, имеют потенциал.

Так как

$$\Gamma = \oint_L \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} = \iint_{(S)} \boldsymbol{\Omega}_n\, dS$$

то теорему Бьеркнеса можно еще сформулировать так: производная по времени от потока вектора вихря скорости через какую-либо жидкую поверхность S равна разности числа положительных и отрицательных единичных изобаро-изостерических трубок, пересекающих поверхность S.

Итак, пересечение изобарических и изостерических поверхностей является причиной образования вихрей. Если жидкость находилась в начальный момент в покое и изобарические и изостерические поверхности пересекались, то по формуле (8.5) образуются вихри, которые в моменты, весьма близкие к начальному, будут образовывать трубки, совпадающие с изобаро-изостерическими трубками. Сохранения этих вихревых трубок, конечно, не будет, т. е. в следующие моменты времени вихревые трубки будут составлены из частиц жидкости, входящих в совершенно другой комбинации, чем в предыдущие моменты времени.

§ 9. Примеры образования вихрей. Дадим несколько примеров образования вихрей. Рассмотрим, например, массу воздушной атмосферы без водяных паров, окружающей землю. Давление p, абсолютная температура T и величина ω для сухого воздуха связаны между собою следующей зависимостью (законы Гей-Люссака и Бойля — Мариотта)

$$p\omega = RT, \qquad (9.1)$$

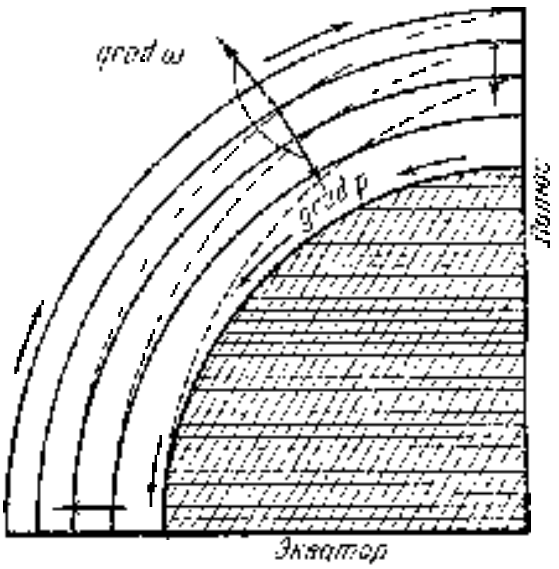

Рис. 63

здесь R — газовая постоянная равная в технической системе единиц 29,27, если температуру выражать в градусах Цельсия и отсчитывать от абсолютного нуля, удельный объем — в кубических метрах, приходящихся на 1 *кг* воздуха, и p — в *кг* на *см*^{2}. Таким образом, при одинаковом давлении удельный объем прямо пропорционален температуре (закон Гей-Люссака). Вследствие большего нагревания от солнца тропические страны теплее полярных, температура воздуха в нижних слоях атмосферы тропических стран значительно выше температуры воздуха полярных стран. Что же касается давления, то оно меняется гораздо меньше при переходе от полярных стран к тропическим. Поэтому по формуле (9.1) мы можем заключить, что удельный объем воздуха в тропических странах гораздо больше удельного объема воздуха полярных стран. С другой стороны, воздух тем разреженнее, чем на большей высоте он находится, поэтому удельный объем возрастает с высотой. Из сказанного ясно, что изостерические поверхности должны подниматься от экватора к полюсу, так как один и тот же удельный объем воздуха встретится на полюсе на большей высоте, чем на экваторе. Изобарические же поверхности мы должны считать приблизительно горизонтальными. Получается пересечение изобарических (сплошные линии) и изостерических (пунктир) поверхностей (рис. 63) и, следовательно, произойдет обра-

зование вихрей. Очевидно, что $\operatorname{grad} p$ направлен вертикально вниз, $\operatorname{grad}\omega$ имеет составляющую к югу, поэтому стрелка, указанная на чертеже, показывает, что образуются вихри, сопровождающиеся циркуляцией следующего вида: воздух течет понизу от северных широт к южным, поднимается на экваторе и поверху течет к северным широтам, где опускается. Эта циркуляция представляет собой пассаты и антипассаты тропических стран.

Совершенно аналогично объясняются муссоны (неравномерное нагревание материка и океана зимой и летом) и бризов (неравномерное нагревание суши и воды днем и ночью). Такой же самый случай имеет место при первоначальном образовании циклона вследствие местного нагревания солнцем распространенного на большую площадь. Изобарические поверхности опять идут приблизительно горизонтально (рис. 64), в то время как изостерические поверхности

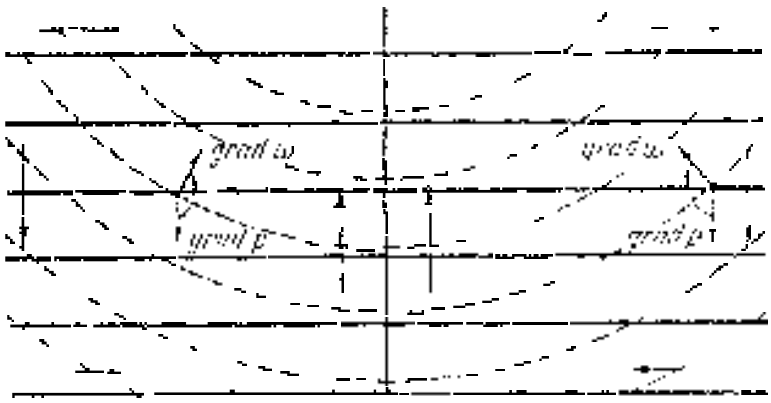

Рис. 64.

в нагретых местах идут явно, а в ненагретых — высоко (ибо и в ненагретых местах у поверхности земли плотность большая, а удельный объем мал и делается большим только на некоторой высоте). Таким образом получаются изобаро-изостерические трубки, значит, происходит образование вихрей и, следовательно, циркуляции воздуха. Направление этой циркуляции определяется направлением стрелки от $\operatorname{grad} p$ к $\operatorname{grad}\omega$, т. е., как показывает чертеж, у нас образуется восходящее движение воздуха в центре области, нисходящее движение на границах ее, причем внизу воздух притекает к центру области, наверху — оттекает от центра области. Полученная картина потоков воздуха отвечает случаю циклона. Обратная картина получится, если вначале имело место местное охлаждение большой площади.

Обратимся к рассмотрению морских течений. И здесь применение теоремы Бьеркнеса об образовании вихрей позволяет разобраться в картине имеющих место потоков воды. Роль неравномерного нагревания играет здесь неравномерная соленость воды. Более соленая вода оказывается при одинаковом давлении и температуре более плотной. Поэтому если мы имеем массу воды разной солености,

например убывающей в сторону положительной оси Ox (рис. 65), то изостерические поверхности опять будут наклонены к горизонту, причем $\operatorname{grad}\omega$ будет иметь составляющую в сторону убывания солености, в данном случае в сторону положительной оси Ox; изобарические же поверхности мы опять можем считать приблизительно горизонтальными и, следовательно, $\operatorname{grad} p$ направленным вертикально вниз. Направление стрелки от $\operatorname{grad} p$ к $\operatorname{grad}\omega$ показывает тогда, что возникнут два течения, течение понизу более соленой воды и течение поверху менее соленой воды. Примером таких течений могут служить течения из Средиземного моря в Черное и обратно. Так как концентрация соли в воде Средиземного моря очень велика, то по вышесказанному, соленая и тяжелая вода Средиземного моря должна по дну течь из Эгейского моря через Дарданеллы и Босфор в Черное море в то время как наверху должно быть течение менее соленой и потому более легкой воды из Черного моря через Босфор в Мраморное море. Это и имеет место в действительности (эти течения были изучены С. О. Макаровым). Аналогичная картина имеет место в Гибралтаре: более соленая вода Средиземного моря течет по дну в Атлантический океан, менее соленая вода Атлантического океана переносится поверхностным течением в Средиземное море.

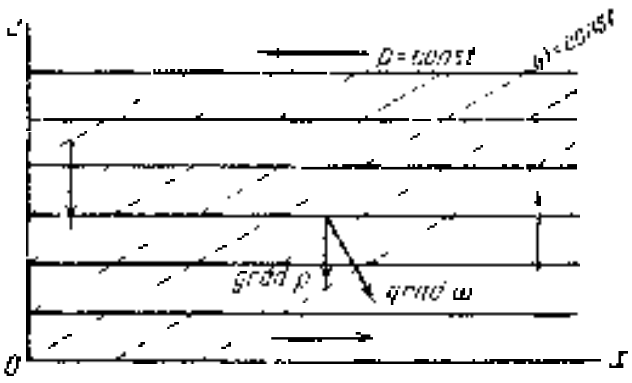

Рис. 65.

Рассмотрим теперь пример образования вихрей в том случае, когда сила F не имеет потенциала. А именно, рассмотрим движение воздуха над землей. Так как земля вращается около своей оси, то мы должны рассматривать относительное движение воздуха.

В главе второй было выведено уравнение относительного движения жидкости (7.7)

$$\boldsymbol{w}_r = \boldsymbol{F} - \frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p - \boldsymbol{w}_e - 2(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_r) \tag{9.2}$$

Обозначим относительную скорость v_r просто через v, тогда относительное ускорение

$$\boldsymbol{w}_r = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt}.$$

Далее, $\boldsymbol{w}_e$ есть переносное ускорение точки, т. е. ускорение той точки земли M, в которой находится в рассматриваемый момент времени частица. Но если обозначить через $\boldsymbol{R}$ перпендикуляр, опущенный из рассматриваемого положения частицы на земную ось и имеющий направление от земной оси к частице, то ускорение $\boldsymbol{w}_e$ будет равно $-\omega^2\boldsymbol{R}$, где ω обозначает величину угловой скорости

вращения земли. В самом деле, точка земли будет описывать окружность радиуса R равномерно с угловой скоростью ω следовательно с линейной скоростью ωR, и будет обладать только нормальным ускорением $\frac{(\omega R)^2}{R} = \omega^2 R$ направленным к земной оси. Итак

$$\boldsymbol{w}_e = -\omega^2 \boldsymbol{R}$$

Отметим, что этот вектор можно представить в виде градиента

$$\boldsymbol{w}_e = -\operatorname{grad}\left(\frac{\omega^2 R^2}{2}\right)$$

так как $\operatorname{grad}\left(\frac{F}{2}\right) = \boldsymbol{R}$, в самом деле, поверхностями уровня, на которых $R^2/2$ постоянно служат цилиндры, осью которых является земная ось; поэтому $\operatorname{grad} R^2/2$ направлен по нормали к цилиндру, проходящему через рассматриваемую точку, и имеет величину $\frac{\partial\left(\frac{R^2}{2}\right)}{\partial R} = R$, а следовательно $\operatorname{grad}\left(\frac{R^2}{2}\right)$ совпадает с $\boldsymbol{R}$. Поэтому уравнение (9.2) принимает вид

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \boldsymbol{F} - \frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p - \operatorname{grad}\left(\frac{\omega^2 R^2}{2}\right) - 2(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v})$$

где $\boldsymbol{\omega}$ есть вектор угловой скорости вращения земли направленный по оси земли к северному полюсу (мы пользуемся правой системой координат), так как земля, если на нее смотреть с южного полюса, вращается по часовой стрелке.

Примем, что на воздух действует только сила притяжения к центру земли и потенциал этой силы обозначим через V.

$$\boldsymbol{F} = -\operatorname{grad} V.$$

Тогда будем иметь

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = -\operatorname{grad} V + \operatorname{grad}\left(\frac{\omega^2 R^2}{2}\right) - 2(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}) - \frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p.$$

Если положить

$$V - \frac{\omega^2 R^2}{2} = W, \tag{9.3}$$

то W будет потенциалом силы тяжести, слагающейся из силы притяжения к центру земли и центробежной силы, возникающей от вращения земли. Итак, при рассмотрении относительного движения на вращающейся земле основное уравнение гидродинамики имеет вид

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = -\operatorname{grad} W - 2(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}) - \frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p \tag{9.4}$$

Сравнение с уравнением (2.12) показывает, что

$$F = -\operatorname{grad} W - 2(\omega \times v), \tag{9.5}$$

и, следовательно, сила F не имеет потенциала.

Аналогично тому, как из уравнения (8.1) мы получили уравнение (8.2), мы получим для производной от циркуляции скорости по замкнутому контуру L.

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \oint_L \frac{1}{\rho} dp - 2 \oint_L (\omega \times v) \, ds \tag{9.6}$$

Значение первого члена правой части было выяснено выше; остается найти значение второго члена правой части.

Смешанное произведение $(\omega \times v) \cdot ds$ представляет собой объем параллелепипеда, построенного на трех векторах ω, v и ds взятый со знаком $+$ или $-$ смотря по тому, как расположены эти три вектора. Этот объем равен произведению ребра параллелепипеда ω на площадь поперечного сечения. Спроектируем линию L на плоскость экватора параллельно земной оси и обозначим проекцию L через L', проекции ds и v через ds' и v', тогда поперечным сечением вышеупомянутого параллелепипеда будет служить параллелограмм, построенный на ds' и v' (рис. 66).

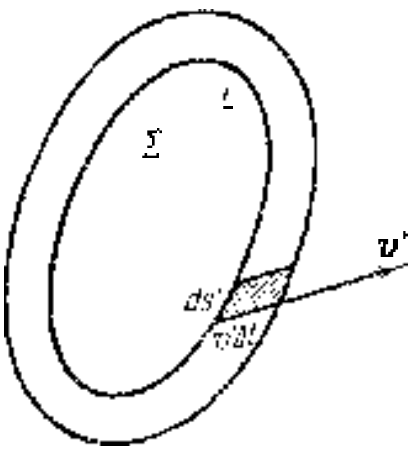

Рис. 66.

Если площадь, ограниченную контуром L', обозначить через Σ' и представить вектором Σ' то приращение этой площади за промежуток времени Δt представится в виде суммы параллелограммов построенных на сторонах ds' и $v' \Delta t$, т. е.

$$\Delta \Sigma' = \oint_{L'} v' \Delta t \times ds', \quad \text{откуда} \quad \frac{d\Sigma'}{dt} = \oint_{L'} v' \times ds',$$

причем это равенство справедливо как по величине, так и по направлению (например, при расположении векторов, указанном на чертеже, как $v' \times ds'$, так и $d\Sigma'$ надо направлять за плоскость бумаги). Очевидно, что $(\omega \times v') \cdot ds'$ представляет объем того же параллелепипеда что и $(\omega \times v) \cdot ds$, и с тем же знаком. Поэтому

$$(\omega \times v) \, ds = (\omega \times v') \, ds',$$

и значит

$$\oint_L (\omega \times v) \cdot ds = \oint_{L'} (\omega \times v') \, ds'$$

Но по правилу циклической перестановки векторов в скалярно-векторном произведении имеем:

$$(\omega \times v') \, ds' = \omega \cdot (v' \times ds'),$$

и значит

$$\oint_L (\omega \times v)\, ds = \oint_{L'} \omega \cdot (v' \times ds') = \omega \cdot \oint_{L'} (v' \times ds') = \omega \cdot \frac{d\Sigma'}{dt} = \pm \omega \frac{d\Sigma'}{dt},$$

так как ω и $d\Sigma'/dt$ имеют либо то же самое направление, либо как раз противоположное.

Итак:

$$\oint_L (\omega \times v) \cdot ds = \omega \frac{d\Sigma'}{dt}. \tag{9.7}$$

где Σ' представляет площадь, ограниченную кривой L', проекцией кривой L на плоскость экватора, и считаемую положительной в том случае, когда направление обхода контура L' кажется совершающимся против часовой стрелки, если смотреть на этот контур с северного полюса земли (ибо в этом случае площадь Σ' представляется вектором Σ', направленным к южному полюсу, так же как и вектор угловой скорости вращения земли ω).

Итак, вспоминая еще значение первого члена уравнения (9.6), мы будем иметь:

$$\frac{dv}{dt} = N' \quad N'' - 2\omega \frac{d\Sigma'}{dt}. \tag{9.8}$$

Таким образом, помимо образования вихрей в силу переселения изобарических и изостерических поверхностей, мы будем иметь еще образование вихрей происходящее в силу изменения площади, ограниченной проекцией какого-либо жидкого контура на плоскость экватора.

В качестве примера рассмотрим опять пассаты и антипассаты. Возьмем за контур L кривую, лежащую в нижних слоях атмосферы и охватывающую всю землю в виде параллели; за положительное направление обхода по этой кривой примем направление от запада на восток. Благодаря пассатным ветрам эта кривая состоящая из жидких частиц, будет расширяться следовательно площадь Σ' будет увеличиваться и, значит, по формуле (9.8) циркуляция по кривой L будет уменьшаться, это означает, что появляется восточная составляющая ветра . . в пассатах будут дуть ветры от северо-востока.

Аналогично этому, в антипассатах должны иметь место юго-западные ветры. Аналогичные изменения претерпевает движение воздуха в циклонах. Если взять за кривую L окружность, которая расположена в нижних слоях воздуха и центр которой лежит в нагретой области, и за положительное направление этой окружности — направление противоположное направлению движения часовой стрелки — то площадь Σ', ограниченную проекцией этой кривой на плоскость экватора, мы должны считать положительной (предполагая что речь идет о циклоне в северном полушарии). Но как было выяснено выше,

в нижних слоях циклона частицы воздуха пролетаются к центру, и поэтому контур L стягивается, площадь Σ' уменьшается, а следовательно циркуляция по нему увеличивается что может быть только если появляется составляющая ветра, направленная вдоль по контуру против стрелки часов Итак, в циклоне вниз воздух течет не прямо к центру его, а отклоняется вправо

Изложим еще вывод одной формулы Эртеля (H Ertel)[1], обобщающий теорему Бьеркнеса.

Перепишем (9 4) в виде

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \operatorname{grad}\frac{v^2}{2} - \boldsymbol{v}\times\operatorname{rot}\boldsymbol{v} = -\operatorname{grad}W + 2\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{\omega} - \frac{1}{\rho}\operatorname{grad}p \quad (9.9)$$

Объединим члены, содержащие $\operatorname{rot}\boldsymbol{v}$ и $\boldsymbol{\omega}$ и введем «абсолютный вихрь» $\boldsymbol{\Omega}'$ по формуле

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{v} + 2\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\Omega}' \quad (9\ 10)$$

Мы получим тогда:

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \operatorname{grad}\frac{v^2}{2} - \boldsymbol{v}\times\boldsymbol{\Omega}' = -\operatorname{grad}W - \frac{1}{\rho}\operatorname{grad}p$$

Если применить к обеим частям этого равенства операцию rot и вспомнить, что $\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} = 0$, то

$$\frac{\partial \boldsymbol{\Omega}'}{\partial t} - \operatorname{rot}(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{\Omega}') = \frac{1}{\rho^2}\operatorname{grad}\rho \times \operatorname{grad}p \quad (9\ 11)$$

Пусть теперь ψ есть какая-то функция поля. Умножим скалярно обе части предыдущего равенства на $\operatorname{grad}\psi$ Получим:

$$\operatorname{grad}\psi\cdot\frac{\partial \boldsymbol{\Omega}'}{\partial t} - \operatorname{grad}\psi\cdot\operatorname{rot}(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{\Omega}') = \frac{1}{\rho^2}\operatorname{grad}\psi\cdot(\operatorname{grad}\rho\times\operatorname{grad}p) \quad (9\ 12)$$

Но по известной формуле

$$\operatorname{div}[\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}] = \boldsymbol{b}\cdot\operatorname{rot}\boldsymbol{a} - \boldsymbol{a}\cdot\operatorname{rot}\boldsymbol{b}$$

мы имеем ($\operatorname{rot}\operatorname{grad}\psi = 0$)

$$\operatorname{div}[\operatorname{grad}\psi\times(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{\Omega}')] = -\operatorname{grad}\psi\cdot\operatorname{rot}(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{\Omega}')$$

так что

$$\operatorname{grad}\psi\cdot\frac{\partial \boldsymbol{\Omega}'}{\partial t} - \operatorname{div}[\operatorname{grad}\psi\times(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{\Omega}')] = \frac{1}{\rho^2}\operatorname{grad}\psi\cdot\operatorname{grad}\rho\times\operatorname{grad}p \quad (9\ 13)$$

---

[1] Ertel H, Ein neuer hydrodynamischer Wirbelsatz Meteorol. Zeschr., 1942, стр. 277 - 281

С другой стороны, по формуле

$$\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}) - \boldsymbol{c}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$$

имеем:

$$\operatorname{div}\{\operatorname{grad}\psi \times (\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{\Omega}')\} =$$

$$= \operatorname{div}\boldsymbol{v}\operatorname{grad}\psi\cdot\boldsymbol{\Omega}' + \boldsymbol{v}\cdot\operatorname{grad}(\operatorname{grad}\psi\cdot\boldsymbol{\Omega}') - \boldsymbol{\Omega}'\cdot\operatorname{grad}(\boldsymbol{v}\cdot\operatorname{grad}\psi) \quad (9.14)$$

(так как $\operatorname{div}\boldsymbol{\Omega}' = 0$).

Заметим теперь, что

$$\boldsymbol{v}\cdot\operatorname{grad}\psi = \frac{d\psi}{dt} - \frac{\partial\psi}{\partial t},$$

так что

$$\operatorname{grad}(\boldsymbol{v}\cdot\operatorname{grad}\psi) = \operatorname{grad}\frac{d\psi}{dt} - \operatorname{grad}\frac{\partial\psi}{\partial t}. \quad (9.15)$$

Комбинируя (9.14) и (9.15), запишем (9.13) в виде

$$\frac{d}{dt}(\operatorname{grad}\psi\cdot\boldsymbol{\Omega}') = \operatorname{grad}\psi\cdot\boldsymbol{\Omega}'\operatorname{div}\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}\cdot\operatorname{grad}(\operatorname{grad}\psi\cdot\boldsymbol{\Omega}') -$$

$$- \boldsymbol{\Omega}'\cdot\operatorname{grad}\frac{d\psi}{dt} = \frac{1}{\rho^2}\operatorname{grad}\rho\times(\operatorname{grad}\rho\times\operatorname{grad}p). \quad (9.16)$$

Объединяя первый и третий члены предыдущего равенства, получим

$$\frac{d}{dt}(\operatorname{grad}\psi\cdot\boldsymbol{\Omega}') - \boldsymbol{\Omega}'\cdot\operatorname{grad}\frac{d\psi}{dt} + \operatorname{grad}\psi\cdot\boldsymbol{\Omega}'\operatorname{div}\boldsymbol{v} =$$

$$= \frac{1}{\rho^2}\operatorname{grad}\psi\cdot(\operatorname{grad}\rho\times\operatorname{grad}p). \quad (9.17)$$

Заметим, что из (9.17) можно как частный случай получить формулу (6.3) из § 6. Для этого достаточно будет положить по очереди $\psi = x$, $\psi = y$, $\psi = z$. Действительно, положим, например, $\psi = x$; так как тогда $\frac{d\psi}{dt} = \frac{\partial\psi}{\partial t} + \boldsymbol{v}\cdot\nabla\psi = v_x$, мы получим вместо (9.17) проекцию на ось x уравнения (6.3).

Продолжим преобразование формулы (9.17). Используем уравнение неразрывности, в силу которого $\operatorname{div}\boldsymbol{v} = -\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt}$, разделим обе части (9.17) на ρ и соберем члены. Получим:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\rho}\operatorname{grad}\psi\cdot\boldsymbol{\Omega}'\right) - \frac{1}{\rho}\boldsymbol{\Omega}'\cdot\operatorname{grad}\frac{d\psi}{dt} = \frac{1}{\rho}\operatorname{grad}\psi\times\operatorname{grad}p\times\operatorname{grad}\frac{1}{\rho}. \quad (9.18)$$

Это — формула Эртеля.

Если в качестве ψ взять функцию, зависящую лишь от p и ρ, например энтропию, то правая часть (9.18) обратится в нуль. Особенно простой вид примет (9.18), если ψ, кроме того, сохраняется

в частице, так что $d\psi/dt = 0$. Таким свойством будет, в частности, обладать энтропия при адиабатическом движении (т. II, § 11). В метеорологии часто вводят так называемую «потенциальную температуру» θ из равенства

$$\theta = T\left(\frac{P}{p}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}, \tag{9.19}$$

где $\varkappa$ — отношение теплоемкостей, P — постоянное давление, равное 1000 *мб* $\left(P = 10^6 \frac{г}{см\,сек^2}\right)$. Так как по закону Клапейрона (ул. II, (11.6)) $\theta = \frac{p}{R}\left(\frac{P}{p}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}} = \frac{P^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}}{R}\,\rho^{\frac{1}{\varkappa}}$, то θ зависит лишь от p и ρ. С другой стороны, в адиабатическом движении будет (т. II (11.8)) $d\theta/dt = 0$, так что на основе (9.18) можно для адиабатического движения написать:

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{\rho}\operatorname{grad}\theta\ \ (\Omega + 2\omega)\right] = 0 \tag{9.20}$$

§ 10. Упражнения. 1. Найти кинематическое условие сохраняемости линий тока, т. е. условие, при котором жидкие частицы, составляющие линию тока в определенный момент времени, будут в любой момент времени образовывать линию тока.

Решение. Легко видеть, что искомым условием является неизменность линии тока в пространстве. В самом деле, частицы каждой линии тока перемещаются вдоль ее самой и, следовательно, в бесконечно близкий момент времени образуют ту же самую линию тока. Но вследствие предположения о сохранении линии тока указанные частицы жидкости образуют новую линию тока, следовательно, новая линия тока совпадает со старой, т. е. каждая линия тока остается неизменной в пространстве. Аналитическим выражением этого условия являются очевидно, формулы

$$v_x = f(x, y, z, t)\,v_{x0}, \quad v_y = f(x, y, z, t)\,v_{y0}, \quad v_z = f(x, y, z, t)\,v_{z0},$$

где $v_{x0} = (v_x)_{t=0}$ и т. д., так как направление скорости в каждой точке пространства остается неизменным и может меняться только величина скорости, что и учитывается функцией $f(x, y, z, t)$. В частности, поставленному условию удовлетворяет установившееся движение. В этом случае $f(x, y, z, t) = 1$.

2. Пусть на идеальную жидкость, плотность которой есть функция давления, действуют силы, зависящие от потенциала. Найти, при каком условии вихрь скорости во всех точках и в любой момент времени имеет то же направление, что и вектор скорости.

Решение. Высказанное условие равносильно условию, чтобы вихревые линии совпадали с линиями тока. Но вихревые линии обладают свойством сохранения. Тогда по предыдущей задаче, линии тока должны оставаться неизменными в пространстве, значит и вихревые линии и вихревые трубки будут оставаться неизменными в пространстве. Так как интенсивность вихревых трубок не меняется с течением времени, то и величина вихря должна быть постоянной. Итак, вихрь не меняется с течением времени. Кроме того, в начальный момент времени вихревые линии должны совпадать с линиями тока. Обозначим через v_0 начальный вектор скорости; тогда

$$v = f_1(x, y, z, t)\,v_0, \quad \Omega = \omega_0 = f_2(x, y, z)\,v_0$$

Так как

$$\Omega = \operatorname{rot} v = \operatorname{rot}(f_1 v_0) = f_1 \operatorname{rot} v_0 + \operatorname{grad} f_1 \times v_0 = f_1 \Omega_0 + \operatorname{grad} f_1 \times v_0$$

то

$$f_1 \Omega_0 + \operatorname{grad} f_1 \times v_0 = \Omega_0 \quad \text{или} \quad \operatorname{grad} f_1 \times v_0 = (1 - f_1)\,\Omega_0.$$

Слева стоит вектор, перпендикулярный к v_0, а справа — вектор, параллельный v_0 значит, оба эти вектора должны равняться нулю

$$(1 - f_1)\,\Omega_0 = 0.$$

Значит, или $\Omega_0 = 0$, т. е. $\Omega = 0$, что отвечает случаю безвихревого движения, или $f_1 = 1$, $v = v_0$, т. е. движение стационарное причем должно быть выполнено соотношение

$$\Omega = \operatorname{rot} v = f(x, y, z) = v \tag{10.1}$$

3. Проверить, что в движении, определяемом формулами

$$v_x = -Ky, \quad v_y = Kx, \quad v_z = \sqrt{\Phi(z) - 2K^2(x^2 + y^2)},$$

вихрь имеет то же направление, что и вектор скорости, и вычислить, во сколько раз вихрь превосходит вектор скорости. Здесь $\Phi(z)$ обозначает какую-либо функцию от z.

Ответ

$$\Omega = \frac{2K}{\sqrt{\Phi(z) - 2K^2(x^2 + y^2)}}\, v$$

4. Показать, что если силы, действующие на жидкость, имеют потенциал V, плотность есть функция давления и

$$H = P + \frac{1}{2} v^2 + V = f(t),$$

то вихревые линии совпадают с линиями тока.

5. Применить результат предыдущей задачи к установившемуся вытеканию воды из широкого сосуда в котором уровень воды все время поддерживается постоянным.

Решение. Направим ось Oz вертикально вниз и начало координат поместим в плоскости уровня воды. Тогда

$$V = -gz \qquad P = \frac{p}{\rho},$$

На каждой линии тока вследствие стационарности движения по теореме Бернулли (§ 1 главы четвертой)

$$H = P = \frac{1}{2} v^2 + V = \text{const},$$

но на верхнем уровне $P = \frac{p_0}{\rho}$ (где p_0 — наружное давление) $V = 0$ $v = 0$ (если сосуд очень широкий, так как тогда достаточно подбавлять воду с очень малой скоростью). Значит,

$$H = \frac{p_0}{\rho}$$

во всей массе жидкости, а следовательно, по задаче 4 вихревые линии совпадают с линиями тока. Докажем еще в этом случае, что на каждой линии тока отношение $\Omega : v$ остается постоянным. В самом деле, если взять бесконечно малую вихревую трубку и обозначить площадь поперечного сечения

ее через σ, то вдоль этой трубки остаются постоянными как $\Omega\sigma$ (интенсивность вихревой трубки), так и $v\sigma$ (объем жидкости, протекающей через любое поперечное сечение трубки в единицу времени). Значит, и отношение $\Omega\sigma/v\sigma = \Omega/v$ вдоль всей трубки имеет одно и то же значение. Поэтому когда v делается большим, то и Ω делается большим; но если выходное отверстие, из которого вытекает вода, очень мало, то скорость вытекания жидкости будет велика; поэтому и вихри в вытекающей жидкости могут быть большой интенсивности.

6. Проверить уравнение (6.8) для движения несжимаемой жидкости, заданного формулами (α, β и γ — постоянные)

$$v_x = \alpha yz; \quad v_y = -\beta xz; \quad v_z = \gamma xy - \beta x.$$

6. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОЛЯ СКОРОСТЕЙ ПО ЗАДАННОМУ ПОЛЮ ВИХРЕЙ И ПОЛЮ РАСХОЖДЕНИЯ СКОРОСТИ

§ 11. Вычисление вектора скорости по вихрю и расхождению скорости для бесконечного пространства. Если задано поле скоростей движущейся жидкости, то поле вихрей определяется просто с помощью дифференцирования составляющих скорости по переменным x, y, z. Именно обозначим вектор вихря через Ω:

$$\Omega = \operatorname{rot} v.$$

Тогда, как известно, составляющие вихря суть

$$\Omega_x = \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}, \quad \Omega_y = \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}, \quad \Omega_z = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}.$$

Так же просто определяется расхождение Θ по заданному v:

$$\Theta = \operatorname{div} v = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}.$$

Обратная задача — по заданным распределению вихрей и расхождению определить скорость в любой точке жидкости — для полного решения требует еще задания дополнительного условия, а именно задания нормальной составляющей скорости на поверхности, ограничивающей рассматриваемый объем жидкости.

Мы ограничимся рассмотрением простейшего случая: дано, что жидкость заполняет все пространство и находится в покое на бесконечности. Заданы вихрь скорости Ω и расхождение скорости Θ в каждой точке пространства. Требуется определить вектор скорости v.

Для вычисления v имеем уравнения

$$\operatorname{div} v = \Theta, \quad \operatorname{rot} v = \Omega. \tag{11.1}$$

Мы допустим сначала, что расхождение скорости Θ и вихрь Ω равны нулю вне некоторого конечного объема τ. Мы будем, кроме того, предполагать, что область τ может быть разложена на конечное число частей, в каждой из которых функции Θ и Ω равномерно непрерывны, так же как и их частные производные. Кроме того,

мы будем предполагать, что на поверхностях разрыва нормальная составляющая вектора Ω остается непрерывной и только касательная составляющая этого вектора может терпеть разрыв.

Искомую скорость v мы будем рассматривать как сумму двух скоростей: $v = v_1 + v_2$, где v_1 есть скорость, зависящая от расхождения Θ, так что ее вихрь равен нулю, а v_2 есть скорость, происходящая от вихря, так что ее расхождение равно нулю. Итак, для определения вектора v мы имеем два условия:

$$\operatorname{div} v_1 = \Theta, \qquad \operatorname{rot} v_1 = 0 \tag{11.2}$$

а для определения вектора v_2 получаются следующие два условия:

$$\operatorname{div} v_2 = 0, \qquad \operatorname{rot} v_2 = \Omega \tag{11.3}$$

Начнем с отыскания вектора v_1. Вторая из формул (11.2) показывает, что мы имеем дело с безвихревым движением, а тогда существует, как было указано в начале этой главы, потенциал скорости φ. Итак,

$$v_1 = \operatorname{grad} \varphi$$

Подставляя это значение v_1 в первое из уравнений (11.2), мы получаем для определения функции φ уравнение Пуассона

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \Theta. \tag{11.4}$$

Мы дадим сначала не строгое, но имеющее простой гидродинамический характер, решение этого уравнения.

Предположим сначала, что функция Θ равна нулю всюду, кроме очень малой окрестности τ_0 начала координат, причем

$$\int_{\tau_0} \Theta \, d\tau = 1$$

Заметим теперь, что по теореме Гаусса

$$\int_{\tau} \operatorname{div} v \, d\tau = \int_{S} v_n \, ds, \tag{11.5}$$

где S есть поверхность, ограничивающая объем τ, т. е. *объемный интеграл от расхождения вектора скорости равен потоку вектора скорости через поверхность, ограничивающую объем.*

Применение этой теоремы к нашему случаю показывает, что поток вектора скорости через поверхность S_0, ограничивающую объем τ_0, должен равняться единице. В предельном случае, когда объем τ_0 сжимается в точку, мы получаем картину течения, вызванного источником, находящимся в начале координат и имеющим интенсивность или обильность, равную единице. Нетрудно найти математическое выражение для этой картины течения. Мы можем сперва

в силу симметрии, что соответствующий потенциал скорости φ есть функция только расстояния

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

точки от начала координат. Но, как было указано, функция φ должна всюду, кроме начала координат, где она имеет особенность, удовлетворять уравнению

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0. \qquad (11.6)$$

Написав это уравнение в сферических координатах r, λ, ψ (где λ – дополнение широты, ψ – долгота), получим:

$$\frac{\partial\left(r^2 \frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)}{\partial r} + \frac{1}{\sin\lambda}\frac{\partial\left(\sin\lambda \frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}\right)}{\partial\lambda} + \frac{1}{\sin^2\lambda}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\psi^2} = 0. \qquad (11.7)$$

Так как φ зависит только от r, это уравнение сильно упрощается:

$$\frac{\partial\left(r^2 \frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)}{\partial r} = 0,$$

и сразу интегрируется:

$$r^2\frac{\partial\varphi}{\partial r} = C.$$

Произвольная постоянная определяется из условия, что поток скорости через произвольную сферу с центром в начале координат должен иметь значение, равное $1 \cdot A$, так как на такой сфере нормальная составляющая скорости имеет постоянное значение

$$\frac{\partial\varphi}{\partial r} = \frac{C}{r^2},$$

а площадь сферы равна $4\pi r^2$, то сразу находим, что

$$C = \frac{1}{4\pi}.$$

Итак,

$$\frac{\partial\varphi}{\partial r} = \frac{1}{4\pi r^2},$$

откуда легко находим, что

$$\varphi = -\frac{1}{4\pi r},$$

причем произвольную постоянную, как не имеющую существенного значения, отбрасываем.

Если интенсивность источника имеет значение q, то для соответствующего потенциала скорости получаем формулу

$$\varphi = -\frac{q}{4\pi r}. \qquad (11.8)$$

Картина соответствующего течения очень проста. Линии тока суть прямолинейные лучи, выходящие из начала координат. Скорости частиц жидкости направлены по этим лучам от начала координат и имеют величину

$$v = \frac{q}{4\pi r^2}, \tag{11.9}$$

прямо пропорциональную интенсивности источника q и обратно пропорциональную квадрату расстояния от источника. Если q имеет отрицательное значение, то получается сток. В этом случае скорости частиц жидкости направлены к той точке, где помещается сток.

Возвратимся теперь к решению уравнения Пуассона (11.4). Разобьем объем τ на малые объемы τ_i, в каждом таком объеме τ_i возьмем некоторую точку M_i с координатами ξ_i, η_i, ζ_i и поместим в M_i источник с обильностью $q_i = \tau_i \Theta(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$. Тогда функция

$$\tilde{\varphi}(x, y, z) = -\sum_i \frac{\Theta(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)}{4\pi r_i} \tau_i$$

где r_i есть расстояние от точки M с координатами x, y, z до точки M_i, даст очевидно, по сказанному выше, приближенное решение задачи. Перейдем к пределу, устремив все объемы τ_i к нулю, тогда для функции $\varphi(x, y, z)$ получится выражение

$$\varphi(x, y, z) = -\int_\tau \frac{\Theta(\xi, \eta, \zeta)}{4\pi r} d\tau \tag{11.10}$$

В этом интеграле

$$r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}$$

и интегрировать надо по ξ, η, ζ.

Итак, чтобы получить решение уравнения (11.4), надо распределить по объему τ источники, обильность которых, отнесенная к единице объема, имеет значение Θ, и образовать соответствующий этому распределению источников потенциал (11.10).

Дадим теперь строгое доказательство того, что функция (11.10) удовлетворяет уравнению Пуассона (11.4).

Заметим прежде всего, что если мы ввиду потенциал

$$\Psi(x, y, z) = \int_\tau \frac{\Theta(\xi, \eta, \zeta)}{r} d\tau \tag{11.11}$$

распределенный по некоторой области V, то в точках вне объема V выполняется уравнение Лапласа

$$\Delta\Psi = \frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2} = 0 \tag{11.12}$$

В самом деле, если точка P лежит вне объема V, то r в интеграле (11.11) не обращается в нуль и, следовательно, можно произвести дифференцирование по x, y и z под знаком интеграла. В результате получим:

$$\Delta\Psi(x, y, z) = \int_V \Theta(\xi, \eta, \zeta)\,\Delta\frac{1}{r}\,d\tau$$

Но легко видеть, что

$$\Delta\frac{1}{r} = 0, \text{ следовательно, } \Delta\Psi = 0$$

Рассмотрим теперь тот случай, когда точка P лежит внутри объема V, причем предположим, что функция $\Theta(\xi, \eta, \zeta)$ непрерывна вместе со своими первыми производными в этом объеме V. Вычислим $\partial^2\Psi/\partial x^2$. Мы имеем прежде всего

$$\frac{\partial\Psi}{\partial x} = \int_V \Theta(\xi, \eta, \zeta)\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\,d\tau = -\int_V \Theta(\xi, \eta, \zeta)\frac{x-\xi}{r^3}\,d\tau \qquad (11.13)$$

Функция стоящая под знаком интеграла обращается при $r = 0$ в бесконечность, так что этот интеграл принадлежит, подобно потенциалу (11.11), к числу несобственных интегралов; этот интеграл сходится, так как подынтегральная функция будет при $r \to 0$ бесконечно большой второго порядка (считая r бесконечно малой первого порядка), а известно, что объемные интегралы сходятся если подынтегральная функция обращается в бесконечность порядка ниже третьего. Однако дальнейшего дифференцирования по x под знаком интеграла мы уже не имеем права производить, так как при этом подынтегральная функция сделается бесконечно большой третьего порядка и интегралы перестанут сходиться. Поэтому мы преобразуем предварительно выражение (11.13). Очевидно что

$$\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x} = -\frac{x-\xi}{r^3} = -\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\xi}, \qquad (11.14)$$

поэтому

$$\frac{\partial\Psi}{\partial x} = -\int_V \Theta(\xi, \eta, \zeta)\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\xi}\,d\tau = -\int_V \frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\Theta}{r}\right)d\tau + \int_V \frac{1}{r}\frac{\partial\Theta}{\partial\xi}\,d\tau \qquad (11.15)$$

Применим теперь формулу Гаусса

$$\int_V \frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\Theta}{r}\right)d\tau = \oint_S \frac{\Theta}{r}\cos(\widehat{n\xi})\,dS,$$

где S есть поверхность, ограничивающая объем V, а n означает внешнюю нормаль в точках этой поверхности. Эта формула имеет

место хотя подынтегральная функция обращается в бесконечность при $r = 0$, ибо если мы выделим точку N малой сферой радиуса ε то интеграл по поверхности этой сферы будет малой величиной порядка ε и обратится в пределе в нуль если мы устремим ε к нулю

Итак

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = -\oint_S \frac{\Theta(\xi, \eta, \zeta)}{r} \cos(\widehat{n, \xi})\, dS - \int_V \frac{1}{r} \frac{\partial \Theta}{\partial \xi}\, d\tau \qquad (11.16)$$

В первом интеграле правой части r уже не обращается в нуль, так как точка $N(x, y, z)$ лежит внутри объема V, а точка $M(\xi, \eta, \zeta)$, по которой производится интегрирование, находится на поверхности S. Второй же интеграл правой части опять представляет Ньютонов потенциал. Поэтому теперь мы можем еще раз произвести дифференцирование по x под знаками интегралов. В результате получим

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = -\oint_S \frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{r} \Theta(\xi, \eta, \zeta) \cos(\widehat{n, \xi})\, dS + \int_V \frac{\partial \Theta}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{r}\, d\tau =$$

$$= -\oint_S \frac{x-\xi}{r^3} \Theta(\xi, \eta, \zeta) \cos(\widehat{n, \xi})\, dS - \int_V \frac{x-\xi}{r^3} \frac{\partial \Theta}{\partial \xi}\, d\tau \qquad (11.17)$$

Таким образом, $\partial^2\Psi/\partial x^2$ существует и представляется только что найденным образом. Если V есть шар V_ε радиуса ε с центром в точке N, то в точках ограничивающей сферы S_ε

$$\frac{x-\xi}{r} = \cos(\widehat{n, x}) \quad \frac{y-\eta}{r} = \cos(\widehat{n, y}) \quad \frac{z-\zeta}{r} = \cos(\widehat{n, z})$$

и следовательно

$$\frac{\partial^2 \Psi_\varepsilon}{\partial x^2} = \oint_{S_\varepsilon} \frac{\Theta(\xi, \eta, \zeta)}{\varepsilon^2} \cos^2(\widehat{n, \xi})\, dS - \int_{V_\varepsilon} \frac{x-\xi}{r^3} \frac{\partial \Theta}{\partial \xi}\, d\tau$$

Аналогично получим

$$\frac{\partial^2 \Psi_\varepsilon}{\partial y^2} = \oint_{S_\varepsilon} \frac{\Theta(\xi, \eta, \zeta)}{\varepsilon^2} \cos^2(\widehat{n, \eta})\, dS - \int_{V_\varepsilon} \frac{y-\eta}{r^3} \frac{\partial \Theta}{\partial \eta}\, d\tau$$

$$\frac{\partial^2 \Psi_\varepsilon}{\partial z^2} = \oint_{S_\varepsilon} \frac{\Theta(\xi, \eta, \zeta)}{\varepsilon^2} \cos^2(\widehat{n, \zeta})\, dS - \int_{V_\varepsilon} \frac{z-\zeta}{r^3} \frac{\partial \Theta}{\partial \zeta}\, d\tau$$

Складывая эти равенства найдем

$$\Delta \Psi_\varepsilon = -\oint_{S_\varepsilon} \frac{\Theta(\xi, \eta, \zeta)}{\varepsilon^2}\, dS -$$

$$- \int_{V_\varepsilon} \left(\frac{x-\xi}{r} \frac{\partial \Theta}{\partial \xi} + \frac{y-\eta}{r} \frac{\partial \Theta}{\partial \eta} + \frac{z-\zeta}{r} \frac{\partial \Theta}{\partial \zeta} \right) \frac{d\tau}{r^2} \qquad (11.18)$$

Если абсолютная величина $\operatorname{grad}\Theta$ в точках шара V_ε не превосходит K, то мы имеем очевидные оценки

$$|\Theta(\xi, \eta, \zeta) - \Theta(x, y, z)| \leqslant K\varepsilon$$

$$\left|\frac{\partial\Theta}{\partial\xi}\right| \leqslant K \qquad \left|\frac{\partial\Theta}{\partial\eta}\right| \leqslant K \qquad \left|\frac{\partial\Theta}{\partial\zeta}\right| \leqslant K,$$

поэтому

$$\left|\oint_{S_\varepsilon} \frac{\Theta(\xi, \eta, \zeta)}{\varepsilon^2}\, dS - \oint_{S_\varepsilon} \frac{\Theta(x, y, z)}{\varepsilon^2}\, dS\right| \leqslant \frac{K\varepsilon}{\varepsilon^2}\, 4\pi\varepsilon^2 = 4\pi K\varepsilon$$

$$\left|\int_{V_\varepsilon} \left(\frac{x-\xi}{r}\frac{\partial\Theta}{\partial\xi} + \frac{y-\eta}{r}\frac{\partial\Theta}{\partial\eta} + \frac{z-\zeta}{r}\frac{\partial\Theta}{\partial r}\right)\frac{d\tau}{r^2}\right| \leqslant 3K\int_{V_\varepsilon} \frac{d\tau}{r^2}.$$

Замечая еще, что

$$\oint_{S_\varepsilon} \frac{\Theta(x, y, z)}{\varepsilon^2}\, dS = \frac{\Theta(x, y, z)}{\varepsilon^2}\cdot 4\pi\varepsilon^2 = 4\pi\Theta(x, y, z)$$

и что нетрудно вычислить значение интеграла

$$\int_{V_\varepsilon} \frac{d\tau}{r^2} = \int_0^\varepsilon \frac{4\pi r^2\, dr}{r^2} = 4\pi\varepsilon,$$

мы легко придем к оценке

$$|\Delta\Psi + 4\pi\Theta(x, y, z)| \leqslant 16\pi\varepsilon K. \qquad (11.19)$$

Но значение $\Delta\Psi_\varepsilon$ не зависит от радиуса ε шара V_ε, так как если мы возьмем два шара V_ε и V_{ε_1} с общим центром в точке N и с радиусами ε и ε_1, то разность соответствующих функций Ψ_ε и Ψ_{ε_1} представляется ньютоновым потенциалом

$$\Psi_{\varepsilon_1} - \Psi_\varepsilon = \int_{V_{\varepsilon_1} - V_\varepsilon} \frac{\Theta(\xi, \eta, \zeta)}{r}\, d\tau$$

распространенным по объему, заключенному между сферами S_ε и S_{ε_1}, и так как точка N лежит вне этого объема, то по доказанному выше, мы имеем равенство

$$\Delta(\Psi_{\varepsilon_1} - \Psi_\varepsilon) = 0, \quad \text{т. е.} \quad \Delta\Psi_{\varepsilon_1} = \Delta\Psi_\varepsilon.$$

Таким образом неравенство (11.19) должно иметь место при сколь угодно малом положительном ε, что может быть только, если

$$\Delta\Psi_\varepsilon = -4\pi\Theta(x, y, z)$$

Это же самое равенство будет иметь место и для произвольного объема V, так как его всегда можно разбить на шар V_1 некоторого радиуса ε с центром в точке N и на остающуюся часть V_2. Мы будем тогда иметь

$$\Psi = \Psi_1 + \Psi_2, \quad \Delta\Psi_1 = -4\pi\Theta(x, y, z), \quad \Delta\Psi_2 = 0$$

и следовательно

$$\Delta\Psi = -4\pi\Theta(x, y, z). \tag{11.20}$$

Применяя полученные результаты к потенциалу φ, определенному равенством (11.10), находим, что

$$\Delta\varphi = 0 \tag{11.21}$$

в точках вне объема τ (τ — в тех точках, где расхождение равно нулю) и что

$$\Delta\alpha = \Theta(x, y, z) \tag{11.22}$$

в точках объема τ.

Итак, вектор

$$v_1 = \operatorname{grad}\varphi = -\frac{1}{4\pi}\operatorname{grad}\int\frac{\Theta(\xi, \eta, \zeta)}{r}\,d\tau \tag{11.23}$$

является решением системы уравнений

$$\operatorname{div} v_1 = \Theta, \quad \operatorname{rot} v_1 = 0. \tag{11.24}$$

Переходим теперь к определению вектора v_2, удовлетворяющего системе уравнений

$$\operatorname{div} v_2 = 0, \quad \operatorname{rot} v_2 = \Omega. \tag{11.25}$$

При этом всегда предполагается, что вектор Ω удовлетворяет условию

$$\operatorname{div}\Omega = 0, \tag{11.26}$$

ибо для всякого вектора a выполняется равенство

$$\operatorname{div}\operatorname{rot} a = 0. \tag{11.27}$$

Кроме того, как было указано выше, на поверхностях разрыва нормальная составляющая вектора Ω должна оставаться непрерывной.

Мы удовлетворим первому из уравнений (11.25), если положим

$$v_2 = \operatorname{rot} A \tag{11.28}$$

где вектор A, носящий название *векторного потенциала*, подлежит определению. Подставляя это значение v_2 во второе из уравнений (11.25), получим:

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot} A = \Omega.$$

Заметим теперь, что существует следующее легко проверяемое тождество:

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot} \boldsymbol{A} = \operatorname{grad}\operatorname{div} \boldsymbol{A} - \Delta \boldsymbol{A} \tag{11.29}$$

где $\Delta \boldsymbol{A}$ есть вектор с составляющими ΔA_x, ΔA_y, ΔA_z. Итак мы получаем уравнение

$$\operatorname{grad}\operatorname{div} \boldsymbol{A} - \Delta \boldsymbol{A} = \boldsymbol{\Omega} \tag{11.30}$$

Не нарушая общности можно считать, что

$$\operatorname{div} \boldsymbol{A} = 0 \tag{11.31}$$

В самом деле пусть мы нашли вектор $\boldsymbol{A}_1$ такой, что $\boldsymbol{v} = \operatorname{rot} \boldsymbol{A}_1$, но что $\operatorname{div} \boldsymbol{A}_1 \neq 0$. Положим тогда

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}_1 - \operatorname{grad} \psi,$$

мы найдем:

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{A} = \operatorname{rot} \boldsymbol{A}_1 + \operatorname{rot}\operatorname{grad} \psi = \operatorname{rot} \boldsymbol{A}_1 = \boldsymbol{v},$$
$$\operatorname{div} \boldsymbol{A} = \operatorname{div} \boldsymbol{A}_1 + \operatorname{div}\operatorname{grad} \psi = \operatorname{div} \boldsymbol{A}_1 + \Delta \psi$$

и можно подобрать ψ так, чтобы

$$\Delta \psi = - \operatorname{div} \boldsymbol{A}_1,$$

тогда, очевидно будут удовлетворены как уравнение (11.28), так и уравнение (11.31). В силу условия (11.31) уравнение (11.30) упрощается:

$$\Delta \boldsymbol{A} = - \boldsymbol{\Omega} \tag{11.32}$$

Таким образом для определения вектора $\boldsymbol{A}$ получилось векторное уравнение Пуассона, равносильное трем скалярным:

$$\Delta A_x = - \Omega_x, \quad \Delta A_y = - \Omega_y, \quad \Delta A_z = - \Omega_z,$$

решения которых имеют вид:

$$\left.\begin{aligned} A_x &= \frac{1}{4\pi} \int \frac{\Omega_x(\xi, \eta, \zeta)}{r} d\tau, \\ A_y &= \frac{1}{4\pi} \int \frac{\Omega_y(\xi, \eta, \zeta)}{r} d\tau, \\ A_z &= \frac{1}{4\pi} \int \frac{\Omega_z(\xi, \eta, \zeta)}{r} d\tau \end{aligned}\right| \tag{11.33}$$

или в векторной форме:

$$\boldsymbol{A}(x, y, z) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\boldsymbol{\Omega}(\xi, \eta, \zeta)}{r} d\tau \tag{11.34}$$

Проверим теперь, что найденный нами вектор A удовлетворяет условию (11.31), т. е. что

$$\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = 0.$$

По условию, объем τ может быть разбит на конечное число объемов τ_i, в каждом из которых Ω и производные от Ω по координатам непрерывны. К каждому из таких объемов можно применить формулы вида (11.16), так что

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_{\tau_i}\frac{\Omega_x(\xi,\eta,\zeta)}{r}\,d\tau = \oint_{S_i}\frac{\Omega_x(\xi,\eta,\zeta)\cos(\widehat{n,\xi})}{r}\,dS + \int_{\tau_i}\frac{1}{r}\frac{\partial\Omega_x(\xi,\eta,\zeta)}{\partial\xi}\,d\tau,$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\int_{\tau_i}\frac{\Omega_y(\xi,\eta,\zeta)}{r}\,d\tau = \oint_{S_i}\frac{\Omega_y(\xi,\eta,\zeta)\cos(\widehat{n,\eta})}{r}\,dS + \int_{\tau_i}\frac{1}{r}\frac{\partial\Omega_y(\xi,\eta,\zeta)}{\partial\eta}\,d\tau,$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\int_{\tau_i}\frac{\Omega_z(\xi,\eta,\zeta)}{r}\,d\tau = \oint_{S_i}\frac{\Omega_z(\xi,\eta,\zeta)\cos(\widehat{n,\zeta})}{r}\,dS + \int_{\tau_i}\frac{1}{r}\frac{\partial\Omega_z(\xi,\eta,\zeta)}{\partial\zeta}\,d\tau$$

Сложим эти три равенства, причем заметим, что

$$\Omega_x(\xi,\eta,\zeta)\cos(\widehat{n,\xi}) + \Omega_y(\xi,\eta,\zeta)\cos(\widehat{n,\eta}) + \Omega_z(\xi,\eta,\zeta)\cos(\widehat{n,\zeta}) = \Omega_n$$

и что вследствие условия (11.26)

$$\frac{\partial\Omega_x(\xi,\eta,\zeta)}{\partial\xi} + \frac{\partial\Omega_y(\xi,\eta,\zeta)}{\partial\eta} + \frac{\partial\Omega_z(\xi,\eta,\zeta)}{\partial\zeta} = 0$$

В результате получим

$$\operatorname{div}\int_{\tau_i}\frac{\Omega(\xi,\eta,\zeta)}{r}\,d\tau = -\oint_{S_i}\frac{\Omega_n}{r}\,dS$$

Складывая такие равенства, относящиеся ко всем объемам τ_i, получим:

$$\operatorname{div}\int_{\tau}\frac{\Omega}{r}\,d\tau = -\sum_i\oint_{S_i}\frac{\Omega_n}{r}\,dS$$

Но по условию Ω_n остается непрерывной при переходе через какую-либо поверхность разрыва, следовательно, интегралы, взятые по поверхностям, разделяющим объемы τ_i, взаимно сокращаются, и остается только интеграл по поверхности S, ограничивающей объем τ:

$$\operatorname{div}\int_{\tau}\frac{\Omega}{r}\,d\tau = -\oint_{S}\frac{\Omega_n}{r}\,dS.$$

Но вне поверхности S вектор Ω обращается в нуль, следовательно, на поверхности S составляющая Ω_n тоже обращается в нуль и

$$\operatorname{div} \int_{\tau} \frac{\Omega}{r} d\tau = 0,$$

что мы и хотели доказать.

Итак,

$$v_2 = \frac{1}{4\pi} \operatorname{rot} \int_{\tau} \frac{\Omega}{r} d\tau \tag{11.35}$$

Складывая оба полученных нами решения v_1 и v_2, мы приходим к решению системы уравнений (11.1).

Таким образом, задача определения скорости по заданному распределению вихрей и расхождения в неограниченном пространстве для случая, когда вихрь и расхождение равны нулю вне конечного объема имеет следующее решение:

$$v = \operatorname{grad} \varphi + \operatorname{rot} A \tag{11.36}$$

где

$$\varphi = -\frac{1}{4\pi} \int_{\tau} \frac{\Theta\, d\tau}{r}; \quad A = \frac{1}{4\pi} \int_{\tau} \frac{\vec{\Omega}\, d\tau}{r}. \tag{11.37}$$

Если мы обозначим через $R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ расстояние точки N до начала координат, то очевидно, что при $R \to \infty$ величины φ и A будут порядка $1/R$, а производные от этих величин по координатам будут порядка $1/R^2$.

Нетрудно показать, что найденное нами решение будет единственным решением задачи, если на искомый вектор v наложить требование быть всюду непрерывным и обращаться в нуль на бесконечности.

В самом деле, допустим, что вектор $\tilde{v}$ удовлетворяет всем поставленным требованиям. Рассмотрим вектор

$$a = \tilde{v} - v,$$

где v — найденное выше решение задачи. Этот вектор удовлетворяет условиям

$$\operatorname{div} a = 0, \quad \operatorname{rot} a = 0, \tag{11.38}$$

ибо, например

$$\operatorname{div} a = \operatorname{div} \tilde{v} - \operatorname{div} v = \Theta - \Theta = 0.$$

Кроме того, вектор a, как и векторы $\tilde{v}$ и v, всюду непрерывен и обращается в нуль на бесконечности. Второе из равенств (11.38) показывает, что вектор a имеет потенциал Φ

$$a = \operatorname{grad} \Phi,$$

и тогда из первого равенства (11.38) следует, что

$$\operatorname{div}\operatorname{grad}\Phi = -\Delta\Phi = 0.$$

Итак, Φ есть гармоническая функция; точно так же будут гармоническими функциями и произвольные $\partial\Phi/\partial x$; $\partial\Phi/\partial y$; $\partial\Phi/\partial z$. Но очевидно, что гармоническая функция достигает своих наибольших и наименьших значений на границе области. Взяв область внутри сферы большого радиуса R с центром в начале координат, видим, что значения всех трех составляющих вектора $\boldsymbol{a}$ должны оставаться меньше величины, которая стремится к нулю при $R \to \infty$, т. е. все три составляющие вектора $\boldsymbol{a}$ должны тождественно равняться нулю.

Можно освободиться от ограничения, что Θ и Ω равны нулю вне конечного объема, а именно, можно рассматривать τ как бесконечный объем жидкости, если только сделать некоторые добавочные предположения о Θ и Ω, например, что на бесконечности Θ и Ω будут порядка $1/R^3$.

§ 12. Случай одной вихревой нити. Применим результаты предыдущего параграфа к случаю, когда в безпредельной массе несжимаемой жидкости, покоящейся на бесконечности, имеется замкнутая вихревая нить L, т. е. бесконечно тонкая вихревая трубка. Так как жидкость несжимаема, то $\Theta = 0$, следовательно, $\Delta\varphi = 0$. Для вихревой нити элемент объема $d\tau$ можно заменить элементом дуги, умноженным на площадь поперечного сечения: $d\tau = \sigma\, ds$.

Пусть Ω будет величина вектора $\boldsymbol{\Omega}$. Составляющие последнего по осям координат суть

$$\Omega_x = \Omega\cos(\widehat{\Omega, x}) = \Omega\frac{d\xi}{ds}, \quad \Omega_y = \Omega\frac{d\eta}{ds}, \quad \Omega_z = \Omega\frac{d\zeta}{ds}.$$

Отсюда тогда интегральные выражения формулы (11.33) будут:

$$\frac{\Omega_x\, d\tau}{r} = \frac{\Omega\sigma\, d\xi}{r}, \quad \frac{\Omega_y\, d\tau}{r} = \frac{\Omega\sigma\, d\eta}{r}, \quad \frac{\Omega_z\, d\tau}{r} = \frac{\Omega\sigma\, d\zeta}{r},$$

и, следовательно:

$$A_x = \frac{\Gamma}{4\pi}\int_l \frac{d\xi}{r}, \quad A_y = \frac{\Gamma}{4\pi}\int_l \frac{d\eta}{r}; \quad A_z = \frac{\Gamma}{4\pi}\int_l \frac{d\zeta}{r}, \qquad (12.1)$$

где через Γ обозначена интенсивность вихревой нити: $\Gamma = \Omega\sigma$, причем мы считаем, что площадь поперечного сечения σ стремится к нулю, Ω же возрастает так, что произведение $\Omega\sigma$ стремится к пределу, отличному от нуля. Интегралы для A_x, A_y, A_z распространены по всей длине нити.

Переходим к вычислению составляющих скорости.

$$v_x = \cot A - \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z},$$

т. е.

$$v_x = \frac{1}{4\pi}\int_L \left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right)d\zeta - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right)d\eta\right] \qquad (12.2)$$

Найдем частные производные от $1/r$, помня, что

$$r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}$$

Получаем:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{x-\xi}{r^3} = \frac{\xi - x}{r^3}, \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{\eta - y}{r^3}, \quad \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{\zeta - z}{r^3}$$

Тогда подынтегральное выражение для v_x будет

$$\frac{\eta - y}{r^3}\,d\zeta - \frac{\zeta - z}{r^3}\,d\eta = \left|\begin{matrix} \eta - y & d\zeta \\ \zeta - z & d\eta \end{matrix}\right| \frac{ds}{r^2}$$

откуда

$$\left.\begin{aligned} v_x &= \frac{1}{4\pi}\int_L \left[\frac{\eta - y}{r}\frac{d\zeta}{ds} - \frac{\zeta - z}{r}\frac{d\eta}{ds}\right]\frac{ds}{r^2}, \\ v_y &= \frac{1}{4\pi}\int_L \left[\frac{\zeta - z}{r}\frac{d\xi}{ds} - \frac{\xi - x}{r}\frac{d\zeta}{ds}\right]\frac{ds}{r^2}, \\ v_z &= \frac{1}{4\pi}\int_L \left[\frac{\xi - x}{r}\frac{d\eta}{ds} - \frac{\eta - y}{r}\frac{d\xi}{ds}\right]\frac{ds}{r^2} \end{aligned}\right| \qquad (12.3)$$

Отложим единичный вектор по касательной к вихревой нити в точке M (рис. 67) проекции этого вектора k будут

$$\frac{d\xi}{ds}, \quad \frac{d\eta}{ds}, \quad \frac{d\zeta}{ds};$$

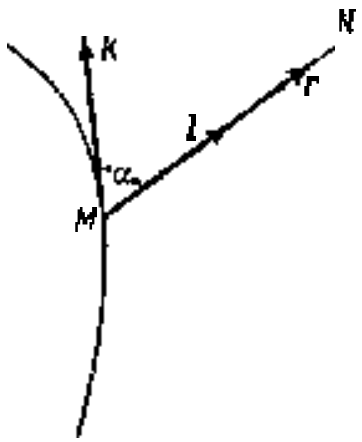

Рис. 67

по направлению вектора r, соединяющего точку M нити с точкой $N(x, y, z)$ жидкости, отложим единичный вектор l. Его составляющие будут

$$-\frac{\xi - x}{r}, \quad -\frac{\eta - y}{r}, \quad -\frac{\zeta - z}{r}$$

Обозначим через Δv ту часть скорости, которая происходит от действия на точку N элемента нити ds; составляющими Δv являются подынтегральные выражения формул (12.3); нетрудно видеть, что Δv выразится с помощью векторного произведения векторов k и l именно

$$\Delta v = \frac{1}{4\pi}(k \times l)\frac{ds}{r^2},$$

величине Δv равна

$$\Delta v = \frac{1}{4\pi} \frac{\sin \alpha \, ds}{r^2} \tag{12.4}$$

где α — угол между векторами $\boldsymbol{R}$ и $\boldsymbol{l}$. Можно установить электродинамическую аналогию для случая замкнутой вихревой нити. Именно если вместо вихревой нити возьмем линейный проводник электричества, по которому идет ток интенсивность которого пропорциональна Γ, то величина силы воздействия элемента этого проводника на единичный магнитный полюс, помещенный в точке N, определяется формулой (12.1) с точностью до постоянного множителя, зависящего от выбора единиц (закон Био и Савара).

Можно дать другое представление поля скорости, происходящего от вихревой нити. В самом деле, поскольку всюду в жидкости вихри отсутствуют, кроме точек вихревой нити L, движение, вызываемое вихревой нитью, должно иметь потенциал Φ, т. е.

$$v = \operatorname{grad} \Phi.$$

Чтобы найти выражение для потенциала Φ, преобразуем формулу (12.2). Прежде всего мы имеем формулы

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) &= \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{\partial}{\partial \zeta}\left(\frac{1}{r}\right), \\ \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right) &= -\frac{\partial}{\partial \zeta}\left(\frac{1}{r}\right) \end{aligned}\right\} \tag{12.5}$$

поэтому

$$v_1 = -\frac{\Gamma}{4\pi} \oint_L \left| \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right) d\eta - \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{1}{r}\right) d\zeta \right|$$

Воспользуемся теперь формулой Стокса

$$\oint_l P(\xi, \eta, \zeta)\, d\xi + Q(\xi, \eta, \zeta)\, d\eta + R(\xi, \eta, \zeta)\, d\zeta =$$

$$= \int_S \left| \left(\frac{\partial R}{\partial \eta} - \frac{\partial Q}{\partial \zeta}\right) \cos(n\widehat{,}\xi) + \left(\frac{\partial P}{\partial \zeta} - \frac{\partial R}{\partial \xi}\right) \cos(n, \eta) + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial Q}{\partial \xi} - \frac{\partial P}{\partial \eta}\right) \cos(n\widehat{,}\zeta) \right| dS,$$

где S есть поверхность, натянутая на контур L, и n — нормаль к этой поверхности, проведенная в положительную сторону т. е. в ту, откуда направление обхода по вихревой нити L кажется совершающимся против часовой стрелки (система координат правая).

В нашем случае

$$P = 0, \quad Q = -\frac{\Gamma}{4\pi}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{1}{r}\right), \qquad R = -\frac{\Gamma}{4\pi}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{1}{r}\right),$$

следовательно,

$$\frac{\partial R}{\partial\eta} - \frac{\partial Q}{\partial\zeta} = -\frac{\Gamma}{4\pi}\left[\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}\left(\frac{1}{r}\right) - \frac{\partial^2}{\partial\zeta^2}\left(\frac{1}{r}\right)\right] = -\frac{\Gamma}{4\pi}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{\Gamma}{4\pi}\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial\xi}\left(\frac{1}{r}\right),$$

$$\frac{\partial P}{\partial\zeta} - \frac{\partial R}{\partial\xi} = \frac{\Gamma}{4\pi}\frac{\partial^2}{\partial\xi\,\partial\eta}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{\Gamma}{4\pi}\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial\eta}\left(\frac{1}{r}\right),$$

$$\frac{\partial Q}{\partial\xi} - \frac{\partial P}{\partial\eta} = \frac{\Gamma}{4\pi}\frac{\partial^2}{\partial\xi\,\partial\zeta}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{\Gamma}{4\pi}\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial\zeta}\left(\frac{1}{r}\right).$$

При преобразованиях мы воспользовались тождеством

$$\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{\partial^2}{\partial\eta^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{\partial^2}{\partial\zeta^2}\left(\frac{1}{r}\right) = 0$$

и первой из формул (12.5).

Итак, вынося еще за знак интеграла дифференцирование по x, получим,

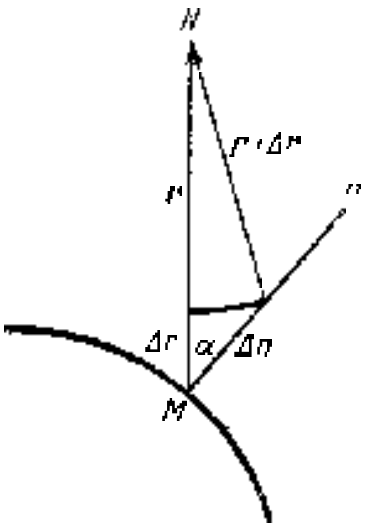

Рис. 68

$$v_x = -\frac{\Gamma}{4\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int_S\left[\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{1}{r}\right)\cos(\widehat{n,\xi}) + \frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{1}{r}\right)\cos(\widehat{n,\eta}) + \frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\frac{1}{r}\right)\cos(\widehat{n,\zeta})\right]dS$$

или

$$v_x = -\frac{\Gamma}{4\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int_S\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n}\,dS.$$

Выражение

$$\int_S\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n}\,dS$$

имеет очень простой геометрический смысл. В самом деле, из рис. 68 видно, что

$$\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n} = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial r}{\partial n} = \frac{1}{r^2}\cos(\widehat{n,r}) = \frac{\cos\alpha}{r^2},$$

если вектор r направлен от точки M поверхности S к точке $N(x, y, z)$, ибо $\frac{\partial r}{\partial n} = \lim\frac{\Delta r}{\Delta n} = -\cos\alpha$. Но если обозначить через $d\chi$ телесный угол, под которым видна площадка dS из точки N, то будем иметь:

$$d\chi = \frac{dS}{r^2}\cos\alpha, \tag{12.6}$$

В самом деле, проведем из точки N, как из центра, сферу радиуса r (рис. 69). Подобно тому, как угол измеряется в радианах отношением длины дуги к радиусу, телесный угол $d\chi$ измеряется отношением площади элемента сферы dS_1 к квадрату радиуса r^2, т. е.

$$d\chi = \frac{dS_1}{r^2}.$$

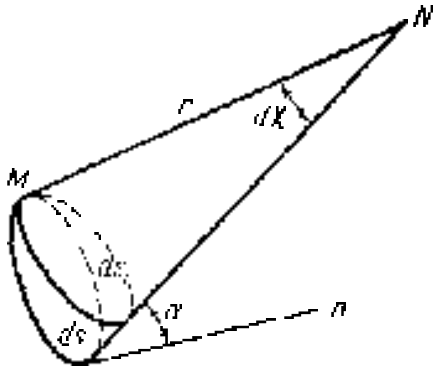

Рис. 69.

Но очевидно, что $dS_1 = dS\cos\alpha$, поэтому и получается формула (12.6). Отметим, что если угол α тупой, то $d\chi$ получается отрицательным, но ясно, что угол α будет острым, и, следовательно, $d\chi$ положительным в том случае, когда из точки N видна положительная сторона элемента dS; в том же случае, когда из точки N видна отрицательная сторона этого элемента, угол α будет тупым, а элемент $d\chi$ отрицательным. Следовательно, знак $d\chi$ показывает, видна ли из точки N положительная или отрицательная сторона элемента dS. Итак,

$$\int_S \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n}\,dS = \int_S \frac{\cos\alpha\,dS}{r^2} = \int d\chi = \chi,$$

где χ есть телесный угол, под которым видно из точки N поверхность S, натянутая на контур L, иными словами, телесный угол, под которым из точки N виден контур L. Поэтому для v_y получаем формулу

$$v_y = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial\chi}{\partial x},$$

аналогичные формулы получаются для v_x и v_z:

$$v_x = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial\chi}{\partial x}; \quad v_z = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial\chi}{\partial z}.$$

Мы получаем окончательно следующий результат:

$$v = -\frac{\Gamma}{4\pi}\operatorname{grad}\chi = \operatorname{grad}\left(-\frac{\Gamma\chi}{4\pi}\right), \tag{12.7}$$

так что действительно мы имеем потенциал скорости

$$\varphi = -\frac{\Gamma\chi}{4\pi}. \tag{12.8}$$

Этот потенциал многозначен: если мы заставим точку N обойти вокруг вихревой нити, то он изменится на Γ. В этом нетрудно убедиться, прослеживая изменение χ при указанном обходе точки N.

Впрочем, это можно было определить заранее, ибо циркуляция скорости по контуру, охватывающему вихревую нить, должна равняться интенсивности охватываемого вихря Γ, а эта циркуляция дает как раз приращение потенциала при упомянутом обходе.

§ 13. Прямолинейная вихревая нить. Формулы (12.3) упрощаются для случая, когда рассматриваемая нить прямолинейна. Пусть нить будет параллельна оси Oz; координаты точек нити по-прежнему обозначаем через (ξ, η, ζ), ds — элемент дуги нити. Тогда вдоль вихревой нити

$$\frac{d\xi}{ds} = 0, \quad \frac{d\eta}{ds} = 0, \quad \frac{d\zeta}{ds} = 1.$$

Формулы (12.3) дают

$$v_x = \frac{\Gamma}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\eta - y}{r^3}\, d\zeta \quad (\text{так как } dz = d\zeta),$$

$$v_y = -\frac{\Gamma}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\xi - x}{r^3}\, d\zeta, \quad v_z = 0.$$

Произведя интегрирование, в котором ξ, η, x, y, z рассматриваются как постоянные (например полагая $z - \zeta = \varrho \operatorname{ctg} u$), получим:

$$v_x = -\frac{\Gamma}{2\pi} \frac{y - \eta}{\rho^2}, \quad v_y = \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{x - \xi}{\rho^2}, \quad v_z = 0, \tag{13.1}$$

где

$$\rho^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2.$$

Таким образом, мы видим, что движение происходит одинаково во всех плоскостях, параллельных плоскости Oxy, так как скорости не зависят от координаты z, а ξ и η одинаковы для всех точек вихревой нити. Поэтому достаточно рассматривать движение на плоскости Oxy, причем рассматривать вместо вихревой нити точку пересечения ее с плоскостью Oxy. Будем называть эту точку *точечным вихрем*. Из формул (13.1) выводим, что под влиянием одного точечного вихря частицы жидкости движутся по окружностям, центром которых является вихрь, со скоростями, обратно пропорциональными расстоянию движущейся точки от вихря:

$$v = \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{1}{\rho}.$$

При этом положительным Γ отвечает движение по окружности против часовой стрелки, отрицательным — по часовой стрелке.

Вследствие симметрии движения жидкости около точечного вихря очевидно что вихрь будет оставаться неподвижным. Как было показано в главе четвертой, движение можно исследовать с помощью функций комплексного переменного $z = x + yi$, составляя комплексную скорость

$$v_x - iv_y = -\frac{\Gamma}{2\pi}\frac{y-\eta+i(x-\xi)}{\rho^2} = \frac{\Gamma}{2\pi i}\frac{(\bar{z}-\bar{z}_0)}{(z-z_0)(\bar{z}-\bar{z}_0)} = \frac{\Gamma}{2\pi i}\frac{1}{z-z_0},$$

где точечно $z_0 = \xi + i\eta$, $\bar{z} = x - iy$, $\bar{z}_0 = \xi - i\eta$.

Вводя комплексный потенциал $w = \frac{\Gamma}{2\pi i}\ln(z-z_0)$, имеем:

$$v_x - iv_y = \frac{dw}{dz}.$$

Напомним, что Γ — интенсивность вихря — может вместе с тем быть рассматриваема как циркуляция скорости по любому замкнутому контуру, окружающему точку z_0.

§ 14. Две прямолинейные вихревые нити. Движение системы вихрей. Пусть имеем две параллельные прямолинейные вихревые нити. Как и в предыдущем случае, можно рассматривать движение в одной из плоскостей, перпендикулярных к нитям. Примем эту плоскость за плоскость комплексного переменного z. Пусть интенсивности точечных вихрей z_1 и z_2, получающихся в пересечении нитей с плоскостью Oxy, будут Γ_1 и Γ_2. Комплексный потенциал будет равен сумме потенциалов, соответствующих каждому вихрю т. е.

$$w = \frac{\Gamma_1}{2\pi i}\ln(z-z_1) + \frac{\Gamma_2}{2\pi i}\ln(z-z_2),$$

комплексная скорость:

$$v_x - iv_y = \frac{dw}{d\bar{z}} = \frac{\Gamma_1}{2\pi i}\frac{1}{z-z_1} + \frac{\Gamma_2}{2\pi i}\frac{1}{z-z_2};$$

так как $v_x - iv_y = \frac{d\bar{z}}{dt}$, то можно написать следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{d\bar{z}}{dt} = \frac{\Gamma_1}{2\pi i(z-z_1)} + \frac{\Gamma_2}{2\pi i(z-z_2)}.$$

Исследуем перемещение вихрей в жидкости. Вихрь в точке z_1 перемещается только под влиянием другого вихря, так как отдельный вихрь не перемещается (вихрь сам на себя не действует). Именно первый вихрь будет вращаться вокруг второго по окружности, точно так же как второй вихрь будет вращаться вокруг первого, причем расстояние между вихрями будет оставаться постоянным

во все время движения. Для доказательства этих почти очевидных утверждений составим дифференциальные уравнения движения вихрей z_1 и z_2. Чтобы получить скорость первого вихря, в выражении комплексной скорости $\overline{\frac{dz}{dt}}$ отбросим первое слагаемое и положим во втором $z = z_1$. Получим:

$$\overline{\frac{dz_1}{dt}} = \frac{\Gamma_2}{2\pi i (z_1 - z_2)}.$$

Точно так же

$$\overline{\frac{dz_2}{dt}} = \frac{\Gamma_1}{2\pi i (z_2 - z_1)}.$$

Отделяя в этих уравнениях вещественные и мнимые части, приходим к такой системе дифференциальных уравнений:

$$\left.\begin{aligned} &1)\ \frac{dx_1}{dt} = -\frac{\Gamma_2}{2\pi}\frac{y_1 - y_2}{r^2}; \quad 3)\ \frac{dx_2}{dt} = \frac{\Gamma_1}{2\pi}\frac{y_1 - y_2}{r^2}; \\ &2)\ \frac{dy_1}{dt} = \frac{\Gamma_2}{2\pi}\frac{x_1 - x_2}{r^2}, \qquad 4)\ \frac{dy_2}{dt} = -\frac{\Gamma_1}{2\pi}\frac{x_1 - x_2}{r^2}, \end{aligned}\right\} \quad (14.1)$$

где

$$r^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2.$$

Прежде всего, умножая первое уравнение на Γ_1, третье — на Γ_2 и складывая их, найдем:

$$\Gamma_1 \frac{dx_1}{dt} + \Gamma_2 \frac{dx_2}{dt} = 0, \quad \text{откуда} \quad \Gamma_1 x_1 + \Gamma_2 x_2 = \text{const}.$$

Аналогичным путем, умножая второе уравнение на Γ_1, четвертое на Γ_2 и складывая, найдем:

$$\Gamma_1 \frac{dy_1}{dt} + \Gamma_2 \frac{dy_2}{dt} = 0 \quad \text{откуда} \quad \Gamma_1 y_1 + \Gamma_2 y_2 = \text{const}.$$

Найденные интегралы можно переписать, разделив их на сумму $\Gamma_1 + \Gamma_2$:

$$\frac{\Gamma_1 x_1 + \Gamma_2 x_2}{\Gamma_1 + \Gamma_2} = \text{const}, \quad \frac{\Gamma_1 y_1 + \Gamma_2 y_2}{\Gamma_1 + \Gamma_2} = \text{const}$$

В последней форме имеем так называемые «интегралы движения центра инерции» системы двух вихрей. Они показывают, что точка

$$x_c = \frac{\Gamma_1 x_1 + \Gamma_2 x_2}{\Gamma_1 + \Gamma_2}, \quad y_c = \frac{\Gamma_1 y_1 + \Gamma_2 y_2}{\Gamma_1 + \Gamma_2},$$

которую назовем *центром инерции* вихрей, остается неподвижной во все время движения.

Далее преобразуем систему уравнений (14.1) следующим образом: вычтем из первого уравнения третье, а из второго четвертое. Получим:

$$\frac{d(x_1-x_2)}{dt}=-\frac{\Gamma_1+\Gamma_2}{2\pi}\cdot\frac{y_1-y_2}{r^2};\quad \frac{d(y_1-y_2)}{dt}=\frac{\Gamma_1+\Gamma_2}{2\pi}\cdot\frac{x_1-x_2}{r^2}.$$

Умножим первое из этих уравнений на x_1-x_2, второе на y_1-y_2 и сложим:

$$(x_1-x_2)\frac{d(x_1-x_2)}{dt}+(y_1-y_2)\frac{d(y_1-y_2)}{dt}=0.$$

Интегрирование этого уравнения дает:

$$(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2=\text{const.},\quad \text{или}\quad r=\text{const}.$$

Таким образом, видим, что расстояние между двумя вихрями остается постоянным. Сопоставляя этот результат с предыдущим о сохранении центра инерции вихрей, приходим к заключению что два вихря вращаются вокруг центра инерции с сохранением расстояния между ними.

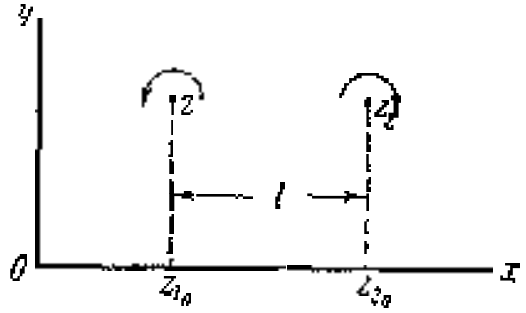

Рис. 70.

В частном случае, когда $\Gamma_1=-\Gamma_2$ т. е. когда вихри имеют одинаковую интенсивность, но противоположное вращение, центр инерции находится на бесконечности, так как знаменатель $\Gamma_1+\Gamma_2=0$. Покажем, что вихри будут двигаться поступательно с постоянной скоростью, перпендикулярной к прямой, соединяющей вихри (рис 70). В самом деле, пусть в начальный момент вихри были на оси Ox на расстоянии l друг от друга. Тогда из уравнений движения, которые теперь имеют вид:

$$\frac{d\bar z_1}{dt}=\frac{d\bar z_2}{dt}=-\frac{1}{2\pi i(z_1-z_2)},$$

получаем:

$$\bar z_2-\bar z_1=\text{const}=l.$$

Тогда и $z_2-z_1=l$, т. е.

$$\frac{d\bar z_1}{dt}=\frac{d\bar z_2}{dt}=\frac{\Gamma_1}{2\pi li}=-\frac{\Gamma_1 l}{2\pi l}.$$

Отделяя вещественную часть от мнимой, найдем:

$$v_{1x}=v_{2x}=0,\quad v_{1y}=v_{2y}=\frac{\Gamma_1}{2\pi l}.$$

Следовательно, вихри перемещаются параллельно оси Oy.

Рассмотрим теперь более общий случай, когда мы имеем систему n точечных вихрей, расположенных в точках $z_1, z_2, \ldots, z_n$ и имеющих

интенсивности $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_n$. В этом случае комплексный потенциал имеет вид

$$w(z) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\Gamma_k}{2\pi i} \ln(z - z_k), \tag{14.2}$$

а для комплексной скорости получается выражение

$$v_x - iv_y = \frac{dw}{dz} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\Gamma_k}{2\pi i} \frac{1}{z - z_k}. \tag{14.3}$$

Движение вихрей будет определяться уравнениями

$$\frac{d\bar{z}_l}{dt} = \sum_{k=1}^{n}{}' \frac{\Gamma_k}{2\pi i} \frac{1}{z_l - z_k}, \tag{14.4}$$

где штрих показывает, что при суммировании пропускается член, соответствующий значению $k = l$.

Из этих уравнений нетрудно вывести несколько простых следствий. Умножая уравнения системы (14.4) на Γ_l и суммируя по l от 1 до n, легко убедимся, что в правой части все члены взаимно сократятся, и мы получим, что

$$\sum_{l=1}^{n} \Gamma_l \frac{d\bar{z}_l}{dt} = 0,$$

откуда следует, что

$$\sum_{l=1}^{n} \Gamma_l \bar{z}_l = \text{const},$$

т. е.

$$\sum_{l=1}^{n} \Gamma_l x_l = \text{const}, \quad \sum_{l=1}^{n} \Gamma_l y_l = \text{const} \tag{14.5}$$

Если $\sum_{l=1}^{n} \Gamma_l = 0$, то полученные интегралы можем переписать в виде «интегралов движения центра инерции»:

$$\frac{\sum_{l=1}^{n} \Gamma_l x_l}{\sum_{l=1}^{n} \Gamma_l} = \text{const}, \quad \frac{\sum_{l=1}^{n} \Gamma_l y_l}{\sum_{l=1}^{n} \Gamma_l} = \text{const}.$$

Точно так же, умножая уравнения системы (14.4) на $\Gamma_l z_l$ и суммируя по значку l от 1 до n, мы легко получим равенство

$$\sum_{l=1}^{n} \Gamma_l z_l \frac{d\bar{z}_l}{dt} = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k \neq l} \Gamma_k \Gamma_l.$$

Разделяя вещественную и мнимую части, находим:

$$\sum_{l=1}^{n} \Gamma_l \left(x_l \frac{dx_l}{dt} + y_l \frac{dy_l}{dt} \right) = 0;$$

$$\sum_{l=1}^{n} \Gamma_l \left(x_l \frac{dy_l}{dt} - y_l \frac{dx_l}{dt} \right) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k \neq l} \Gamma_k \Gamma_l. \qquad (14\,6)$$

Второе из этих равенств показывает, что сумма моментов количеств движения масс Γ_l относительно начала координат не меняется с течением времени. Первое же из этих равенств может быть переписано так:

$$\frac{d}{dt} \sum_{l=1}^{n} \Gamma_l (x_l^2 + y_l^2) = 0,$$

откуда следует, что

$$\sum_{l=1}^{n} \Gamma_l (x_l^2 + y_l^2) = \text{const}, \qquad (14\,7)$$

т. е сумма моментов инерции масс Γ_l относительно начала координат не меняется с течением времени

Наконец, умножая уравнения системы (14 4) на $\Gamma_l \frac{dz_l}{dt}$ и суммируя по l, мы придем к равенству

$$\sum_{l=1}^{n} \Gamma_l \frac{dz_l}{dt} \frac{d\bar{z}_l}{dt} = \sum_{k \neq l} \frac{\Gamma_k \Gamma_l}{2\pi i} \frac{1}{z_l - z_k} \frac{d(z_l - z_k)}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_{k \neq l} \frac{\Gamma_k \Gamma_l}{2\pi i} \ln (z_l - z_k)$$

отделяя в котором мнимые части, получаем:

$$0 = \frac{d}{dt} \sum_{k \neq l} \Gamma_k \Gamma_l \ln r_{kl},$$

где r_{kl} есть расстояние между вихрями z_k и z_l. Производя интегрирование, получаем еще один интеграл системы (14.4):

$$\sum_{k \neq l} \Gamma_k \Gamma_l \ln r_{kl} = \text{const}. \qquad (14\,8)$$

§ 15. Круговая вихревая нить. В качестве простейшего примера криволинейной вихревой нити рассмотрим круговую вихревую нить радиуса a, лежащую в плоскости xy центр которой находится в начале координат и интенсивность которой равна Γ. Движение во всех плоскостях проходящих через ось Oz, будет, очевидно, совершенно одинаковым и поэтому удобно пользоваться цилиндрическими координатами z, ρ, θ, где

$$x = \rho \cos \theta, \quad y = \rho \sin \theta.$$

Но мы имеем в цилиндрических координатах следующие выражения для составляющих $\operatorname{rot} A$:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{rot}_\rho A &= \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z};\\ \operatorname{rot}_\theta A &= \frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho};\\ \operatorname{rot}_z A &= \frac{1}{\rho}\frac{\partial (\rho A_\theta)}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\rho}{\partial \theta}. \end{aligned}\right\} \tag{15.1}$$

Будем характеризовать положение переменной точки M на вихревой нити углом α, так что на нити

$$\xi = a\cos\alpha, \quad \eta = a\sin\alpha, \quad \zeta = 0$$

Кроме того, в формулы (12.1) входит еще расстояние r между точками $M(\xi, \eta, \zeta)$ и $N(x, y, z)$, равное

$$r = \sqrt{(\rho\cos\theta - a\cos\alpha)^2 + (\rho\sin\theta - a\sin\alpha)^2 + z^2} =$$
$$= \sqrt{\rho^2 - 2a\rho\cos(\theta - \alpha) + a^2 + z^2}.$$

По формулам (12.1) находим:

$$A_x = \frac{\Gamma}{4\pi}\int_0^{2\pi} \frac{-a\sin\alpha\, d\alpha}{r}, \quad A_y = \frac{\Gamma}{4\pi}\int_0^{2\pi} \frac{a\cos\alpha\, d\alpha}{r}, \quad A_z = 0,$$

но при $\theta = 0$, очевидно, $A_x = A_\rho$, $A_y = A_\theta$; следовательно,

$$\left.\begin{aligned} A_\rho &= -\frac{\Gamma a}{4\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\sin\alpha\, d\alpha}{\sqrt{\rho^2 + a^2 + z^2 - 2a\rho\cos\alpha}} = 0\\ A_\theta &= \frac{\Gamma a}{4\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\cos\alpha\, d\alpha}{\sqrt{\rho^2 + a^2 + z^2 - 2a\rho\cos\alpha}} = A\\ A_z &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{15.2}$$

Пользуясь формулами (15.1) получаем:

$$v_\rho = -\frac{\partial A}{\partial z}, \quad v_\theta = 0, \quad v_z = \frac{1}{\rho}\frac{\partial (\rho A)}{\partial \rho}. \tag{15.3}$$

Объем жидкости протекающей в единицу времени через круг радиуса ρ с центром на оси Oz и лежащий в плоскости, перпендикулярной к оси Oz, очевидно, равен

$$\int_0^\rho \int_0^{2\pi} v_z \rho\, d\rho\, d\theta = 2\pi \int_0^\rho v_z \rho\, d\rho = 2\pi\rho A,$$

Этот же результат можно получить и иначе, а именно в силу того, что

$$v = \operatorname{rot} \boldsymbol{A},$$

поток вектора скорости v через некоторую поверхность может быть вычислен по формуле Стокса:

$$\int_S v_n\, dS = \oint_L A_x\, dx + A_y\, dy + A_z\, dz = \oint_L A_\rho\, d\rho + A_\varphi\, d\varphi + A_z\, dz.$$

В нашем случае $A_\rho = A_z = 0$, $A_\varphi = A(\rho, z)$, и если L есть указанная выше окружность радиуса ρ с центром на оси Oz, то сразу находим:

$$\int_S v_n\, dS = 2\pi\rho A.$$

Уравнение

$$2\pi\rho A = \text{const},$$

определяет, очевидно, поверхности тока. Назовем следуя Стоксу, *функцией тока* выражение

$$\psi = -\rho A; \tag{15.4}$$

тогда будем иметь:

$$v_\rho = \frac{1}{\rho}\frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad v_z = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \psi}{\partial \rho} \tag{15.5}$$

и

$$\psi = -\rho A = -\frac{\rho\Gamma a}{4\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\cos\alpha\, d\alpha}{\sqrt{a^2+\rho^2+z^2-2a\rho\cos\alpha}}. \tag{15.6}$$

Последний интеграл выражается через полные эллиптические интегралы. А именно, введем модуль

$$k = \frac{2\sqrt{\rho a}}{\sqrt{z^2+(\rho+a)^2}}$$

и положим в предыдущем интеграле $\alpha = \pi + 2\varphi$; тогда получим:

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos\alpha\, d\alpha}{\sqrt{a^2+\rho^2-z^2-2a\rho\cos\alpha}} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{-2\cos 2\varphi\, d\varphi}{\sqrt{a^2+\rho^2-z^2+2a\rho(1-2\sin^2\varphi)}} =$$

$$= -4\int_0^{\pi/2} \frac{(1-2\sin^2\varphi)\, d\varphi}{\sqrt{z^2+(a-\rho)^2}\cdot\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}.$$

Пользуясь обычными обозначениями полных эллиптических интегралов

$$K(k)=\int_0^{\pi/2}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},\quad E(k)=\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi,$$

легко найдем, что

$$\int_0^{2\pi}\frac{\cos\alpha\,d\alpha}{\sqrt{a^2+\rho^2+z^2-2a\rho\cos\alpha}}=\frac{2}{a\rho}\left\{\left(\frac{2}{k}-k\right)K(k)-\frac{2}{k}E(k)\right\}\qquad(15.7)$$

и, следовательно,

$$\psi=-\frac{\Gamma\sqrt{a\rho}}{2\pi}\left\{\left(\frac{2}{k}-k\right)K(k)-\frac{2}{k}E(k)\right\}.\qquad(15.8)$$

Если обозначить через r_1 и r_2 наименьшее и наибольшее расстояния от точки N до точек вихревой нити, то

$$r_1=\sqrt{z^2+(\rho-a)^2},\quad r_2=\sqrt{z^2+(\rho+a)^2},\qquad(15.9)$$

и легко видеть, что дополнительный модуль $k'=\sqrt{1-k^2}$ очень просто выражается через r_1 и r_2:

$$k'=\frac{r_1}{r_2}.\qquad(15.10)$$

Можно дать еще другое представление функции ψ. А именно, положим $e^{i\alpha}=u$ и обозначим через C контур круга $|u|=1$ в плоскости комплексной переменной u.

Так как

$$\int_0^{2\pi}\frac{\sin\alpha\,d\alpha}{\sqrt{a^2+\rho^2+z^2-2a\rho\cos\alpha}}=0$$

и

$$a^2+\rho^2+z^2=\frac{1}{2}(r_1^2+r_2^2),\quad 2a\rho=\frac{1}{2}(r_2^2-r_1^2),\qquad(15.11)$$

то

$$\int_0^{\pi}\frac{\cos\alpha\,d\alpha}{\sqrt{a^2+\rho^2+z^2-2a\rho\cos\alpha}}=$$

$$=-\int_0^{2\pi}\frac{e^{i\alpha}\,d\alpha}{\sqrt{\frac{1}{2}(r_1^2+r_2^2)-\frac{1}{4}(r_2^2-r_1^2)(e^{i\alpha}+e^{-i\alpha})}}=$$

$$=\oint\frac{2\,d\mu}{i\sqrt{2(r_1^2+r_2^2)-(r_2^2-r_1^2)\left(\mu+\frac{1}{\mu}\right)}},$$

Уравнение

$$2\left(r_1^2+r_2^2\right)-\left(r_2^2-r_1^2\right)\left(u+\frac{1}{u}\right)=0$$

имеет корни

$$u_1=\frac{r_2-r_1}{r_2+r_1}=\lambda,\quad u_2=\frac{r_2+r_1}{r_2-r_1}=\frac{1}{\lambda},$$

первый из которых лежит внутри окружности C, а другой вне ее. Кроме точки $u=\lambda$, особой точкой подынтегральной функции является еще $u=0$. Поэтому мы можем заменить контур интегрирования C произвольным контуром, охватывающим точки $u=0$ и $u=\lambda$.

Сведем этот контур к дважды обегаемому отрезку $(0, \lambda)$ как показано на рис. 71. На верхней стороне отрезка $(0, \lambda)$ радикал

$$\sqrt{2\left(r_1^2+r_2^2\right)-\left(r_2^2-r_1^2\right)\left(u+\frac{1}{u}\right)}=$$

$$=\sqrt{-\frac{\left[\left(r_2^2-r_1^2\right)(u-\lambda)\left(u-\frac{1}{\lambda}\right)\right]}{u}}$$

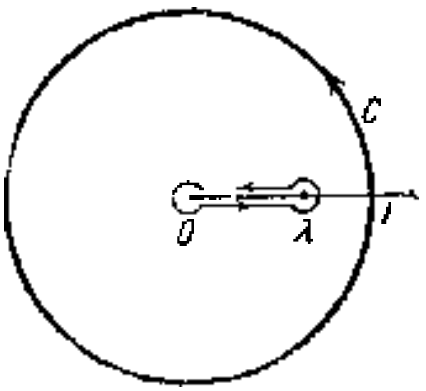

Рис. 71.

имеет значение

$$i\sqrt{\frac{\left[\left(r_2^2-r_1^2\right)(\lambda-u)\left(\frac{1}{\lambda}-u\right)\right]}{u}},$$

на нижней же стороне он имеет прямо противоположное значение, ибо при обходе точки $u=0$ радикал $\sqrt{u}$ меняет свой знак на обратный. Поэтому

$$\int_0^{2\pi}\frac{\cos\alpha\,d\alpha}{\sqrt{a^2-\rho^2-z^2-2a\rho\cos\alpha}}=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{r_2^2-r_1^2}}\left|\int_\lambda^0\frac{du}{-\sqrt{\frac{(\lambda-u)\left(\frac{1}{\lambda}-u\right)}{u}}}+\int_0^\lambda\frac{du}{\sqrt{\frac{(\lambda-u)\left(\frac{1}{\lambda}-u\right)}{u}}}\right|=$$

$$=\frac{4}{\sqrt{r_2^2-r_1^2}}\int_0^\lambda\frac{\sqrt{u}\,du}{\sqrt{(\lambda-u)\left(\frac{1}{\lambda}-u\right)}}.$$

Сделав наконец, подстановку $u = \lambda \sin^2 t$, получим

$$\int_0^{\lambda} \frac{\sqrt{u}\, du}{\sqrt{(\lambda - u)\left(1 - u\right)}} = \int_0^{\pi/2} \frac{2\lambda \sqrt{\lambda} \sin^2 t\, dt}{\sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 t}} = \frac{2}{\sqrt{\lambda}} \{K(\lambda) - E(\lambda)\}.$$

Итак,

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos \alpha\, d\alpha}{\sqrt{a^2 + \rho^2 + z^2 - 2a\rho \cos \alpha}} = \frac{8}{r_2 - r_1} \left\{ K\left(\frac{r_2 - r}{r_2 + r_1}\right) - E\left(\frac{r_2 - r}{r_2 + r_1}\right) \right\}$$

и по формуле (15.6)

$$\psi = -\frac{\Gamma}{2\pi}(r_2 + r_1)\left\{K\left(\frac{r_2 - r_1}{r_2 + r_1}\right) - E\left(\frac{r_2 - r_1}{r_2 + r_1}\right)\right\}. \qquad (15.12)$$

Эта формула позволяет найти все элементы движения, в частности, построить линии тока. Последние представляют собой замкнутые кривые, охватывающие вихревую нить. В точках около вихревой нити скорость становится бесконечно большой. Очевидно далее, что в точках лежащих в плоскости вихревой нити скорость направлена параллельно оси Oz. Отсюда следует, что вихревая нить будет перемещаться параллельно оси Oz. Однако скорость перемещения нити оказывается бесконечно большой. Конечно, на самом деле мы всегда имеем дело не с вихревой нитью, а с вихревым кольцом конечных размеров, которое будет уже перемещаться с конечной скоростью, притом тем большей, чем меньше поперечное сечение кольца. Однако необходимо отметить, что вихревое кольцо конечных размеров вообще говоря будет с течением времени испытывать деформацию.

§ 16. Вихревой слой. Для объяснения ряда явлений, имеющих место в действительности, в гидродинамике вводят понятие о поверхности разрыва, т. е. поверхности, на которой какой-нибудь элемент, обычно скорость, меняется скачком, претерпевая разрыв непрерывности. Такова, например, поверхность разрыва в циклоне, по которой соприкасаются холодный и теплый воздух и на которой имеет место разрыв скорости ветра. При обтекании тела жидкостью вводят в рассмотрение поверхности разрыва, образующие по краям тела и отделяющие область, в которой происходит движение жидкости, от мертвого пространства позади тела, в котором скорость считают равной нулю.

Покажем, что поверхность разрыва тангенциальной скорости можно рассматривать как предельный случай вихревого слоя, т. е. пространства между двумя близкими поверхностями, заполненного вихрями, причем в этом слое происходит непрерывное, хотя и быстрое, изменение скорости.

Для простоты допустим, что поверхность разрыва есть плоскость S, параллельная плоскости Oxz, так что ее уравнение $y = a$. Введем в рассмотрение плоскость S_1: $y = a + \varepsilon$, отстоящую на расстоянии ε

от первой (рис 72). Пусть по одну сторону плоскости S жидкость движется со скоростью v, по другую сторону S_1 — со скоростью v_1, причем обе скорости постоянны и направлены параллельно оси Ox, так что происходит разрыв лишь тангенциальной составляющей скорости Составляющие скоростей v и v_1 по оси Ox пусть будут u и u_1.

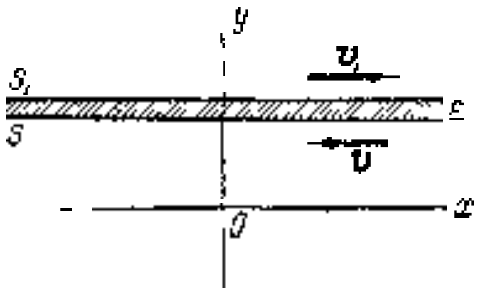

Рис 72

Положим теперь, что в слое между S и S_1 составляющие скорости определяются формулами

$$v_x = (u - u_1)\left(1 - \frac{y - a}{\varepsilon}\right) + u_1, \quad v = 0$$

Тогда на плоскости S_1, для которой $y - a = 0$, будет $v_x = u$. На плоскости же S_1, где $y - a = \varepsilon$ $v_x = u_1$. Следовательно скорость меняется непрерывным образом от u до u_1 при переходе от плоскости S к плоскости S_1. Вихрь скорости в слое SS_1 имеет направление, перпендикулярное плоскости Oxy, и его составляющая по оси Oz равна

$$\Omega_z = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{u - u_1}{\varepsilon}$$

При малом ε вихрь может быть очень большим. Внутри слоя Ω имеет постоянное значение, отличное от нуля вне слоя $\Omega = 0$. Поэтому слой SS_1 может быть назван вихревым слоем

Можно установить эквивалентность вихревого слоя и поверхности разрыва непрерывности тангенциальной составляющей скорости обратным путем, исходя от системы вихрей Именно пусть имеем ряд параллельных равноотстоящих вихревых нитей одинаковой интенсивности Γ (рис 73). Пусть расстояние между нитями l стремится к нулю так, что произведение $l\Gamma$ стремится к пределу,

Рис 73

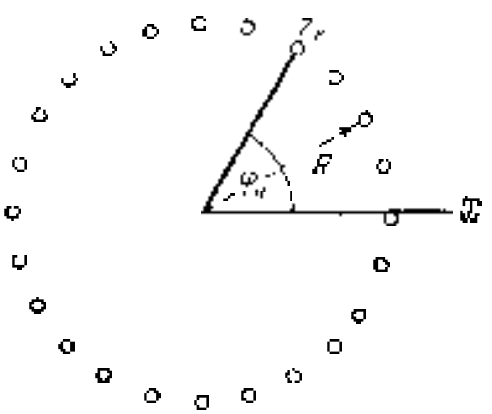

Рис 71

отличному от нуля, $\lim(l\Gamma) = k$ можно назвать *вихревой плотностью слоя*. По обе стороны слоя скорости имеют противоположное направление, так что, очевидно, имеем разрыв скорости.

Рассмотрим в качестве примера вихревой цилиндрический слой Пусть точечные вихри будут расположены по окружности радиуса R (рис 74), так что комплексная координата k-го вихря есть $Re^{i\varphi_k}$

Вводя понятие об интенсивности вихрей на элементе дуги $R\,d\varphi$, будем эту интенсивность считать равной $\Gamma R\,d\varphi$; для потенциала слоя будем иметь:

$$w = \frac{\Gamma R}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \ln(z - Re^{i\varphi})\,d\varphi,$$

комплексная скорость будет

$$v_x - iv_y = \frac{\Gamma R}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{z - Re^{i\varphi}}.$$

Для вычисления скорости преобразуем подынтегральное выражение, разделив его на z (z при интегрировании рассматривается как постоянная) и умножив на $z - Re^{i\varphi} + Re^{i\varphi}$. Тогда получим вынос $\frac{1}{z}$ за знак интеграла

$$v_x - iv_y = \frac{\Gamma R}{2\pi i z}\int_0^{2\pi} \frac{z - Re^{i\varphi} + Re^{i\varphi}}{z - Re^{i\varphi}}\,d\varphi = \frac{\Gamma R}{2\pi i z}\left\{2\pi - \frac{1}{i}\ln(z - Re^{i\varphi})\Big|_0^{2\pi}\right\}.$$

Значение $\ln(z - Re^{i\varphi})\Big|_0^{2\pi}$ зависит от того, где находится точка z — внутри окружности или вне. В первом случае, когда $|z| < R$, при изменении φ от 0 до 2π аргумент $z - Re^{i\varphi}$ меняется на 2π, так как вектор $z - Re^{i\varphi}$ обходит начало координат. Тогда

$$\ln(z - Re^{i\varphi})\Big|_0^{2\pi} = 2\pi i$$

В случае же, если z находится вне круга, т. е. $|z| > R$, конец вектора $z - Re^{i\varphi}$ обходит замкнутый путь, не заключающий начала координат, а потому $\ln(z - Re^{i\varphi})$ возвращается к старому значению, и, значит,

$$\ln(z - Re^{i\varphi})\Big|_0^{2\pi} = 0$$

Таким образом, для комплексной скорости получаем два значения:

$$v_x - iv_y = \frac{\Gamma R}{2\pi z}\left\{2\pi - \frac{1}{i}\cdot 2\pi i\right\} = 0$$

для внутренней точки круга и

$$v_x - iv_y = \frac{\Gamma R}{iz}$$

для внешней точки. Отсюда следует, что внутри цилиндра, ограниченного вихревым слоем, движения нет, вне цилиндра движение

происходит с такой скоростью, как если бы в центре цилиндра мы имели вихревую нить интенсивности $2\pi R\Gamma$.

Введение понятия о вихревом слое дает ключ к объяснению возникновения вихрей в жидкости. По теореме Лагранжа (см. § 3 этой главы), если в начальный момент времени в идеальной жидкости не было вихрей, то их не будет во все время движения. В действительности же мы видим, что при условиях, близких к условиям теоремы Лагранжа (постоянство плотности, малая вязкость жидкости, наличие потенциала у действующих сил), вихри в жидкости возникают. Если допустить, что на поверхности тела, обтекаемого жидкостью, образуется вихревой слой, то не трудно представить себе, что при неустойчивости этого слоя от него могут отрываться вихри, как это часто имеет место в действительности при движении тела в жидкости.

§ 17. Упражнения. 1. Найти уравнение линий тока для случая двух вихрей одинаковой интенсивности.

Ответ. Приравнивая постоянной мнимую часть комплексного потенциала

$$w = \frac{\Gamma}{2\pi i}\ln(z-z_1) + \frac{\Gamma}{2\pi i}\ln(z-z_2) = \frac{\Gamma}{2\pi i}\ln\{(z-z_1)(z-z_2)\},$$

получим

$$[(x-x_1)^2+(y-y_1)^2][(x-x_2)^2+(y-y_2)^2] = \text{const},$$

т. е. уравнение лемнискат (рис. 75).

2. Найти уравнение линий тока пары вихрей, т. е. двух вихрей, интенсивности которых равны по величине, но противоположны по знаку.

Ответ. $(x-x_1)^2+(y-y_1)^2 = C[(x-x_2)^2+(y-y_2)^2]$ — семейство окружностей (рис. 76).

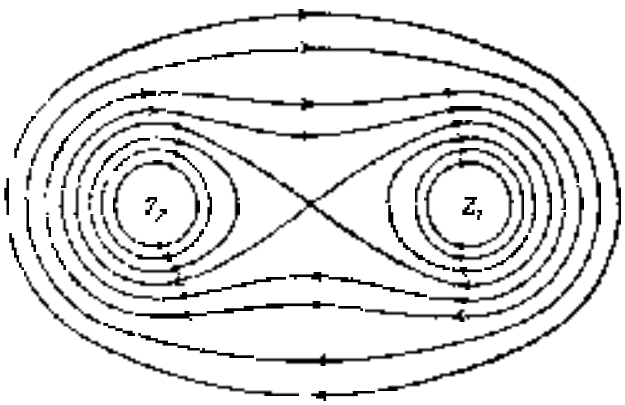

Рис. 75.

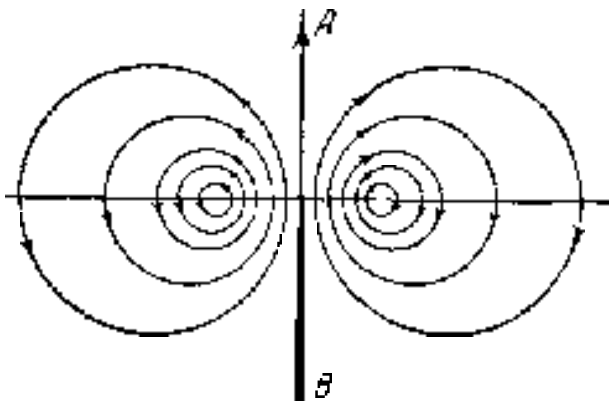

Рис. 76.

Заметим, что если прямую линию AB заменить неподвижной стенкой и половину чертежа, например левую, исключить из рассмотрения, то получим перемещение одного вихря в жидкости, вблизи стенки.

3. Имеется пара вихрей в жидкости (см. задачу 2), причем на бесконечности жидкость движется с такой скоростью, что вихри остаются неподвижными в пространстве (рис. 77). Найти линии тока, предполагая вихри расположенными в точках

$$z_1 = ih \quad \text{и} \quad z_2 = -ih.$$

Ответ. Уравнение линии тока

$$\frac{y}{h}+\ln\frac{x^2+(y-h)^2}{x^2+(y+h)^2}=\text{const}$$

Отметим, что оба вихря оказываются заключенными внутрь замкнутой линии. Область, ограниченная этой замкнутой линией, называется «атмосферой вихрей» (рис. 77).

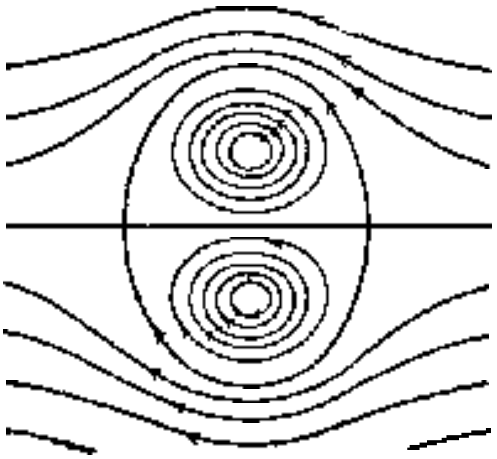

Рис. 77.

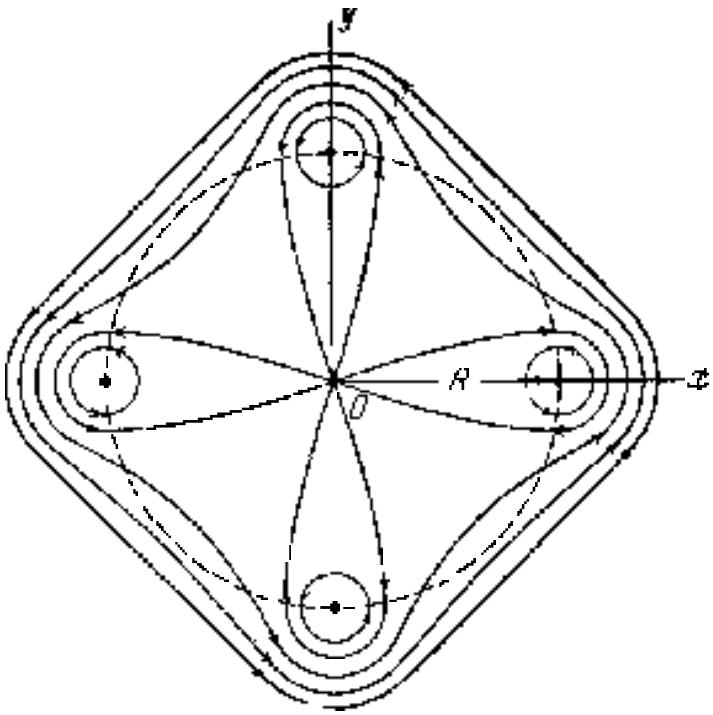

Рис. 78.

Построенные линии тока можно рассматривать как линии тока относительного движения в случае пары вихрей, именно движения относительно плоскости, перемещающейся вместе с вихрями.

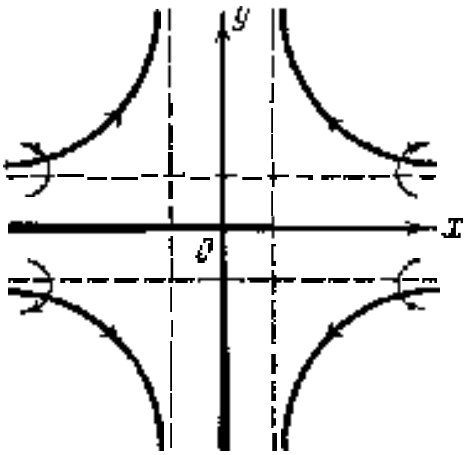

Рис. 79.

4. Дано n вихревых нитей, параллельных друг другу равноотстоящих и расположенных на круговом цилиндре радиуса R (рис. 78, где $n=4$). Найти комплексный потенциал и комплексную скорость любой точки жидкости, а также скорость перемещения вихрей.

Ответ.

$$w=\frac{\Gamma}{2\pi}\ln(z^n-R^n),$$

$$v_x-iv_y=\frac{\Gamma}{2\pi i}\frac{nz^{n-1}}{z^n-R^n}.$$

Для нахождения скорости $v_{0x}-iv_{0y}$ вихря, находящегося в точке $z=R$, преобразуем w:

$$w=\frac{\Gamma}{2\pi i}\{\ln(z-R)+\ln(z^{n-1}+Rz^{n-2}+R^2z^{n-3}+\ldots+R^{n-1})\},$$

$$v_x-iv_y=\frac{\Gamma}{2\pi i}\left\{\frac{1}{z-R}+\frac{(n-1)z^{n-2}+(n-2)z^{n-3}R+\ldots+R^{n-2}}{z^{n-1}+Rz^{n-2}+\ldots+R^{n-1}}\right\}.$$

Полагаем $z \to R$, заменяя нулем первое слагаемое, отвечающее вихрю в точке $z = R$

$$v_{1x} - iv_{1y} = \frac{\Gamma}{2\pi i}\frac{n-1}{2R} = -\frac{\Gamma(n-1)i}{4\pi R}.$$

Вихри перемещаются вдоль окружности с постоянной скоростью

$$\frac{\Gamma(n-1)}{4\pi R}.$$

5. Найти траекторию прямолинейного вихря, находящегося внутри двугранного угла образованного двумя взаимно перпендикулярными стенками (рис. 79)

Указание Пусть (x, y) – координаты данного вихря. Отразим его в осях координат, как указано на чертеже, и исследуем движение четырех вихрей.

Ответ. Уравнение траектории

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{a^2}.$$

В. ВИХРЕВЫЕ ЦЕПОЧКИ КА́РМАНА

§ 18. Введение. Первые опыты, относящиеся к исследованию вихревых явлений позади тела, движущегося в жидкости, были произведены Бенаром в 1906 г. Движущимся телом был вертикальный цилиндр Наблюдения приводят к следующим результатам.

При некоторой достаточно большой скорости, зависящей от вязкости и от ширины движущегося тела, позади цилиндра начинают отрываться вихри поочередно справа и слева. Сначала они увлекаются со скоростью тела v, затем их скорость уменьшается, и то время как вихри расходятся несколько в стороны На некотором расстоянии за телом устанавливаются определенные расстояния l между вихрями, вихри располагаются так, что между каждыми двумя вихрями одного ряда располагается вихрь другого ряда, причем вихри обоих рядов имеют противоположные вращения (рис. 80).

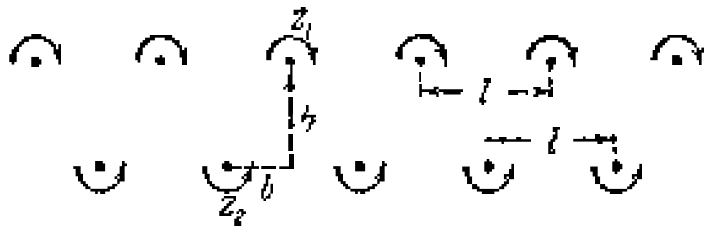

Рис 80.

Расстояние h между рядами вихрей не зависит от скорости, а зависит от ширины тела.

После Бенара аналогичные опыты проделывались целым рядом других ученых. В 1912 г. Ка́рман совместно с Рубахом дал теорию таких вихревых цепочек а также рассмотрел теоретически вопрос о сопротивлении, испытываемом цилиндром движущимся в жидкости при наличии образования цепочек вихрей. К изложению теории Ка́рмана мы и переходим.

§ 19. Одна вихревая цепочка. Рассмотрим бесконечный ряд точечных вихрей, расположенных на одной прямой на одинаковом расстоянии l друг от друга и имеющих одинаковую интенсивность Γ

Рис. 81.

Пусть имеем вихри в точках z_0, z_1, z_{-1}, z_2, z_{-2}, ... (рис. 81), тогда комплексный потенциал для любой точки жидкости, не совпадающей ни с одним из вихрей, равен сумме потенциалов отдельных вихрей

$$w = \frac{\Gamma}{2\pi i}\left\{\ln\left[\frac{(z-z_0)\pi}{l}\right] + \sum_{k=1}^{\infty}\left[\ln\left(\frac{z-z_k}{-lk}\right) + \ln\left(\frac{z-z_{-k}}{lk}\right)\right]\right\} + \text{const}$$

Мы разделили разности $z - z_k$ на $-lk$, $z - z_{-k}$ на lk и умножили $z - z_0$ на π/l, чем изменили лишь произвольную постоянную. Так как функция w определяется с точностью до аддитивной постоянной, то имеем право положить:

$$w = \frac{\Gamma}{2\pi i}\ln\left\{\frac{(z-z_0)\pi}{l}\prod_{k=1}^{\infty}\left(\frac{z_k - z}{lk}\right)\left(\frac{z-z_{-k}}{lk}\right)\right\}.$$

Так как $z_k = z_0 + lk$, $z_{-k} = z_0 - lk$, можем написать:

$$w = \frac{\Gamma}{2\pi i}\ln\left\{\frac{\pi(z-z_0)}{l}\prod_{k=1}^{\infty}\left[1 - \left(\frac{z-z_0}{lk}\right)^2\right]\right\}.$$

Применяя формулу, представляющую разложение $\sin \pi x$ в бесконечное произведение

$$\sin \pi x = \pi x \prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right),$$

найдем:

$$w = \frac{\Gamma}{2\pi i}\ln \sin\frac{\pi}{l}(z - z_0). \qquad (19.1)$$

Комплексная скорость в точке z равна сумме скоростей происходящих от каждого вихря, т. е.

$$v_x - iv_y = \frac{\Gamma}{2\pi i}\left\{\frac{1}{z-z_0} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z-z_0-kl} + \frac{1}{z-z_0+kl}\right)\right\}. \qquad (19.2)$$

Производя суммирование, придем к формуле

$$v_x - iv_y = \frac{\Gamma}{2li} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{l}(z - z_0) \qquad (19.3)$$

Проще же получить это выражение комплексной скорости, воспользовавшись тем, что скорость есть производная комплексного потенциала:

$$v_x - iv_y = \frac{dw}{dz},$$

где w определяется формулой (19.1).

Чтобы найти скорость перемещения самой вихревой цепочки, т. е. скорости каждого из вихрей ее составляющих, достаточно рассмотреть, как перемещается точка z_0, так как очевидно что все вихри должны перемещаться с одинаковой скоростью. Скорость же в точке z_0 происходит от влияния всех вихрей кроме самого вихря z_0. Поэтому в формуле (19.2) следует положить $z - z_0$ во всех членах, кроме первого, который следует отбросить. Получим что скорость вихря v_0 равна нулю, так как в формуле (19.2) при $z = z_0$ члены попарно сократятся. Таким образом, одна вихревая цепочка остается неподвижной, что можно было предвидеть, так как на точку действуют попарно вихри z_1 и z_{-1}, z_2 и z_{-2} и т. д. в противоположных направлениях.

§ 20. Две вихревые цепочки. Пусть теперь имеем две параллельные цепочки вихрей, причем расстояние между двумя соседними вихрями для обеих цепочек равно l, интенсивности же цепочек у верхней Γ_1, у нижней Γ_2; расстояние между цепочками пусть будет h. Один из вихрей верхнего ряда пусть будет z_1, ближайший к нему из нижнего ряда z_2. Очевидно, что для комплексного потенциала будем иметь:

$$w = \frac{\Gamma_1}{2\pi i} \ln \sin \frac{\pi}{l}(z - z_1) + \frac{\Gamma_2}{2\pi i} \ln \sin \frac{\pi}{l}(z - z_2),$$

комплексная же скорость в точке z равна

$$v_x - iv_y = \frac{dw}{dz} = \frac{\Gamma_1}{2li} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{l}(z - z_1) + \frac{\Gamma_2}{2li} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{l}(z - z_2).$$

Выясним как будут перемещаться в жидкости рассматриваемые вихревые цепочки. Очевидно, что все вихри первой цепочки будут двигаться с одинаковой скоростью, также все вихри второй цепочки должны перемещаться одинаково. Поэтому каждую цепочку можно рассматривать как одно целое, и достаточно исследовать скорости двух вихрей, например z_1 и z_2. Вихрь z_1 будет перемещаться лишь под влиянием второй цепочки, так как одна цепочка, как мы видели,

не перемещается. Следовательно, скорость $v_{1x} - iv_{1y}$ вихря z_1 получим, выкинув первый член в выражении $v_x - iv_y$ и положив $z = z_1$ во втором члене:

$$v_{1x} - iv_{1y} = \frac{\Gamma_2}{2li} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{l}(z_1 - z_2) \qquad (20.1)$$

Аналогично для вихря z_2 будем иметь:

$$v_{2x} - iv_{2y} = -\frac{\Gamma_1}{2li} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{l}(z_1 - z_2). \qquad (20.2)$$

Таковы скорости цепочек. Мы не будем исследовать законов перемещения цепочек в общем случае, а рассмотрим лишь наиболее интересный для нас случай «твердых» цепочек, т. е. цепочек, для которых расстояния между всеми вихрями остаются неизменными во все время движения. Очевидно, для «твердости» цепочек необходимо, чтобы скорости их были одинаковы:

$$v_{1x} - iv_{1y} = v_{2x} - iv_{2y}.$$

Сравнивая (20.1) и (20.2) находим что для этого должно выполняться соотношение

$$\Gamma_2 = -\Gamma_1,$$

т. е. интенсивности цепочек должны быть одинаковы по величине и противоположны по знаку. Мы будем в дальнейшем писать Γ вместо Γ_1. Далее положим что цепочки перемещаются параллельно оси Ox, что соответствует картине, имеющей место в действительности, позади движущегося вдоль оси Ox цилиндра.

В этом случае

$$v_{1y} = v_{2y} = 0$$

Положим $z_1 - z_2 = b - hi$. Отделяя вещественную и мнимую части $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{l}(b + hi)$, имеем:

$$\operatorname{ctg} \frac{\pi}{l}(b + hi) = \frac{\sin \frac{2\pi b}{l}}{\operatorname{ch} \frac{2\pi h}{l} - \cos \frac{2\pi b}{l}} - \frac{i \operatorname{sh} \frac{2\pi h}{l}}{\operatorname{ch} \frac{2\pi h}{l} - \cos \frac{2\pi b}{l}},$$

где

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}; \qquad \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x};$$

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \qquad \operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}.$$

Следовательно

$$\left.\begin{aligned} v_{1x} &= v_{2x} = \frac{\Gamma}{2l}\,\frac{\operatorname{sh}\dfrac{2\pi a}{l}}{\operatorname{ch}\dfrac{2\pi h}{l} - \cos\dfrac{2\pi b}{l}}, \\ v_{1y} &= v_{2y} = -\frac{\Gamma}{2l}\,\frac{\sin\dfrac{2\pi b}{l}}{\operatorname{ch}\dfrac{2\pi h}{l} - \cos\dfrac{2\pi b}{l}}. \end{aligned}\right\} \tag{20.3}$$

Так как по условию $v_{1y} = v_{2y} = 0$, то необходимо

$$\sin\frac{2\pi b}{l} = 0,$$

откуда или $b = 0$ или $b = l/2$. В первом случае получаем расположение цепочек, называемое *симметричным*: под каждым вихрем одного ряда имеется вихрь другого ряда; во втором случае имеем шахматное расположение вихрей т. е. такое, в котором между каждыми двумя вихрями первого ряда находится вихрь другого ряда (рис 82). Шахматное расположение отвечает картине вихрей, образующихся позади цилиндра (см § 18)

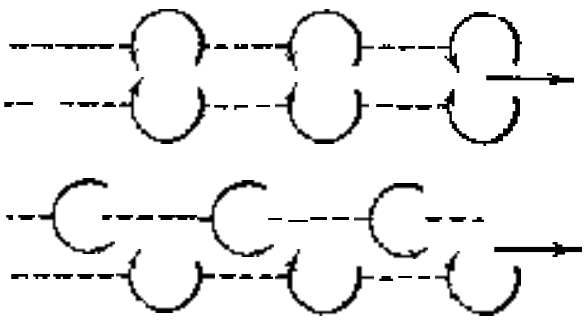

Рис 82

Нетрудно видеть, что скорости перемещения цепочек будут:

$$\left.\begin{aligned} v_{1x} &= \frac{\Gamma}{2l}\operatorname{cth}\frac{\pi h}{l} \text{ — для симметричного порядка,} \\ v_{1x} &= \frac{\Gamma}{2l}\operatorname{th}\frac{\pi h}{l} \text{ — для шахматного порядка.} \end{aligned}\right\} \tag{20.4}$$

В дальнейшем под цепочками Кармана мы будем понимать две цепочки, расположенные в симметричном или шахматном порядке

§ 21. Об устойчивости вихревых цепочек Кармана. Пусть имеем кармановские цепочки вихрей. Может случиться, что под влиянием каких-то воздействий все или некоторые вихри получат малые смещения. Тогда может оказаться, что вихри с течением времени будут оставаться вблизи тех положений, которые они имели бы, если бы двигались, не подвергаясь смещениям. В этом случае говорят, что движение *устойчиво*. Если же смещенные вихри будут удаляться от положений, отвечающих невозмущенному состоянию, то движение называется *неустойчивым*.

При таком общем определении устойчивости легко без всяких вычислений установить неустойчивость вихревых цепочек Кармана. В самом деле, сместим все вихри одной из цепочек, например верхней, на одну и ту же малую величину $\delta = \beta + i\gamma$. Тогда разность $z_1 - z_2 = b + ih$ увеличится на

эту же самую величину β, т. е. b увеличится на β, а h на γ. Поэтому скорости всех вихрей обеих цепочек будут определяться формулами (20.3), в которых надо заменить b на $b+\beta$ и h на $h+\gamma$. А тогда ясно, что по крайней мере одна из величин v_x и v_y изменит свое значение и, следовательно, все вихри будут удаляться с малыми, но постоянными скоростями от положений, отвечающих невозмущенному состоянию, так что движение оказывается неустойчивым.

Мы сузим поэтому определение устойчивости, а именно, мы будем называть движение устойчивым, если при малых смещениях вихрей в начальный момент времени расстояние между любыми двумя вихрями во все время движения остается близким к расстоянию между этими вихрями в начальный момент времени.

Докажем сначала неустойчивость одной вихревой цепочки. Пусть мы имеем вихри одинаковой интенсивности Γ, расположенные на одной прямой, на одинаковом расстоянии l друг от друга (рис. 81). Разобьем все эти вихри на две группы: группу четных вихрей и группу нечетных вихрей. Всем четным вихрям $\ldots, z_{-4}, z_{-2}, z_0, z_2, z_4, \ldots$ придадим одно и то же смещение, а все нечетные вихри $\ldots, z_{-3}, z_{-1}, z_1, z_3, \ldots$ оставим на их местах.

У нас образуются тогда две цепочки вихрей, в каждой из которых расстояние между двумя последовательными вихрями равно $2l$. Движение этих цепочек вихрей будет определяться формулами (20.1) и (20.2), в которых надо заменить l на $2l$ и в которых надо положить $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma$:

$$\left.\begin{aligned} v_{1x} - iv_{1y} &= \overline{\frac{dz_1}{dt}} = \frac{1}{4il}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2l}(z_1 - z_2), \\ v_{2x} - iv_{2y} &= \frac{dz_2}{dt} = -\frac{\Gamma}{4il}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2l}(z_1 - z_2) \end{aligned}\right\} \tag{21.1}$$

Введем обозначение

$$\frac{\pi}{2l}(z_2 - z_1) = \zeta,$$

тогда, вычитая из второго равенства (21.1) первое, придем к уравнению

$$\frac{d\zeta}{dt} = -\frac{\Gamma\pi}{4l^2 i}\operatorname{ctg}\zeta.$$

Заменяя в этом равенстве все величины на комплексно-сопряженные величины, получим

$$\frac{d\bar{\zeta}}{dt} = -\frac{\Gamma\pi}{4l^2 i}\operatorname{ctg}\bar{\zeta}.$$

Исключая из этих двух равенств время t, найдем соотношение

$$\frac{d\bar{\zeta}}{d\zeta} = -\frac{\operatorname{ctg}\bar{\zeta}}{\operatorname{ctg}\zeta} \quad \text{или} \quad \operatorname{ctg}\bar{\zeta}\,d\bar{\zeta} + \operatorname{ctg}\zeta\,d\zeta = 0.$$

Интегрируя это уравнение, получаем

$$\ln\sin\bar{\zeta} + \ln\sin\zeta = \ln C \quad \text{или} \quad \sin\zeta\sin\bar{\zeta} = C. \tag{21.2}$$

Если $\zeta = \xi + i\eta$, то

$$\sin\zeta = \sin\xi\operatorname{ch}\eta + i\cos\xi\operatorname{sh}\eta; \quad \sin\bar{\zeta} = \sin\xi\operatorname{ch}\eta - i\cos\xi\operatorname{sh}\eta,$$

поэтому уравнение (21.2) переходит в

$$\sin^2\xi\operatorname{ch}^2\eta + \cos^2\xi\operatorname{sh}^2\eta = C \quad \text{или} \quad \sin^2\xi + \operatorname{sh}^2\eta = C. \tag{21.3}$$

Общий вид этих кривых представлен на рис 83.

При равновесном положении вихрь z_2 лежит как раз по середине между z_1 и z_3, т. е. в точке пересечения двух линий семейства (21.3), отделяющих область незамкнутых линий этого семейства от области замкнутых линий. Если вихрь z_2 смещается в область незамкнутых кривых, то он будет постепенно удаляться от вихря z_1 по одной из этих незамкнутых кривых. Если же вихрь z_2 смещается в область замкнутых кривых, то он будет описывать замкнутую траекторию около вихря z_1 или z_3, притом конечных размеров, хотя бы первоначальное смещение вихря z_2 было очень мало. Таким образом одна вихревая цепочка является неустойчивой. Перейдем теперь к вопросу об устойчивости вихревых цепочек Кármана.

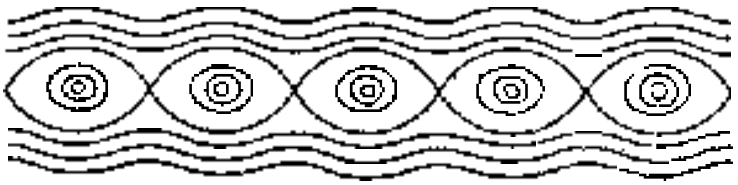

Рис 83

Разобьем все вихри цепочек на группы по четыре вихря в каждой группе. Пусть основная группа содержит вихри z_1, z_2, z_3, z_4. придадим этим вихрям смещения δz_1, δz_2, δz_3, δz_4. Следующей группе четырех вихрей придадим соответственно такие же смещения и т. д. Тогда можем разбить наши две цепочки на четыре: одна будет состоять из вихрей: z_1, z_{-3}, z_5, z_{-7}, z_9, . . , другая — из вихрей: z_3, z_{-1}, z_7, z_{-5}, . . , третья — из вихрей: z_2, z_{-2}, z_6, z_{-6}, z_{10}, . . , и четвертая — из вихрей z_4, z_0, z_8, z_{-4}, z_{12}, . . (рис 84)

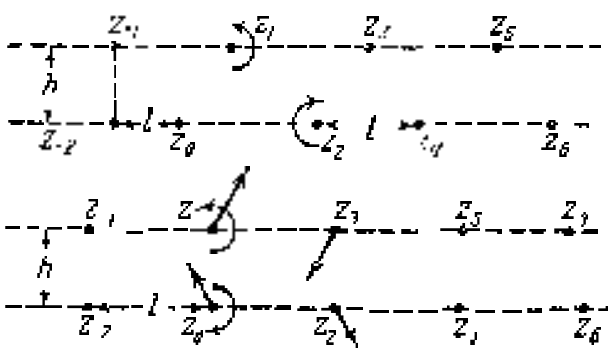

Рис 84.

Расстояние между двумя соседними вихрями каждой из четырех цепочек теперь будет $2l$. Комплексный потенциал представим в виде суммы четырех слагаемых, соответствующих каждой из четырех цепочек:

$$w = \frac{\Gamma}{2\pi i}\ln\sin\frac{\pi}{2l}(z-z_1)+\frac{1}{2\pi i}\ln\sin\frac{\pi}{2l}(z-z_3)-$$

$$-\frac{\Gamma}{2\pi i}\ln\sin\frac{\pi}{2l}(z-z_2)-\frac{\Gamma}{2\pi i}\ln\sin\frac{\pi}{2l}(z-z_4). \quad (21.4)$$

Тогда комплексная скорость будет:

$$\frac{dz}{dt}=\frac{dw}{dz}=v_x-iv_y=$$

$$=\frac{\Gamma}{4li}\left\{\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2l}(z-z_1)+\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2l}(z-z_3)-\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2l}(z-z_2)-\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2l}(z-z_4)\right\}.$$

Подставляя в эту формулу вместо z соответственно z_1, z_2, z_3 и z_4 и выбрасывая каждый раз из рассмотрения слагаемые, которые обращаются в бесконечность, т. е. $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2l}(z-z_1)$ для первого вихря, и т. д., найдем

скорости цепочек

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d\bar{z}_1}{dt} &= \frac{\Gamma}{4li}\left\{\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2l}(z_1-z_3)-\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2l}(z_1-z_2)-\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2l}(z_1-z_4)\right\},\\
\frac{d\bar{z}_2}{dt} &= \frac{\Gamma}{4li}\left\{\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2l}(z_2-z_1)+\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2l}(z_2-z_3)-\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2l}(z_2-z_4)\right\},\\
\frac{d\bar{z}_3}{dt} &= \frac{\Gamma}{4li}\left\{\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2l}(z_3-z_1)-\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2l}(z_3-z_2)-\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2l}(z_3-z_4)\right\},\\
\frac{d\bar{z}_4}{dt} &= \frac{\Gamma}{4li}\left\{\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2l}(z_4-z_1)+\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2l}(z_4-z_3)-\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2l}(z_4-z_2)\right\}
\end{aligned}\right\} \quad (21.5)$$

Дадим теперь нашим вихрям соответственно смещения δz_1, δz_2, δz_3, δz_4.

Для того чтобы получить дифференциальные уравнения для этих смещений возьмем дифференциалы левых и правых частей уравнений (21.5) (вводим для дифференциала знак δ, чтобы отличать от уже имеющегося дифференциала d). Замечая, что $\delta\left(\frac{d\bar{z}}{dt}\right)=\frac{d\,\delta\bar{z}}{dt}$, из (21.5) получаем дифференциальные уравнения смещений

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d\,\delta\bar{z}_1}{dt} &= -\frac{\Gamma\pi}{8l^2i}\left\{-\frac{\delta z_1-\delta z_3}{\sin^2\frac{\pi}{2l}(z_1-z_3)}+\frac{\delta z_1-\delta z_2}{\sin^2\frac{\pi}{2l}(z_1-z_2)}-\frac{\delta z_1-\delta z_4}{\sin^2\frac{\pi}{2l}(z_1-z_4)}\right\},\\
\frac{d\,\delta z_2}{dt} &= -\frac{\Gamma\pi}{8l^2i}\left\{-\frac{\delta z_2-\delta z_1}{\sin^2\frac{\pi}{2l}(z_2-z_1)}+\frac{\delta z_2-\delta z_3}{\sin^2\frac{\pi}{2l}(z_2-z_3)}-\frac{\delta z_2-\delta z_4}{\sin^2\frac{\pi}{2l}(z_2-z_4)}\right\},\\
\frac{d\,\delta z_3}{dt} &= -\frac{\Gamma\pi}{8l^2i}\left\{\frac{\delta z_3-\delta z_1}{\sin^2\frac{\pi}{2l}(z_3-z_1)}-\frac{\delta z_3-\delta z_2}{\sin^2\frac{\pi}{2l}(z_3-z_2)}-\frac{\delta z_3-\delta z_4}{\sin^2\frac{\pi}{2l}(z_3-z_4)}\right\},\\
\frac{d\,\delta\bar{z}_4}{dt} &= -\frac{\Gamma\pi}{8l^2i}\left\{\frac{\delta z_4-\delta z_1}{\sin^2\frac{\pi}{2l}(z_4-z_1)}+\frac{\delta z_4-\delta z_3}{\sin^2\frac{\pi}{2l}(z_4-z_3)}-\frac{\delta z_4-\delta z_2}{\sin^2\frac{\pi}{2l}(z_4-z_2)}\right\}
\end{aligned}\right\} \quad (21.6)$$

В начальный момент имеем у синусов такие значения аргументов:

$$\frac{\pi}{2l}(z_1-z_2)=\frac{\pi}{2l}(b+hi)=\alpha,$$

$$\frac{\pi}{2l}(z_1-z_3)=-\frac{\pi}{2l}\,l=-\frac{\pi}{2},$$

$$\frac{\pi}{2l}(z_1-z_4)=\frac{\pi}{2l}(b-l+hi)=-\frac{\pi}{2}+\alpha,$$

$$\frac{\pi}{2l}(z_2-z_3)=-\frac{\pi}{2l}(b+hi+l)=-\frac{\pi}{2}-\alpha,$$

$$\frac{\pi}{2l}(z_2-z_4)=-\frac{\pi}{2},$$

$$\frac{\pi}{2l}(z_3-z_4)=\alpha,$$

где

$$\alpha = \frac{\pi}{2l}(b - hi)$$

Для симметричного расположения цепочек $b = 0$, для шахматного $b = \frac{l}{2}$

Подставляя выписанные значения аргументов в (21.6) и группируя члены с δz_1, δz_2, δz_3 и δz_4, получим

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d\,\delta\bar{z}_1}{dt} &= -\frac{\Gamma}{8l^2}\left\{\left(1 - \frac{1}{\sin^2\alpha} - \frac{1}{\cos^2\alpha}\right)\delta z_1 + \frac{\delta z_2}{\sin^2\alpha} - \delta z_3 - \frac{\delta z_4}{\cos^2\alpha}\right\},\\
\frac{d\,\delta\bar{z}_2}{dt} &= -\frac{\Gamma}{8l^2}\left\{\frac{\delta z_1}{\sin^2\alpha} - \left(1 + \frac{1}{\sin^2\alpha} + \frac{1}{\cos^2\alpha}\right)\delta z_2 - \frac{\delta z_3}{\cos^2\alpha} - \delta z_4\right\},\\
\frac{d\,\delta\bar{z}_3}{dt} &= -\frac{\Gamma}{8l^2}\left\{-\delta z_1 + \frac{\delta z_2}{\cos^2\alpha} + \left(1 - \frac{1}{\cos^2\alpha} - \frac{1}{\sin^2\alpha}\right)\delta z_3 + \frac{\delta z_4}{\sin^2\alpha}\right\},\\
\frac{d\,\delta\bar{z}_4}{dt} &= -\frac{\Gamma}{8l^2}\left\{-\frac{\delta z_1}{\cos^2\alpha} - \delta z_2 - \frac{\delta z_3}{\sin^2\alpha} - \left(1 - \frac{1}{\cos^2\alpha} - \frac{1}{\sin^2\alpha}\right)\delta z_4\right\}
\end{aligned}\right\} \quad (21.7)$$

Для упрощения решения задачи сделаем дополнительное предположение о характере смещений основной конфигурации из четырех вихрей. Именно допустим, что $\delta z_3 = -\delta z_1$, $\delta z_4 = -\delta z_2$, т. е. что смещения нечетных вихрей одинаковы по величине противоположны по направлению и смещения четных вихрей обладают тем же свойством.

Нетрудно проверить, что уравнения (21.7) остаются справедливыми при этом предположении, причем уравнения третье и четвертое совпадают соответственно с первым и вторым. Остается, таким образом, система двух уравнений например двух первых в которых принято $\delta z_3 = -\delta z_1$, $\delta z_4 = -\delta z_2$:

$$\frac{d\,\delta\bar{z}_1}{dt} = -\frac{\Gamma}{8l^2}(A\,\delta z_1 + B\,\delta z_2), \qquad \frac{d\,\delta\bar{z}_2}{dt} = \frac{\Gamma}{8l^2}(B\,\delta z_1 - A\,\delta z_2), \quad (21.8)$$

где

$$A = 2 - \frac{1}{\sin^2\alpha} - \frac{1}{\cos^2\alpha}, \qquad B = \frac{1}{\sin^2\alpha} - \frac{1}{\cos^2\alpha}.$$

Выражения A и B можно преобразовать к тригонометрическим функциям двойного угла. Тогда получим

$$A = 2 - \frac{4}{(\sin 2\alpha)^2}; \qquad B = \frac{4\cos 2\alpha}{(\sin 2\alpha)^2}.$$

Вспоминая что для симметричного расположения $b = 0$ и, следовательно, $2\alpha = \frac{2\pi}{2l}(b + hi) = \frac{\pi h}{l}i$, а для шахматного $b = \frac{l}{2}$, т. е. $2\alpha = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi h}{l}i$, получим

Симметричное расположение	Шахматное расположение
$A = 2 - \frac{4}{\left(\sin\frac{\pi h}{l}i\right)^2} = 2 + \frac{1}{\left(\operatorname{sh}\frac{\pi h}{l}\right)^2}$,	$A = 2 - \frac{4}{\left(\cos\frac{\pi h}{l}i\right)^2} = 2 - \frac{4}{\left(\operatorname{ch}\frac{\pi h}{l}\right)^2}$,
$B = \frac{4\cos\frac{\pi h}{l}i}{\left(\sin\frac{\pi h}{l}i\right)^2} = -\frac{4\operatorname{ch}\frac{\pi h}{l}}{\left(\operatorname{sh}\frac{\pi h}{l}\right)^2}$,	$B = \frac{-4\sin\frac{\pi h}{l}i}{\left(\cos\frac{\pi h}{l}i\right)^2} = -\frac{4i\operatorname{sh}\frac{\pi h}{l}}{\left(\operatorname{ch}\frac{\pi h}{l}\right)^2} = Di$

Таким образом, для симметричного расположения A и B оказываются вещественными, для шахматного: A — вещественным, B — мнимым. В последнем выражении мы выделили множитель i, обозначая

$$D = -\frac{4\operatorname{sh}\frac{\pi h}{l}}{\left(\operatorname{ch}\frac{\pi h}{l}\right)^2}.$$

Будем теперь писать параллельно формулы для симметричного и шахматного расположений. Прежде всего, перепишем (21.8).

Симметричное расположение	Шахматное расположение
$\frac{d\,\delta\bar{z}_1}{dt} = \frac{\Gamma\pi}{8l^2}(A\,\delta z_1 + B\,\delta z_2),$	$\frac{d\,\delta\bar{z}_1}{dt} = \frac{\Gamma\pi}{8l^2}(iA\,\delta z_1 - D\,\delta z_2),$
$\frac{d\,\delta\bar{z}_2}{dt} = -\frac{\Gamma\pi}{8l^2}(B\,\delta z_1 + A\,\delta z_2)$	$\frac{d\,\delta\bar{z}_2}{dt} = \frac{\Gamma\pi}{8l^2}(D\,\delta z_1 - iA\,\delta z_2).$

Напишем теперь системы дифференциальных уравнений для смещений в вещественной форме. Для этого положим:

$$\delta z_1 = \delta x_1 + i\,\delta y_1 = \xi_1 + i\eta_1, \quad \delta z_2 = \delta x_2 + i\,\delta y_2 = \xi_2 + i\eta_2$$

и отделим в последних дифференциальных уравнениях вещественную часть от мнимой. Получим системы четырех уравнений:

Симметричное расположение	Шахматное расположение
$\frac{d\xi_1}{dt} = -k(A\eta_1 - B\eta_2),$	$\frac{d\xi_1}{dt} = -k(A\eta_1 + D\xi_2),$
$\frac{d\xi_2}{dt} = k(B\eta_1 + A\eta_2)$	$\frac{d\xi_2}{dt} = k(D\xi_1 + A\eta_2)$
$\frac{d\eta_1}{dt} = -k(A\xi_1 + B\xi_2),$	$\frac{d\eta_1}{dt} = -k(A\xi_1 - D\eta_2),$
$\frac{d\eta_2}{dt} = k(B\xi_1 + A\xi_2),$	$\frac{d\eta_2}{dt} = -k(D\eta_1 - A\eta_2),$

где

$$k = \frac{\Gamma\pi}{8l^2}.$$

Будем искать частные решения полученных систем линейных уравнений с постоянными коэффициентами в виде показательных функций:

$$\xi_1 = Me^{\omega t}, \quad \xi_2 = Ne^{\omega t}, \quad \eta_1 = Pe^{\omega t}, \quad \eta_2 = Qe^{\omega t},$$

где M, N, P, Q — постоянные.

Составим производные

$$\frac{d\xi_1}{dt} = \omega Me^{\omega t} \ldots$$

и подставим в уравнения выражения для $\xi_1, \ldots, \frac{d\xi_1}{dt}, \ldots$

Сокращая затем все уравнения на $e^{\omega t}$, получим системы алгебраических уравнений

Симметричное расположение	Шахматное расположение
$\omega M + kAP + kBQ = 0,$	$\omega M + kDN + kAP = 0,$
$\omega N - kBP - kAQ = 0,$	$-kDM + \omega N - kAQ = 0,$
$kAM + kBN + \omega P = 0,$	$kAM + \omega P - kDQ = 0,$
$-kBM - kAN + \omega Q = 0.$	$-kAN + kDP + \omega Q = 0$

Как известно для того чтобы система однородных относительно M, N, P, Q уравнений была совместна, необходимо равенство нулю определителя четвертого порядка, составленного из коэффициентов при M, N, P, Q.

Будем поэтому иметь

Симметричное расположение

$$\begin{vmatrix} \omega & 0 & kA & kB \\ 0 & \omega & -kB & -kA \\ kA & kB & \omega & 0 \\ -kB & -kA & 0 & \omega \end{vmatrix} = 0$$

Шахматное расположение

$$\begin{vmatrix} \omega & kD & kA & 0 \\ -kD & \omega & 0 & -kA \\ kA & 0 & \omega & -kD \\ 0 & -kA & kD & \omega \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая эти определители и располагая их по степеням ω, получим такие биквадратные уравнения

$$\omega^4 - 2k^2(A^2 - B^2)\omega^2 + k^4(A^2 - B^2)^2 = 0$$

для симметричного расположения и

$$\omega^4 - 2k^2(A^2 - D^2)\omega^2 + k^4(A^2 + D^2)^2 = 0$$

для шахматного расположения.

Корни этих уравнений

$$\omega = \pm k\sqrt{A^2 - B^2} - = 2k$$

для симметричного расположения,

$$\omega = \pm k(A \perp Di)$$

для шахматного расположения.

Для симметричного порядка существуют частные решения которые содержат функцию e^{2ht}

При возрастании t смещения возрастают, следовательно, имеем *неустойчивость* движения.

Что касается шахматного расположения, то для него получаем частные решения, содержащие функции

$$e^{+kAt}\cos kDt \quad \text{и} \quad e^{\pm kAt}\sin kDt.$$

Показательные функции с положительным показателем возрастают с возрастанием t, что указывает на неустойчивость расположения в общем случае.

Единственный случай, когда возможна устойчивость движения, требует обращения величины A в нуль:

$$A = 2 - \frac{4}{\operatorname{ch}^2 \frac{\pi h}{l}} = 0, \quad \text{откуда} \quad \operatorname{ch}\frac{\pi h}{l} = \sqrt{2}. \tag{21.9}$$

Это и есть полученное Карманом *условие устойчивости*. Оно дает зависимость между величинами h и l, т. е. расстоянием между цепочками и расстоянием между двумя соседними вихрями каждой цепочки. Именно, из (21.9) можно путем вычисления найти следующее приближенное значение

$$\frac{h}{l} = 0{,}2806 \tag{21.10}$$

Это значение очень близко к данным полученным в опытах с движением цилиндра в воде.

Покажем теперь, что и при выполнении условия (21.9) получается неустойчивость движения. Для этого нужно провести более точное исследование, аналогичное тому, которое мы проделали в начале параграфа для случая одной цепочки вихрей. Будем исходить из системы уравнений (21.5), определяющей z_1, z_2, z_3, z_4 и функции времени, т. е определяющей движение всех четырех цепочек вихрей. По формуле (20.1) невозмущенные цепочки вихрей двигаются со скоростью

$$v_1 = \frac{1}{2l}\operatorname{th}\frac{\pi h}{l}.$$

Введем теперь обозначения

$$z_{10} = \frac{l}{4} + \frac{ih}{2},\quad z_{20} = -\frac{l}{4} - \frac{ih}{2},\quad z_{30} = \frac{5l}{4} + \frac{ih}{2},\quad z_{40} = \frac{3l}{4} - \frac{ih}{2}$$

и будем считать, что в начальный момент $t = 0$ вихри z_1, z_2, z_3, z_4 лежат соответственно вблизи точек z_{10}, z_{20}, z_{30}, z_{40}. Положим теперь

$$z_k = \frac{1}{2l}\operatorname{th}\frac{\pi h}{l} + z_{k0} - \frac{2l}{\pi}\zeta_k,\quad \tau = \frac{\Gamma\pi}{8l^2},\quad \frac{\pi h}{2l} = H, \tag{21.11}$$

где ζ_k суть безразмерные смещения вихрей относительно тех положений, которые они имеют в невозмущенном движении, а τ — безразмерное время; тогда уравнения (21.5) примут вид

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d\bar{\zeta}_1}{d\tau} &= i\left\{\operatorname{tg}(\zeta_1 - \zeta_3) + \operatorname{ctg}\left(\zeta_1 - \zeta_2 - \frac{\pi}{4} + iH\right) + \right.\\
&\qquad \left. + \operatorname{ctg}\left(\zeta_1 - \zeta_4 - \frac{\pi}{4} + iH\right)\right\} - 2\operatorname{th} 2H,\\
\frac{d\bar{\zeta}_2}{d\tau} &= i\left\{\operatorname{tg}(\zeta_2 - \zeta_4) + \operatorname{ctg}\left(\zeta_1 - \zeta_2 - \frac{\pi}{4} + iH\right) + \right.\\
&\qquad \left. + \operatorname{ctg}\left(\zeta_3 - \zeta_2 + \frac{3\pi}{4} + iH\right)\right\} - 2\operatorname{th} 2H,\\
\frac{d\bar{\zeta}_3}{d\tau} &= i\left\{\operatorname{tg}(\zeta_3 - \zeta_1) + \operatorname{ctg}\left(\zeta_3 - \zeta_2 + \frac{3\pi}{4} + iH\right) + \right.\\
&\qquad \left. + \operatorname{ctg}\left(\zeta_3 - \zeta_4 + \frac{\pi}{4} + iH\right)\right\} - 2\operatorname{th} 2H,\\
\frac{d\bar{\zeta}_4}{d\tau} &= i\left\{\operatorname{ctg}\left(\zeta_1 - \zeta_4 - \frac{\pi}{4} + iH\right) + \operatorname{ctg}\left(\zeta_3 - \zeta_4 + \frac{\pi}{4} + iH\right) - \right.\\
&\qquad \left. - \operatorname{tg}(\zeta_2 - \zeta_4)\right\} - 2\operatorname{th} 2H.
\end{aligned}\right\} \tag{21.12}$$

Легко видеть, что

$$\frac{d(\bar{\zeta}_1 - \bar{\zeta}_2 + \bar{\zeta}_3 - \zeta_4)}{d\tau} = 0$$

и, следовательно,

$$\bar{\zeta}_1 - \zeta_2 + \zeta_3 - \zeta_4 = \text{const} \tag{21.13}$$

Постоянная определяется по начальным значениям величин ζ_1, ζ_2, ζ_3, ζ_4. Предположим последние такими, что эта постоянная обратится в нуль. Тогда во все время движения будет выполняться равенство

$$\bar{\zeta}_1 - \zeta_2 - \zeta_3 - \zeta_4 = 0 \tag{21.14}$$

В силу (21.11) это означает, что

$$z_1 - z_2 + z_3 - z_4 = z_{10} - z_{20} + z_{30} - z_{40} = l + 2ih,$$

в частности, будет выполняться равенство

$$\frac{y_1 + y_3}{2} - \frac{y_2 + y_4}{2} = h,$$

показывающее, что среднее расстояние между вихрями верхней и нижней цепочек таково же, как и в случае невозмущенного движения.

Рассмотрим теперь тот частный случай, когда выполняется условие Кармана, так что

$$\operatorname{sh} 2H = 1, \quad \operatorname{ch} 2H = \sqrt{2}, \tag{21.15}$$

вводя обозначения

$$2(\zeta_2 - \zeta_1) = \alpha, \quad 2(\zeta_4 - \zeta_1) = \beta \tag{21.16}$$

из (21.12), пользуясь еще (21.14), получим

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\bar{\alpha}}{d\tau} &= 4i \sin^2\left(\frac{1}{\cos\alpha - \cos\beta} - \frac{1}{\cos\beta - 1}\right), \\ \frac{d\beta}{d\tau} &= 4i \sin^2\left(\frac{1}{\cos\alpha + \cos\beta} - \frac{1}{\cos\alpha + 1}\right) \end{aligned}\right\} \tag{21.17}$$

Положим

$$\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2, \quad \beta = \beta_1 + i\beta_2 \tag{21.18}$$

и

$$F = 4 \ln \left| \frac{(\cos\alpha + 1)(\cos\beta - 1)}{\cos\alpha + \cos\beta} \right|, \tag{21.19}$$

тогда предыдущую систему можно записать в виде

$$\frac{d\alpha_1}{d\tau} = \frac{\partial F}{\partial \beta_2}, \quad \frac{d\alpha_2}{d\tau} = -\frac{\partial F}{\partial \beta_1}, \quad \frac{d\beta_1}{d\tau} = \frac{\partial F}{\partial \alpha_2}, \quad \frac{d\beta_2}{d\tau} = -\frac{\partial F}{\partial \alpha_1}. \tag{21.20}$$

Эта система имеет очевидным первый интеграл

$$F = \text{const}, \tag{21.21}$$

Разложим F в ряд Тейлора

$$\begin{aligned} F = -2\alpha_1\alpha_2 + 2\beta_1\beta_2 + \frac{1}{8}\alpha_1^4 - \frac{2}{3}\alpha_1^3\alpha_2 - \frac{3}{4}\alpha_1^2\alpha_2^2 + \frac{2}{3}\alpha_1\alpha_2^3 + \frac{1}{8}\alpha_2^4 + \\ - \frac{1}{4}(\alpha_1^2 - \alpha_2^2)(\beta_1^2 - \beta_2^2) - \alpha_1\alpha_2\beta_1\beta_2 - \frac{1}{8}\beta_1^4 + \\ + \frac{2}{3}\beta_1^3\beta_2 - \frac{3}{4}\beta_1^2\beta_2^2 - \frac{2}{3}\beta_1\beta_2^3 - \frac{1}{8}\beta_2^4 + \dots \end{aligned} \tag{21.22}$$

Система уравнений (21.20) принимает вид

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d\alpha_1}{d\tau} &= 2\beta_1 - \frac{1}{2}\beta_2(\alpha_1^2 - \alpha_2^2) - \alpha_1\alpha_2\beta_1 + \\
&\quad + \frac{2}{3}\beta_1^3 - \frac{3}{2}\beta_1^2\beta_2 - 2\beta_1\beta_2^2 + \frac{1}{2}\beta_2^3 + \dots, \\
\frac{d\alpha_2}{d\tau} &= 2\beta_2 - \frac{1}{2}\beta_1(\alpha_1^2 - \alpha_2^2) + \alpha_1\alpha_2\beta_2 - \frac{1}{2}\beta_1^3 - 2\beta_1^2\beta_2 + \\
&\quad + \frac{3}{2}\beta_1\beta_2^2 + \frac{2}{3}\beta_2^3 + \dots, \\
\frac{d\beta_1}{d\tau} &= -2\alpha_1 - \frac{2}{3}\alpha_1^3 - \frac{3}{2}\alpha_1^2\alpha_2 + 2\alpha_1\alpha_2^2 + \\
&\quad + \frac{1}{2}\alpha_2^3 - \frac{1}{2}\alpha_2(\beta_1^2 - \beta_2^2) - \alpha_1\beta_1\beta_2 - \dots, \\
\frac{d\beta_2}{d\tau} &= 2\alpha_2 - \frac{1}{2}\alpha_1^3 + 2\alpha_1^2\alpha_2 + \frac{3}{2}\alpha_1\alpha_2^2 - \frac{2}{3}\alpha_2^3 - \\
&\quad - \frac{1}{2}\alpha_1(\beta_1^2 - \beta_2^2) + \alpha_2\beta_1\beta_2 + \dots,
\end{aligned}\right\} \qquad (21.23)$$

где невыписанные члены — степени не ниже пятой от α_1, α_2, β_1, β_2.

Как было указано в начале параграфа, мы считаем вихревые цепочки неустойчивыми, если можно указать сколь угодно малые начальные смещения вихрей, такие, что при дальнейшем движении расстояние между двумя вихрями будет отличаться на конечную величину от первоначального расстояния между этими вихрями. Очевидно, что неустойчивость цепочек Кármана в случае выполнения условия (21.15) будет доказана, если мы сможем указать такие сколь угодно малые начальные значения α_1, α_2, β_1, β_2, чтобы в дальнейшем движении величина

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \beta_1^2 + \beta_2^2$$

превзошла конечную величину.

Если мы в правых частях уравнений (21.23) оставим только члены первой степени, то получим систему первого приближения:

$$\frac{d\alpha_1}{d\tau} = 2\beta_1, \quad \frac{d\alpha_2}{d\tau} = -2\beta_2, \quad \frac{d\beta_1}{d\tau} = -2\alpha_1, \quad \frac{d\beta_2}{d\tau} = 2\alpha_2 \qquad (21.24)$$

Решая эту систему обычным способом, мы придем к алгебраическому уравнению четвертого порядка, имеющему два чисто мнимых и притом двукратных корня $\pm 2i$. Можно показать [1], что в этом случае для решения вопросов устойчивости необходимо рассматривать полную систему (21.23). Применим для ее исследования метод Ляпунова.

Введем обозначения

$$\alpha_1 = r_1\cos\varphi_1, \quad \beta_1 = r_1\sin\varphi_1, \quad \alpha_2 = r_2\cos\varphi_2, \quad \beta_2 = r_2\sin\varphi_2 \qquad (21.25)$$

---

[1] Ляпунов А. М., Общая задача об устойчивости движения, ОНТИ, 1935.

тогда система (21.25) преобразуется в такую:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dr_1}{d\tau} &= -\frac{1}{6}r_1^3\sin 4\varphi_1 - \frac{1}{2}r_1^2 r_2\sin(3\varphi_1-\varphi_2) - \\
&\quad - r_1^2 r_2\sin(\varphi_1+\varphi_2) + \frac{1}{2}r_1 r_2^2\sin(2\varphi_1+2\varphi_2) + \\
&\quad - \frac{1}{2}r_1 r_2^2\sin(2\varphi_1 - 2\varphi_2) + \frac{1}{2}r_2^3\sin(\varphi_1+\varphi_2) + \dots, \\
\frac{dr_2}{d\tau} &= -\frac{1}{6}r_2^3\sin 4\varphi_2 + \frac{1}{2}r_1 r_2^2\sin(3\varphi_2 - \varphi_1) + \\
&\quad + r_1 r_2^2\sin(\varphi_1-\varphi_2) + \frac{1}{2}r_1^2 r_2\sin(2\varphi_1-2\varphi_2) + \\
&\quad + \frac{1}{2}r_1^2 r_2\sin(2\varphi_2-2\varphi_1) - \frac{1}{2}r_1^3\sin(\varphi_1-\varphi_2) + \dots, \\
r_1\frac{d\varphi_1}{d\tau} &= -2r_1 - \frac{1}{2}r_1^3 - \frac{1}{6}r_1^3\cos 4\varphi_1 - r_1^2 r_2\cos(\varphi_1+\varphi_2) - \\
&\quad - \frac{1}{2}r_1^2 r_2\cos(3\varphi_1-\varphi_2) + r_1 r_2^2 + \frac{1}{2}r_1 r_2^2\cos 2(\varphi_1+\varphi_2) + \\
&\quad + \frac{1}{2}r_1 r_2^2\cos 2(\varphi_1-\varphi_2) + \frac{1}{2}r_2^3\cos(\varphi_1-\varphi_2) + \dots, \\
r_2\frac{d\varphi_2}{d\tau} &= 2r_2 - \frac{1}{2}r_2^3 - \frac{1}{6}r_2^3\cos 4\varphi_2 + r_1 r_2^2\cos(\varphi_1+\varphi_2) + \\
&\quad + \frac{1}{2}r_1 r_2^2\cos(3\varphi_2-\varphi_1) + r_1^2 r_2 - \frac{1}{2}r_1^2 r_2\cos 2(\varphi_1+\varphi_2) + \\
&\quad + \frac{1}{2}r_1^2 r_2\cos 2(\varphi_1-\varphi_2) - \frac{1}{2}r_1^3\cos(\varphi_1+\varphi_2) + \dots,
\end{aligned}\right\} \tag{21.26}$$

где невыписанные члены — степени не ниже пятой от r_1 и r_2.

Система первого приближения принимает вид

$$\frac{dr_1}{d\tau} = 0, \quad \frac{dr_2}{d\tau} = 0, \quad \frac{d\varphi_2}{d\tau} = -2, \quad \frac{d\varphi_1}{d\tau} = 2 \tag{21.27}$$

и имеет первые интегралы

$$r_1 = \text{const}, \quad r_2 = \text{const}, \quad \varphi_1+\varphi_2 = \text{const}, \tag{21.28}$$

но тогда произвольная функция от r_1, r_2, $\varphi_1+\varphi_2$ тоже будет интегралом системы (21.27). Отметим, в частности, следующие интегралы.

$$\begin{gathered}
r_1^2, \quad r_2^2, \quad r_1 r_2\cos(\varphi_1+\varphi_2), \quad r_1 r_2\sin(\varphi_1+\varphi_2), \\
r_1^4, \quad r_1^3 r_2\cos(\varphi_1-\varphi_2), \quad r_1^3 r_2\sin(\varphi_1-\varphi_2), \quad r_1^2 r_2^2, \quad r_1^2 r_2^2\cos 2(\varphi_1-\varphi_2), \\
r_1^2 r_2^2\sin 2(\varphi_1-\varphi_2) \quad r_1 r_2^3\cos(\varphi_1+\varphi_2) \quad r_1 r_2^3\sin(\varphi_1+\varphi_2), \quad r_2^4
\end{gathered} \tag{21.29}$$

Вернемся теперь к системе (21.26). Мы имеем для нее первый интеграл (21.21):

$$F = -2r_1r_2\cos(\varphi_1-\varphi_2)+\frac{1}{8}r_1^4-\frac{1}{6}r_1^3r_2\cos(3\varphi_1-\varphi_2)-$$
$$-\frac{1}{2}r_1^3r_2\cos(\varphi_1+\varphi_2)-\frac{1}{2}r_1^2r_2^2-\frac{1}{4}r_1^2r_2^2\cos 2(\varphi_1-\varphi_2)+$$
$$+\frac{1}{6}r_1r_2^3\cos(3\varphi_2-\varphi_1)+\frac{1}{2}r_1r_2^3\cos(\varphi_1+\varphi_2)+\frac{1}{8}r_2^4+\ldots \quad (21.30)$$

Заметим теперь, что вследствие уравнений (21.26) мы имеем для произвольного полинома Φ_n степени n от α_1, α_2, β_1, β_2 равенство

$$\frac{d\Phi_n}{d\tau}=\frac{\partial\Phi_n}{\partial r_1}\frac{dr_1}{d\tau}+\frac{\partial\Phi_n}{\partial r_2}\frac{dr_2}{d\tau}-\frac{\partial\Phi_n}{\partial\varphi_1}\frac{d\varphi_1}{d\tau}-\frac{\partial\Phi_n}{\partial\varphi_2}\frac{d\varphi_2}{d\tau}=$$
$$=2\left(\frac{\partial\Phi_n}{\partial\varphi_2}-\frac{\partial\Phi_n}{\partial\varphi_1}\right)-O(n+2), \quad (21.31)$$

где символом $O(n)$ мы обозначаем совокупность членов степени не ниже n от r_1 и r_2.

Напишем теперь первое из равенств (21.26) в виде

$$\frac{dr_1^2}{d\tau}=-2r_1^3r_2\sin(\varphi_1+\varphi_2)+r_1^3r_2^2\sin(2\varphi_1+2\varphi_2)+$$
$$+r_1r_2^3\sin(\varphi_1+\varphi_2)-\frac{1}{3}r_1^4\sin 4\varphi_1-r_1^3r_2\sin(3\varphi_1-\varphi_2)+$$
$$+r_1^2r_2^2\sin(2\varphi_1-2\varphi_2)+O(6) \quad (21.32)$$

Первые три члена справа являются отмеченными в (21.29) интегралами системы (21.27). Подберем теперь полином Φ_4 так чтобы было

$$\frac{d\Phi_4}{d\tau}=\frac{1}{3}r_1^4\sin 4\varphi_1-r_1^3r_2\sin(3\varphi_1-\varphi_2)-r_1^2r_2^2\sin(2\varphi_1-2\varphi_2)+O(6) \quad (21.33)$$

для этого достаточно, вследствие (21.31) удовлетворить уравнению

$$2\left(\frac{\partial\Phi_4}{\partial\varphi_2}-\frac{\partial\Phi_4}{\partial\varphi_1}\right)=\frac{1}{3}r_1^4\sin 4\varphi_1-r_1^3r_2\sin(3\varphi_1-\varphi_2)-r_1^2r_2^2\sin(2\varphi_1-2\varphi_2)$$

решение этого последнего уравнения находится без труда им является, например,

$$\Phi_4=\frac{1}{24}r_1^4\cos 4\varphi_1-\frac{1}{8}r_1^3r_2\cos(3\varphi_1-\varphi_2)-\frac{1}{8}r_1^2r_2^2\cos(2\varphi_1-2\varphi_2)-$$
$$-\frac{1}{24}(\alpha_1^4-6\alpha_1^2\beta_1^2+\beta_1^4)+\frac{1}{8}(\alpha_1^3\alpha_2-3\alpha_1\alpha_2\beta_1^2+3\alpha_1^2\beta_1\beta_2-\beta_1^3\beta_2)-$$
$$-\frac{1}{8}\left[(\alpha_1^2-\beta_1^2)(\alpha_2^2-\beta_2^2)-4\alpha_1\beta_1\alpha_2\beta_2\right] \quad (21.34)$$

Складывая равенства (21.32) и (21.33), получим:

$$\frac{d(r_1^2+\Phi_4)}{d\tau}=$$
$$=-2r_1^3r_2\sin(\varphi_1-\varphi_2)+r_1^2r_2^2\sin(2\varphi_1-2\varphi_2)+r_1r_2^3\sin(\varphi_1+\varphi_2)+O(6) \quad (21.35)$$

Точно так же можно найти такой полином Ψ_4, что окажется

$$\frac{d(r_2^2-\Psi_4)}{d\tau}=-2r_1r_2^3\sin(\varphi_1+\varphi_2)+r_1^2r_2^2\sin(2\varphi_1+2\varphi_2)-$$
$$-r_1^3r_2\sin(\varphi_1+\varphi_2)+O(6), \quad (21.36)$$

например, можно взять

$$\Psi_4=-\frac{1}{24}(\alpha_2^6-6\alpha_2^2\beta_2^2+\beta_2^4)-\frac{1}{8}(\alpha_2^4\alpha_1-3\alpha_1\alpha_2\beta_2^2+$$
$$+3\alpha_2^2\beta_1\beta_2-\beta_1\beta_2^3)-\frac{1}{8}(\alpha_1^2-\beta_1^2)(\alpha_2^2-\beta_2^2)-\frac{1}{2}\alpha_1\alpha_2\beta_1\beta_2. \quad (21.37)$$

Заметим теперь, что

$$r_1r_2\sin(\varphi_1-\varphi_2)=\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1$$

и что вследствие (21.23) мы имеем

$$\frac{d(\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1)}{d\tau}=-\frac{1}{2}\alpha_1^4+\frac{4}{3}\alpha_1^3\alpha_2-\frac{4}{3}\alpha_1\alpha_2^3+\frac{1}{2}\alpha_2^4-\alpha_1^2\beta_1^2+$$
$$+\alpha_2^2\beta_2^2-\frac{1}{2}\beta_1^4+\frac{4}{3}\beta_1^3\beta_2-\frac{4}{3}\beta_1\beta_2^3+\frac{1}{2}\beta_2^4+O(6)=-\frac{1}{2}r_1^4+$$
$$+\frac{1}{3}r_1^3r_2\cos(3\varphi_1-\varphi_2)+r_1^2r_2\cos(\varphi_1+\varphi_2)+\frac{1}{3}r_1r_2^3\cos(3\varphi_2-\varphi_1)+$$
$$+r_1r_2^3\cos(\varphi_1-\varphi_2)+\frac{1}{2}r_2^4+O(6).$$

Нетрудно найти полином Θ_4, удовлетворяющий условию

$$\frac{d\Theta_4}{d\tau}=-\frac{1}{3}r_1^3r_2\cos(3\varphi_1-\varphi_2)-\frac{1}{3}r_1r_2^3\cos(3\varphi_2-\varphi_2)-O(6),$$

таким полиномом является, например:

$$\Theta_4=\frac{1}{21}r_1r_2\sin(3\varphi_1-\varphi_2)-\frac{1}{21}r_1r_2^3\sin(3\varphi_2-\varphi_1)=$$
$$=(\beta_2^2-\alpha_2^2)\left(\frac{1}{24}\alpha_1\beta_2-\frac{1}{8}\alpha_2\beta_1\right)+(\beta_1^2-\alpha_2^2)\left(\frac{1}{8}\alpha_1\beta_2-\frac{1}{24}\alpha_2\beta_1\right), \quad (21.38)$$

поэтому

$$\frac{d(\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1+\Theta_4)}{d\tau}=-\frac{1}{2}r_1^4+r_1^2r_2\cos(\varphi_1+\varphi_2)+$$
$$+r_1r_2^3\cos(\varphi_1+\varphi)+\frac{1}{2}r_2^4+O(6). \quad (21.39)$$

Пусть теперь начальные значения α_1, α_2, β_1, β_2 обращают функцию F в нуль; так как эта функция есть интеграл системы (21.26), то во все время движения мы будем иметь равенство

$$F=0 \quad (21.40)$$

и, следовательно, в силу (21.30)

$$r_1r_2\cos(\varphi_1+\varphi_2)=O(4).$$

Поэтому равенство (21.39) может быть упрощено

$$\frac{d(\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1+\Theta_4)}{d\tau}=\frac{1}{2}(r_2^4-r_1^4)+O(6).$$

Вычтем равенство (21.36) из (21.35)

$$\frac{d\left(r_1^2 - r_2^2 + \Psi_3 - \Psi_4\right)}{d\tau} = -r_1^3 r_2 \sin(\varphi_1 + \varphi_2) - r_1 r_2^3 \sin(\varphi_1 + \varphi_2) + O(6)$$

Положим, наконец,

$$V = \left(r_1^2 - r_2^2 - \Psi_3 - \Psi_4\right)(\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1 + \Theta_4), \tag{21.41}$$

тогда в течение двух предыдущих равенств окажется

$$\frac{dV}{d\tau} = -\left(r_1^2 + r_2^2\right) r_1^2 r_2^2 \sin^2(\varphi_1 + \varphi_2) + \frac{1}{2}\left(r_1^2 - r_2^2\right)\left(r_2^4 - r_1^4\right) + O(8)$$

Прибавив к правой части функцию

$$-\left(r_1^2 + r_2^2\right) r_1^2 r_2^2 \cos^2(\varphi_1 + \varphi_2) = O(10),$$

получим окончательно

$$\frac{dV}{d\tau} = -\frac{1}{2}\left(r_1^2 + r_2^2\right)\left(r_1^4 + r_2^4\right) + O(8). \tag{21.42}$$

Отсюда ясно, что мы будем иметь неравенство

$$\frac{dV}{d\tau} < -\frac{1}{4}\left(r_1^2 + r_2^2\right)\left(r_1^4 + r_2^4\right) \tag{21.43}$$

при всех достаточно малых значениях r_1 и r_2, например, в некоторой области

$$r_1^2 + r_2^2 \leqslant a^2. \tag{21.44}$$

Покажем теперь, что можно выбрать сколь угодно малые начальные значения α_1, α_2, β_1, β_2 так, что в дальнейшем движении величина

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \beta_1^2 + \beta_2^2 = r_1^2 + r_2^2 \tag{21.45}$$

превзойдет конечное значение a^2. Для этого достаточно взять сколь угодно малые начальные значения α_1, α_2, β_1, β_2, удовлетворяющие уравнению (21.40) и неравенству

$$V < 0,$$

что, очевидно, всегда можно сделать. Начальное значение функции V обозначим через V_0. Покажем теперь, что предположение о том, что величина (21.45) никогда не превзойдет значения a^2, приводит к противоречию. В самом деле, пусть во все время движения выполняется неравенство (21.44), тогда имеет место (21.43), и в частности:

$$\frac{dV}{d\tau} < 0,$$

функция V убывает и, следовательно, во все время движения

$$V < V_0.$$

Но тогда во все время движения будет

$$r_1^2 + r_2^2 \geqslant b^2,$$

где b — некоторое положительное число, и так как

$$r_1^4 + r_2^4 = \frac{\left(r_1^2 + r_2^2\right)^2}{2} + \frac{\left(r_1^2 - r_2^2\right)^2}{2} \geqslant \frac{b^4}{2},$$

то из (21.4б) выводим

$$\frac{dV}{dt} < -\frac{1}{8}\,b^2, \quad \text{т. е.} \quad V < V_0 - \frac{1}{8}\,b^2 t,$$

так что V неограниченно растет по модулю. Но это противоречит тому, что полюс V должен оставаться в области (21.14) ограниченным по модулю.

Итак, можно задать такие сколь угодно малые смещения вихрей, что в дальнейшем движении вихри разойдутся на конечную величину. Это доказывает неустойчивость вихревых цепочек Кármана и в исключительном случае выполнения условия (21.9). Это последнее условие сохраняет, однако, до некоторой степени свое значение, так как оно характеризует то расположение вихрей, которые обладают наименьшей неустойчивостью по сравнению со всеми другими расположениями вихрей.

§ 22. Схема Кármана движения тела в жидкости с образованием вихрей. Пусть тело, имеющее форму бесконечного цилиндра с образующими, перпендикулярными плоскости Oxy, движется в плоскопараллельном потоке жидкости параллельно оси Ox в отрицательном направлении со скоростью V. Контур сечения цилиндра плоскостью Oxy обозначим через C (рис. 85). Проведем еще плоскость, параллельную плоскости Oxy, на расстоянии единицы длины от нее. В дальнейшем мы будем рассматривать движение жидкости между этими двумя плоскостями.

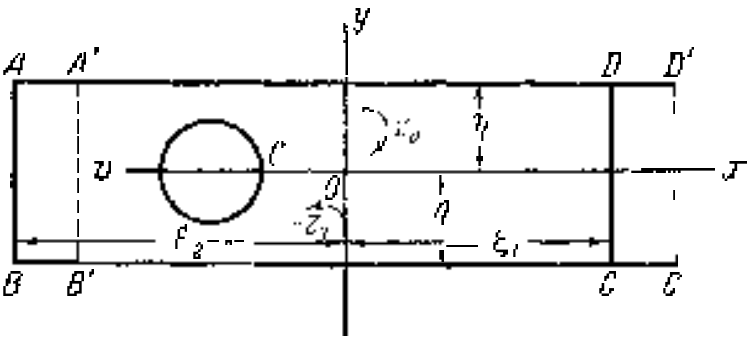

Рис. 85.

Допустим теперь, что при движении тела за ним образуется пара цепочек вихрей, расположенных в шахматном порядке, и допустим, что на больших расстояниях от тела за ним течение жидкости такое, какое происходило бы от двух бесконечно длинных цепочек вихрей, рассмотренных в предыдущих параграфах (рис. 86), на больших же расстояниях от тела перед ними мы предположим жидкость покоящейся. При таких условиях можно вычислить сопротивление, испытываемое телом при его движении.

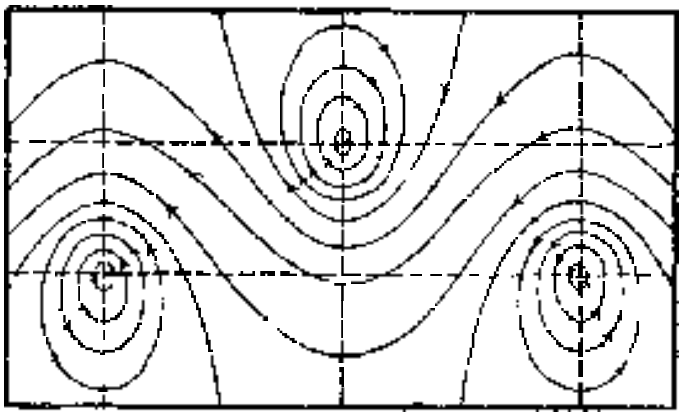

Рис. 86.

Обозначим через a скорость, с которой будут перемещаться расположенные в шахматном порядке вихри. В § 20 мы видели

[формула (20.4)] что эта скорость равна

$$u = \frac{\Gamma}{2l} \operatorname{th} \frac{\pi h}{l}, \tag{22.1}$$

где Γ — абсолютная величина интенсивности вихрей (остальные обозначения — прежние). Мы примем, как показано на рис. 86, циркуляцию верхних вихрей отрицательной, т. е. равной $-\Gamma$, циркуляцию нижних — положительной, т. е. равной $+\Gamma$. Тогда вихри будут перемещаться со скоростью u в направлении отрицательной оси Ox.

Введем в рассмотрение подвижную систему координат Oxy, перемещающуюся вместе с вихрями со скоростью u, так что вихри относительно этой системы остаются неподвижными. Цилиндр в системе Oxy будет перемещаться со скоростью $V - u$ параллельно оси Ox в отрицательном направлении. Легко определить тот промежуток времени T, за который тело перемещается относительно осей Oxy на отрезок l, очевидно

$$T = \frac{l}{V - u}. \tag{22.2}$$

Отметим, что в два момента времени τ и $\tau - T$ картина движения жидкости будет совершенно одинаковой, единственная разница будет состоять в том, что в момент $\tau - T$ между телом и началом координат подвижной системы Oxy будет на одну пару вихрей больше, чем в момент τ.

При движении тела в жидкости оно будет испытывать сопротивление со стороны последней. Нас будет интересовать только лобовое сопротивление т. е. составляющая силы сопротивления по оси Ox. Обозначим величину лобового сопротивления через W и поставим себе задачу вычислить средне значение лобового сопротивления за период T.

В основу вычисления положим закон количеств движения: приращение за некоторый промежуток времени проекции количества движения системы точек на какую-либо ось равно сумме проекций на ту же ось импульсов всех внешних сил, действовавших на систему, за тот же промежуток времени. За рассматриваемую систему точек мы возьмем объем жидкости, ограниченный в момент τ контуром $ABCD$ и контуром тела. При этом уравнения прямых AD и BC суть $y = +\eta$, где η мы считаем очень большим (в дальнейшем мы устремим η к бесконечности), уравнения прямых AB и CD суть $x = -\xi_1$ и $x = \xi_2$, причем опять-таки ξ_1 и ξ_2 считаются очень большими.

Мы будем рассматривать движение частиц жидкости относительно подвижной системы координат Oxy, перемещающейся вместе с вихрями. Составим комплексный потенциал, характеризующий движение. Если взять основные вихри верхней и нижней цепочек в точках z_1 и $-z_1$ $\left(\text{где } z_1 = -\frac{l}{4} + \frac{h}{2} i\right)$, то комплексный потенциал, происхо-

дящих от вихрей обеих цепочек, будет иметь вид

$$w_1 = -\frac{\Gamma}{2\pi i}\ln\sin\frac{\pi}{l}(z-z_0)+\frac{\Gamma}{2\pi i}\ln\sin\frac{\pi}{l}(z+z_0) =$$

$$=\frac{\Gamma}{2\pi i}\ln\frac{\sin\frac{\pi}{l}(z+z_0)}{\sin\frac{\pi}{l}(z-z_0)}. \qquad (22.3)$$

Кроме того, так как мы сообщили системе координат Oxy движение параллельно оси Ox со скоростью $-u$, каждая частица жидкости получит добавочную скорость u параллельно оси Ox. Соответствующий комплексный потенциал будет иметь вид:

$$w_2 = uz. \qquad (22.4)$$

Таким образом, полный комплексный потенциал определяется формулой

$$w = uz + \frac{\Gamma}{2\pi i}\ln\frac{\sin\frac{\pi}{l}(z+z_0)}{\sin\frac{\pi}{l}(z-z_0)}. \qquad (22.5)$$

При этом согласно указанному выше, в областях жидкости, дальних от тела и лежащих перед телом (по направлению его движения), мы должны пользоваться потенциалом w_2, в областях же за телом необходимо пользоваться потенциалом w. Там, где движение характеризуется потенциалом w_2, очевидно, будет:

$$v_{2x} = u, \quad v_{2y} = 0 \qquad (22.6)$$

Рассмотрим теперь движение, определяющееся потенциалом

$$w_1(z) = \varphi_1(x, y) + i\psi_1(x, y).$$

Вычислим прежде всего значения функции тока ψ_1:

$$\psi_1(x, y) = -\frac{\Gamma}{2\pi}\ln\left|\frac{\sin\frac{\pi}{l}(z+z_0)}{\sin\frac{\pi}{l}(z-z_0)}\right| = -\frac{\Gamma}{4\pi}\ln\frac{\sin\frac{\pi}{l}(z+z_0)\sin\frac{\pi}{l}(\bar{z}-\bar{z}_0)}{\sin\frac{\pi}{l}(z-z_0)\sin\frac{\pi}{l}(\bar{z}-\bar{z}_0)} =$$

$$= -\frac{\Gamma}{4\pi}\ln\frac{\cos\frac{\pi}{l}(z+\bar{z}+z_0+\bar{z}_0)-\cos\frac{\pi}{l}(z+z_0-\bar{z}-\bar{z}_0)}{\cos\frac{\pi}{l}(z-z_0+\bar{z}-\bar{z}_0)-\cos\frac{\pi}{l}(z-z_0-\bar{z}+z_0)} =$$

$$= -\frac{\Gamma}{4\pi}\ln\frac{\cos\frac{2\pi}{l}\left(x+\frac{l}{4}\right)-\cos\frac{2\pi i}{l}\left(y+\frac{h}{2}\right)}{\cos\frac{2\pi}{l}\left(x-\frac{l}{4}\right)-\cos\frac{2\pi i}{l}\left(y-\frac{h}{2}\right)} =$$

$$= -\frac{1}{4\pi}\ln\frac{\operatorname{ch}\frac{2\pi}{l}\left(y+\frac{h}{2}\right)+\sin\frac{2\pi x}{l}}{\operatorname{ch}\frac{2\pi}{l}\left(y-\frac{h}{2}\right)-\sin\frac{2\pi x}{l}}. \qquad (22.7)$$

На рис. 86 начерчены линии тока $\psi_1(x, y) = \text{const}$, причем отношение h/l взято согласно условию (21.9). Легко найти предел $\psi_1(x, y)$, когда $y \to \pm\infty$. В самом деле, в этом случае

$$\operatorname{ch}\frac{2\pi}{l}\left(y \pm \frac{h}{2}\right) \sim \frac{1}{2} e^{\frac{2\pi y}{l} + \frac{\pi h}{l}}; \quad \operatorname{sh}\frac{2\pi}{l}\left(y - \frac{h}{2}\right) \sim \frac{1}{2} e^{\frac{2\pi y}{l} - \frac{\pi h}{l}}$$

и, значит,

$$\lim_{y \to +\infty} \psi_1(x, y) = -\frac{1}{4\pi} \ln e^{\frac{2\pi h}{l}} = -\frac{\Gamma}{4\pi} \frac{2\pi h}{l} = -\frac{\Gamma h}{2l}. \tag{22.8}$$

Точно так же легко найти, что

$$\lim_{y \to -\infty} \psi_1(x, y) = +\frac{\Gamma h}{2l}. \tag{22.9}$$

Перейдем к вычислению скорости. Проекции скорости можно определять по формулам

$$v_{1x} = \frac{\partial \psi_1}{\partial y}, \quad v_{1y} = -\frac{\partial \psi_1}{\partial x} \tag{22.10}$$

или непосредственно из равенства

$$v_{1x} - iv_{1y} = \frac{dw_1}{dz}. \tag{22.11}$$

Воспользуемся последним равенством. Так как w_1 определяется формулой (22.3), то

$$\begin{aligned}
\frac{dw_1}{dz} &= \frac{\Gamma}{2\pi i} \frac{\pi}{l} \left\{ \frac{\cos\frac{\pi}{l}(z + z_0)}{\sin\frac{\pi}{l}(z + z_0)} - \frac{\cos\frac{\pi}{l}(z - z_0)}{\sin\frac{\pi}{l}(z - z_0)} \right\} = \\
&= \frac{\Gamma}{il} \frac{\sin\frac{2\pi z_0}{l}}{\cos\frac{2\pi z}{l} - \cos\frac{2\pi z_0}{l}} = \frac{\Gamma}{il} \frac{\cos\frac{\pi h}{l}}{\cos\frac{2\pi z}{l} + \sin\frac{\pi h}{l}} = \\
&= -i\frac{\Gamma}{l} \frac{\operatorname{ch}\frac{\pi h}{l}}{\cos\frac{2\pi z}{l} + i\operatorname{sh}\frac{\pi h}{l}}.
\end{aligned} \tag{22.12}$$

Мы не будем отделять в этом выражении вещественную и мнимую части, чтобы найти v_{1x} и v_{1y}. Мы только заметим, что если y имеет очень большие по абсолютной величине значения, то $|\cos 2\pi z/l|$

будет очень большим $\left(\text{так как } \left|\cos\frac{2\pi z}{l}\right|^2 = \cos\frac{2\pi z}{l}\cos\frac{2\pi\bar{z}}{l} = \right.$ $\left. = \frac{1}{2}\cos\frac{4\pi x}{l} + \frac{1}{2}\operatorname{ch}\frac{4\pi y}{l}\right)$ и, следовательно, скорость частиц жидкости в этом случае очень мала. Поэтому в дальнейшем мы сможем пренебрегать происходящими от комплексного потенциала w_1 скоростями частиц жидкости, текущих, например, по прямым AD и BC.

Мы должны, однако, отметить весьма важное следствие вытекающее из формул (22.8) и (22.9). А именно, вычислим какое количество жидкости протекает в единицу времени через линию $x = \text{const}$. Оно определяется, очевидно формулой

$$Q = \int_{-\infty}^{\infty} \rho v_{1x}(x, y)\,dy = \rho \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}\,dy =$$

$$= \rho\left[\lim_{y\to+\infty}\psi_1(x, y) - \lim_{y\to-\infty}\psi_1(x, y)\right] =$$

$$= \rho\left(-\frac{\Gamma h}{2l} - \frac{\Gamma h}{2l}\right) = -\frac{\Gamma h\rho}{l}. \tag{22.13}$$

Таким образом течение жидкости, вызываемое двумя вихревыми цепочками, таково, что за каждую единицу времени через любую прямую $x = \text{const}$ протекает всегда в направлении отрицательной оси Ox масса жидкости $\Gamma h\rho/l$. Очевидно, что при сделанных нами предположениях, так как на больших расстояниях перед телом мы предполагаем жидкость покоящейся упомянутая масса жидкости должна расходиться по обеим сторонам, т. е. мы приходим к заключению, что через грани AD и BC будет в каждую единицу времени выходить масса жидкости $\Gamma h\rho/l$.

Наконец, что касается движения жидкости, определяющегося потенциалом w и имеющего место за телом на далеких от него расстояниях, то в этом движении очевидно будет:

$$v_x = v + v_{1x}, \quad v_y = v_{1y}. \tag{22.14}$$

§ 23. Вычисление лобового сопротивления по Кármану. Обозначим теперь через K_t проекцию на ось Ox количества движения той массы жидкости, которая находится в момент t между контуром $ABCD$ и контуром тела. Возьмем промежуток времени от момента t до момента $t + T$ и постараемся вычислить приращение величины K_t за этот промежуток. Для этого предварительно вычислим:

$$\Delta K_t = K_{t+T} - K_t.$$

Очевидно, эта величина складывается из трех частей, во-первых, из приращения проекции на ось Ox количества движения тех жидких частиц, которые в момент t находились в рассматриваемой области, во-вторых, из проекции на ось Ox количества движения тех жидких частиц, которые за промежуток времени dt вошли в рассматриваемую область D, наконец, в-третьих, из взятой со знаком минус проекции на ту же ось количества движения жидких частиц, вышедших за промежуток времени dt из рассматриваемой области:

$$dK_t = d_1K_t + d_2K_t + d_3K_t.$$

Первая из этих трех величин может быть определена на основании закона количеств движения, по которому производная по времени от проекции количества движения какой-либо системы точек на некоторую ось равна сумме проекций на ту же ось всех внешних сил, действующих на рассматриваемую систему. Мы пренебрежем действием всех внешних сил, за исключением силы, с которой тело действует на жидкость, и сил давления, действующих на контуре $ABCD$ со стороны внешних по отношению к рассматриваемому объему частиц жидкости. Так как сила, с которой тело действует на жидкость, по принципу равенства действия и противодействия, противоположна той силе, с которой жидкость действует на тело, то проекция на ось Ox силы, с которой тело действует на жидкость, равна $-W$. Далее, силы давления, действующие на гранях AD и BC, очевидно параллельны оси Oy и не имеют составляющей по оси Ox. Принимая это во внимание, мы можем написать следующее равенство:

$$\frac{d_1K_t}{dt} = -W + \int_{AB} p\,dy - \int_{CD} p\,dy.$$

Переходим к вычислению суммы $d_2K_t + d_3K_t$. Отметим, что в рассматриваемую область $ABCD$ частицы жидкости могут входить как через грани AB и CD, так и через грани AD и BC. Рассмотрим, например, грань CD. Через элемент dy этой грани за время dt выйдет, очевидно, масса жидкости $\rho v_x\,dt\,dy$, которая унесет с собою количество движения жидкости, проекция которого на ось Ox равна $\rho v_x^2\,dt\,dy$. Всего через грань CD выйдет количество движения

$$\int_{CD} \rho v_x^2\,dy\,dt;$$

точно так же через грань AB войдет количество движения

$$\int_{AB} \rho v_x^2\,dy\,dt.$$

Наконец через грани AD и BC за время dt выйдет как мы видели выше количество жидкости $\frac{Vh_2}{l}dt$, проекция скорости v_x на этих гранях равна u поэтому через указанные две грани выйдет количество жидкости $\frac{Vh_2}{l}u\,dt$ а потому мы будем иметь

$$d_2K_x + d_3K_x = \int_{AB} \rho v_x^2\,dy\,dt - \int_{CD} \rho v_x^2\,dy\,dt - \frac{Vh_2}{l}u\,dt.$$

Окончательно для приращения проекции на ось Ox количества движения массы жидкости находящейся внутри объема $ABCD$, получим:

$$K_{\tau+dt} - K_\tau =$$
$$= W\,dt + l\left[\int_{AB}(p+\rho v_x^2)\,dy - \int_{CD}(p+\rho v_x^2)\,dy\right]dt - \frac{Vh_2u}{l}dt$$

Интегрируя это выражение по промежутку времени от момента τ до момента $\tau+T$, легко получим

$$K_{\tau+T} - K_\tau =$$
$$= \int_\tau^{\tau+T} W\,dt + l\left[\int_{AB}(p-\rho v_x^2)\,dy - \int_{CD}(p-\rho v_x^2)\,dy\right] - \frac{Vh_2u}{l}T \quad (23.1)$$

Но левую часть полученного равенства легко вычислить непосредственно. В самом деле, за время T тело продвинется относительно вихрей влево на отрезок l; следовательно, в моменты τ и $\tau+T$ движение жидкости будет совершенно тождественным единственная разница будет в том, что вся картина движения сместится влево на отрезок l. Поэтому, если мы обозначим через $A'B'$ и $C'D'$ отрезки AB и CD, перенесенные на расстояние l вдоль оси Ox, то картина движения в момент $\tau+T$ внутри прямоугольника $ABCD$ полностью совпадает с картиной движения в момент τ внутри прямоугольника $A'B'C'D'$. Но тогда ясно, что разность $K_{\tau+T} - K_\tau$ будет равна разности проекций на ось Ox количеств движения двух масс жидкости, заключающихся соответственно внутри $CC'D'D$ и $AA'B'B$, т. е.

$$K_{\tau+T} - K_\tau = \int_{CDC'}\int_D \rho v_x\,dx\,dy - \int_{AA'B'}\int_B \rho v_x\,dx\,dy$$

Комбинируя этот результат с (23.1), легко получим для среднего значения лобового сопротивления, испытываемого телом, формулу

$$\frac{1}{T}\int_{t}^{t+T} W\,dt = \int_{AB}(p + \rho v_x^2)\,dy \quad \int_{CD}(p + \rho v_x^2)\,dy - \\ - \frac{1}{T}\left[\int_{CDC'D'}\int \rho v_x\,dx\,dy - \int_{BA'B'}\int \rho v_x\,dx\,dy\right] = \frac{1}{2}\frac{h\rho u^2}{l}. \quad (23.2)$$

Отметим еще, что по формуле Бернулли

$$p = C - \frac{1}{2}\rho v^2 = C - \frac{1}{2}\rho(v_x^2 + v_y^2),$$

где C — постоянная. Поэтому

$$\int_{AB}(p + \rho v_x^2)\,dy \quad \int_{CD}(p + \rho v_x^2)\,dy = \\ = \frac{1}{2}\rho\left[\int_{AB}(v_x^2 - v_y^2)\,dy - \int_{CD}(v_x^2 - v_y^2)\,dy\right].$$

Вставляя это выражение в формулу (23.2), получим равенство, которое имеет пока лишь приближенный характер, но которое делается вполне точным, если считать грани AD и BC, а также AB и CD бесконечно удаленными; в этом случае для среднего лобового сопротивления, которое мы обозначим W_m, получим

$$W_m = \frac{1}{T}\int_{t}^{t+T} W\,dt = A + B = \frac{\Gamma h\rho u}{l}, \quad (23.3)$$

где

$$A = \lim_{\eta\to\infty}\frac{1}{2}\rho\left[\int_{AB}(v_x^2 - v_y^2)\,dy - \int_{CD}(v_x^2 - v_y^2)\,dy\right], \quad (23.4)$$

$$B = -\lim_{\eta\to\infty}\frac{1}{T}\left[\int_{CDC'D'}\int \rho v_x\,dx\,dy - \int_{BA'B'}\int \rho v_x\,dx\,dy\right]. \quad (23.5)$$

Остается произвести вычисления. Так как в области $AB.C'B'$ проекция скорости v_x равна постоянной величине u и так как области $CDC'D'$ и $ABC'B'$ равны, то, очевидно, что

$$B = -\lim_{\eta\to\infty}\frac{1}{T}\int_{CDC'D'}\int \rho(v_x - u)\,dx\,dy.$$

Но по формулам (22.14) и (22.10)

$$v_x - u = v_{1x} = \frac{\partial\varphi_1}{\partial y},$$

значит,

$$B = -\frac{\rho}{T}\int_{\xi_0}^{\xi_0+l}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial\psi_1(x,y)}{\partial y}\,dy\right\}dx.$$

Но выше в формуле (22.13) уже был вычислен интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial\psi_1(x,y)}{\partial y}\,dy = \lim_{y\to+\infty}\psi_1(x,y) - \lim_{y\to-\infty}\psi_1(x,y) = -\frac{\Gamma h}{l}.$$

Поэтому легко найдем, что

$$B = \frac{\rho}{T}\int_{\xi_0}^{\xi_0+l}\frac{\Gamma h}{l}\,dx = \frac{\rho\Gamma h}{T}. \tag{23.6}$$

Перейдем к вычислению A. Так как на AB имеем $v_x = u$, $v_y = 0$ и так как AB и CD равны по величине, то очевидно

$$A = -\lim_{l\to\infty}\frac{1}{2}\rho\int_{CD}(v_x^2 - v_y^2 - u^2)\,dy.$$

Воспользовавшись формулами

$$v_x = u + v_{1x}, \quad v_y = v_{1y},$$

легко найдем, что

$$A = -\lim_{l\to\infty}\frac{1}{2}\rho\int_{CD}(v_{1x}^2 + 2uv_{1x} - v_{1y}^2)\,dy \tag{23.7}$$

Но так как

$$\left(\frac{dw_1}{dz}\right)^2 = (v_{1x} - iv_{1y})^2 = v_{1x}^2 - v_{1y}^2 - 2iv_{1x}v_{1y},$$

$$\frac{dw_1}{dz} = v_{1x} - iv_{1y}$$

и, кроме того, на линии CD очевидно $dz = idy$, то, обозначая знаком Re вещественную часть какого-либо выражения, очевидно будем иметь в силу того, что

$$\frac{1}{i}\cdot(v_{1x}^2 + 2uv_{1x} - v_{1y}^2) = -\frac{1}{2}\rho\,\mathrm{Re}\left[\left(\frac{dw_1}{dz}\right)^2 + 2u\,\frac{dw_1}{dz}\right],$$

следующее выражение для A:

$$A = -\frac{1}{2}\rho\,\mathrm{Re}\int_{\xi_1-i\infty}^{\xi_1+i\infty}\frac{1}{i}\left[\left(\frac{dw_1}{dz}\right)^2 + 2u\,\frac{dw_1}{dz}\right]dz. \tag{23.8}$$

Воспользуемся выражениями (22.12) и (22.1) для dw_1/dz и u:

$$\frac{dw_1}{dz} = -\frac{\Gamma i}{l}\frac{\operatorname{ch}\frac{\pi h}{l}}{\cos\frac{2\pi z}{l}+i\operatorname{sh}\frac{\pi h}{l}}, \qquad u=\frac{\Gamma}{2l}\operatorname{th}\frac{\pi h}{l}.$$

Легко видеть, что

$$\left(\frac{dw_1}{dz}\right)^2+2u\frac{dw}{dz}=-\frac{\Gamma^2}{l^2}\left(\frac{\operatorname{ch}^2\frac{\pi h}{l}}{\cos\frac{2\pi z}{l}+i\operatorname{sh}\frac{\pi h}{l}}\right)^2-\frac{\Gamma^2 i}{l^2}\frac{\operatorname{sh}\frac{\pi h}{l}}{\left(\cos\frac{2\pi z}{l}+i\operatorname{sh}\frac{\pi h}{l}\right)}=$$

$$=-\frac{\Gamma^2}{l^2}\frac{i\operatorname{sh}\frac{\pi h}{l}\cos\frac{2\pi z}{l}+1}{\left(\cos\frac{2\pi z}{l}+i\operatorname{sh}\frac{\pi h}{l}\right)^2}=-\frac{\Gamma^2}{2\pi l}\frac{d}{dz}\left[\frac{\sin\frac{2\pi z}{l}}{\cos\frac{2\pi z}{l}+\operatorname{ch}\frac{\pi h}{l}}\right],$$

поэтому A легко вычисляется

$$A=-\frac{\Gamma^2\rho}{4\pi l}\operatorname{Re}\left.\frac{\sin\frac{2\pi z}{l}}{l\left[\cos\frac{2\pi z}{l}-i\operatorname{sh}\frac{\pi h}{l}\right]}\right|_{z=\xi-i\infty}^{z=\xi+i\infty}.$$

Проще всего принять $\xi_1=kl$, где k — целое число, которое мы должны считать очень большим, тогда на линии CD

$$\sin\frac{2\pi z}{l}=\sin\frac{2\pi(y+il)}{l}=i\operatorname{sh}\frac{2\pi y}{l}, \qquad \cos\frac{2\pi z}{l}=\cos\frac{2\pi(y+il)}{l}=\operatorname{ch}\frac{2\pi y}{l}$$

и, значит,

$$A=\frac{\rho\Gamma^2}{4\pi l}\left|\operatorname{th}\frac{2\pi y}{l}\right|_{y=-\infty}^{y=+\infty}.$$

Но, как известно,

$$\lim_{y\to+\infty}\operatorname{th}y=1, \qquad \lim_{y\to-\infty}\operatorname{th}y=-1,$$

значит,

$$A=\frac{\rho\Gamma^2}{2\pi l} \tag{23.9}$$

Собирая все полученные результаты (23.3), (23.6) и (23.9) приходим к формуле

$$W_m=\frac{\rho\Gamma^2}{2\pi l}+\frac{\rho\Gamma h}{T}-\frac{\Gamma h\rho u}{l}.$$

Вспоминая еще выражение для периода T

$$T=\frac{l}{V-u},$$

приходим к окончательной формуле

$$W_m = \frac{\rho\Gamma^2}{2\pi l} + \frac{\rho l\,(V-2u)\,h}{l}, \qquad (23.10)$$

Так как числовое значение Γ непосредственно из наблюдений не определяется, то мы воспользуемся соотношением между Γ и скоростью перемещения вихревых цепочек, соотношением, полученным из условия устойчивости (21.9):

$$u = \frac{\Gamma}{2l}\operatorname{th}\frac{\pi h}{l} = \frac{\Gamma}{2l\sqrt{2}}, \quad \text{откуда } \Gamma = 2l\sqrt{2u}.$$

Кроме того,

$$\frac{h}{l} = 0{,}2806,$$

как мы получили из того же условия устойчивости. Тогда

$$W_m = 2\sqrt{2}\,\rho l^2(V-2u)\cdot 0{,}2806 + \frac{4\pi\rho u^2}{\pi} =$$

$$= \rho l V^2\left[0{,}7936\,\frac{u}{V} - 0{,}3141\left(\frac{u}{V}\right)^2\right]. \qquad (23.11)$$

Вводя обозначение

$$c_w = \frac{2l}{d}\left[0{,}7936\,\frac{u}{V} - 0{,}3141\left(\frac{u}{V}\right)^2\right], \qquad (23.12)$$

где d есть величина основного размера обтекаемого профиля, можем написать:

$$W_m = \frac{\rho}{2}\,dV^2 c_w \qquad (23.13)$$

Кármán и Рубах исследовали движение цилиндра в жидкости и получили хорошее совпадение наблюденных данных с вычислениями. Именно, для кругового цилиндра диаметром 1.5 *см* получено, $u = 1{,}8$ *см* $l = 6{,}1$ *см*, так что $h/l = 0{,}282$. Для пластинки глубиной в 1,75 *см*: $h = 3{,}0$ *см*, $l = 9{,}8$ *см*, $h/l = 0{,}306$.

Результаты измерения силы лобового сопротивления и вычисления ее по формуле приведены в табличке (вместо самой силы W, вычислены пропорциональная ей величина c_w):

	u/V	l/d	h/d	c_w вычисл.	c_w набл.
Цилиндр	0,14	4,3	1,21	0,91	0,90
Пластинка	0,20	5,6	1,57	1,61	1,44 (1,56)

Совпадение хорошее, особенно для цилиндра.

§ 24. Упражнения 1. Найти уравнение линий тока одной вихревой цепочки (рис. 83).

Ответ.

$$\operatorname{ch}\frac{2\pi}{l}(y-y_0)-\cos\frac{2\pi}{l}(x-x_0)=\text{const}.$$

2. Исследовать движение вихревой нити между двумя параллельными стенками.

Ответ. Пусть расстояние между стенками будет l, координата вихря $-z_0$. Отразим вихрь относительно каждой стенки и повторим это отражение бесконечное число раз. Получим двойную цепочку, содержащую две системы равноотстоящих вихрей противоположных интенсивностей Γ и $-\Gamma$; вихри первой системы отмечены значком 1, второй — значком 2 (рис. 87)

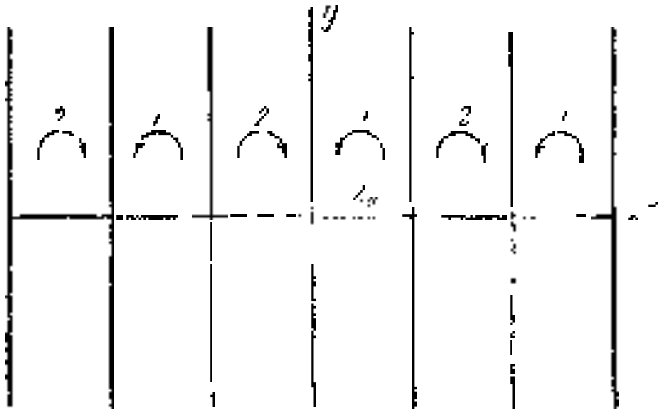

Рис. 87

$$w=\frac{\Gamma}{2\pi i}\ln\sin\frac{\pi}{2l}(z-z_0)-\frac{\Gamma}{2\pi i}\ln\sin\frac{\pi}{2l}(z+\bar{z}_0);$$

$$\frac{d\bar{z}_0}{dt}=-\frac{\Gamma}{4\pi i}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2l}(z_0+\bar{z}_0),$$

откуда

$$\frac{dx_0}{dt}=0\qquad\frac{dy_0}{dt}=-\frac{\Gamma}{4l}\operatorname{ctg}\frac{\pi x_0}{l}.$$

Вихрь перемещается параллельно стенкам с постоянной скоростью.

3. Показать, что уравнения начертанных на рис. 86 линий тока двух вихревых цепочек Кармана, расположенных в шахматном порядке, можно написать в виде

$$\frac{\sin x+\operatorname{sh} y}{\operatorname{ch} y}=C,$$

где постоянная C может меняться в пределах от $-\sqrt{2}$ до $+\sqrt{2}$, если имеет место условие устойчивости (21.9).

ГЛАВА ШЕСТАЯ

ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА О ДВИЖЕНИИ ТЕЛА В ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

§ 1. Предварительные замечания. Допустим, что рассматривается движение твердого тела в безграничном по всем направлениям объеме жидкости, покоящейся в бесконечности. Движущееся твердое тело вызовет движение частиц жидкости, окружающих тело и взаимодействующих с ним. Можно сразу же наметить две общие постановки задачи о движении твердого тела в жидкости:

а) Движение тела наперед задано; требуется определить то состояние движения, которое вызовет движущееся тело в окружающей его жидкой среде, а также определить силы взаимодействия между телом и жидкостью. Зная эти силы, нетрудно определить внешние силы, которые нужно приложить к телу, чтобы осуществить рассматриваемое заданное движение этого тела.

б) Наперед заданы внешние приложенные к телу силы, и требуется определить как движение самого тела, так и состояние движения жидкости, а также силы взаимодействия между телом и жидкостью.

Форма поверхности тела предполагается известной при той и другой постановке вопроса. Таким образом при обеих постановках задачи мы можем различить в ней две стороны, тесно связанные между собою: кинематическую и динамическую.

Здесь мы будем рассматривать движения только в идеальной жидкости, и надо наперед отметить, что многие результаты, получаемые для идеальной жидкости, значительно расходятся с действительностью. В особенности это относится к расчету сил сопротивления, встречаемого телом при движении в жидкости. Дело в том, что силы внутреннего трения или вязкости, действующие во всякой реальной жидкости между ее частицами, проявляются наиболее эффективно в тонком слое, непосредственно прилегающем к поверхности тела. Наличие даже весьма малой вязкости может значительно видоизменить поле скоростей, а следовательно и связанное с ним поле гидродинамических давлений вокруг тела.

Из различных типов наперед заданного движения твердого тела в последующем будет играть особую роль случай поступательного прямолинейного и равномерного движения тела в жидкости. Создаваемое им состояние движения жидкости будет, очевидно, установившимся, если рассматривать движение жидкости по отношению к осям связанным с телом. Для расчета поля гидродинамических давлений мы можем на основании галилеевского принципа относительности классической механики принять в качестве основных «неподвижных» осей упомянутые выше оси связанные с телом. Иначе говоря, мы можем задачу о поступательном прямолинейном и равномерном движении тела в жидкости которая покоится в бесконечности, свести к задаче об установившемся обтекании неподвижного тела безграничным потоком жидкости, бесконечно удаленные частицы которой имеют повсюду одинаковую по величине и направлению скорость.

В настоящей главе мы рассмотрим, как более простой, случай плоского потока, в который помещено тело, имеющее форму бесконечного цилиндра с образующими, перпендикулярными плоскости течения. Все динамические расчеты для сил гидродинамических давлений, их моментов, кинетической энергии, мы будем относить к слою единичной высоты, вырезанному двумя плоскостями, параллельными плоскости течения. При этом мы ограничимся рассмотрением безвихревого потока несжимаемой жидкости; случай сжимаемой жидкости будет рассмотрен во второй части курса.

При рассмотрении плоской задачи для несжимаемой жидкости мы прежде всего обратим внимание на построение кинематической картины течения при обтекании неподвижного тела или при движении тела в покоящейся жидкости. Это построение сводится к нахождению комплексного потенциала, т. е. к подбору такого распределения особых точек течения — вихрей и источников — на всей плоскости течения, которое при отсутствии тела дало бы ту же самую кинематическую картину течения, какая наблюдается при внесении тела в поток. Построив кинематическую картину течения мы можем, применяя интеграл Бернулли для установившегося движения и интеграл Коши (Лагранжа) для неустановившегося, сделать расчет сил давлений на обтекаемое тело.

§ 2. Граничные условия. Задачи Дирихле и Неймана. Разыскание комплексного потенциала

$$w(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y),$$

определяющего плоское безвихревое движение несжимаемой жидкости, может быть сведено к разысканию одной функции тока ψ, так как потенциал φ связан с ψ известными условиями Коши — Римана, позволяющими определить φ в виде квадратуры по известной функции ψ. Функция тока ψ, которая во всех точках потока несжимаемой жидкости предполагается непрерывной, удовлетворяет в этих точках уравнению

Таким $\Delta\psi = 0$ а на границах потока — некоторым известным условиям вид которых варьирует в зависимости от условий осуществления плоского потока

Не задаваясь целью дать исчерпывающую классификацию различных типов граничных условий, укажем наиболее простые случаи.

Если рассматривается плоское течение в безграничной жидкости, покоящейся в бесконечности, возникающее при движении цилиндрического тела, то граничными условиями для функции тока ψ очевидно будут:

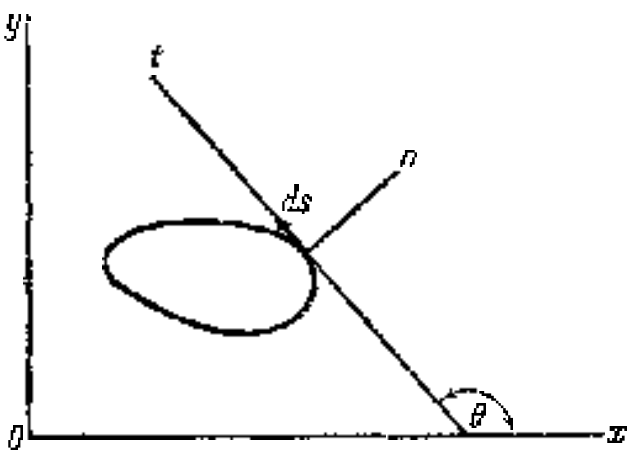

Рис. 88.

а) $$\frac{\partial\psi}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial\psi}{\partial y} = 0 \qquad (2.1)$$

для бесконечно далеких точек потока так как в этих точках скорость должна быть равной нулю

б) в каждой точке контура движущегося тела должны совпадать нормальные проекции скоростей u_n самого контура и v_n — прилегающей частицы жидкости (рис 88), замечая, что

$$v_n = v_x \cos(\widehat{n, x}) + v_y \cos(\widehat{n, y}) = v_x \sin\theta - v_y \cos\theta =$$
$$= v_x \frac{dy}{ds} - v_y \frac{dx}{ds} = \frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{dy}{ds} + \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{dx}{ds} = \frac{d\psi}{ds}, \qquad (2.2)$$

где θ есть угол между элементом ds линии тока и осью Ox, мы можем рассматриваемое условие выразить соотношением

$$\frac{d\psi}{ds} = u_n = u_x \sin\theta - u_y \cos\theta. \qquad (2.3)$$

Если при этом в жидкости имеются еще и неподвижные тела, то очевидно, что на их контурах нормальная составляющая скорости прилегающих частиц жидкости должна равняться нулю иначе говоря, сам неподвижный контур должен быть в соприкосновении с линией тока (одной или несколькими) В этом случае к предыдущим условиям мы должны присоединить пограничное условие

в) $$\frac{d\psi}{ds} = 0, \quad \psi = \text{const} \qquad (2.4)$$

для точек неподвижного контура.

Если тело движется поступательно со скоростью U, направленной вдоль оси Ox то условие (2.3) принимает вид

$$\frac{d\psi}{ds} = U\sin\theta = U\frac{dy}{ds},$$

ная после интегрирования вдоль контура при $U = \text{const}$ для всех точек контура

$$\psi = -Uy + c \tag{2.5}$$

Если цилиндрическое тело совершает произвольное движение то

$$u_x = U - \omega y \qquad u_y = V + \omega x,$$

где U и V — проекции на оси Ox и Oy скорости точки O неподвижно связанной с телом, а ω есть угловая скорость вращения тела, поэтому

$$\frac{d\psi}{ds} = -(U - \omega y)\frac{dy}{ds} + (V + \omega x)\frac{dx}{ds},$$

откуда

$$\psi = -Uy + Vx + \frac{1}{2}\omega(x^2 + y^2) + c \tag{2.6}$$

на контуре тела.

Если поступательный поток, скорость которого в бесконечно удаленных точках равна U и направлена вдоль оси Ox, обтекает неподвижное тело то граничными условиями будут, очевидно,

$$\psi = -Uy + c \tag{2.7}$$

для бесконечно далеких точек и

$$\frac{d\psi}{ds} = 0 \qquad \psi = \text{const} \tag{2.8}$$

для точек контура.

Заметим что хотя указанные нами граничные условия находят свое главное применение при изучении установившегося движения, но они остаются в силе и для неустановившегося потенциального течения. В этом случае в предыдущие формулы лишь войдет как параметр время t от которого будут зависеть U, V, ω, c.

Задача об определении в некоторой области D функции ψ, удовлетворяющей уравнению Лапласа, по известным значениям функции ψ на контуре области D носит название *задачи Дирихле*. Мы видим таким образом, что определение плоского безвихревого движения несжимаемой жидкости вызываемого движением ограничивающих область течения контуров сводится к решению некоторой задачи Дирихле.

При решении нашей гидродинамической задачи можно также отыскивать в первую очередь потенциал скорости φ. Он также должен удовлетворять в области течения уравнению Лапласа $\Delta\varphi = 0$. Однако граничные условия на контуре примут для функции φ другой вид. По самому определению потенциала скорости нормальная проекция v_n скорости прилегающей к контуру частицы жидкости есть

$$v_n = \frac{\partial\varphi}{\partial n},$$

и поэтому граничное условие для функции φ принимает вид

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = u_n, \tag{2.9}$$

где u_n есть нормальная проекция скорости точки контура. В частности, в точках неподвижной границы мы получаем условие

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0 \tag{2.10}$$

Задача об определении в некоторой области D функции φ, удовлетворяющей уравнению Лапласа по известным значениям нормальной производной функции φ на контуре области D, носит название *задачи Неймана*. Таким образом наша гидромеханическая задача сводится к решению некоторой задачи Неймана.

По функции ψ можно определить функцию φ и обратно. Ясно поэтому, что задачу Неймана можно свести к задаче Дирихле и обратно. В самом деле, вспомнив условия Коши — Римана и приняв за время, в соответствии с рис. 88, направление нормали за направление оси Ox, а направление касательной за направление оси Oy, сразу получим соотношения

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = -\frac{\partial \psi}{\partial s}, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial s} = -\frac{\partial \psi}{\partial n}.$$

Задание функции ψ на контуре сразу определит нам значения нормальной производной потенциала скорости

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \frac{\partial \psi}{\partial s}$$

и позволит перейти от задачи Дирихле к задаче Неймана. Обратно, имея задачу Неймана т. е. зная на контуре значение $\partial\varphi/\partial n$, легко получим

$$\psi = \int \frac{\partial \varphi}{\partial n}\, ds = \text{const}$$

для любого контура, ограничивающего область течения, и перейдем таким образом к задаче Дирихле.

В случае многосвязной области, ограниченной k контурами, в предыдущей формуле появится свое значение аддитивной постоянной для каждого контура; но значение одной из этих аддитивных постоянных может быть выбрано произвольно, так как движение определяется величинами производных от функции φ. Таким образом появятся $k-1$ произвольных постоянных. Для определения последних должны быть заданы циркуляции скорости по $k-1$ контурам несводимым друг к другу. Это вполне согласуется с высказанным в конце § 18 главы

первой замечанием о том, что безвихревое движение полностью определяется заданием $\partial\varphi/\partial n$ на контурах только при условии задания всех циклических постоянных.

В качестве простейшего примера рассмотрим задачу о безвихревом движении несжимаемой жидкости, заключенной в эллиптическом цилиндре. Пусть уравнение эллипса есть

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \tag{2.11}$$

пусть его движение характеризуется проекциями U и V на оси координат скорости его центра и угловой скоростью вращения ω. Тогда функция тока ψ должна удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=0 \tag{2.12}$$

внутри эллипса (2.11) и граничному условию

$$\psi=Uy-Vx-\frac{\omega}{2}(x^2+y^2)+\text{const} \tag{2.13}$$

на самом эллипсе.

Ищем функцию ψ в виде полинома второй степени

$$\psi=Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F.$$

Уравнение (2.12) приводит к соотношению

$$A+C=0.$$

Из условия (2.13) мы получаем, что уравнение

$$A(x^2-y^2)+Bxy+Dx-Ey=Uy+Vx+\frac{\omega}{2}(x^2+y^2)=\text{const}$$

должно являться следствием (2.11). Отсюда вытекают соотношения

$$\left(A+\frac{\omega}{2}\right)a^2=\left(-A+\frac{\omega}{2}\right)b^2, \quad A=-\frac{\omega}{2}\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2},$$
$$B=0, \quad D=-V, \quad E=U.$$

Таким образом искомое течение определяется функцией

$$\psi=\frac{\omega}{2}\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}(y^2-x^2)+Uy-Vx. \tag{2.14}$$

Для проекций скорости находим значения

$$\begin{aligned} v_x&=\frac{\partial\psi}{\partial x}=\frac{\partial\psi}{\partial y}=-\omega\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}y+U,\\ v_y&=-\frac{\partial\psi}{\partial x}=-\frac{\partial\psi}{\partial x}=\omega\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}x+V, \end{aligned} \tag{2.15}$$

откуда без труда получим, что

$$\varphi = Ux + Vy + \omega \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} xy. \tag{2.16}$$

В простейшем случае чисто поступательного движения цилиндра, когда $\omega = 0$, получим:

$$\varphi = Ux + Vy, \quad v_x = U, \quad v_y = V. \tag{2.17}$$

т. е. жидкость движется вместе с цилиндром как одно целое.

В случае чистого вращения, когда $U = V = 0$, имеем:

$$\psi = \frac{\omega}{2} \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} (y^2 - x^2) \tag{2.18}$$

Линии тока абсолютного движения суть гиперболы.

Подчеркнем, что полученные нами формулы определяют абсолютное движение жидкости по отношению к подвижным осям координат Oxy. Движение жидкости относительно этих подвижных осей координат определится, если мы из проекций абсолютной скорости (2.15) вычтем проекции переносной скорости

$$v_{ex} = U - \omega y; \quad v_{ey} = V + \omega x,$$

в результате для проекций относительной скорости получим:

$$v_{rx} = -\frac{2\omega a^2 y}{a^2 + b^2}; \quad v_{ry} = -\frac{2\omega b^2 x}{a^2 + b^2}. \tag{2.19}$$

Траектории относительного движения могут быть получены путем интегрирования уравнений

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{2\omega a^2}{a^2 + b^2} y; \quad \frac{dy}{dt} = -\frac{2\omega b^2}{a^2 + b^2} x$$

и представляют эллипсы

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \text{const},$$

подобные граничному эллипсу. Относительное движение не будет уже безвихревым

§ 3. Движение кругового цилиндра. Одним из простейших случаев плоской задачи является задача о движении кругового цилиндра в безграничной жидкости.

Берем плоскость Oxy, перпендикулярную к образующим цилиндра и помещаем начало координат в центр круга C, по которому плоскость Oxy пересекает поверхность цилиндра. Радиус круга пусть равняется a. Мы приходим, очевидно, к плоской задаче определения безвихревого движения вне круга C, возникающего при движении этого круга. Пусть цилиндр совершает поступательное движение,

характеризующееся проекциями U и V скорости этого движения на оси координат. Тогда мнимая часть комплексного потенциала

$$w = \varphi + i\psi,$$

являющегося аналитической функцией от z, должна удовлетворять, как было установлено в предыдущем пункте, на круге C условию

$$\psi = Ux - Vy + \text{const}. \tag{3.1}$$

Проекции скорости v_x и v_y являются однозначными функциями от x и y, причем они стремятся к нулю, когда точка P уходит на бесконечность, так как на бесконечности жидкость, по предположению, покоится. Поэтому комплексная скорость

$$\frac{dw}{dz} = v_x - iv_y$$

является однозначной аналитической функцией от z вне круга C, обращающейся в нуль в бесконечно удаленной точке. Но тогда эта функция разлагается в ряд Лорана вида

$$\frac{dw}{dz} = \frac{C_1}{z} + \frac{C_2}{z^2} + \frac{C_3}{z^3} + \dots \tag{3.2}$$

интегрируя это равенство и отбрасывая несущественную аддитивную постоянную, получим:

$$w = C_1 \ln z - \frac{C_2}{z} - \frac{C_3}{2z^2} + \dots \tag{3.3}$$

Для определения коэффициентов C_k надо отделить мнимую часть ψ и сравнить ее значение на круге C с выражением (3.1).

Введем полярные координаты r и θ, положив:

$$x = r\cos\theta \quad y = r\sin\theta, \quad z = re^{i\theta},$$

и пусть

$$C_k = A_k + iB_k,$$

тогда из (3.3) без труда получим:

$$\varphi = A_1 \ln r + B_1\theta - \frac{A_2\cos\theta + B_2\sin\theta}{r} - \frac{A_3\cos 2\theta + B_3\sin 2\theta}{2r^2} - \dots$$

$$\psi = A_1\theta + B_1 \ln r + \frac{A_2\sin\theta - B_2\cos\theta}{r} + \frac{A_3\sin 2\theta - B_3\cos 2\theta}{2r^2} + \dots$$

Полагая в последней формуле $r = a$ и сравнивая полученное выражение со значением ψ, даваемым (3.1):

$$\psi = Ua\sin\theta - Va\cos\theta + \text{const},$$

придем к заключению, что

$$A_1 = 0 \quad A_2 = Ua^2, \quad B_2 = Va^2, \quad A_3 = B_3 = 0, \quad A_4 = B_4 = 0, \dots$$

Полагая еще, что

$$B_1 = -\frac{\Gamma}{2\pi},$$

получаем общее решение рассматриваемой задачи в виде

$$w = \frac{\Gamma}{2\pi i}\ln z - (U + iV)\frac{a^2}{z}, \tag{3.4}$$

$$\varphi = \frac{\Gamma}{2\pi}\theta - (U\cos\theta + V\sin\theta)\frac{a^2}{r}, \tag{3.5}$$

$$\psi = -\frac{\Gamma}{2\pi}\ln r + (U\sin\theta - V\cos\theta)\frac{a^2}{r} \tag{3.6}$$

В простейшем случае, когда $\Gamma = 0$, $V = 0$, мы получаем:

$$w = -\frac{Ua^2}{z}, \tag{3.7}$$

но как раз такой же комплексный потенциал имеет течение от диполета помещенного в центре цилиндра, который имеет момент $M = -2\pi U a^2$ и ось которого направлена по положительной оси Ox (§ 18 главы четвертой, рис. 54). Линии тока в обоих случаях будут одни и те же, и мы получаем картину течения, изображенную на рис. 89.

Точно так же комплексный потенциал

$$w = -\frac{(U + iV)a^2}{z} \tag{3.8}$$

соответствует диполету в начале координат, направление момента которого совпадает с направлением скорости движения цилиндра. Комплексный потенциал

$$w = \frac{\Gamma}{2\pi i}\ln z \tag{3.9}$$

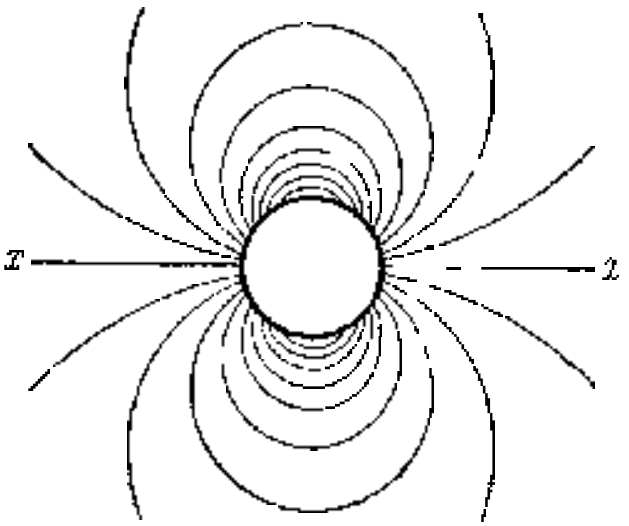

Рис. 89.

определяет вихрь интенсивности Γ, помещенный в начале координат. Итак, рассматриваемое нами течение, получающееся при движении цилиндра, может быть получено как результат наложения на вихревую точку произвольной интенсивности, находящуюся в центре цилиндра, диполета, помещенного в той же точке, с моментом, направленным по скорости цилиндра и имеющим величину $2\pi q a^2$, где q — скорость цилиндра.

Нетрудно из полученного решения получить решение другой задачи, а именно задачи об обтекании неподвижного кругового цилиндра потоком, имеющим на бесконечности заданную по величине и направлению скорость. Обозначим эту скорость через

$$v_\infty = U + iV. \tag{3.10}$$

Поступательный поток, проекции скорости которого на оси координат суть U и V, имеет комплексную скорость

$$\frac{dw}{d\bar{z}} = U - iV = \bar{v},$$

и, следовательно, комплексный потенциал

$$w = (U - iV)\,z = \bar{v}_\infty z. \tag{3.11}$$

Если круг C движется поступательно со скоростью

$$-v_\infty = -U - iV,$$

а на бесконечности жидкость покоится, то течение, получающееся для круга, определяется, по предыдущему, комплексным потенциалом

$$w = \frac{\Gamma}{2\pi i}\ln z + (U + iV)\frac{a^2}{z}. \tag{3.12}$$

Складывая этот комплексный потенциал с комплексным потенциалом (3.11), получим:

$$w = (U - iV)\,z + (U + iV)\frac{a^2}{z} + \frac{\Gamma}{2\pi i}\ln z \tag{3.13}$$

Очевидно, что в полученном течении скорость на бесконечности имеет проекции U и V. Очевидно также, что выполняется условие обтекания на круге C, ибо течения (3.11) и (3.12) дают на этом круге взаимно-уничтожающиеся нормальные составляющие скорости. Воспользовавшись обозначением (3.10), мы можем записать выражение (3.13) также в виде

$$w = \bar{v}_\infty z + \frac{a^2 v_\infty}{z} + \frac{\Gamma}{2\pi i}\ln z \tag{3.14}$$

Если скорость потока на бесконечности направлена по оси OX и циркуляция скорости Γ обращается в нуль, то получим:

$$w = U\left(z + \frac{a^2}{z}\right) \tag{3.15}$$

Этим последним выражением определяется, таким образом, *бесциркуляционное обтекание круга поступательным потоком.*

Воспользовавшись опять полярными координатами (r, ϑ), без труда получим для этого последнего случая что

$$\varphi = U\left(r + \frac{a^2}{r}\right)\cos\vartheta = Ux\left(1 + \frac{a^2}{x^2+y^2}\right),$$
$$\psi = U\left(r - \frac{a^2}{r}\right)\sin\vartheta = Uy\left(1 - \frac{a^2}{x^2+y^2}\right). \tag{3 16}$$

Из последнего выражения очевидно прежде всего, что окружность C, на которой $r = a$, является линией тока $\psi = 0$. Остальные линии тока суть кривые третьего порядка (рис. 90):

$$\left(1 - \frac{a^2}{x^2+y^2}\right)y = \text{const}.$$

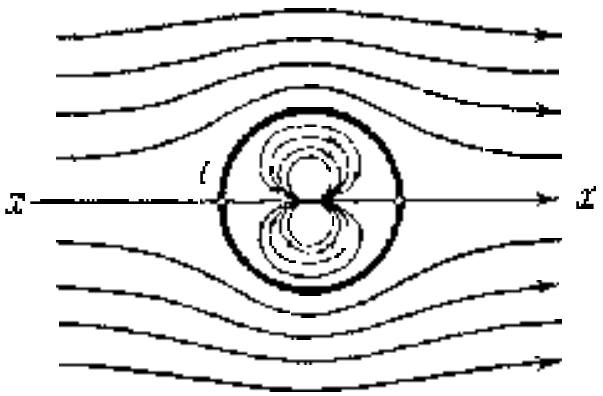

Рис. 90

На окружности C

$$\omega = 2aU\cos\vartheta, \tag{3 17}$$

и, следовательно, для направленной по касательной к окружности C скорости мы получаем величину

$$\frac{\partial\varphi}{\partial s} = \frac{1}{a}\frac{\partial\psi}{\partial\vartheta} = -2U\sin\vartheta. \tag{3 18}$$

Таким образом скорость в точках контура C имеет величину $2U|\sin\vartheta|$. Наибольшее ее значение равно $2U$ и достигается в концах диаметра, перпендикулярного к направлению скорости на бесконечности. В точках окружности C, симметричных как относительно оси Ox так и относительно оси Oy, значение скорости одно и то же. А так как для установившегося безвихревого движения несжимаемой жидкости при отсутствии массовых сил (что мы будем всегда считать, если не сделано особой оговорки) давление p определяется из интеграла Бернулли

$$p + \frac{\rho v^2}{2} = C, \tag{3 19}$$

то ясно, что давление будет одинаково в точках окружности C, симметричных как относительно оси Ox, так и относительно оси Oy. А тогда очевидно, что силы давления, приложенные к элементам окружности C, взаимно уравновешиваются.

Таким образом поступательный бесциркуляционный поток идеальной жидкости при принятом допущении о безотрывности обтекания не оказывает на круговой цилиндр никакого результирующего давления.

В часто циркуляционном установившемся потоке

$$w = \frac{1}{2\pi i}\ln z$$

все частицы жидкости движутся по концентрическим окружностям, причем каждая частица движется равномерно со скоростью

$$v = \frac{|\Gamma|}{2\pi r}.$$

Частицы, лежавшие в некоторый начальный момент на радиусе AB, расположатся через некоторое время по кривой $A'B'$ (рис. 91), уравнение которой

$$r^2\theta = \text{const}$$

Очевидно, что чисто циркуляционный поток не оказывает никакого результирующего давления при обтекании кругового цилиндра.

Если на поступательный поток, обтекающий неподвижный цилиндр, наложить чисто циркуляционный поток, то получающееся в результате течение утрачивает симметрию по отношению к прямой, проходящей через центр цилиндра параллельно скорости потока в бесконечности. В этом случае комплексный потенциал течения будет, как это следует из (3.13),

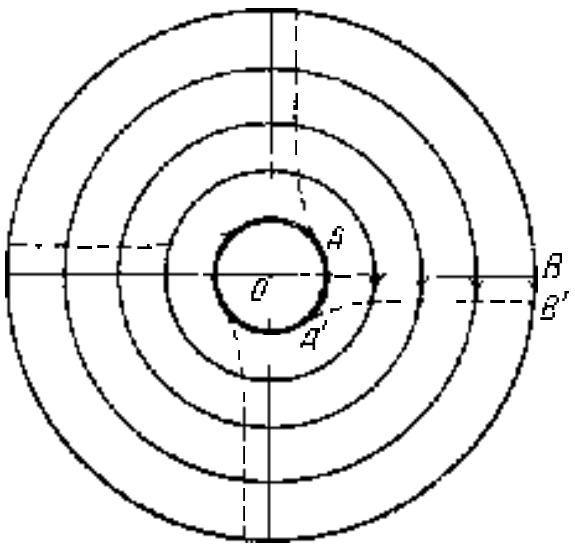

Рис. 91

$$w = U\left(z - \frac{a^2}{z}\right) - \frac{i\Gamma}{2\pi}\ln z \quad (3.20)$$

где U — скорость в бесконечности, направленная вдоль Ox, и Γ — циркуляция скорости при обходе вокруг цилиндра в положительном направлении. В зависимости от соотношения абсолютных величин Γ и U установившееся течение будет иметь различный вид. Чтобы исследовать картину течения, определим те точки течения, в которых скорость равна нулю, такие точки мы будем называть *критическими*. Эти точки определяются квадратным уравнением

$$\bar{v} = \frac{dw}{dz} = U - \frac{Ua^2}{z^2} - \frac{i\Gamma}{2\pi}\frac{1}{z} = 0,$$

откуда

$$z = \frac{i\Gamma}{4\pi U} \pm \sqrt{-\left(\frac{\Gamma}{4\pi U}\right)^2 + a^2}. \quad (3.21)$$

Если $|\Gamma| > 4\pi Ua$, то обе критические точки лежат на мнимой оси: одна вне цилиндра на расстоянии от центра

$$z_1 = \left|\frac{\Gamma}{4\pi U}\right| + \sqrt{\left(\frac{\Gamma}{4\pi U}\right)^2 - a^2},$$

другая внутри, на расстоянии

$$z_2 = \left|\frac{\Gamma}{4\pi U}\right| - \sqrt{\left(\frac{\Gamma}{4\pi U}\right)^2 - a^2},$$

В этом случае все частицы жидкости, лежащие на мнимой оси внутри интервала (z_1, ai) при $\Gamma > 0$ или внутри интервала $(z_2, -ai)$ при $\Gamma < 0$ будут описывать замкнутые овальные траектории, окружающие цилиндр (рис. 92).

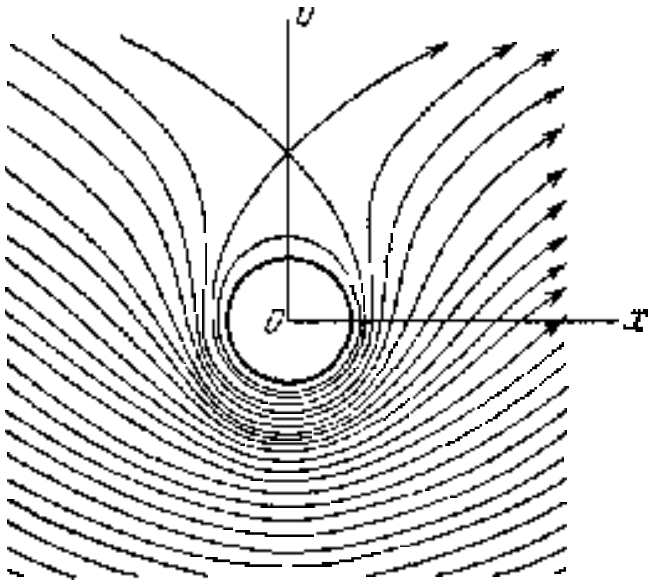

Рис. 92.

Если $|\Gamma| < 4\pi U a$, то обе критические точки расположатся на контуре цилиндра (рис. 93), так как в этом случае формула (3.21) даст:

$$|z| = a$$

и замкнутых траекторий в потоке не будет.

Если $|\Gamma| = 4\pi U a$, то мы получаем промежуточный случай: будет одна критическая точка, лежащая на контуре (рис. 94):

$$z = \frac{i\Gamma}{4\pi U} = \pm ai,$$

причем имеем знак $+$ при $\Gamma > 0$, $-$ при $\Gamma < 0$.

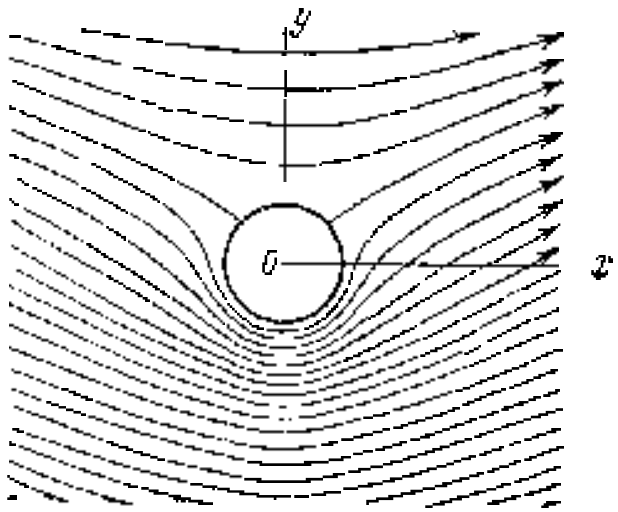

Рис. 93.

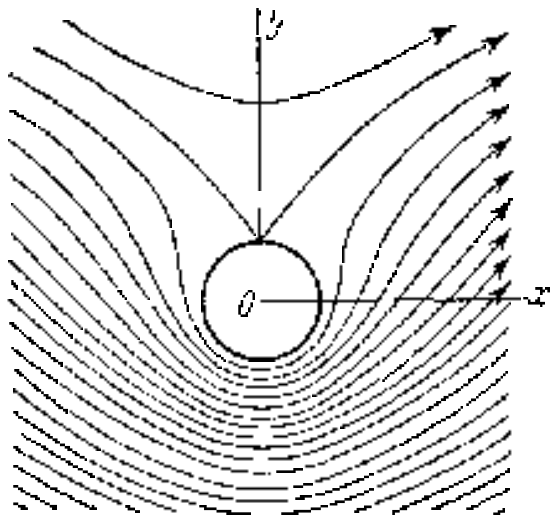

Рис. 94.

Переходя к вычислению проекций X и Y результирующего давления на слой единичной высоты, вырезаемый в обтекаемом цилиндре двумя плоскостями, параллельными плоскости течения, воспользуемся

интегралом Бернулли (3.19), тогда получим

$$X = -\oint p\cos(n, x)\,ds = \frac{\rho a}{2}\int_0^{2\pi} v^2\cos\theta\,d\theta - Ca\int_0^{2\pi}\cos\theta\,d\theta =$$

$$= \frac{\rho a}{2}\int_0^{2\pi} v^2\cos\theta\,d\theta,$$

$$Y = -\oint p\cos(n, y)\,ds = \frac{\rho a}{2}\int_0^{2\pi} v^2\sin\theta\,d\theta - Ca\int_0^{2\pi}\sin\theta\,d\theta =$$

$$= \frac{\rho a}{2}\int_0^{2\pi} v^2\sin\theta\,d\theta,$$

где n — направление внешней нормали и ds — элемент дуги кругового контура, так что

$$\cos(n, x) = \cos\theta, \quad \cos(n, y) = \sin\theta, \quad ds = a\,d\theta.$$

На контуре цилиндра скорость будет складываться из скорости (3.18) и скорости $\Gamma/2\pi a$ чисто циркуляционного потока, так что

$$v^2 = \left(2U\sin\theta - \frac{\Gamma}{2\pi a}\right)^2$$

и поэтому

$$\left.\begin{aligned} X &= \frac{\rho a}{2}\left[4U^2\int_0^{2\pi}\sin^2\theta\cos\theta\,d\theta - 2\frac{U\Gamma}{\pi a}\int_0^{2\pi}\sin\theta\cos\theta\,d\theta - \right.\\ &\qquad \left. + \frac{\Gamma^2}{4\pi^2a^2}\int_0^{2\pi}\cos\theta\,d\theta\right] = 0,\\ Y &= \frac{\rho a}{2}\left[4U^2\int_0^{2\pi}\sin^2\theta\,d\theta - 2\frac{U\Gamma}{\pi a}\int_0^{2\pi}\sin^2\theta\,d\theta + \right.\\ &\qquad \left. + \frac{\Gamma^2}{4\pi^2a^2}\int_0^{2\pi}\sin\theta\,d\theta\right] = -\rho U\Gamma \end{aligned}\right\} \qquad (3.22)$$

Таким образом поступательный поток с циркуляцией скорости оказывает на тело давление, направленное *перпендикулярно* к скорости потока в бесконечности. Чтобы точнее определить направление

вектора результирующего давления $\boldsymbol{R}$, заметим, что при $\Gamma > 0$ будет $Y < 0$, а при $\Gamma < 0$ будет $Y > 0$, в обоих случаях нужно повернуть на прямой угол навстречу циркуляции вектор скорости потока в бесконечности, чтобы получить направление вектора $\boldsymbol{R}$.

Этот парадоксальный результат возникновения результирующего давления в составном потоке при отсутствии такового в составляющих его потоках — чисто поступательном и чисто циркуляционном находит свое объяснение в асимметрии течения, получающегося при сложении этих потоков. Считая, например, циркуляцию положительной и взяв для сравнения две точки пересечения контура цилиндра с осью Oy, в которых векторы скоростей составляющих потоков коллинеарны, мы видим, что в верхней точке, где эти скорости противоположны по направлению, результирующая скорость окажется меньше по величине результирующей скорости в нижней точке контура, где величины составляющих скоростей складываются арифметически. Поэтому, как это следует из интеграла Бернулли, давление на цилиндр в верхней точке оказывается больше давления в нижней точке, что и объясняет возникновение результирующего давления, направленного вниз. Формула (3.22) является частным выражением формулы Кутта — Жуковского, применимой к любой форме безотрывно обтекаемого контура (см. ниже §§ 6 и 8).

§ 4. Нестационарное течение, вызываемое движущимся круговым цилиндром. Вернемся к течению, вызываемому движущимся круговым цилиндром радиуса a в безграничном объеме жидкости, которая покоится в бесконечности. Допустим, что движение возникло из состояния покоя; тогда по теореме Лагранжа течение жидкости будет потенциальным; пусть, кроме того, потенциал скорости φ будет однозначной функцией; это требование сводится к допущению, что циркуляция скорости по всякому контуру в жидкости равна нулю. По отношению к неподвижным осям Oxy течение является неустановившимся даже при равномерном движении цилиндра.

Выберем неподвижные оси Oxy так, чтобы в момент $t = 0$ центр цилиндра проходил через начало координат (рис. 89).

Так как в рассматриваемом случае $\Gamma = 0$, то из формулы (3.4) получаем для комплексного потенциала выражение

$$w = -\frac{(U + iV)\,a^2}{z - \zeta} = -\frac{\dfrac{d\bar{\zeta}}{dt}\,a^2}{z - \zeta},$$

где

$$\zeta = \xi(t) + i\eta(t)$$

есть радиус-вектор центра цилиндра и

$$\frac{d\zeta}{dt} = U + iV$$

вектор его скорости. В частности, при прямолинейном движении цилиндра вдоль оси Ox со скоростью u получим:

$$w' = -\frac{ua^2}{z - \zeta},$$

откуда

$$\varphi = -\frac{ua^2(x-\xi)}{(x-\xi)^2+y^2}; \quad \psi = -\frac{ua^2 y}{(x-\xi)^2+y^2}.$$

Кинетическая энергия T', заключенная в безграничном слое жидкости единичной высоты, может быть вычислена по формуле (13.7) главы четвертой

$$T' = -\frac{1}{2}\rho \oint \varphi \, d\psi.$$

Вычисление дает:

$$T' = \frac{1}{2}\rho u^2 a^2 \int_0^{2\pi} \cos^2\theta \, d\theta = \frac{1}{2}\pi\rho a^2 u^2 = \frac{1}{2} M' u^2,$$

где M' — масса вытесненной жидкости в объеме, приходящемся на единицу длины цилиндра. Полная кинетическая энергия системы из цилиндра и жидкости будет:

$$T + T' = \frac{1}{2}(M + M')u^2,$$

где M — масса цилиндра.

Применение закона живой силы приводит нас к равенству

$$(M + M')u\,du = F\,ds = Fu\,dt$$

или

$$M\frac{du}{dt} = F - M'\frac{du}{dt},$$

где F — внешняя сила, приложенная к цилиндру и действующая в направлении оси Ox.

Последнее равенство показывает, что цилиндр испытывает силу сопротивления $M'\,du/dt$ только при ускорении своего движения; при равномерном прямолинейном движении цилиндра сопротивление исчезает. Движение цилиндра под действием внешних сил происходит так, как если бы жидкость отсутствовала, но цилиндр приобрел добавочную массу, равную массе вытесняемой жидкости.

§ 5. Общие выражения для гидродинамических реакций при установившемся течении. Формула Блазиуса — Чаплыгина. Обратимся к установлению общих формул для главного вектора и главного момента сил гидродинамических давлений, приложенных к неподвижному цилиндру произвольной формы при обтекании его установившимся потоком несжимаемой жидкости. При этом мы сначала не будем делать предположения о существовании потенциала скоростей,

считая что обтекание безотрывным. Если по аналогии с понятием комплексной скорости ввести в рассмотрение комплексное давление $\bar{R}$ потока на тело, определяя $\bar{R}$ как зеркальное отражение главного вектора R сил гидродинамических давлений от действительной оси то

$$\bar{R} = X - iY = -\oint_C p\,[\cos(\widehat{n, x}) - i\cos(\widehat{n, y})]\,ds =$$

$$= -\oint_C p\,(\sin\theta - i\cos\theta)\,ds = -i\oint_C p e^{i\theta}\,ds,$$

где n — направление внешней нормали к контуру C тела, а θ — угол между элементом контура ds и осью Ox (рис. 68). Заметив, что

$$dz = dx + i\,dy = ds(\cos\theta + i\sin\theta) = e^{i\theta}\,ds,$$

$$d\bar{z} = dx - i\,dy = ds(\cos\theta - i\sin\theta) = e^{-i\theta}\,ds$$

и применяя интеграл Бернулли

$$p = c - \frac{1}{2}\rho v^2$$

имеющий место вдоль контура тела при безотрывном обтекании, и предположении отсутствия массовых сил, находим

$$\bar{R} = -ic\oint_C d\bar{z} + \frac{i\rho}{2}\oint_C v^2\,d\bar{z} - \frac{i\rho}{2}\oint_C v^2\,d\bar{z}.$$

Заменяя далее, что $d\bar{z} = e^{-i\theta}\,dz$, получаем

$$\bar{R} = \frac{i\rho}{2}\oint_C (ve^{-i\theta})^2\,dz.$$

Но при безотрывном обтекании вектор скорости течения на контуре направлен по касательной к контуру C, следовательно

$$ve^{-i\theta} = v\cos\theta - iv\sin\theta = v_x - iv_y$$

представляет собой комплексную скорость $\bar{v}$. Таким образом, мы приходим к первой формуле Блазиуса — Чаплыгина:

$$R = X - iY = \frac{i\rho}{2}\oint_C \bar{v}^2\,dz. \qquad (5.1)$$

Вычисляя главный момент L сил гидродинамических давлений относительно оси, перпендикулярной плоскости течения и проходящей через начало координат имеем:

$$L = -\oint_C p\,[x\cos(\widehat{n, y}) - y\cos(\widehat{n, x})]\,ds =$$

$$= \oint_C p\,(x\cos\theta + y\sin\theta)\,ds = \oint_C p\,(x\,dx + y\,dy).$$

Воспользовавшись снова интегралом Бернулли и замечая что

$$c \oint_C x\,dx + y\,dy - \frac{1}{2} c \oint_C d(x^2 + y^2) = 0,$$

мы приходим к выражению

$$L = -\frac{\rho}{2} \oint_C v^2 (x\,dx + y\,dy) = \operatorname{Re}\left(-\frac{1}{2}\rho \oint_C v^2 z\,d\bar{z}\right),$$

так как

$$z\,d\bar{z} = (x + iy)(dx - i\,dy) = x\,dx + y\,dy - i(y\,dx - x\,dy).$$

Но, как было отмечено выше,

$$v^2\,d\bar{z} = \bar{v}^2 dz,$$

и, таким образом, мы приходим ко второй формуле Блазиуса—Чаплыгина:

$$L = \operatorname{Re}\left(-\frac{1}{2}\rho \oint_C \bar{v}^2 z\,dz\right). \tag{5.2}$$

Если теперь считать поток, обтекающий тело, потенциальным и если известно аналитическое выражение для комплексного потенциала течения

$$w = \varphi - i\psi = f(z),$$

то формулы Блазиуса — Чаплыгина, принимающие в этом случае вид

$$R = X - iY = \frac{1}{2} i\rho \oint_C \left(\frac{dw}{dz}\right)^2 dz, \tag{5.3}$$

$$L = \operatorname{Re}\left[-\frac{1}{2}\rho \oint_C \left(\frac{dw}{dz}\right)^2 z\,dz\right], \tag{5.4}$$

дают возможность просто найти гидродинамические реакции потока на тело.

§ 6. Эффективное вычисление гидродинамических реакций при установившемся течении. Формула Кутта—Жуковского. Допустим, что течение, получаемое при внесении тела в поступательный поток, потенциально везде вне тела и может быть осуществлено путем замены тела известным нам наперед расположением особых точек течения — вихревых, источников и диполей, лежащих внутри контура C, ограничивающего тело; кроме того будем считать, что

алгебраическая сумма обильностей всех источников равна нулю, что соответствует тому факту, что поток скорости через контур тела должен равняться нулю. Ограничиваясь для простоты выкладок дискретным расположением особых точек, будем считать, что рассматриваемое течение определяется заданием:

n простых источников лежащих в точках $a_1, a_2, \ldots, a_n$ с обильностями $q_1, q_2, \ldots, q_n$, причем $\sum_{k=1}^{n} q_k = 0$;

m вихрей лежащих в точках $b_1, b_2, \ldots, b_m$ с циркуляциями $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_m$;

p дублетов лежащих в точках $c_1, c_2, \ldots, c_p$ с моментами

$$M_k e^{\gamma_k i} \quad (k = 1, 2, \ldots, p).$$

Тогда комплексный потенциал течения представится в виде

$$w = \bar{v}_\infty z + \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{n} q_k \ln (z - a_k) - \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{p} \frac{M_k e^{\gamma_k i}}{z - c_k} - \frac{i}{2\pi} \sum_{k=1}^{m} \Gamma_k \ln (z - b_k), \tag{6.1}$$

а комплексная скорость

$$\bar{v} = \bar{v}_\infty + \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{n} \frac{q_k}{z - a_k} + \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{p} \frac{M_k e^{\gamma_k i}}{(z - c_k)^2} - \frac{i}{2\pi} \sum_{k=1}^{m} \frac{\Gamma_k}{z - b_k}. \tag{6.2}$$

Так как dw/dz регулярно во всей внешней по отношению к контуру C части плоскости z, включая и точку $z = \infty$, то вычисление контурных интегралов (5.3) и (5.4) сводится к нахождению вычетов подынтегральных функций для точки $z = \infty$. В окрестности же последней точки комплексная скорость представится, очевидно, разложением

$$\frac{dw}{dz} = \bar{v}_\infty - \frac{A_1}{z} + \frac{A_2}{z^2} + \ldots \tag{6.3}$$

Следовательно, степенные разложения подынтегральных функций в окрестности бесконечно удаленной точки будут иметь вид

$$\left(\frac{dw}{dz}\right)^2 = \bar{v}_\infty^2 + \frac{2A_1 \bar{v}_\infty}{z} + \frac{A_1^2 + 2A_2 \bar{v}_\infty}{z^2} + \ldots$$

$$\left(\frac{dw}{dz}\right)^2 z = \bar{v}_\infty^2 z + 2A_1 \bar{v}_\infty - \frac{A_1^2 - 2A_2 \bar{v}_\infty}{z} + \ldots,$$

и по известной теореме о вычетах мы будем иметь:

$$\oint_C \left(\frac{dw}{dz}\right)^2 dz = 4\pi i A_1 \bar{v} \tag{6.4}$$

$$\oint_C \left(\frac{dw}{dz}\right)^2 z\,dz = 2\pi i\left(A_1^2 + 2A_2\bar{v}\right). \tag{6.5}$$

Для вычисления коэффициентов A_1 и A_2 разложения (6.3) достаточно разложить в окрестности бесконечно удаленной точки каждое слагаемое в (6.2), например

$$\frac{1}{z-\bar{a}_k} = \frac{1}{z} + \frac{\bar{a}_k}{z^2} + \frac{\bar{a}_k^2}{z^3} + \ldots;$$

тогда найдем без труда:

$$A_1 = \frac{1}{2\pi i}\left(\sum_{k=1}^{n} q_k - i\sum_{k=1}^{m}\Gamma_k\right) = -\frac{i\Gamma}{2\pi}, \quad \text{где} \quad \Gamma = \sum_{k=1}^{m}\Gamma_k,$$

$$A_2 = \frac{1}{2\pi i}\left(\sum_{k=1}^{n} q_k a_k + \sum_{k=1}^{p} M_k e^{\alpha_k i} - i\sum_{k=1}^{m}\Gamma_k b_k\right) = \frac{1}{2\pi i}\left(M - i\sum_{k=1}^{m}\Gamma_k b_k\right),$$

где выражение

$$M = \sum_{k=1}^{n} q_k a_k + \sum_{k=1}^{p} M_k e^{\alpha_k i}$$

может быть названо суммарным моментом источников и диполей, заключенных внутри тела.

Таким образом, выражения (6.4) и (6.5) получают вид

$$\oint_C \left(\frac{dw}{dz}\right)^2 dz = 2\pi\Gamma\bar{v}_\infty,$$

$$\oint_C \left(\frac{dw}{dz}\right)^2 z\,dz = 2\pi v_\infty \sum_{k=1}^{m}\Gamma_k b_k + i\left(2M\bar{v}_\infty - \frac{\Gamma^2}{2\pi}\right).$$

Вставляя эти выражения в формулы (5.5) и (5.4), получаем:

$$\bar{R} = X - iY = i\rho\Gamma\bar{v}_\infty; \tag{6.6}$$

$$L = \operatorname{Re}\left[-\rho\bar{v}_\infty \sum_{k=1}^{m}\Gamma_k b_k - i\rho M\bar{v}_\infty\right]. \tag{6.7}$$

Первая из этих формул носит название формулы Кутта — Жуковского, она показывает, что вектор $\bar{R}$ (сопряженный с главным

вектором реакций $\bar{R}$) повернут относительно вектора комплексной скорости $\bar{v}_\infty$ (сопряженного с вектором скорости $\bar{v}_\infty$) на прямой угол в направлении, знак которого одинаков со знаком циркуляции Γ. Если мы от векторов $\bar{R}$ и $\bar{v}_\infty$ перейдем к их зеркальным отражениям от оси Ox R и v_∞, то последние будут также перпендикулярны, причем изменится лишь направление поворота от v_∞ к R. Таким образом,

$$R = -i\rho\Gamma v_\infty, \tag{6.8}$$

и направление вектора R определится поворотом вектора v_∞ на прямой угол навстречу циркуляции, т. е. знак поворота будет обратен знаку циркуляции.

§ 7. Применение метода конформного отображения. Полученное выше общее решение задачи об обтекании поступательным потоком кругового цилиндра позволяет решить задачу об обтекании произвольного контура, если только известно конформное отображение внешности этого контура на внешность круга. Обозначим через D область плоскости z, расположенную вне рассматриваемого контура C и содержащую внутри себя бесконечно удаленную точку плоскости z. Введем в рассмотрение вспомогательную плоскость $\zeta = \xi - i\eta$ и обозначим через K окружность с центром в начале координат этой

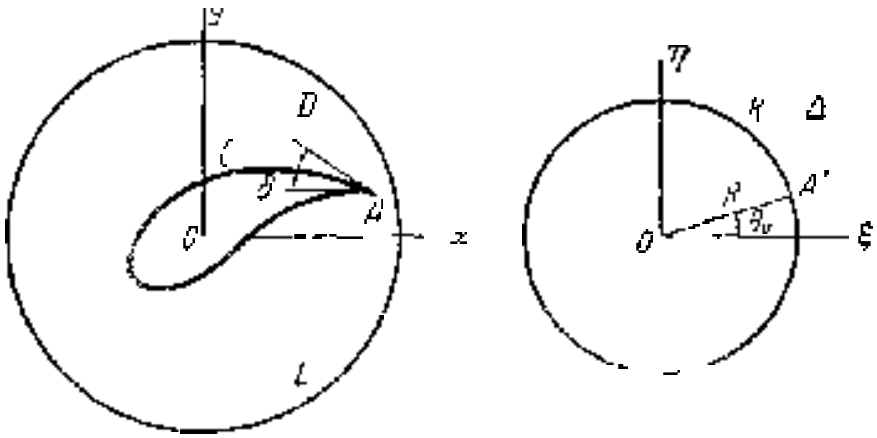

Рис. 95.

плоскости и через R — радиус этой окружности. Область плоскости ζ, расположенную вне K и содержащую бесконечно удаленную точку, обозначим через Δ (рис. 95).

Между областями D и Δ можно установить взаимно однозначное конформное соответствие при помощи однозначных аналитических функций

$$z = f(\zeta), \quad \zeta = F(z) \tag{7.1}$$

Это соответствие устанавливается единственным образом, если потребовать, чтобы точки $z = \infty$ и $\zeta = \infty$ соответствовали друг другу и чтобы значение производной $dz/d\zeta$ в точке $\zeta = \infty$ было положительным

Аналитическая функция $f(\zeta)$ голоморфна в области Δ, за исключением точки $\zeta = \infty$, в которой она имеет, очевидно, полюс первого порядка. Поэтому эта функция должна разлагаться в ряд Лорана следующего вида:

$$z = k\zeta + k_0 + \frac{k_1}{\zeta} + \frac{k_2}{\zeta^2} + \ldots, \tag{7.2}$$

где $k > 0$, согласно принятому выше условию о значении производной $dz/d\zeta$ в бесконечно удаленной точке. Предыдущий ряд сходится в любой конечной точке области Δ. Если в плоскости z провести окружность l с центром в начале координат, целиком содержащую внутри себя контур C, то в области, расположенной вне l, функция $F(z)$ тоже должна разлагаться в ряд Лорана.

$$\zeta = lz + l_0 + \frac{l_1}{z} + \frac{l_2}{z^2} + \ldots. \tag{7.3}$$

Этот ряд является, очевидно, обращением предыдущего ряда, и его коэффициенты легко могут быть выражены через k, k_0, k_1, ..., например:

$$l = \frac{1}{k}, \quad l_0 = -\frac{k_0}{k}, \quad l_1 = -k_1. \tag{7.4}$$

Заметим, что радиус R круга K можно брать произвольно, и тогда определится значение действительной постоянной k. Можно было бы принять $R = 1$, можно, наоборот, принять, что $k = 1$, и тогда значение R полностью определится.

Рассмотрим теперь задачу о безотрывном обтекании контура C потенциальным потоком, имеющим на бесконечности скорость

$$v_\infty = U + iV = |v_\infty| e^{i\alpha}. \tag{7.5}$$

Соответствующий комплексный потенциал обозначим, как обычно, через

$$w(z) = \varphi + i\psi.$$

Подставив сюда вместо z его выражение через ζ

$$z = f(\zeta),$$

мы получим функцию

$$W(\zeta) = w[f(\zeta)] = \Phi + i\Psi.$$

Рассмотрим свойства этой функции. Она является очевидно аналитической функцией от ζ в области Δ, поэтому ее можно рассматривать как комплексный потенциал некоторого фиктивного течения, происходящего в плоскости ζ в области Δ, т. е. вне круга K. Комплексная скорость в этом течении определяется формулой

$$\frac{dW}{d\zeta} = \frac{dw}{dz}\frac{dz}{d\zeta}.$$

В бесконечно удаленной точке $\zeta = \infty$ мы имеем $z = \infty$ и

$$\left(\frac{dw}{dz}\right)_{z=\infty} = U - iV = \bar{v}_\infty, \quad \left(\frac{dz}{d\zeta}\right)_{\zeta=\infty} = k,$$

следовательно

$$\left(\frac{dW}{d\zeta}\right)_{\zeta=\infty} = k\bar{v}_\infty;$$

значит, в бесконечно удаленных частях плоскости ζ мы имеем поступательный поток со скоростью

$$kv_\infty = k(U + iV) = k|v_\infty|e^{i\alpha}.$$

С другой стороны, очевидно, что в соответствующих точках плоскостей z и ζ имеют место равенства

$$w(z) = W(\zeta), \quad \varphi = \Phi; \quad \psi = \Psi,$$

и так как на контуре C функция ψ имеет постоянное значение (условие обтекания), то значит на контуре K функция Ψ будет иметь тоже постоянное значение, и, следовательно, контур K является линией тока для течения определяемого комплексным потенциалом $W(\zeta)$.

Из сказанного ясно, что $W(\zeta)$ определяет обтекание круга K потенциальным потоком имеющим на бесконечности скорость kv_∞. Эта задача была решена в § 3; следовательно, $W(\zeta)$ должна иметь следующий вид:

$$W(\zeta) = k\bar{v}_\infty\zeta + \frac{kv_\infty R^2}{\zeta} + \frac{\Gamma}{2\pi i}\ln\zeta. \tag{7.6}$$

Подставляя сюда

$$\zeta = F(z),$$

мы получаем комплексный потенциал

$$w(z) = kv_\infty F(z) + \frac{kv_\infty R^2}{F(z)} + \frac{\Gamma}{2\pi i}\ln F(z), \tag{7.7}$$

дающий общее решение задачи об обтекании контура C.

В решение вошла произвольная постоянная Γ, определяющая циркуляцию по контуру C. Для случая гладкого контура, не имеющего угловых точек значение циркуляции должно быть задано; как раз такой случай мы имеем в задаче обтекания круга.

Профили крыльев, употребляющихся в авиации, имеют обычно острую кромку (рис. 95). В этом случае при произвольно выбранном значении циркуляции Γ скорость в острой кромке получится бесконечной и только при одном совершенно определенном значении Γ скорость в острой кромке останется конечной. Н. Е. Жуковский предложил так именно и определять значение циркуляции Γ, чтобы

скорость в острой кромке оставалась конечной. Физический смысл этой гипотезы Н Е. Жуковского можно пояснить следующим образом:

Пусть контур C, находившийся сначала в покое, начинает двигаться поступательно и равномерно в жидкости, покоящейся на бесконечности По теореме Томсона, циркуляция скорости по жидкому контуру L, охватывающему контур C, должна сохранять свое значение с течением времени и, следовательно, должна все время иметь значение, равное нулю. Вообще говоря, нулевое значение циркуляции не удовлетворяет условию конечности скорости в острой кромке A контура, так что скорость вблизи точки A будет иметь очень большое значение Заметим теперь, что действительные жидкости всегда обладают вязкостью. Как мы увидим во второй части курса, даже при малой вязкости жидкости нельзя пренебрегать действием сил вязкости вблизи стенок в данном случае вблизи контура C В результате действия этих сил в тонком, прилегающем к контуру C слое жидкости образуются вихри которые срываются затем с контура внутрь жидкости Если теперь рассмотреть два контура L_1 и L_2 (рис. 96) и обозначить через $-\Gamma'$ циркуляцию по контуру L_2, то ясно, что циркуляция по контуру L_1, охватывающему контур C, будет равна Γ', так как циркуляция по всему контуру $L = L_1 + L_2$, как мы видели выше равна нулю (этот контур целиком лежит внутри жидкости где действием малых сил вязкости мы можем пренебречь). Процесс срыва вихрей с преобладанием вихрей одного знака будет продолжаться до тех пор, пока циркуляция Γ' не достигнет такого значения Γ, при котором скорость в задней кромке контура C будет конечной. Сорвавшиеся с контура вихри при движении контура останутся далеко позади него Таким образом объясняется установление определенного значения циркуляции при поступательном равномерном движении контура C. Очевидно, то же самое рассуждение применимо и к задаче об обтекании контура C.

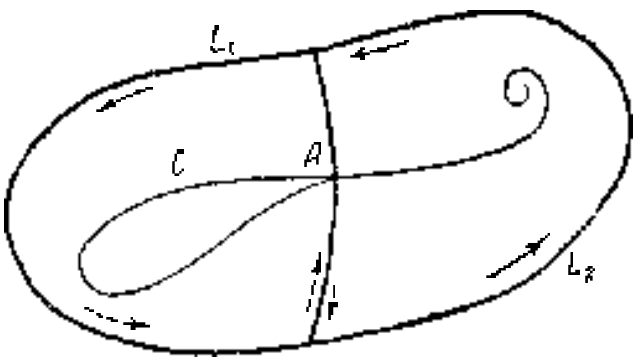

Рис 96

Определим теперь, исходя из гипотезы Жуковского, значение циркуляции Γ для контура C, имеющего острую кромку A. Пусть точке A соответствует в плоскости ζ точка A' круга K

$$\zeta_0 = Re^{i\beta}. \tag{7 8}$$

Если касательные к контуру C в точке A образуют угол β (рис. 95), то в точке A' преобразование перестанет быть конформным, так как угол между двумя касательными к кругу K в точке A' равен π,

а внешний угол между касательными к контуру C в точке A равен $2\pi - \delta$, то с точностью до малых высшего порядка преобразование области Δ в область D вблизи точки A' дается формулой

$$z - z_A = M(\zeta - \zeta_0)^{\frac{2\pi - \delta}{\pi}};$$

отсюда ясно, что при $\delta < \pi$ в точке A'

$$\left(\frac{dz}{d\zeta}\right)_{\zeta=\zeta_0} = 0.$$

По правилу дифференцирования сложных функций

$$\frac{dW}{d\zeta} = \frac{dw}{dz}\,\frac{dz}{d\zeta}.$$

В точке A' первый множитель справа остается ограниченным по модулю, а второй как только что установлено, обращается в нуль, следовательно,

$$\left(\frac{dW}{d\zeta}\right)_{\zeta=\zeta_0} = 0.$$

Иными словами, точка A' должна быть одной из критических точек фиктивного течения в плоскости ζ.

Подставив в равенство

$$\frac{dW}{d\zeta} = k\bar{v}_\infty - \frac{kv_\infty R^2}{\zeta^2} + \frac{\Gamma}{2\pi i\zeta} \tag{7.9}$$

значение (7.8) и приравняв результат нулю, без труда найдем:

$$\Gamma = 2\pi ikR(v_\infty e^{-i\theta_0} - \bar{v}_\infty e^{i\theta_0}). \tag{7.10}$$

Воспользовавшись, наконец, тригонометрическим представлением

$$v_\infty = |v_\infty| e^{i\alpha}, \quad \bar{v}_\infty = |v_\infty| e^{-i\alpha},$$

получим

$$\Gamma = 2\pi ikR|v_\infty|[e^{i(\alpha-\theta_0)} - e^{-i(\alpha-\theta_0)}] = -4\pi kR|v_\infty|\sin(\alpha - \theta_0). \tag{7.11}$$

Итак для контура с острой кромкой циркуляция Γ определяется по формуле

$$\Gamma = 4\pi kR|v_\infty|\sin(\theta_0 - \alpha). \tag{7.12}$$

Как видим вся трудность в решении задачи о безотрывном обтекании контура поступательным потоком сводится к отысканию конформного отображения области D на внешность круга.

Прежде чем переходить к примерам, вернемся к вопросу о вычислении сил, действующих на контур C.

§ 8. Реакции на контур. Мы будем исходить из общих формул Чаплыгина — Блазиуса для сил, действующих на контур C при обтекании его потенциальным потоком

$$\overline{R} = X - iY = \frac{i\rho}{2}\oint_C \left(\frac{dw}{dz}\right)^2 dz, \quad L = \operatorname{Re}\left[-\frac{\rho}{2}\oint_C z\left(\frac{dw}{dz}\right)^2 dz\right]. \quad (8.1)$$

Так как функция dw/dz голоморфна вне контура C, то интегрирование в предыдущих формулах можно производить по любому контуру, охватывающему контур C. Если мы возьмем в плоскости z окружность L с центром в начале координат, целиком содержащую внутри себя контур C, то на L и вне L мы должны иметь разложение в ряд Лорана вида

$$\frac{dw}{dz} = A_0 + \frac{A_1}{z} + \frac{A_2}{z^2} + \dots,$$

так как на бесконечности комплексная скорость имеет значение $\bar{v}_\infty$, то

$$A_0 = \bar{v}_\infty.$$

Для определения коэффициента A_1 заметим, что мы имеем соотношение

$$2\pi i A_1 = \oint_l \frac{dw}{dz}dz = \oint_L dw;$$

если L' есть преобразование L в плоскости ζ, то из (7.9) ясно, что мы имеем также

$$\Gamma = \oint_{l'} \frac{dW}{d\zeta}d\zeta = \oint_{l'} dW.$$

Правые части этих двух формул тождественны, следовательно,

$$A_1 = \frac{\Gamma}{2\pi i},$$

и, значит,

$$\frac{dw}{dz} = \bar{v}_\infty - \frac{\Gamma}{2\pi i z} + \frac{A_2}{z^2} + \dots \quad (8.2)$$

Составляем

$$\left(\frac{dw}{dz}\right)^2 = \bar{v}_\infty^2 + \frac{\Gamma\bar{v}_\infty}{\pi i z} + \frac{2\bar{v}_\infty A_2 - \frac{\Gamma^2}{4\pi^2}}{z^2} + \dots$$

Теперь без труда получим, применяя теорему о вычетах:

$$\oint_L \left(\frac{dw}{dz}\right)^2 dz = 2\pi i\left(-\frac{\Gamma\bar{v}_\infty}{\pi i}\right) = -2\Gamma\bar{v}_\infty;$$

$$\oint_L z\left(\frac{dw}{dz}\right)^2 dz = 2\pi i\left(2v_\infty A_2 - \frac{\Gamma^2}{4\pi^2}\right).$$

и по формулам (8.1).

$$\bar{R} = X - iY = i\rho\Gamma\bar{v}_\infty; \tag{8.3}$$

$$L = \operatorname{Re}\{-2\pi\rho\bar{v}_\infty A_2 i\}. \tag{8.4}$$

Первая из этих формул есть уже известная нам формула Кутта — Жуковского, доказанная теперь для общего случая.

Переходя к сопряженным значениям получим:

$$R = X + iY = -i\rho\Gamma v_\infty, \tag{8.5}$$

т. е. сила, действующая на контур, равна произведению из плотности, циркуляции скорости и скорости на бесконечности

$$P = \rho|\Gamma_1||v_\infty|, \tag{8.6}$$

а ее направление получается из направления скорости на бесконечности путем поворота последнего на прямой угол навстречу циркуляции.

Если контур C имеет острую кромку, то циркуляция Γ определится по формуле (7.12), и мы получим из (8.6):

$$P = 4\pi\rho kR|v_\infty|^2|\sin(\beta_0 - \alpha)|. \tag{8.7}$$

Для определения момента относительно начала координат действующих на контур сил достаточно найти коэффициент A_2 в разложении (8.2) комплексной скорости. Но

$$\frac{dw}{dz} = \frac{dW}{d\zeta}\frac{d\zeta}{dz} = \left(k\bar{v}_\infty + \frac{\Gamma}{2\pi i\zeta} - \frac{kv_\infty R^2}{\zeta^2}\right)\frac{d\zeta}{dz};$$

воспользовавшись формулой (7.3) и значениями коэффициентов (7.4), получим:

$$\zeta = lz + l_0 + \frac{l_1}{z} + \dots,$$

$$\frac{1}{\zeta} = \frac{1}{lz} - \frac{l_0}{l^2z^2} + \dots = \frac{k}{z} + \frac{k_0 k}{z^2} + \dots,$$

$$\frac{1}{\zeta^2} = \frac{1}{l^2z^2} + \dots = \frac{k^2}{z^2} + \dots,$$

$$\frac{d\zeta}{dz} = l - \frac{l_1}{z^2} + \dots = \frac{1}{k} + \frac{k_1}{z^2} + \dots;$$

поэтому после простых вычислений найдем:

$$\frac{dw}{dz} = \bar{v}_\infty + \frac{\Gamma}{2\pi lz} + \left(kk_1\bar{v}_\infty - k^2R^2v_\infty + \frac{\Gamma k_0}{2\pi l}\right)\frac{1}{z^2} + \dots$$

Итак,

$$A_2 = kk_1\bar{v}_\infty - k^2R^2v_\infty + \frac{\Gamma k_0}{2\pi l}.$$

Подставляя это значение в формулу (8.4), найдем:

$$L = \operatorname{Re}\left\{-2\pi i\rho k k_1 \bar{v}_\infty^2 - \rho\Gamma v_\infty k_0\right\}. \tag{8.8}$$

Рассмотрим теперь более подробно случай, когда контур C имеет острую кромку A.

Рассмотрим формулу конформного преобразования

$$z = k\zeta + k_0 + \frac{k_1}{\zeta} + \frac{k_2}{\zeta^2} + \dots$$

Точку плоскости z, имеющую координату k_0, обозначим через C_0 и назовем *конформным центром тяжести* (рис. 97). Так как

$$k_0 = \frac{1}{2\pi i}\oint_K z\frac{d\zeta}{\zeta},$$

то, полагая

$$\zeta = Re^{i\theta},$$

получим

$$k_0 = \frac{1}{2\pi}\oint_K z\,d\theta,$$

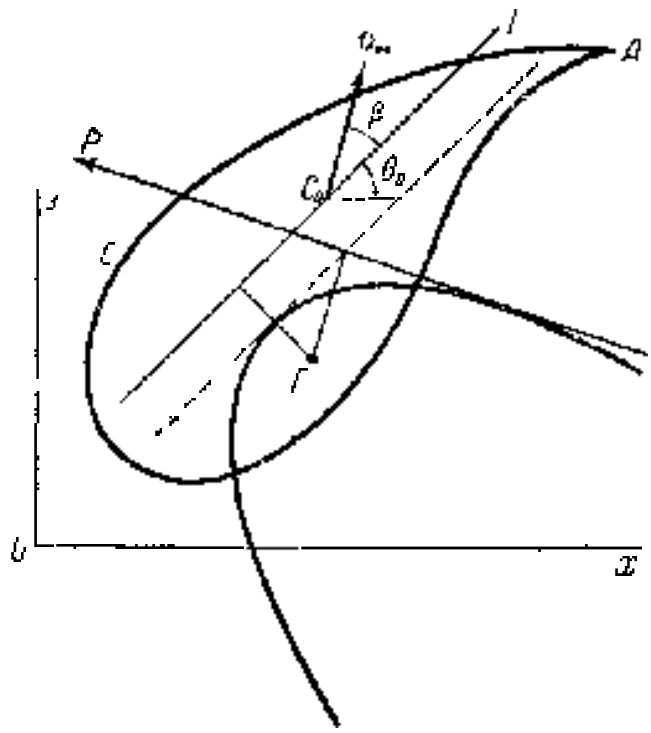

Рис. 97.

следовательно, точка C_0 является центром тяжести для контура C, по которому распределены массы так, что на элемент ds контура C приходится масса $R\,d\theta$, равная величине соответствующего элемента дуги окружности K. Отсюда ясно, что точка C_0 занимает одно и то же положение по отношению к контуру C при любом положении последнего в плоскости z.

Проведем через точку C_0 прямую $C_0 l$ под углом θ_0 к оси Ox и назовем ее *критической* или *первой осью контура*. Если поток на бесконечности параллелен критической оси, то $\alpha = \theta_0$, и по формуле (8.7) подъемная сила обращается в нуль, поэтому критическая ось может быть также названа *осью нулевой подъемной силы*.

Введя в рассмотрение угол

$$\beta = \alpha - \theta_0,$$

т. е. угол атаки по отношению к критической оси контура, перепишем формулу (8.7) в виде

$$P = 4\pi\rho k R\left|v_\infty\right|^2\left|\sin\beta\right|;$$

таким образом сила, действующая на контур, пропорциональна синусу угла атаки по отношению к критической оси контура.

Подставим теперь в выражение (8.8) для момента L следующие значения входящих туда величин:

$$v_\infty = |v_\infty| e^{-i\alpha}, \quad \Gamma = 2\pi i k R |v_\infty| [e^{i(\alpha-\theta_0)} - e^{-i(\alpha-\theta_0)}],$$

тогда получим

$$L = -2\pi\rho k |v_\infty|^2 \operatorname{Re}\{i(k_1 - k_0 R e^{i\theta_0}) e^{-2i\alpha} + i k_0 R e^{-i\theta_0}\}. \quad (8.9)$$

Перемещая контур C в плоскости z параллельно самому себе так, чтобы конформный центр тяжести C_0 попал в точку

$$k_1 = \frac{k_1}{R} e^{-i\theta_0}, \quad (8.10)$$

обозначим через F и назовем *фокусом контура* ту точку, твердо связанную с контуром C, которая будет теперь находиться в начале координат. Из предыдущей формулы найдем для момента сил относительно фокуса F выражение

$$L_F = -2\pi\rho k |v_\infty|^2 \operatorname{Re}\{i k_1 e^{-2i\theta_0}\}, \quad (8.11)$$

не зависящее от угла атаки α.

Отсюда вытекает следующая теорема С. А. Чаплыгина: *силы давления на контур могут быть приведены к силе Жуковского, приложенной в фокусе, и к паре с постоянным, т. е. не зависящим от угла атаки, моментом.*

§ 9. Парабола устойчивости. Повернем теперь контур C около фокуса F так, чтобы критическая ось была параллельна оси Ox. В этом случае угол θ_0 обращается в нуль, и формулы (7.12) и (8.7) принимают соответственно вид

$$\Gamma = -4\pi k R |v_\infty| \sin\alpha,$$
$$P = 4\pi\rho k R |v_\infty|^2 |\sin\alpha|.$$

Направление силы Жуковского мы знаем: оно перпендикулярно направлению скорости на бесконечности, остается найти линию действия силы. Найдем огибающую линий действия, соответствующих всевозможным углам атаки. Уравнение линии действия пишется так:

$$xY - yX = L_F, \quad (9.1)$$

но согласно (8.5)

$$X + iY = -i\rho\Gamma v_\infty = -i\rho\Gamma |v_\infty| e^{i\alpha},$$

следовательно,

$$X = \rho\Gamma |v_\infty| \sin\alpha = -4\pi\rho k R |v_\infty|^2 \sin^2\alpha, \quad (9.2)$$
$$Y = -\rho\Gamma |v_\infty| \cos\alpha = 4\pi\rho k R |v_\infty|^2 \sin\alpha\cos\alpha \quad (9.3)$$

Поэтому уравнение (9.1) принимает вид

$$x \sin \alpha \cos \alpha - y \sin^2 \alpha = \delta, \tag{9.4}$$

где

$$\delta = \frac{L_F}{4\pi\rho R |v_\infty|^2} = -\operatorname{Re}\left\{\frac{ik_1}{2R}\right\}. \tag{9.5}$$

Огибающая семейства прямых (9.4) получается по обычному правилу, дифференцирование по α дает:

$$x \cos 2\alpha + y \sin 2\alpha = 0.$$

Исключение α из полученных двух уравнений приводит к искомой огибающей

$$x^2 + y^2 = (2\delta - y)^2, \quad \text{или} \quad x^2 = 4\delta(\delta - y) \tag{9.6}$$

Это есть парабола с фокусом в точке F, для которой директрисой служит прямая

$$y = 2\delta,$$

параллельная оси Ox. Точка C_0, имеющая координату

$$k_0 = k_1/R, \tag{9.7}$$

лежит очевидно на этой прямой. Таким образом директрисой параболы (9.6), которая называется *параболой метацентров или параболой устойчивости*, является критическая ось контура, а ее фокусом—фокус контура. Имея параболу метацентров, достаточно провести касательную к ней, перпендикулярную к направлению скорости на бесконечности, чтобы получить линию действия силы действующей на контур. Но известно, что основание перпендикуляра, опущенного из фокуса параболы на касательную, лежит на касательной к параболе, проходящей через вершину параболы. Поэтому можно дать следующее простое правило построения линии действия силы: *через середину перпендикуляра из фокуса на директрису проведем прямую, параллельную директрисе, тогда линия действия силы будет проходить через точку пересечения этой прямой с прямой, параллельной направлению скорости на бесконечности и проходящей через фокус параболы и будет перпендикулярна направлению скорости на бесконечности.* То или другое направление силы на линии ее действия может быть определено либо по правилу Жуковского, либо из знака момента L_F. Отметим еще, что в частном случае, когда $L_F = 0$, сила всегда проходит через фокус F, так что в этом случае мы имеем постоянный *центр давления*.

Во избежание недоразумений подчеркнем еще раз, что формула (9.5) справедлива только в том частном случае, когда критическая ось параллельна оси Ox. В общем же случае произвольного расположе-

ния контура C мы должны воспользоваться формулой (8.11), откуда следует, что

$$\delta = \frac{L_F}{4\pi\rho R\,|v_\infty|^2} = -\operatorname{Re}\left\{\frac{ik_1}{2R}\,e^{-2i\theta_1}\right\}, \tag{9.8}$$

положение фокуса F определяется в общем случае равенством

$$z_F = k_0 - \frac{k_1}{R}\,e^{-i\theta_1}, \tag{9.9}$$

ибо $k_0 = zC_0$, а из (8.10) вытекает, что

$$z_C - z_F = \frac{k_1}{R}\,e^{-i\theta_1}.$$

§ 10. Обтекание эллиптического цилиндра. *а) Продольное обтекание.* Для того чтобы найти комплексный потенциал

$$w(z) = \varphi + i\psi,$$

где $z = x + yi$, и построить картину течения при обтекании цилиндра (рис. 98)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (a > b) \tag{10.1}$$

установившимся поступательным потоком, скорость которого в бесконечности U направлена по большой оси цилиндра, попытаемся найти

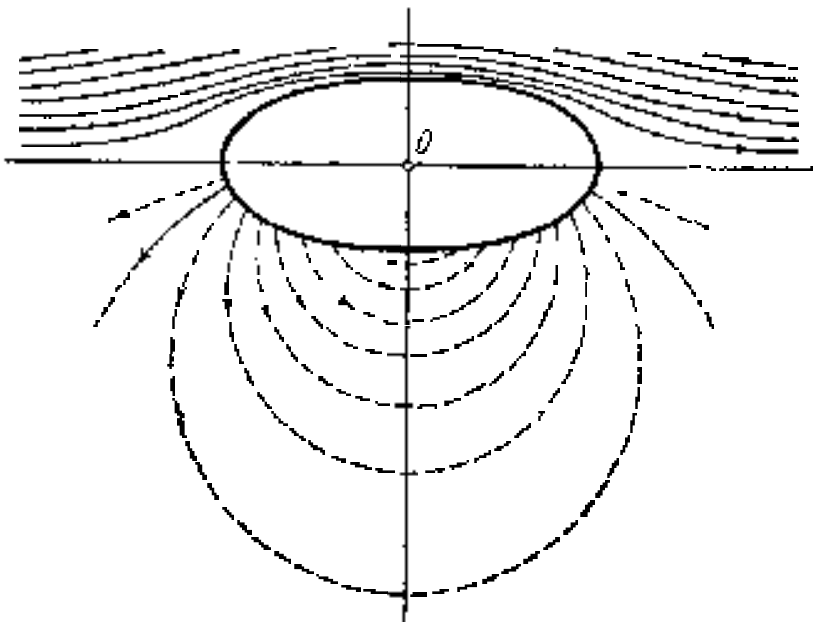

Рис. 98

такое конформное преобразование плоскости z в плоскость новой комплексной переменной ζ

$$z = f(\zeta),$$

чтобы контур эллиптического цилиндра в плоскости z перешел в контур круга некоторого радиуса в плоскости ζ с центром в точке $\zeta = 0$

и чтобы точка $z=\infty$ соответствовала точке $\zeta=\infty$; при этом внешняя часть плоскости z по отношению к цилиндру (10.1) будет соответствовать внешней же части плоскости ζ по отношению к круговому цилиндру. Построив по известным уже формулам комплексный потенциал $w(\zeta)$ течения при обтекании кругового цилиндра в плоскости ζ и совершив обратный переход

$$\zeta = F(z),$$

мы получим искомый потенциал $w[F(z)]$ течения в плоскости z.

Для указанной цели произведем прежде всего преобразование подобия

$$z = cz', \tag{10.2}$$

где $c=\sqrt{a^2-b^2}$ есть линейный эксцентриситет данного эллипса. Тогда эллипсу (10.1) будет соответствовать в плоскости z' эллипс

$$\frac{x'^2}{a'^2}+\frac{y'^2}{b'^2}=1, \tag{10.3}$$

где

$$a'=\frac{a}{c} \quad \text{и} \quad b'=\frac{b}{c},$$

линейный эксцентриситет которого равен 1. При этом, очевидно, точкам $z=0$ и $z=\infty$ будут соответствовать точки $z'=0$ и $z'=\infty$.

Из теории конформных преобразований известно, что подстановка

$$z'=\frac{1}{2}\left(\zeta+\frac{1}{\zeta}\right) \tag{10.4}$$

преобразует эллипс на плоскости z'

$$\frac{x'^2}{\frac{1}{4}\left(R+\frac{1}{R}\right)^2}+\frac{y'^2}{\frac{1}{4}\left(R-\frac{1}{R}\right)^2}=1 \tag{10.5}$$

с эксцентриситетом 1 в окружность на плоскости ζ радиуса R с центром в $\zeta=0$; причем если $R>1$, то внешняя часть эллипса (10.5) переходит во внешнюю же часть окружности, так что сохранится соответствие точек $z'=\infty$ и $\zeta=\infty$. Подберем радиус R так, чтобы отождествить эллипсы (10.3) и (10.5):

$$\frac{1}{2}\left(R+\frac{1}{R}\right)=a'=\frac{a}{\sqrt{a^2-b^2}}; \quad \frac{1}{2}\left(R-\frac{1}{R}\right)=b'=\frac{b}{\sqrt{a^2-b^2}} \quad (R>1).$$

Эти уравнения не независимы, и можно было бы ограничиться одним из них. Складывая, находим:

$$R=\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}>1. \tag{10.6}$$

Таким образом искомое преобразование будет

$$z = \frac{c}{2}\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right) \tag{10.7}$$

Взяв известное выражение комплексного потенциала течения в плоскости ζ при обтекании кругового цилиндра потоком, скорость которого u в бесконечности параллельна вещественной оси:

$$w = u\left(\zeta + \frac{R^2}{\zeta}\right) = u\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\frac{a+b}{a-b}\right) \tag{10.8}$$

мы должны еще скорость u при $\zeta = \infty$ выбрать так, чтобы получить в плоскости z при $z = \infty$ скорость U, кроме того, надложит проверить допущенную нами параллельность в бесконечности течений в плоскости z и ζ.

Преобразование, обратное преобразованию (10.7), будет неоднозначно

$$\zeta = \frac{1}{c}\left(z \pm \sqrt{z^2 - c^2}\right),$$

но требование $R > 1$ делает его однозначным. В самом деле, для точки $z = a$ мы имеем

$$\zeta = \frac{1}{\sqrt{a^2 - b^2}}(a - b),$$

и так как эта точка ζ должна лежать на окружности радиуса $R = \sqrt{\frac{a+b}{a-b}}$, то мы должны взять верхний знак

$$\zeta = \frac{1}{c}\left(z + \sqrt{z^2 - c^2}\right). \tag{10.9}$$

При этом мы подразумеваем под $\sqrt{z^2 - c^2}$ то значение этого корня, которое при $z > c$ положительно.

Комплексный потенциал (10.8) вследствие (10.9) преобразуется к виду

$$w = \frac{u}{c}\left[z + \sqrt{z^2 - c^2} + \frac{a+b}{a-b}\left(z - \sqrt{z^2 - c^2}\right)\right] =$$

$$= \frac{2u}{c(a-b)}\left(az - b\sqrt{z^2 - c^2}\right).$$

Вычисляя комплексную скорость, имеем

$$\bar{v} = \frac{dw}{dz} = \frac{2u}{c(a-b)}\left(a - \frac{bz}{\sqrt{z^2 - c^2}}\right),$$

откуда видно, что при $z = \infty$ $\bar{v}$ а следовательно, и $v = U$, вещественно и притом

$$U = 2u/c.$$

Таким образом искомый комплексный потенциал при обтекании эллиптического цилиндра (10.1) поступательным потоком параллельным в $z = \infty$ большой оси цилиндра, будет:

$$w = -\frac{U}{a-b}\left(az - b\sqrt{z^2 - c^2}\right). \qquad (10.10)$$

Легко проверить, что при $b \to a$ после раскрытия неопределенности вида $\frac{0}{0}$ мы получим найденное раньше выражение для кругового цилиндра

б) Поперечное обтекание. Если скорость потока в бесконечности V направлена в положительную сторону оси Oy (рис. 99),

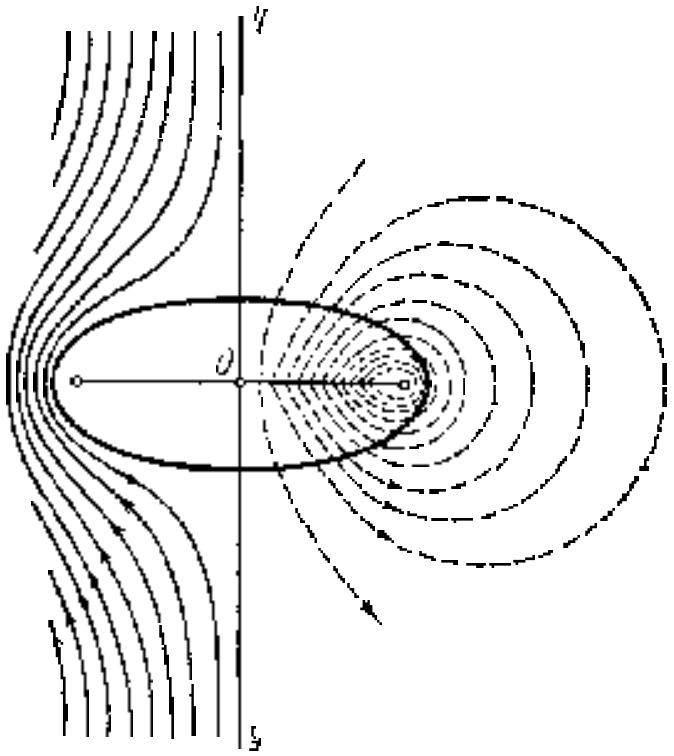

Рис. 99.

то, отобразив при помощи указанного выше преобразования

$$z = \frac{c}{2}\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right),$$

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

внешность эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

плоскости z на внешность круга

$$\xi^2 + \eta^2 = R^2 \qquad R^2 = \frac{a+b}{a-b}$$

плоскости ζ, мы должны только для комплексного потенциала w течения в плоскости ζ взять вместо формулы (10.8) формулу

$$w = -u_1\left(\zeta - \frac{R^2}{\zeta}\right),$$

которую получаем из выведенной нами общей формулы (3.13), учитывая, что в бесконечно удаленных точках плоскости ζ скорость течения направлена в положительную сторону оси η, имея некоторую величину u. Возвращаясь к переменной z по формуле

$$\zeta = \frac{1}{c}\left(z + \sqrt{z^2 - c^2}\right),$$

мы получаем:

$$w = -\frac{ui}{c}\left[z + \sqrt{z^2 - c^2} - R^2\left(z - \sqrt{z^2 - c^2}\right)\right] =$$

$$= \frac{2ui}{c(a-b)}\left(bz - a\sqrt{z^2 - c^2}\right).$$

откуда найдется комплексная скорость течения в плоскости z,

$$\bar{v} = \frac{dw}{dz} = \frac{2ul}{c(a-b)}\left(b - \frac{az}{\sqrt{z^2 - c^2}}\right).$$

Так как при $z = \infty$ должно быть $\bar{v} = -Vi$, то получаем:

$$V = \frac{2u}{c},$$

и таким образом искомое выражение для комплексного потенциала будет:

$$w = \frac{Vi}{a-b}\left(bz - a\sqrt{z^2 - c^2}\right). \qquad (10.11)$$

в) Косое обтекание. Если скорость в бесконечности v_∞ составляет некоторый угол α с продольной осью эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (a > b),$$

то разлагая вектор v_∞ на составляющие

$$v_\infty = U + iV \qquad (10.12)$$

и рассматривая косое обтекание как результат сложения продольного и поперечного обтекания со скоростями U и V в бесконечно удаленных точках, мы можем комплексный потенциал такого результирующего течения представить как сумму соответствующих потенциалов (10.10) и (10.11):

$$w = \frac{1}{a-b}\left[\left(az - b\sqrt{z^2 - c^2}\right)U - i\left(bz - a\sqrt{z^2 - c^2}\right)V\right] \qquad (10.13)$$

вследствие линейности уравнения Лапласа, которому удовлетворяет $w = \varphi + i\psi$.

Вследствие отсутствия циркуляции, силы, действующие на цилиндр при косом обтекании, приводятся к одной паре, момент которой может быть получен применением формулы (8.4)

$$L = \mathrm{Re}\left\{-2\pi i\rho v_\infty A_2\right\},$$

где A_2 есть коэффициент при $1/z^2$ в разложении dw/dz в ряд по степеням $1/z$. Но в окрестности бесконечно далекой точки

$$\sqrt{z^2 - c^2} = z\sqrt{1 - \frac{c^2}{z^2}} = z - \frac{c^2}{2z} + \ldots,$$

следовательно

$$w = (U - iV)z + \frac{a+b}{2}(bU + iaV)\frac{1}{z} + \ldots,$$

$$\frac{dw}{dz} = U - iV - \frac{a+b}{2}(bU + iaV)\frac{1}{z^2} + \ldots$$

Итак,

$$A_2 = -\frac{(a+b)(bU+aV)}{2}$$

и следовательно,

$$L = -\mathrm{Re}\{\pi\rho(a+b)(U-iV)(bU+iaV)\} = -\pi\rho(a^2-b^2)UV. \quad (10.14)$$

Заменяя U и V их выражениями

$$U = |v_\infty|\cos\alpha, \qquad V = |v_\infty|\sin\alpha$$

получаем окончательно для момента вращающей пары:

$$L = -\frac{\pi\rho}{2}(a^2-b^2)|v_\infty|^2\sin 2\alpha. \quad (10.15)$$

Последнее выражение показывает, что вращающий момент реакций исчезает при продольном ($\alpha = 0$) и при поперечном ($\alpha = \pi/2$) обтекании эллиптического цилиндра.

§ 11. Обтекание плоской пластинки. Формулы, выведенные для эллиптического цилиндра непосредственно дают картину течения и величину вращающего момента реакций при обтекании бесконечной

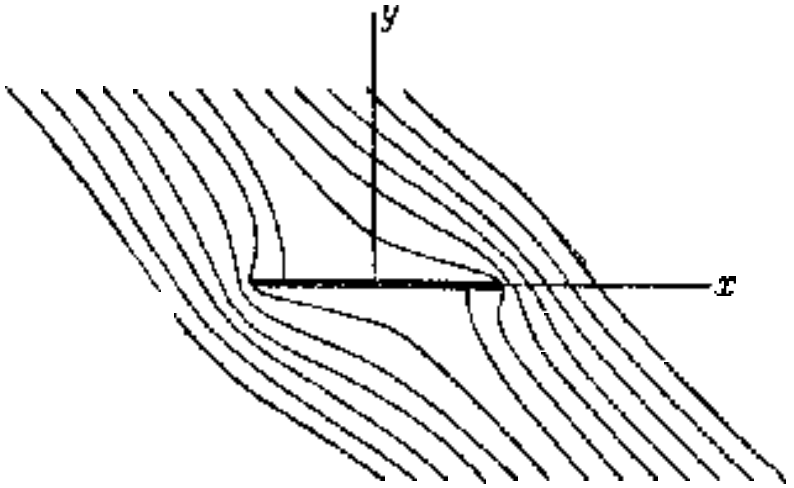

Рис. 100.

плоской полосы шириной $2a$ (рис. 100). Для этого достаточно в предыдущих формулах положить $b = 0$, в результате получим:

$$w = Uz - iV\sqrt{z^2-a^2} \quad (11.1)$$

$$L = -\frac{1}{2}\pi\rho a^2|v_\infty|^2\sin 2\alpha. \quad (11.2)$$

Выражение для комплексной скорости

$$\bar{v} = U - iV\frac{z}{\sqrt{z^2-a^2}}$$

показывает, что скорость обратится в нуль в двух критических точках, лежащих на пластинке. В самом деле, если z вещественно и $|z| < a$, то имеем:

$$\bar{v} - U = V \frac{z}{\sqrt{a^2 - z^2}},$$

откуда заключаем, что $v = 0$ при

$$z = \pm \frac{Ua}{\sqrt{U^2 + V^2}} = \pm a \cos \alpha. \tag{11.3}$$

При этом если критическая точка $z = a \cos \alpha$ лежит на одной стороне пластинки, то критическая точка $z = -a \cos \alpha$ будет лежать на противоположной стороне. Нужно заметить, однако, что построенная идеальная картина обтекания бесконечно тонкой пластинки физически неосуществима, так как из выражения для $\bar{v}$ видно что у краев пластинки $v = \infty$. Мы можем добиться конечности скорости у одного из концов пластинки, например у конца $z = a$, если возьмем циркуляционный поток (рис. 101).

Рис. 101

Конформное преобразование

$$z = \frac{a}{2}\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right);$$

$$\zeta = \frac{z + \sqrt{z^2 - a^2}}{a}$$

$$\frac{1}{\zeta} = \frac{z - \sqrt{z^2 - a^2}}{a}$$

переводит внешность круга единичного радиуса в плоскости ζ во внешность рассматриваемой нами пластинки в плоскости z, при этом точке $\zeta = 1$ соответствует задний край пластинки $z = a$. Таким образом, мы имеем в данном случае:

$$k = \frac{a}{2}, \quad k_0 = 0, \quad k_1 = \frac{a}{2}, \quad R = 1 \quad \theta_0 = 0$$

Применяя теперь формулы § 7, сразу находим для циркуляции скорости значение

$$\Gamma = -4\pi k R |v_\infty| \sin(\alpha - \theta_0) = -2\pi a |v_\infty| \sin \alpha, \tag{11.4}$$

для комплексного потенциала

$$w = k\bar{v}_\infty \zeta + \frac{k v_\infty R^2}{\zeta} + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln \zeta = \frac{a}{2} v_\infty \zeta + \frac{a v_\infty}{2\zeta} + i a |v_\infty| \sin \alpha \ln \zeta \tag{11.5}$$

и для комплексной скорости

$$\frac{dw}{dz} = \frac{dw}{d\zeta}\frac{d\zeta}{dz} = \left\{\frac{a}{2}v_x - \frac{av_y}{2\zeta^2} - \frac{la_1 v_\infty}{\zeta}\right\}\frac{\zeta}{\sqrt{\zeta^2 - a^2}} =$$

$$= |v_\infty|\left\{\cos\alpha - i\sin\alpha\sqrt{\frac{z-a}{z+a}}\right\} \qquad (11\ 6)$$

Сила Жуковского имеет величину

$$P = \rho|\Gamma|v_\infty| = 2\pi a\rho|v_\infty|^2|\sin\alpha|, \qquad (11\ 7)$$

пропорциональную синусу угла атаки; фокус лежит в точке

$$z_F = -k_0 - \frac{k_1}{R}e^{-i\theta} = -\frac{a}{2},$$

т. е. отстоит от переднего края пластинки на расстоянии, равном четверти длины пластинки. Эта точка является постоянным центром давления так как для момента силы относительно фокуса получаем нулевое значение

$$L_F = -2\pi\rho k|v_\infty|^2\operatorname{Re}\{ik_1 e^{-2i\alpha}\} = 0$$

Скорость на переднем крае пластинки получается бесконечно большой (, этим связано одно интересное обстоятельство. А именно, составляющие силы Жуковского во осям координат имеют значения

$$X = -\rho\Gamma v_\infty|\sin\alpha = -2\pi\rho a v_\infty|^2\sin^2\alpha, \qquad (11\ 8)$$

$$Y = -\rho\Gamma|v_\infty|\cos\alpha = 2\pi\rho a v_\infty|^2\sin\alpha\cos\alpha. \qquad (11\ 9)$$

Но ведь все элементарные давления направлены нормально к пластинке и возникает вопрос, откуда берется составляющая X силы Жуковского, направленная вдоль пластинки. Эта составляющая носит название *подсасывающей силы*. Если бы мы чуть-чуть закруглили передний край крыла, то скорости вблизи него были бы очень большими, но тогда по формуле Бернулли разность между давлением на переднем краю пластинки и давлением на бесконечности была бы большой отрицательной величиной. Наличие этих больших разрежений и приводит к появлению подсасывающей силы, предельное выражение которой дается формулой (11 8).

§ 12. Обтекание некоторых форм профилей цилиндров. Если картина течения при обтекании кругового цилиндра чисто поступательным потоком (без циркуляции) могла быть получена внесением в поток некоторого дублета, то естественной представляется задача определить, какие формы профилей обтекания могут быть получены той или другой комбинацией источников и стоков. Задача эта является

обратной задаче определения комплексного потенциала при обтекании цилиндрического тела *заданного* профиля

Мы рассмотрим здесь лишь некоторые простейшие комбинации источников и стоков.

а) Источник и сток равной обильности m помещенные на вещественной оси в точках $-a$ и $+a$ при наличии однородного поступательного потока, скорость которого в бесконечности $v_\infty = U$

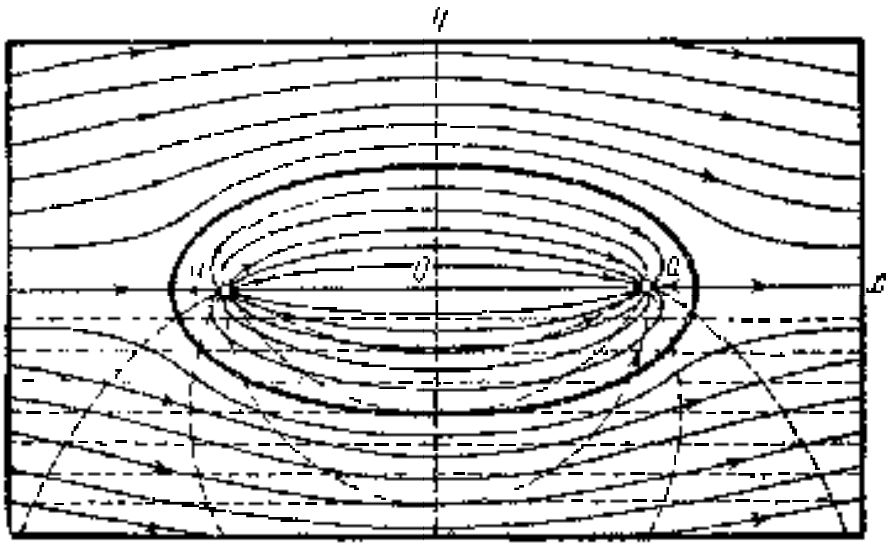

Рис. 102.

направлена вдоль оси Ox (рис. 102), дают течение с комплексным потенциалом

$$w = Uz + \frac{m}{2\pi} \ln \frac{z+a}{z-a}. \tag{12.1}$$

Потенциал скорости и функция тока выразятся формулами

$$\varphi = Ux + \frac{m}{2\pi} \ln \frac{r_1}{r_2}; \qquad \psi = Uy - \frac{m}{2\pi} \chi,$$

где

$$r_1 = \sqrt{(x+a)^2 + y^2}; \quad r_2 = \sqrt{(x-a)^2 + y^2},$$

и угол $\chi = (\widehat{r_2, x}) - (\widehat{r_1, x})$ определяется соотношением

$$\cos\chi = \cos(\widehat{r_1, x})\cos(\widehat{r_2, x}) + \sin(\widehat{r_1, x})\sin(\widehat{r_2, x}) = \frac{(x+a)(x-a)+y^2}{r_1 r_2}$$

Для построения линий тока

$$Uy - \frac{m}{2\pi}\chi = c$$

мы можем воспользоваться известным графическим приемом Максвелла рассматривая скалярное поле ψ как результат наложения

друг на друга более простых скалярных полей

$$\psi_1 = Uy \quad \text{и} \quad \psi_2 = \frac{m}{2\pi}\chi,$$

линиями уровня которых служат пучок прямых, параллельных оси Ox, и пучок окружностей, проходящих через точки a и $-a$.

$$Uy = c_1 \quad \text{и} \quad \frac{m}{2\pi}\chi = c_2$$

Построив эти линии уровня через равноотстоящие значения c_1 и c_2 и отыскивая точки пересечения таких линий первого семейства

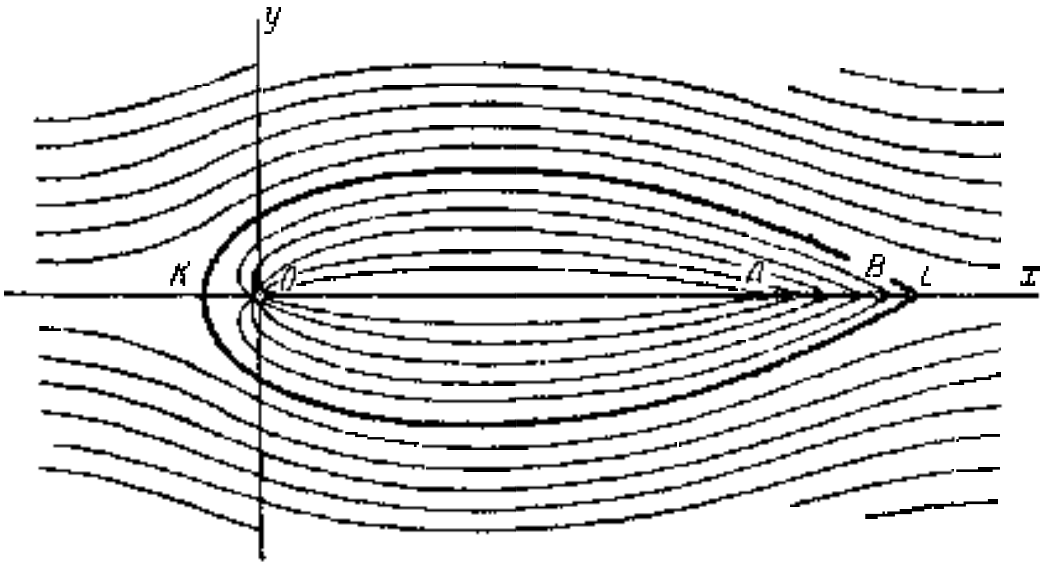

Рис. 103

с линиями второго параметры которых удовлетворяют условию

$$c_1 - c_2 = c\ (\text{const}),$$

мы получим ряд точек на линии тока $\psi = c$.

Производя указанное построение, мы можем убедиться, что линия тока

$$Uy - \frac{m}{2\pi}\chi = 0$$

состоит из части вещественной оси, внешней по отношению к отрезку

$$\left(-\sqrt{a^2 + \frac{ma}{\pi U}},\ +\sqrt{a^2 + \frac{ma}{\pi U}}\right).$$

На концах этого отрезка, являющихся критическими точками течения, где скорость обращается в нуль, линия тока $\psi = 0$ разветвляется, образуя профиль овальной формы; ордината y, при $x = 0$, соответствует максимальной ширине овала и определяется как корень

трансцендентного уравнения

$$Uy - \frac{m}{\tau}\operatorname{arctg}\frac{a}{y} = 0.$$

Таким образом, комплексный потенциал (12.1) дает картину обтекания цилиндра, ограниченного указанным овальным профилем.

б) Точечный источник обильности m и система линейно-распределенных стоков, суммарная обильность которой равна обильности источника, помещенные в поступательном потоке на прямой, параллельной скорости v_∞, дают картину обтекания профиля, несимметричного относительно поперечной оси (рис. 103). Взяв упомянутую прямую за ось Ox, поместим начало координат в источнике; пусть координаты начала и конца прямолинейного отрезка AB, на котором непрерывно распределены стоки, будут a и b. Тогда комплексный потенциал течения, создаваемого одними стоками, будет:

$$w_2 = -\frac{m}{2\pi(b-a)}\int_a^b \ln(z-\zeta)\,d\zeta =$$

$$= \frac{m}{2\pi}\left[1 + \frac{z-b}{b-a}\ln(z-b) - \frac{z-a}{b-a}\ln(z-a)\right].$$

Присоединяя сюда потенциал источника

$$w_1 = \frac{m}{2\pi}\ln z$$

и потенциал однородного потока

$$w_0 = Uz$$

и отбрасывая несущественное для исследования потока постоянное слагаемое, получаем суммарный потенциал

$$w = w_0 + w_1 + w_2 =$$

$$= Uz + \frac{m}{2\pi}\left[\ln z + \frac{z-b}{b-a}\ln(z-b) - \frac{z-a}{b-a}\ln(z-a)\right]. \quad (12.2)$$

Выражение для комплексной скорости

$$\bar{v} = U + \frac{m}{2\pi}\left[\frac{1}{z} + \frac{1}{b-a}\ln\frac{z-b}{z-a}\right]$$

показывает, что условие $v_\infty = U$ удовлетворяется.

Течение имеет две критические точки K и L, лежащие на вещественной оси, в которых скорость обращается в нуль; их абсциссы x_1 и x_2 найдутся как вещественные корни трансцендентного уравнения

$$\left(U + \frac{m}{2\pi x}\right)(b-a) = \frac{m}{2\pi}\ln\frac{x-a}{x-b} \quad \text{или} \quad Be^{\frac{A}{x}} = \frac{x-a}{x-b},$$

где

$$A = b - a, \quad B = e^{\frac{2\pi}{m} c (b-a)} > 1.$$

Для оценки корней применим графический прием; построив кривые (рис. 104)

$$y = Be^{\frac{A}{x}} \text{ и } y = \frac{x-a}{x-b},$$

из которых последняя представляет гиперболу, мы видим, что $x_1 < 0$ и $x_2 > b$. Применяя для определения вида линий тока графический прием Максвелла, можно убедиться, что линия тока $\psi = 0$ будет

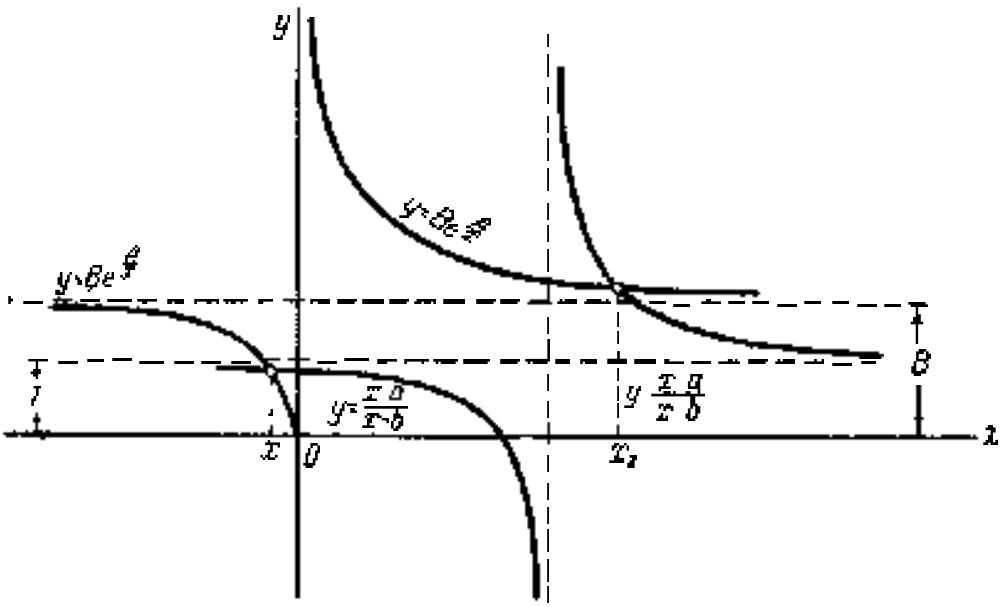

Рис. 104.

совпадать с вещественной осью вне отрезка KL, в точках же K и L эта линия разветвляется, образуя профиль указанной формы.

в) Система бесконечного множества дублетов с одинаковыми моментами M, одинаково направленными параллельно вектору $-v_\infty$ и помещенными на прямой, перпендикулярной к v_∞, в расстоянии a друг от друга, создает течение с комплексным потенциалом

$$w_1 = \frac{M}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{z - ka i},$$

если взять указанное на рис. 105 расположение осей.

Вспоминая известное разложение на простейшие дроби

$$\operatorname{ctg} z = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{z - k\pi},$$

мы видим, что

$$w_1 = \frac{M}{2ai} \operatorname{ctg} \frac{\pi z}{ai} = \frac{M}{2a} \operatorname{cth} \frac{\pi z}{a}.$$

Из симметрии расположения дублетов следует, что все прямые

$$y = (2k+1)\frac{a}{2} \qquad (k = \ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots)$$

служат линиями тока и останутся таковыми же при наложении однородного поступательного потока с потенциалом $w_0 = Uz$, а поэтому

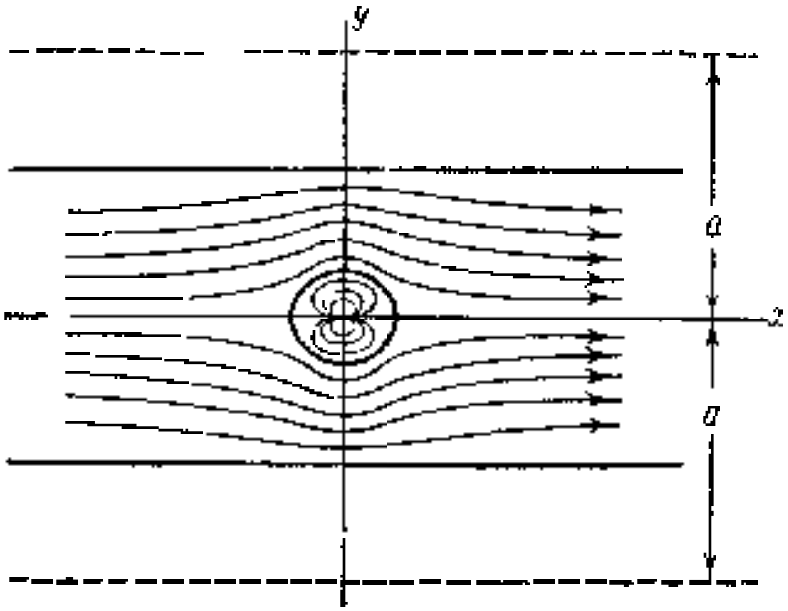

Рис. 105

картина течения не изменится, если заменить некоторые из упомянутых линий неподвижными стенками.

Суммарный потенциал такого течения выразится формулой

$$w = w_0 + w_1 = Uz + \frac{M}{2a}\operatorname{cth}\frac{\pi z}{a},$$

и комплексная скорость будет:

$$\bar{v} = U - \frac{\pi M}{2a^2}\frac{1}{\operatorname{sh}^2\dfrac{\pi z}{a}},$$

откуда видно, что $v_\infty = U$. Критические точки течения определяются условием

$$\operatorname{sh}^2\frac{\pi z}{a} = \frac{M\pi}{2a^2U},$$

из которого видно, что течение будет обладать двумя критическими точками, лежащими на вещественной оси на равных расстояниях от начала координат. Обозначая это расстояние через R, мы можем выразить через него величину момента дублетов

$$M = \frac{2a^2U}{\pi}\operatorname{sh}^2\frac{\pi R}{a},$$

и тогда

$$w = Uz + \frac{aU}{\pi}\operatorname{sh}^2\frac{\pi R}{a}\operatorname{cth}\frac{\pi z}{a}. \qquad (12.3)$$

Отсюда найдется функция тока

$$\psi = Uy - \frac{\frac{aU}{\pi}\operatorname{sh}^2\frac{\pi R}{a}\sin\frac{2\pi y}{a}}{\operatorname{ch}\frac{2\pi x}{a} - \cos\frac{2\pi y}{a}}. \qquad (12.4)$$

Это выражение показывает, что линия тока $\psi = 0$ будет состоять из части вещественной оси, внешней по отношению к отрезку соединяющему критические точки $x = -R$ и $x = R$, в которых линия тока $\psi = 0$ разветвляется, образуя овальный профиль; максимальную ширину этот овал будет иметь при $x = 0$, так как тогда $v_y = -\frac{\partial\psi}{\partial x} = 0$, ордината $= y_0$, соответствующая максимальной ширине, найдется как наименьший положительный корень трансцендентного уравнения

$$0 = 1 \cdot y - \frac{aU}{\pi}\operatorname{sh}^2\frac{\pi R}{a}\operatorname{ctg}\frac{\pi y}{a}.$$

Если R мало по сравнению с a, то y_0 будет близко к R и упомянутый овал будет мало отличаться от окружности.

В самом деле, полагая $\frac{\pi R}{a} = \lambda$, перепишем предыдущее уравнение в виде

$$y \sin\frac{\lambda y}{R} = \frac{R}{\lambda}\operatorname{sh}^2\lambda\cos\frac{\lambda y}{R}.$$

Разлагая обе части в ряды по степеням λ, будем иметь:

$$\frac{y^2}{R} - \frac{\lambda^2 y^4}{6R^3} + \ldots = R - \frac{\lambda^2 y^2}{2R} + \frac{\lambda^2 R}{3} - \ldots,$$

откуда видно, что если λ мало, то y^2 будет близко к R^2. Таким образом, комплексный потенциал (12.3) дает картину обтекания профиля, близкого к круговому, помещенного в прямолинейный канал с твердыми стенками, если линейные размеры овала малы по сравнению с шириной канала.

§ 13. Обтекание профилей Жуковского. Конформное преобразование

$$z = \frac{c}{2}\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right), \qquad (13.1)$$

примененное нами при изучении обтекания эллиптического цилиндра

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad c^2 = a^2 - b^2,$$

отображает окружность единичного радиуса в плоскости ζ

$$\xi^2 + \eta^2 = 1 \qquad (13.2)$$

на отрезок вещественной оси между фокусами эллипса $-c$ и c в плоскости z, причем этот отрезок проходится дважды в противоположных направлениях, когда соответственная точка ζ пробегает окружность (13.2) один раз.

Приводя формулу (13.1) к виду

$$2z = c\zeta + \frac{c^2}{c\zeta}$$

и вводя новые переменные z' и ζ' при помощи преобразования подобия

$$z' = 2z, \qquad \zeta' = c\zeta, \quad (13.3)$$

мы заключаем, что преобразование

$$z' = \zeta' + \frac{c^2}{\zeta'} \qquad (13.4)$$

переводит окружность радиуса c

$$\xi'^2 + \eta'^2 = c^2$$

плоскости ζ' в отрезок $(-2c, 2c)$ вещественной оси плоскости z', пройденный дважды. Представив преобразование (13.4) в виде

$$\frac{z-2c}{z+2c} = \left(\frac{\zeta'-c}{\zeta'+c}\right)^2, \quad (13.5)$$

мы можем убедиться, что окружность K плоскости ζ' с центром на мнимой оси в некоторой точке kl, проходящая через точки $-c$ и c вещественной оси, перейдет в дугу окружности P на плоскости z', опирающуюся на точки $-2c$ и $2c$ вещественной оси и имеющую вершину в точке $2kl$ на мнимой оси, при этом дуга P проходится дважды (рис. 106). В самом деле, непосредственно видно, что точки c и $-c$ плоскости ζ' будут соответствовать точкам $2c$ и $-2c$ плоскости z', а точки

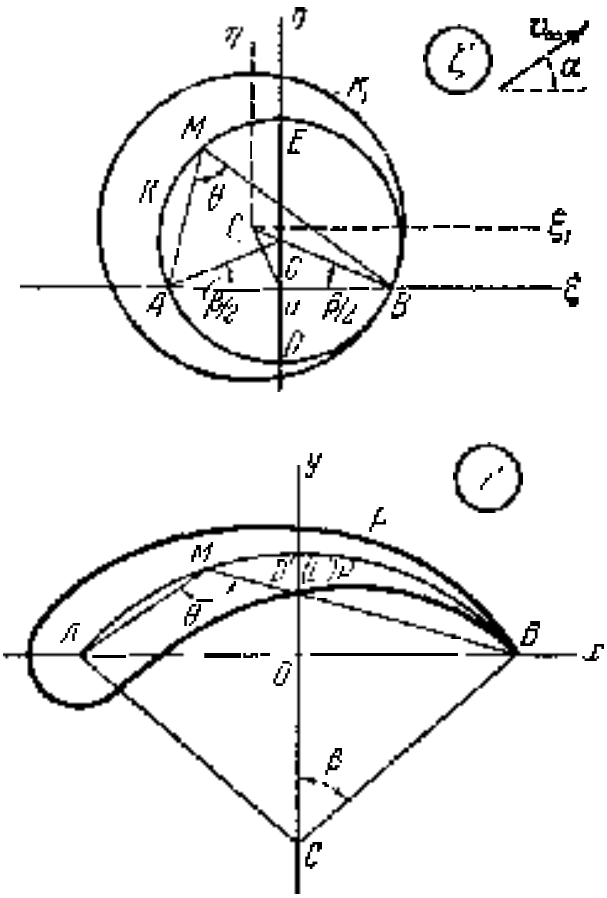

Рис. 106

$$\zeta' = i\left(k \pm \sqrt{k^2 - c^2}\right)$$

пересечения окружности K с мнимой осью перейдут в одну и ту же точку на плоскости z':

$$z' = i\left(k \pm \sqrt{k^2 + c^2}\right) + \frac{c^2}{i\left(k \pm \sqrt{k^2 + c^2}\right)} = 2kl.$$

Кроме того, из (13.5) имеем:

$$\ln\left(\frac{z'-2c}{z'+2c}\right)=2\ln\left(\frac{\zeta'-c}{\zeta'+c}\right). \tag{13.6}$$

Называя через r_1, r_2, ρ_1, ρ_2 модули чисел $z'-2c$, $z'+2c$, $\zeta'-c$, $\zeta'+c$, а через α_1, α_2, β_1, β_2 их аргументы, имеем из (13.6):

$$\ln\frac{r_1}{r_2}+i(\alpha_1-\alpha_2)=2\ln\frac{\rho_1}{\rho_2}+2i(\beta_1-\beta_2),$$

откуда

$$\alpha_1-\alpha_2=2(\beta_1-\beta_2). \tag{13.7}$$

Упомянутые комплексные числа $z'-2c$, $z'+2c$, $\zeta'-c$, $\zeta'+c$ выражаются векторами $\overrightarrow{B'M'}$, $\overrightarrow{A'M'}$, $\overrightarrow{BM}$, $\overrightarrow{AM}$, и, значит, разности

$$\theta'=\alpha_1-\alpha_2 \qquad \theta=\beta_1-\beta_2$$

выражают углы, под которыми видны отрезки $A'B'$ и AB соответственно из точек M' и M; а так как $\theta=\text{const}$ для окружности K, то вследствие (13.7) будет и $\theta'=\text{const}$, т. е. линия $A'D'B'$ представляет собой дугу окружности.

Таким образом, преобразование (13.4) отображает полную окружность K плоскости ζ'

$$\xi'^2+(\eta'-k)^2=R_0^2,$$

где

$$R_0=\sqrt{c^2+k^2},$$

хорда которой вмещает со стороны центра угол θ и опирается, следовательно, на центральный угол (рис. 106)

$$2\theta=\pi-\beta,$$

в дугу P плоскости z', хорда которой вмещает со стороны, противоположной центру, угол $\theta'=2\theta$ и опирается, следовательно, на центральный угол

$$2(\pi-\theta')=2\beta.$$

Радиус r дуги P найдется из треугольника OCB':

$$r=\frac{k^2+c^2}{k}=\frac{R_0^2}{k}=\frac{R_0}{\sin\frac{\beta}{2}}. \tag{13.8}$$

При этом полному обходу окружности K отвечает дважды проходимая в противоположных направлениях дуга P.

Установив это, рассмотрим наряду с окружностью K, которую будем называть основною некоторую соседнюю окружность K_1 радиуса $R_0 - \varepsilon$, центр которой поместим на продолжении радиуса BC основной окружности так чтобы она касалась основной окружности в точке B (рис 106)

Так как окружность K_1 охватывает полностью окружность K, то после применения преобразования (13 4) она перейдет в некоторую замкнутую кривую P_1, охватывающую дугу P В точке B' $(2c, 0)$ кривая P_1 будет касаться дуги P подходя к ней с обеих сторон, т. е образуя острие.

Если через центр C_1 окружности K_1 провести координатные оси $\xi_1 C_1 \eta_1$ параллельно осям $\xi' O \eta'$, то точки комплексной плоскости ζ_1 относительно новых осей будут связаны с соответствующими точками плоскости ζ' при помощи преобразования параллельного переноса

$$\zeta' = \zeta_1 + g, \tag{13 9}$$

где g -комплексное число плоскости ζ', изображающее вектор $\overrightarrow{OC_1}$. Вводя в рассмотрение угол $\frac{\beta}{2}$ наклона радиуса BC основной окружности к отрицательному направлению вещественной оси ξ', мы имеем:

$$\overrightarrow{OC_1} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CC_1},$$

и, значит,

$$g = kl + \varepsilon e^{\left(\pi - \frac{\beta}{2}\right) i} = kl - \varepsilon e^{-\frac{\beta}{2} i},$$

где

$$\operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = \frac{k}{c}. \tag{13.10}$$

Таким образом

$$\zeta' = \zeta_1 + kl - \varepsilon e^{-\frac{\beta}{2} i}. \tag{13.11}$$

Пусть теперь окружность K_1 обтекается в плоскости ζ_1 поступательным потоком с циркуляцией Γ, пусть при этом скорость в бесконечности u_∞ этого потока образует угол α с положительным направлением вещественной оси так что

$$u_\infty = |u_\infty| e^{\alpha i}$$

Комплексный потенциал такого изученного нами течения выражается формулой

$$w = |u_\infty| \left[e^{-\alpha i} \zeta_1 + \frac{(R_0 + \varepsilon)^2}{\zeta_1} e^{\alpha i} \right] - \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln \zeta_1. \tag{13.12}$$

Выразив здесь ζ_1 сначала через ζ' на основании (13.9)

$$\zeta_1 = \zeta - g,$$

где $g = kt - \varepsilon e^{-\frac{\pi}{2} i}$, а затем ζ' — через z' на основании формулы (13.4), которая даст:

$$\zeta' = \frac{1}{2}\left(z' + \sqrt{z'^2 - 4c^2}\right), \tag{13.13}$$

мы получим комплексный потенциал течения при обтекании профиля P_1 в плоскости z':

$$w = |u_\infty| \left[e^{-\alpha i}\left(\frac{1}{2} z' - g + \frac{1}{2}\sqrt{z'^2 - 4c^2}\right) + \frac{(R_0 + \varepsilon)^2}{\frac{1}{2} z' - g + \frac{1}{2}\sqrt{z'^2 - 4c^2}} e^{\alpha i} \right] - \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln\left(\frac{1}{2} z' - g + \frac{1}{2}\sqrt{z'^2 - 4c^2}\right). \tag{13.14}$$

Вычисляя комплексную скорость в бесконечности для течения в плоскости z', имеем:

$$\bar{v}_\infty = |u_\infty| e^{-\alpha i}, \quad \text{и, значит,} \quad v_{x\infty} = u_\infty.$$

Скорость потока в плоскости z' у задней точки B' контура P_1 может оказаться бесконечной, как это видно из выражения для комплексной скорости

$$\bar{v} = \frac{dw}{dz'} = \frac{dw}{d\zeta_1} \cdot \frac{d\zeta_1}{d\zeta'} \cdot \frac{d\zeta'}{dz'}, \tag{13.15}$$

в котором

$$\frac{d\zeta'}{dz'} = \frac{1}{\frac{dz'}{d\zeta'}} = \frac{1}{1 - \frac{c^2}{\zeta'^2}} = \infty$$

при $\zeta' = c$.

Для того чтобы задача обтекания профиля P_1 могла иметь физический смысл, скорость потока на профиле и вне его должна оставаться конечной. Подберем поэтому интенсивность циркуляции Γ, оставшуюся неопределенной, так, чтобы удовлетворить требованию о конечности скорости. Для этого достаточно выбрать Γ так, чтобы $dw/d\zeta_1 = 0$ в точке B плоскости ζ_1, т. е. при $\zeta_1 = (R_1 + \varepsilon) e^{\frac{\pi}{2} i}$.

Производя вычисления, найдем:

$$0 = |v_\infty| \left(e^{-\alpha i} - e^{(\alpha + \beta) i}\right) - \frac{i\Gamma}{2\pi} \frac{e^{\frac{\pi}{2} i}}{R_1 + \varepsilon},$$

откуда

$$\Gamma = \frac{2\pi}{i} |v_\infty| (R_0 + \varepsilon)\left(e^{-\left(\alpha + \frac{\beta}{2}\right) i} - e^{\left(\alpha + \frac{\beta}{2}\right) i}\right) = -4\pi |v_\infty| (R_0 + \varepsilon) \sin\left(\alpha + \frac{\beta}{2}\right). \tag{13.16}$$

или

$$\Gamma = -4\pi v_\infty \left(\sqrt{c^2 + k^2} + \varepsilon\right) \sin\left(\alpha + \frac{\beta}{2}\right), \qquad (13.17)$$

где

$$\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \frac{k}{c}.$$

Для расчета главного вектора гидродинамических реакций (на единицу длины цилиндра), приложенных к профилю P_1 со стороны потока, воспользуемся формулой Кутта — Жуковского

$$R = -i\rho\Gamma v_\infty.$$

Подставляя сюда выражение для Γ (13.17), имеем:

$$R = 4\pi i\rho |v_\infty|^2 e^{\alpha i} \left(\sqrt{c^2 - k^2} - \varepsilon\right) \sin\left(\alpha + \frac{\beta}{2}\right) =$$

$$= 4\pi\rho |v_\infty|^2 e^{\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) i} \left(\sqrt{c^2 + k^2} + \varepsilon\right) \sin\left(\alpha + \frac{\beta}{2}\right). \qquad (13.18)$$

Вектор R, направленный перпендикулярно вектору скорости v_∞, называют поддерживающей силой; для величины R имеем:

$$R = 4\pi\rho |v_\infty|^2 \left(\sqrt{c^2 + k^2} + \varepsilon\right) \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) =$$

$$= 4\pi\rho |v_\infty|^2 (R_0 + \varepsilon) \sin\left(\alpha + \frac{\beta}{2}\right). \qquad (13.19)$$

При малых ε можно приближенно положить:

$$R = 4\pi\rho |v_\infty|^2 R_0 \sin\left(\alpha + \frac{\beta}{2}\right) \qquad (13.20)$$

или вследствие (13.8)

$$R = 4\pi\rho |v_\infty|^2 r \sin\frac{\beta}{2} \sin\left(\alpha + \frac{\beta}{2}\right). \qquad (13.21)$$

К тем же формулам приходит Н. Е. Жуковский, применяя, преобразование

$$z = \frac{g}{a} \cdot \frac{\zeta + c}{\zeta + g} \qquad (13.22)$$

где $a^2 = eg$, указанное С. А. Чаплыгиным и не отличающееся по существу от преобразования (13.1) или (13.4), примененного выше.

Профили, получаемые применением того или другого из указанных преобразований к некоторой окружности, соприкасающейся с основной окружностью в особой точке преобразования и заключающей внутри себя вторую особую точку, получили общее название

профилей Жуковского, впервые указавшего на их применение в качестве профилей крыла аэроплана.

Профили Жуковского при заданном расстоянии $4c$ в плоскости профиля между особыми точками преобразования характеризуются двумя параметрами k и ε, из которых первый характеризует изгиб или кривизну крыла, а второй — его толщину. При малом изгибе можно приближенно принять

$$4r \sin \frac{\beta}{2} = 2r\beta = \smile A'D'B' = F,$$

где F — площадь единицы длины крыла и тогда для поддерживающей силы получаем простое выражение

$$|R| = \pi\rho |v_\infty|^2 F \sin\left(\alpha + \frac{\beta}{2}\right). \tag{13.23}$$

При $\beta = 0$ отсюда получается выражение для поддерживающей силы при косом обтекании с циркуляцией плоской пластинки ширины F

$$|R| = \pi\rho |v_\infty|^2 F \sin\alpha \tag{13.24}$$

при условии, что величина циркуляции подобрана так, чтобы у заднего края пластинки скорость течения оставалась конечной. Этот результат был уже получен выше в § 11 [формула (11.7)].

Формула (13.18) показывает, что поддерживающая сила обращается в нуль и меняет свое направление, если угол α, называемый также *углом атаки*, принимает значение

$$\alpha = -\frac{\beta}{2},$$

максимальной же величины поддерживающая сила достигает при

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{\beta}{2}.$$

Заметим еще, что при $\alpha = 0$ формула (13.21) дает

$$|R| = 4\pi\rho |v_\infty|^2 r \sin^2 \frac{\beta}{2} \quad \text{или} \quad |R| = 2\pi\rho f |v_\infty|^2, \tag{13.25}$$

где

$$f = 2r \sin^2 \frac{\beta}{2}$$

есть так называемая *стрела прогиба* круговой дуги $A'D'B'$. Формула (13.25) выражает *теорему Чаплыгина*: поддерживающая сила при обтекании без срыва струй круговой дуги потоком скорость которого в бесконечности параллельна хорде стягивающей дугу, не зависит при данной стрете прогиба от длины дуги или ее радиуса.

Для вычерчивания профилей Жуковского при заданных параметрах можно применить простой прием, указанный Треффцем. Построив в плоскости ζ' соприкасающуюся окружность K_1 радиуса

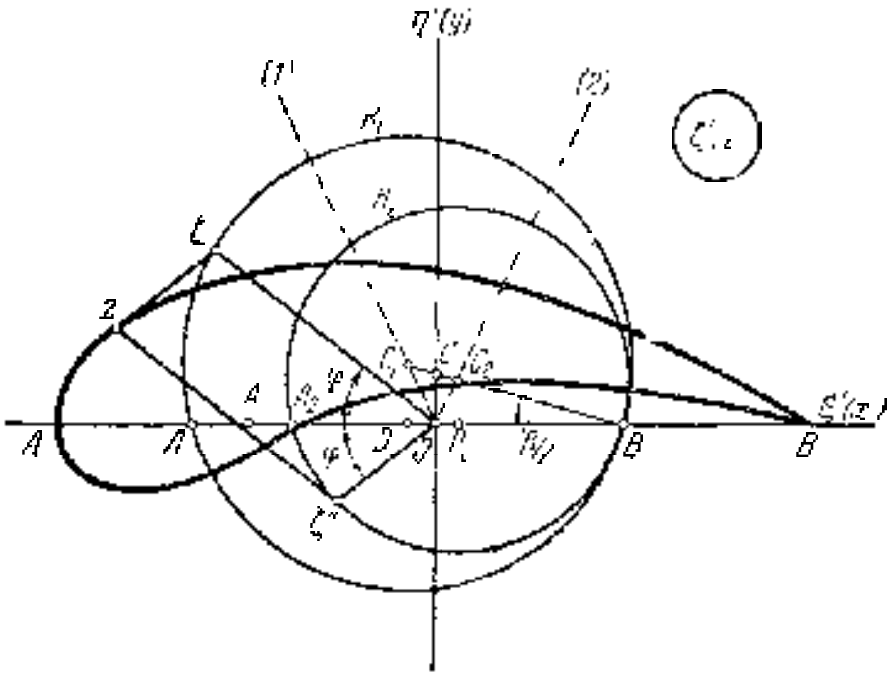

Рис. 107

$R_1 = R_0 + \varepsilon$ (рис. 107), из которой получается профиль Жуковского после применения преобразования

$$z' = \zeta' + \frac{c^2}{\zeta'},$$

строим вспомогательную окружность K_2, получаемую из K_1 путем преобразования инверсии и симметрии

$$\zeta'' = \frac{c^2}{\zeta'}.$$

Так как при этом преобразовании окружность переходит в окружность, причем вещественная ось переходит сама в себя, то по свойству конформности окружность K_2 будет пересекать вещественную ось под тем же углом, что и окружность K_1, — иначе говоря, K_2 и K_1 будут касаться друг друга в точке $\zeta' = \zeta'' = c$, через которую проходит K_1, следовательно, центр C_2 окружности K_2 расположится на прямой BC_1. С другой стороны, центр C_2, который, заметим, не является соответственной точкой для центра C_1 окружности K_1, будет лежать на луче (2), являющемся отражением луча (1) от мнимой оси. В самом деле, так как точки A_1 и A_2 пересечения окружностей K_1 и K_2 с вещественной осью являются соответственными, то вследствие (13.24)

$$|\overline{OA_2}| = \frac{c^2}{\overline{OA_1}},$$

Но если D_1 есть проекция центра C_1 на ось ξ', то

$$|O\overline{A_1}| = |\overline{OD_1}| + |\overline{D_1A_1}| = \varepsilon\cos\frac{\beta}{2} + c + \varepsilon\cos\frac{\beta}{2} = c + 2\varepsilon\cos\frac{\beta}{2},$$

и, значит,

$$|OA_2| = \frac{c^2}{c + 2\varepsilon\cos\frac{\beta}{2}}.$$

В таком случае

$$|\overline{A_2B}| = c + \frac{c^2}{c + 2\varepsilon\cos\frac{\beta}{2}} = \frac{2\left(c^2 - c\cos\frac{\beta}{2}\right)}{c - 2\varepsilon\cos\frac{\beta}{2}}.$$

С другой стороны, если D_2 есть проекция C_2 на ось ξ, то

$$|\overline{D_2B}| = \frac{1}{2}|\overline{A_2B}| = \frac{c^2 + c\varepsilon\cos\frac{\beta}{2}}{c - 2\varepsilon\cos\frac{\beta}{2}}.$$

Таким образом, абсцисса центра C_2 $|\overline{OD_2}|$ будет равна

$$|\overline{OD_2}| = |OB| - |\overline{D_2B}| = c - \frac{c^2 + c\varepsilon\cos\frac{\beta}{2}}{c + 2\varepsilon\cos\frac{\beta}{2}} =$$

$$= \frac{c\varepsilon\cos\frac{\beta}{2}}{c + 2\varepsilon\cos\frac{\beta}{2}} = \frac{k\varepsilon\cos\frac{\beta}{2}}{k + 2\varepsilon\frac{k}{c}\cos\frac{\beta}{2}} = \frac{k\cos\frac{\beta}{2}}{k + 2\varepsilon\cos\frac{\beta}{2}}.$$

Ту же самую абсциссу будет иметь точка пересечения луча (2), уравнение которого

$$\eta' = \frac{k + \varepsilon\sin\frac{\beta}{2}}{\varepsilon\cos\frac{\beta}{2}}\xi',$$

с прямой BC_2, уравнение которой

$$\frac{\xi'}{c} + \frac{\eta'}{k} = 1.$$

Построив таким образом окружность K_2, мы можем для каждой точки $\zeta' = |\zeta'|e^{\varphi i}$ окружности K_1 найти соответственную точку $\zeta'' = \frac{c^2}{|\zeta'|}e^{-\varphi i}$ на окружности K_2, пересекая последнюю лучом, проведенным под углом $-\varphi$ к вещественной оси.

Построив после этого геометрическую сумму векторов ζ_0 и ζ'

$$z' = \zeta_0 + \zeta',$$

мы, вследствие (13.4), получим соответственную точку профиля Жуковского.

Чтобы дать полную характеристику сил гидромеханических реакций, приложенных к профилю Жуковского при его обтекании, воспользуемся результатами § 8.

Конформное преобразование плоскости ζ на плоскость z представляется в нашем случае равенством

$$z = \zeta_0 + g + \frac{c^2}{\zeta + g} = \zeta_0 + g + \frac{c^2}{\zeta} - \frac{gc^2}{\zeta^2} + \dots,$$

так что при сравнении с (7.2) получаем:

$$k = 1$$

$$k_0 = g = k_1 - ee^{-\frac{\beta}{2}i},$$

$$k_1 = c^2;$$

$$R = R_1 + \varepsilon$$

для острой кромки профиля Жуковского

$$\zeta = (R_0 + \varepsilon) e^{-\frac{\beta i}{2}},$$

и, следовательно,

$$\vartheta_1 = -\frac{\beta}{2}.$$

Конформный центр тяжести профиля имеет, очевидно координату k_0, т. е. совпадает с точкой C_1. Проводя через него прямую l, составляющую угол $-\beta/2$ с осью Ox, получим критическую ось профиля (рис. 108). Фокус профиля определится по формуле (9.9):

$$z_F = k - \frac{k_1}{R} e^{-i\vartheta_0} = g - \frac{c^2}{R_0 + \varepsilon} e^{i\frac{\beta}{2}};$$

отсюда видно, что направление C_1F симметрично с направлением критической оси относительно оси $C_1\xi$ и что расстояние между точками C_1 и F определяется по формуле

$$\overline{C_1F} = \frac{c^2}{R_0 + \varepsilon}.$$

Зная фокус F параболы устойчивости и ее директрису — критическую ось профиля, без труда построим эту параболу. Ее параметр $p = 2\delta$ имеет значение

$$p = 2\delta = -\operatorname{Re}\left\{\frac{ik_1}{R} e^{-i\vartheta_0}\right\} = -\operatorname{Re}\left\{\frac{ic^2}{R_0 + \varepsilon} e^{i\frac{\beta}{2}}\right\} = \frac{c^2 \sin\frac{\beta}{2}}{R_0 + \varepsilon}.$$

Момент реакций относительно фокуса F имеет, как мы знаем, постоянное значение:

$$L_F = -2\pi\rho k\,|v_\infty|^2 \operatorname{Re}\{ik_1 e^{-2i\beta_0}\} = -2\pi\rho\,|v_\infty|^2 c^2 \operatorname{Re}\{ie^{i\beta}\} = -2\pi\rho\,|v_\infty|^2 c^2 \sin\beta$$

Подсчитаем еще момент реакций относительно конформного центра

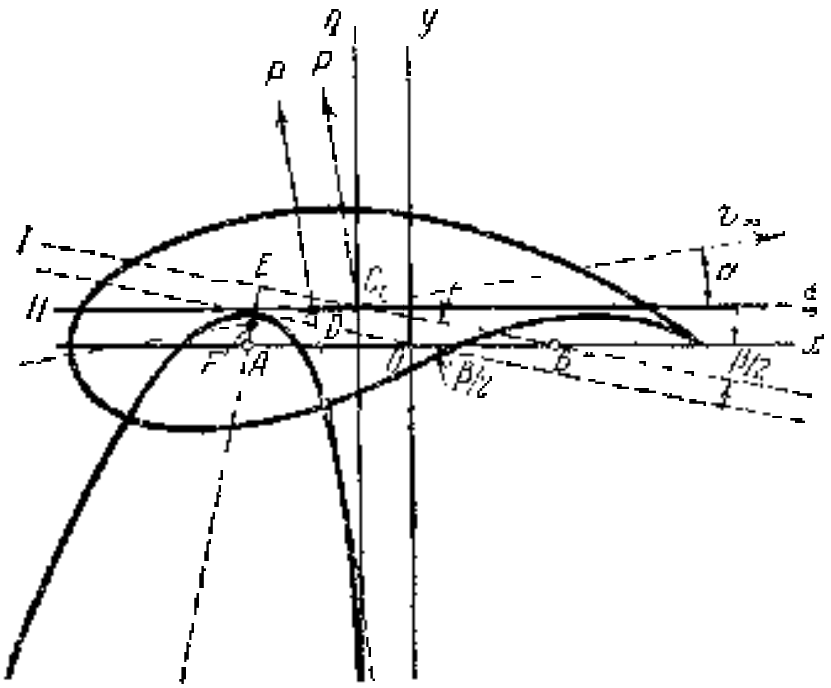

Рис. 108.

тяжести C_1, для чего воспользуемся формулой (8.9), в которой надо положить $k_0 = 0$:

$$L_{C_1} = \operatorname{Re}\{-2\pi\rho k\,\overline{v_\infty^2}\,l\} = \operatorname{Re}\{-2\pi\rho c^2\,|v_\infty|^2 e^{-2i\alpha} l\}$$

или

$$L_{C_1} = -2\pi\rho\,|v_\infty|^2 c^2 \sin 2\alpha.$$

Ясно, что этот момент обращается в нуль, если $\alpha = 0$ или $\alpha = \pi/2$. Таким образом, если поток на бесконечности параллелен оси Ox или Oy, то сила реакции будет проходить через точку C_1 и, следовательно, будет направлена по оси $C_1\eta$ или $C_1\xi$. Таким образом парабола устойчивости касается как прямой $C_1\xi$, так и прямой $C_1\eta$.

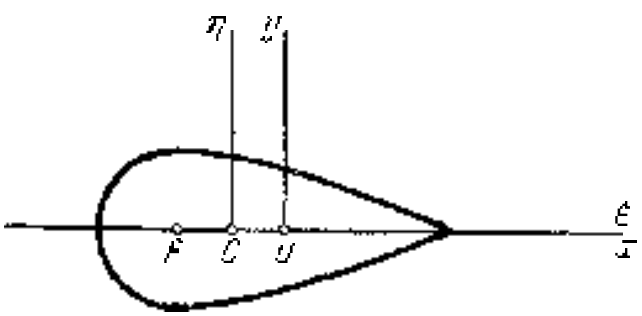

Рис. 109

В частном случае, когда $\beta = 0$, мы получаем симметричный профиль, носящий название *руля Жуковского* (рис. 109). В этом случае $L_F = 0$ и парабола устойчивости вырождается в точку F, лежащую на оси симметрии профиля; совокупность реакций приводится

к одной равнодействующей P, приложенной при всяком угле атаки к точке F, которая является постоянным центром давлений.

§ 14. Обтекание решетки. В качестве первого обобщения задачи о движении одного профиля рассмотрим решетку, т. е. систему, состоящую из бесконечного числа профилей (рис. 110), которая может быть образована смещением одного профиля на одно и то же расстояние t. Это расстояние называется *шагом решетки*. Решетки имеют важное применение в теории турбин, к задаче о решетке сводится задача о движении крыла в трубе, задача об ударе о воду в канале, ограниченном параллельными стенками, и некоторые другие. В дальнейшем будем направлять ось x по хорде профиля решетки.

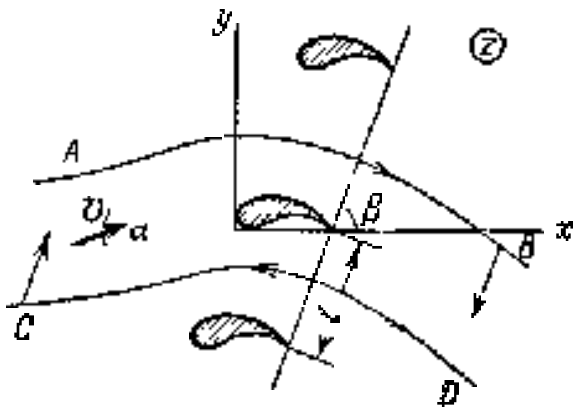

Рис. 110

Угол β, образованный с осью x направлением, по которому надо сместить профиль решетки на шаг t, чтобы получить соседний профиль, называется *наклоном решетки*. Величина $te^{i\beta}$ есть *период решетки*.

Рассмотрим обтекание решетки потенциальным потоком, имеющим в бесконечности слева от решетки скорость v_1, направленную под углом α_1 к оси x. Далеко за решеткой справа установится, вообще говоря, другая скорость v_2, наклоненная под углом α_2 к оси x.

Естественно считать, что поток, обтекающий решетку, будет периодичен и иметь период $te^{i\beta}$. Таким образом,

$$w(z + te^{i\beta}) = w(z).$$

Выделим около каждого профиля две линии тока, уходящие своими концами на бесконечность справа и слева, между которыми находится профиль и получающиеся одна из другой смещением на шаг решетки. Линии эти будут конгруэнтны.

Введем вспомогательную плоскость ζ и совершим конформное преобразование внешности решеток профилей на многолистную риманову поверхность в плоскости ζ внутри системы концентрических окружностей радиуса единица (рис. 111). Мы получим многозначное соответствие между ζ и z. Каждой точке внутри единичного круга плоскости ζ отвечает бесчисленное множество конгруэнтных точек плоскости z. Пусть точки $z = +\infty$ перейдет в точку $\zeta = +s$ (s — действительная, положительная величина, меньшая единицы), а точка

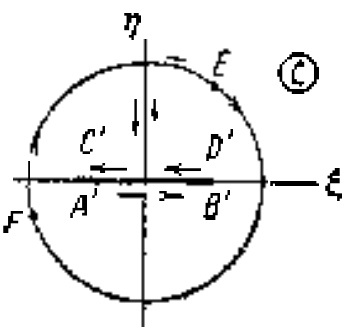

Рис. 111.

$z = -\infty$ перейдет в $\zeta = -\varepsilon$. Если мы обойдем по кругу малого радиуса точку $\zeta = -\varepsilon$, то в плоскости ζ мы придем в ту же точку; напротив в плоскости z мы придем при этом в ближайшую конгруэнтную точку. То же можно сказать про обход вокруг точки $\zeta = +\varepsilon$. Таким образом, мы имеем дело с отображением каждой полосы между двумя конгруэнтными кривыми AB и CD (рис. 110) и контуром профиля на внутренность круга $|\zeta| < 1$ с разрезом между точками $\zeta = \pm\varepsilon$; при этом контур профиля переходит в контур окружности, а конгруэнтные кривые — в разрез $A'B'$ (он же $C'D'$) между $\zeta = -\varepsilon$ и $\zeta = +\varepsilon$.

Предположим, что мы знаем функцию, дающую наше конформное отображение. Пусть это будет

$$z = f(\zeta). \tag{14.1}$$

Тогда дальше, при решении задачи, мы могли бы рассуждать следующим образом. Обозначим $w[f(\zeta)] = W(\zeta) = \Phi + i\Psi$. Вид функции $dW/d\zeta$ мы можем сразу определить по ее особенностям. Именно, мы можем рассматривать W как комплексный потенциал некоторого фиктивного течения внутри единичного круга плоскости ζ. Жидкость вытекает из точки $\zeta = -\varepsilon$ и втекает в точку $\zeta = +\varepsilon$, кроме того, обход по малым кругам около точек $\zeta = \pm\varepsilon$ приводит к новым значениям W. Следовательно, в точке $\zeta = -\varepsilon$ мы имеем вихрь и источник, а в точке $\zeta = +\varepsilon$ — вихрь и сток. Это значит, что $dW/d\zeta$ имеет простые полюсы в точках $\zeta = \pm\varepsilon$. Далее, на круге $|\zeta| = 1$ будут находиться две точки E и F, назовем их аргументы k_1 и k_2 (пусть $k_2 > k_1$), отвечающие критическим точкам профиля в плоскости z. Положение этих точек заранее не известно, но мы знаем, что в этих точках $dW/d\zeta$ должно обращаться в нуль. Наконец, так как $W = \text{const}$, на круге $|\zeta| = 1$, то мы можем продолжить $dW/d\zeta$ на всю плоскость комплексного переменного ζ, помещая в точках $\zeta = \pm\frac{1}{\varepsilon}$ (преобразование инверсии) еще два простых полюса. Регулярность W приводит к тому, что при $\zeta = \infty$ $dW/d\zeta$ будет иметь нуль второго порядка. Теперь мы можем сразу написать $dW/d\zeta$ в виде

$$\frac{dW}{d\zeta} = C\,\frac{(\zeta - e^{ik_1})(\zeta - e^{ik_2})}{(\zeta+\varepsilon)(\zeta-\varepsilon)\left(\zeta+\frac{1}{\varepsilon}\right)\left(\zeta-\frac{1}{\varepsilon}\right)}, \tag{14.2}$$

где C — некоторое комплексное число. Параметры C, k_1, k_2 определяются геометрическими свойствами профилей и условиями обтекания. Заметим, что C просто связано с циркуляцией Γ по контуру каждого профиля в плоскости z. Действительно циркуляция Γ по контуру профиля в плоскости z, взятая в направлении против часовой стрелки, будет равна циркуляции по кругу $|\zeta| = 1$, взятой по

часовой стрелке, последняя же находится через сумму вычетов у полюсов $\zeta = \pm \varepsilon$

$$\Gamma = -2\pi i C \left[\frac{(-\varepsilon - e^{ik_1})(-\varepsilon - e^{ik_2})}{-2\varepsilon\left(\varepsilon^2 - \frac{1}{\varepsilon^2}\right)} - \frac{(\varepsilon - e^{ik_1})(\varepsilon - e^{ik_2})}{2\varepsilon\left(\varepsilon^2 - \frac{1}{\varepsilon^2}\right)} \right] =$$

$$= -2\pi i C \frac{\varepsilon^2}{1-\varepsilon^4}\left(e^{ik_1} + e^{ik_2}\right).$$

Так как

$$e^{ik_1} + e^{ik_2} = e^{i\frac{k_2+k_1}{2}} e^{i\frac{k_2-k_1}{2}} + e^{i\frac{k_2+k_1}{2}} e^{-i\frac{k_2-k_1}{2}} = 2e^{i\frac{k_2+k_1}{2}} \cos\frac{k_2-k_1}{2},$$

то мы можем написать

$$\Gamma = -4\pi i \varepsilon^2 \frac{C}{1-\varepsilon^4} e^{i\frac{k_2+k_1}{2}} \cos\frac{k_2-k_1}{2}.$$

Так как циркуляция Γ должна быть действительной, то величину $iCe^{i\frac{k_2+k_1}{2}}$ мы будем считать действительной. Введем вместо C новую, но уже действительную величину A из равенства $A = -iCe^{i\frac{k_2+k_1}{2}}$; тогда (14.2) примет вид

$$\frac{dW}{dz} = iAe^{-i\frac{k_2+k_1}{2}} \frac{(\zeta - e^{ik_1})(\zeta - e^{ik_2})}{(\zeta^2 - \varepsilon^2)\left(\zeta^2 - \frac{1}{\varepsilon^2}\right)}, \quad (14.3)$$

где A, ε, k_1, k_2 действительны. При этом

$$\Gamma = 4\pi A \frac{\varepsilon^2}{1-\varepsilon^4} \cos\frac{k_2-k_1}{2}. \quad (14.4)$$

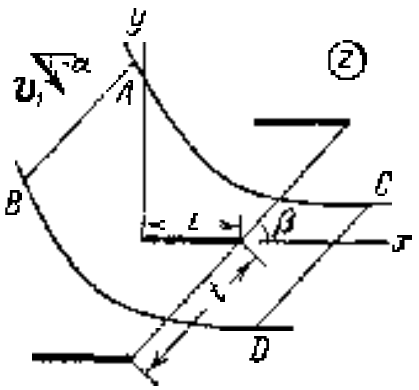

Рис. 112

На примере обтекания решетки плоских пластинок покажем, как можно довести решение задачи до конца.

Прежде всего получим выражение функции $z = f(\zeta)$, дающей конформное отображение плоскости с надрезами (рис. 112) на внутренность круга $|\zeta| = 1$. Чтобы получить функцию $f(\zeta)$, воспользуемся приемом гидромеханики — сравнением простейших течений в той и другой плоскости. Именно рассмотрим новое, простейшее течение в плоскости z со скоростью, параллельной профилям, т. е. бесциркуляционное обтекание решетки; скорость этого течения примем равной единице. Комплексный потенциал w_1 этого простейшего течения будет:

$$w_1 = z. \quad (14.5)$$

Какое течение будет отвечать этому бесциркуляционному течению в плоскости ζ? Чтобы ответить на этот вопрос, мы можем воспользоваться формулой (14.3), подобрав в ней прежде всего параметры так, чтобы получить $\Gamma = 0$. Согласно (14.4) это будет означать, что

$$k = k_1 + \pi. \tag{14.6}$$

Обозначим для этого случая k_1 через k_0, а постоянную, стоящую теперь множителем в (14.3) — через A_0. Итак,

$$\frac{dw_1}{d\zeta} = -A_0 e^{-ik_0} \frac{\zeta^2 - e^{2ik_0}}{(\zeta^2 - \varepsilon^2)\left(\zeta^2 - \frac{1}{\varepsilon^2}\right)}, \tag{14.7}$$

где A_0, k_0, ε — действительные постоянные.

Интегрируя (14.7) и принимая в расчет (14.5), получим:

$$z = f(\zeta) = -\frac{A_0 e^{-ik_0}}{2(1-\varepsilon^2)}\left[(e^{2ik_0} - \varepsilon^2)\ln\frac{\zeta-\varepsilon}{\zeta+\varepsilon} - (\varepsilon^2 e^{2ik_0} - 1)\ln\frac{\zeta - \frac{1}{\varepsilon}}{\zeta + \frac{1}{\varepsilon}}\right] \tag{14.8}$$

Удобно ввести вместо параметров A_0 и k_0 два новых параметра t и β из равенств

$$\frac{A_0 \varepsilon e^{-ik_0}}{1-\varepsilon^2}(e^{2ik_0} - \varepsilon^2) = \frac{te^{i\beta}}{\pi i}, \quad \frac{A_0 \varepsilon e^{-ik_0}}{1-\varepsilon^2}(\varepsilon^2 e^{2ik_0} - 1) = \frac{te^{-i\beta}}{\pi i}. \tag{14.9}$$

Тогда функция $f(\zeta)$, дающая наше конформное отображение, примет вид

$$f(\zeta) = -\frac{t}{2\pi i}\left(e^{i\beta}\ln\frac{\zeta - \varepsilon}{\zeta + \varepsilon} - e^{-i\beta}\ln\frac{\zeta - \frac{1}{\varepsilon}}{\zeta + \frac{1}{\varepsilon}}\right). \tag{14.10}$$

Нетрудно видеть, что $te^{i\beta}$ будет периодом нашей решетки в плоскости z. Действительно, обход по часовой стрелке по малой окружности около точки $\zeta = \varepsilon$ приведет к изменению аргумента $\zeta - \varepsilon$ на $-2\pi i$, и, таким образом, после обхода мы получим вместо $f(\zeta) = z$ величину $f(\zeta) = z + te^{i\beta}$.

Решетка в плоскости z будет определена, если будет задан ее период $te^{i\beta}$ и еще ширина l каждой из пластинок. Свяжем теперь третий параметр, входящий в (14.10), — параметр ε — с шириной пластинок, составляющих решетку. Задняя кромка пластинки отвечает значению $\zeta = e^{ik_0}$, передняя кромка переходит в точку $\zeta = e^{i(k_0+\pi)} = -e^{ik_0}$. Поэтому ширина пластинки должна быть определена по формуле

$$l = f(e^{ik_0}) - f(-e^{ik_0}).$$

По (14.10)

$$l = -\frac{t}{\pi}\left(e^{i\beta}\ln\frac{e^{ik_2}-\varepsilon}{e^{ik_2}+\varepsilon} - e^{-i\beta}\ln\frac{e^{-ik_2}-\varepsilon}{e^{-ik_2}+\varepsilon}\right) =$$

$$= \frac{t}{\pi}\left(\sin\beta\ln\frac{1+2\varepsilon\cos k_2+\varepsilon^2}{1-2\varepsilon\cos k_2+\varepsilon^2} - 2\cos\beta\operatorname{arctg}\frac{2\varepsilon\sin k_2}{1-\varepsilon^2}\right) \qquad (14.11)$$

Выразим еще k_2 через ε и β. Для этого заметим, что, умножая первое из равенств (14.9) на ε^2 и вычитая второе, мы получим:

$$A_0\varepsilon e^{-ik_0} = \frac{t}{\pi}\left(\varepsilon^2 e^{i\beta} - e^{-i\beta}\right). \qquad (14.12)$$

Значит,

$$A_0\varepsilon\cos k_0 = \frac{t}{\pi}(\varepsilon^2+1)\sin\beta; \quad A_0\varepsilon\sin k_0 = \frac{t}{\pi}(\varepsilon^2-1)\cos\beta,$$

так что

$$A_0 = \frac{t}{\varepsilon\pi}\sqrt{1+\varepsilon^4-2\varepsilon^2\cos 2\beta}, \qquad \operatorname{tg} k_0 = -\frac{1-\varepsilon^2}{1+\varepsilon^2}\operatorname{tg}\beta. \qquad (14.13)$$

Теперь по (14.11) можно представить l в виде

$$l = \frac{t}{\pi}\left[\sin\beta\ln\frac{\sqrt{1-2\varepsilon^2\cos 2\beta+\varepsilon^4}+2\varepsilon\sin\beta}{\sqrt{1-2\varepsilon^2\cos 2\beta+\varepsilon^4}-2\varepsilon\sin\beta} + 2\cos\beta\operatorname{arctg}\frac{2\varepsilon\cos\beta}{\sqrt{1-2\varepsilon^2\cos 2\beta+\varepsilon^4}}\right]. \qquad (14.14)$$

Формула (14.14) позволяет выразить ε через l, t и β.

Формулами (14.10), (14.14) полностью определена функция, дающая конформное отображение внешности решетки пластинок на внутренность круга $|\zeta| = 1$.

Вернемся теперь к нашей задаче обтекания.

Комплексный потенциал W удовлетворяет уравнению типа (14.3). Интегрируя это уравнение по ζ, мы получим W в функциях от ζ. С другой стороны, по (14.1) и (14.10) мы получим соответствие между ζ и z. Таким образом, остается лишь выбрать параметры, входящие в (14.3). Параметр ε характеризует геометрическую сторону обтекания; он уже определен по (14.14). Чтобы найти параметры A, k_1, k_2, привлечем величину и направление скорости на бесконечности перед пластинкой и условие конечности скорости на задней кромке пластинки.

Для определения скорости в плоскости z имеем равенство

$$\frac{dw}{dz} = \frac{dW}{d\zeta}:\frac{dz}{d\zeta} = -\frac{iA}{A_2}e^{-i\frac{k_2+k_1-2\beta}{2}}\frac{(\zeta-e^{ik_1})(\zeta-e^{ik_2})}{\zeta^2-e^{2ik_0}}. \qquad (14.15)$$

Чтобы получить конечную скорость на задней кромке ($\zeta = e^{ik_1}$), мы должны будем принять

$$k_1 = k_0$$

Итак

$$\frac{dw}{dz} = -\frac{iA}{A_0} e^{-i\frac{k_2-k_0}{2}} \frac{\zeta - e^{ik_2}}{\zeta + e^{ik_0}}. \qquad (14.16)$$

Пусть скорость при $z = -\infty$ имеет величину v_2 и составляет угол α_1 с осью X (с направлением пластинки); тогда, так как при $z = -\infty$ будет $\zeta = -\varepsilon$, мы должны написать:

$$v_1 e^{-\alpha_1 i} = -\frac{iA}{A_0} \frac{\varepsilon e^{-\frac{ik_2}{2}} + e^{i\frac{k_2}{2}}}{\varepsilon e^{-\frac{ik_0}{2}} - e^{i\frac{k_0}{2}}} = \left(\frac{dW}{dz}\right)_{z=-\infty}.$$

Отсюда

$$v_1 \cos\alpha_1 = -\frac{A}{A_0} \frac{(1+\varepsilon^2)\sin\frac{k_2-k_0}{2} - 2\varepsilon\sin\frac{k_2+k_0}{2}}{1-2\varepsilon\cos k_0+\varepsilon^2}, \qquad (14.17)$$

$$v_1 \sin\alpha_1 = -\frac{A}{A_0} \frac{(1-\varepsilon^2)\cos\frac{k_2-k_1}{2}}{1-2\varepsilon\cos k_0+\varepsilon^2}. \qquad (14.18)$$

Из этих двух равенств мы можем найти A и k_2, обтекание будет полностью определено.

Найдем еще циркуляцию Γ. По (14.4), используя равенство (14.18), в котором A_0 заменено по (14.12), мы получим:

$$\Gamma = -4\frac{\pi l\sqrt{1-2\varepsilon^2\cos 2\beta+\varepsilon^4}}{(1-\varepsilon^2)(1-\varepsilon^4)}(1+\varepsilon^4-2\varepsilon\cos k_0)\, v_1 \sin\alpha_1. \qquad (14.19)$$

Отметим, что случай обтекания одной пластинки мы получим предельным переходом при $\varepsilon \to 0$. Так как по (14.14) для малых ε мы имеем $\varepsilon \approx \frac{l}{4}4\varepsilon$, то $\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon l = \frac{\pi}{4} l$, и (14.19) перейдет в равенство

$$(\Gamma)_{\varepsilon=0} = -\pi l v_1 \sin\alpha_1,$$

что согласуется с формулой (11.4) этой главы.

Найдем еще величину и направление скорости после прохождения решетки. Пусть комплексная скорость на бесконечности справа т. е при $\zeta = \varepsilon$, будет $v_2 e^{-\alpha_2 i}$. Тогда по (14.16)

$$v_2 e^{-\alpha_2 i} - v_1 e^{-\alpha_1 i} = -\frac{iA}{A_0} e^{-i\frac{k_2-k_0}{2}}\left(\frac{\varepsilon - e^{ik_2}}{\varepsilon + e^{ik_2}} - \frac{\varepsilon + e^{ik_0}}{\varepsilon - e^{ik_0}}\right) =$$

$$= 4i\frac{A}{A_0} e^{ik_0} \frac{\varepsilon \cos\frac{k_2-k_0}{2}}{\varepsilon^2 - e^{2ik_0}}.$$

Привлекая (14.4), (14.12) и (14.13), получим затем:

$$v_2 e^{-\alpha_2 i} - v_1 e^{-\alpha_1 i} = \frac{1}{l} e^{-\beta i}. \qquad (14.20)$$

Заметим, что зависимость (14.20) может быть получена также и в случае произвольного контура профиля, обтекаемого со своей циркуляцией Γ. Действительно, вспомним соотношение

$$\Gamma = \oint_C \frac{dw}{dz}\,dz,$$

где интегрирование ведется по контуру профиля C. Выделим область, ограниченную контуром C и контуром $ABCD$ (рис. 110), состоящим из отрезков двух соседних конгруэнтных линий тока AB и CD и двух отрезков прямых AC и BD параллельных периоду решетки. Внутри выделенной области функция dw/dz будет голоморфна, поэтому интеграл $\oint_C \frac{dw}{dz}\,dz$, взятый по контуру C против часовой стрелки, будет равен со знаком минус интегралу по контуру $ABCD$, взятому по часовой стрелке. Но интегралы по отрезкам AB и CD, берущиеся в противоположных направлениях, пропадут из-за периодичности функции dw/dz. Удалим теперь отрезки AC и BD на бесконечность, оставляя их параллельными самим себе. Получим окончательно:

$$-\Gamma = \int_{\vec{CA}} \frac{dw}{dz}\,dz + \int_{\vec{BD}} \frac{dw}{dz}\,dz = \left(\frac{dw}{dz}\right)_{z=-\infty} |\vec{CA}| - \left(\frac{dw}{dz}\right)_{z=+\infty} |\vec{BD}| =$$

$$= (v_1 e^{-\alpha_1 l} - v_2 e^{-\alpha_2 l}) \cdot t e^{i\gamma}. \quad (14.21)$$

Таким образом (14.20) справедливо не только в случае прямолинейных контуров, но и в любом случае.

Силы, действующие на отдельные профили решетки, могут быть найдены без труда, если использовать вновь контур $ABCD$. Исходя из общих формул Чаплыгина, мы получим, используя (14.21):

$$X - iY = \frac{i\rho}{2} \oint_C \left(\frac{dw}{dz}\right)^2 dz = -\frac{i\rho}{2}\left(v_1^2 e^{-2\alpha_1 l} - v_2^2 e^{-2\alpha_2 l}\right) t e^{i\gamma} =$$

$$= \frac{i\rho\Gamma}{2}\left(v_1 e^{-\alpha_1 l} + v_2 e^{-\alpha_2 l}\right).$$

§ 15. Тонкое крыло. Как мы видели, задача об обтекании контура произвольной формы решается до конца, если известно конформное преобразование внешности контура на внешность круга. Однако отыскание явного вида этого конформного преобразования для профиля произвольной формы представляет большие трудности.

В настоящее время существуют эффективные приближенные методы решения задачи обтекания. Из них наиболее развитым

является метод Симонова и Серебрийского [1]), он может быть использован для расчета обтекания любых профилей, но изложение его выходит из рамок нашей книги. Другие приближенные методы относятся к частным видам контуров, например только для тонких профилей. Остановимся на этом подробней.

Покажем, как можно в общем виде дать приближенное решение задачи об обтекании произвольного тонкого профиля. Мы заменяем последний кривой линией, проходящей как раз посредине между верхней и нижней частями контура. Пусть уравнение этой линии C есть

$$y = F(x) \tag{15.1}$$

Для определенности мы предположим, что оба конца дуги C лежат на оси Ox в точках A и B имеющих координаты $\mp a$ (рис. 113). Мы будем считать кривизну контура C очень малой и следовательно, сам контур C мало отличающимся от прямолинейного отрезка. Итак, функция $F(x)$, заданная на отрезке $(-a, a)$ оси Ox, обращается в нуль в концах этого отрезка и имеет непрерывную вторую производную, считаемую бесконечно малой величиной.

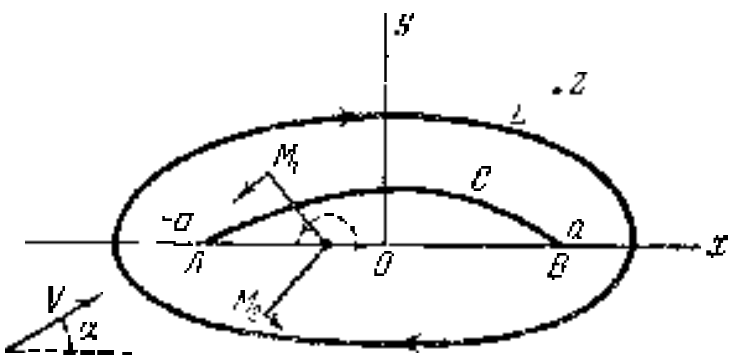

Рис. 113

Рассмотрим теперь задачу об обтекании контура C поступательным потоком, имеющим на бесконечности скорость V, наклоненную к оси Ox под углом атаки α, тоже считаемым бесконечно малой величиной, или, что то же, задачу о поступательном движении контура C со скоростью V в направлении, составляющем угол α с отрицательной полуосью Ox. Обозначим в этом последнем случае комплексный потенциал возникающего абсолютного движения жидкости через $w = \varphi + i\psi$; для комплексного потенциала $W = \Phi + i\Psi$, определяющего обтекание контура, получим:

$$W = Ve^{i\alpha}z - w, \tag{15.2}$$

в частности

$$\Psi(x, y) = V(y\cos\alpha - x\sin\alpha) + \psi(x, y).$$

Контур C является линией тока для задачи обтекания, поэтому на нем Ψ имеет постоянное значение, которое не нарушая общности

---

[1]) Симонов Л. А., Расчет обтекания крыловых профилей и построение профиля по данному распределению скоростей на его поверхности. ПММ, т. XI, вып. 1–2, 1947.

Серебрийский Я. М., Обтекание крыловых профилей произвольной формы, Инженерный сборник, т. III, вып. 1, 1946.

можем принять равным нулю, поэтому получаем

$$\psi[x, F(x)] + V[F(x)\cos\alpha - x\sin\alpha] = 0.$$

Вследствие сделанных предположений о порядке малости $F(x)$ и α мы можем, отбрасывая малые второго порядка и выше, заменить $\cos\alpha$ на 1, $\sin\alpha$ на α и $\psi[x, F(x)]$ на $\psi(x, 0)$. В результате получим граничное условие

$$\psi(x, 0) = V[\alpha x - F(x)] \quad \text{при} \quad |x| < a \tag{15.3}$$

для комплексного потенциала w. Для комплексной скорости

$$\frac{dw}{dz} = v_x - iv_y = \frac{\partial\psi}{\partial y} + i\frac{\partial\psi}{\partial x} \tag{15.4}$$

граничным условием будет

$$v_y = V[F'(x) - \alpha] \quad \text{при} \quad y = 0, \quad |x| < a. \tag{15.5}$$

Удобнее рассматривать комплексную скорость, так как она является однозначной функцией. Таким образом мы свели задачу к определению функции dw/dz, голоморфной в области, лежащей вне отрезка AB оси Ox и удовлетворяющей на обеих сторонах этого отрезка граничному условию (15.5). Такое перенесение граничных условий с контура C на его проекцию AB на ось Ox оказалось возможным только благодаря сделанному предположению о слабой изогнутости контура C и представляет сильное упрощение задачи. Мы будем считать, что острой кромке первоначального контура соответствует задний конец B контура C_1 и потребуем в соответствии с этим конечности скорости в точке B. На переднем конце A скорость получится, вообще говоря, бесконечно большой; мы будем предполагать, что вблизи точки A произведение $|w'|\sqrt{\delta}$, где δ — расстояние точки до A, остается ограниченным.

В силу (15.5) составляющая v_y скорости не терпит разрыва на отрезке AB оси Ox, составляющая же v_x может терпеть разрыв, но разрыв касательной составляющей скорости можно рассматривать как наличие вихревого слоя. Итак, рассматриваемое течение можно считать происходящим от системы вихрей, непрерывно распределенных по отрезку AB оси Ox. Возьмем теперь в плоскости z две точки M_1 и M_2, симметричные относительно оси Ox. Очевидно, что какой-либо вихрь, лежащий на оси Ox, сообщает этим точкам скорости с одинаковыми составляющими по оси Oy и с прямо противоположными по знаку составляющими по оси Ox. То же самое будет иметь место и для всей системы вихрей, распределенных по отрезку AB. Итак, мы имеем равенства

$$v_x(x, -y) = -v_x(x, y); \quad v_y(x, y) = v_y(x, -y).$$

Ясно, что, в частности, на отрезке AB касательные составляющие скорости при подходе сверху и снизу будут иметь одинаковый модуль, но противоположные знаки.

Рассмотрим теперь функцию

$$f(z) = \frac{dw}{dz}\sqrt{\frac{z-a}{z-a}}$$

причем при $z = x > a$ берется положительное значение корня. Эта функция также является голоморфной во всей плоскости z, разрезанной по отрезку AB оси Ox, и обращается на бесконечности в нуль. Обозначим через L контур, охватывающий отрезок AB и пробегаемый по часовой стрелке, а через z точку вне этого контура. Функция от ζ

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$$

имеет вне контура L единственную особую точку $\zeta = z$ с вычетом $f(z)$, вычет этой функции в бесконечно удаленной точке равен нулю, поэтому по теореме Коши получим

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_L \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta \qquad (15\,6)$$

Стянем теперь контур L к дважды пробегаемому отрезку AB. Ясно, что на верхней стороне этого отрезка надо принять

$$\sqrt{\frac{\xi+a}{\xi-a}} = \frac{\sqrt{a+\xi}}{i\sqrt{a-\xi}} = -i\sqrt{\frac{a+\xi}{a-\xi}},$$

а на нижней

$$\sqrt{\frac{\xi+a}{\xi-a}} = i\sqrt{\frac{a+\xi}{a-\xi}};$$

поэтому, замечая еще, что вследствие сделанных предположений интегралы по малым окружностям, охватывающим концы A и B отрезка, стремятся к нулю вместе с радиусами этих окружностей, из предыдущей формулы получим:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-a}^{a} -i\sqrt{\frac{a-\xi}{a-\xi}}\,\frac{v_x(\xi,+0) - iv_y(\xi,+0)}{\xi - z}\,d\xi -$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{-a}^{a} i\sqrt{\frac{a+\xi}{a+\xi}}\,\frac{v_x(\xi,-0) - iv_y(\xi,-0)}{\xi - z}\,d\xi,$$

где $\Phi(\xi,-0)$ означает предельное значение функции $\Phi(\xi,\eta)$ при подходе к отрезку AB сверху, $\Phi(\xi,-0)$ при подходе снизу. Вспоминая, что

$$v_x(\xi,+0) = -v_x(\xi,-0);\quad v_y(\xi,+0) = v_y(\xi,-0) = v_y(\xi,0),$$

получим формулу

$$\frac{dw}{dz}\sqrt{\frac{z+a}{z-a}}=-\frac{1}{\pi i}\int_{a}^{a}\frac{v_y(\xi,0)}{\xi-z}\sqrt{\frac{a+\xi}{a-\xi}}\,d\xi.$$

Подставляя сюда значение (15.5) для v_y, мы и получим окончательное решение задачи в виде

$$\frac{dw}{dz}=-\frac{1}{\pi i}\sqrt{\frac{z-a}{z+a}}\int_{-a}^{a}\frac{V[F'(\xi)-\alpha]}{\xi-z}\sqrt{\frac{a+\xi}{a-\xi}}\,d\xi. \quad (15.7)$$

Найдем разложение этой функции вблизи бесконечно удаленной точки, так как

$$\sqrt{\frac{z-a}{z+a}}=\sqrt{1-\frac{2a}{z}+\ldots}=1-\frac{a}{z}+\ldots,$$

$$\frac{1}{\xi-z}=-\frac{1}{z\left(1-\frac{\xi}{z}\right)}=-\frac{1}{z}-\frac{\xi}{z^2}-\ldots,$$

то без труда получим по аналогии с (8.2), что

$$\frac{dw}{dz}=\frac{\Gamma}{2\pi i z}-\frac{A_2}{z^2}+\ldots$$

где

$$\Gamma=2V\int_{-a}^{a}[F'(\xi)-\alpha]\sqrt{\frac{a+\xi}{a-\xi}}\,d\xi;$$

$$A_2=-\frac{V}{\pi i}\int_{-a}^{a}[F'(\xi)-\alpha]\sqrt{a^2-\xi^2}\,d\xi.$$

Так как

$$\int_{-a}^{a}\sqrt{\frac{a+\xi}{a-\xi}}\,d\xi=\int_{-a}^{a}\frac{a+\xi}{\sqrt{a^2-\xi^2}}\,d\xi=\pi a,\qquad \int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-\xi^2}\,d\xi=\frac{\pi a^2}{2},$$

то для циркуляции Γ получаем выражение

$$\Gamma=2V\int_{-a}^{a}F'(\xi)\sqrt{\frac{a+\xi}{a-\xi}}\,d\xi-2\pi aV\alpha, \quad (15.8)$$

для коэффициента A_2 найдем:

$$A_2=\frac{iV}{\pi}\int_{-a}^{a}F'(\xi)\sqrt{a^2-\xi^2}\,d\xi-\frac{iV\alpha a^2}{2}. \quad (15.9)$$

Для вычисления проекций X и Y на оси координат главного вектора сил, действующих на контур, и момента L этих сил

относительно начала координат, воспользуемся формулами (8.3) и (8.4):

$$X - iY = i\rho\Gamma\bar{v}_\infty,$$

$$L = \mathrm{Re}\{-2\pi\rho\bar{v}_\infty A_2 i\}$$

При принятой степени точности надо положить $\bar{v}_\infty = Ve^{i\alpha} \approx V - iV\alpha$, поэтому без труда получим:

$$\left.\begin{aligned} X &= \rho\Gamma V\alpha = -2\pi\rho aV^2\alpha^2 + 2\rho V^2 \int_{-a}^{a} F'(\xi)\sqrt{\frac{a+\xi}{a-\xi}}\,d\xi, \\ Y &= -\rho\Gamma V = 2\pi a\rho V^2\alpha - 2\rho V^2 \int_{-a}^{a} F'(\xi)\sqrt{\frac{a-\xi}{a+\xi}}\,d\xi, \\ L &= -\pi\rho V^2 a^2\alpha + 2\rho V^2 \int_{-a}^{a} F'(\xi)\sqrt{a^2-\xi^2}\,d\xi. \end{aligned}\right\} \quad (15.10)$$

Полученные формулы можно еще несколько преобразовать при помощи интегрирования по частям, а именно, мы имеем

$$\int_{-a}^{a} F'(\xi)\sqrt{\frac{a+\xi}{a-\xi}}\,d\xi = \int_{-a}^{a}\sqrt{\frac{a+\xi}{a-\xi}}\,dF(\xi) = \sqrt{\frac{a-\xi}{a+\xi}}\,F(\xi)\Big|_{-a}^{a} -$$

$$-\int_{-a}^{a} F(\xi)\frac{a\,d\xi}{(a-\xi)\sqrt{a^2-\xi^2}} = -a\int_{-a}^{a}\frac{F(\xi)\,d\xi}{(a-\xi)\sqrt{a^2-\xi^2}},$$

ибо $F(\xi)$ на концах отрезка AB обращается в нуль. Точно так же

$$\int_{-a}^{a} F'(\xi)\sqrt{a^2-\xi^2}\,d\xi = \int_{-a}^{a}\frac{F(\xi)\,\xi\,d\xi}{\sqrt{a^2-\xi^2}}.$$

Поэтому все требуемые величины могут быть выражены непосредственно через заданную величину $F(x)$:

$$\left.\begin{aligned} \Gamma &= -2aV\left\{\pi\alpha + \int_{-a}^{a}\frac{F(\xi)\,d\xi}{(a-\xi)\sqrt{a^2-\xi^2}}\right\}; \\ X &= -2\rho aV^2\alpha\left\{\pi\alpha + \int_{-a}^{a}\frac{F(\xi)\,d\xi}{(a-\xi)\sqrt{a^2-\xi^2}}\right\}; \\ Y &= 2\rho aV^2\left\{\pi\alpha + \int_{-a}^{a}\frac{F(\xi)\,d\xi}{(a-\xi)\sqrt{a^2-\xi^2}}\right\}; \\ L &= -\rho V^2\left\{\pi a^2 - 2\int_{-a}^{a}\frac{F(\xi)\,\xi\,d\xi}{\sqrt{a^2-\xi^2}}\right\}. \end{aligned}\right\} \quad (15.11)$$

В качестве первого примера рассмотрим случай плоской пластинки, для чего достаточно положить $F(x) = 0$, мы непосредственно получаем выражения для циркуляции и сил.

$$\Gamma = -2\pi a V \alpha, \quad X = -2\pi a V^2 \alpha^2; \quad Y = \pi\rho a V^2 \alpha; \quad L = -\pi\rho a^2 V^2 \alpha \qquad (15.12)$$

В § 11 задача об обтекании пластинки была решена точно, и очевидно, что полученные сейчас результаты согласуются с получающимися из точных формул при малом угле атаки α.

Комплексная скорость в рассматриваемом случае дается выражающим из (15.7) выражением

$$\frac{dw}{dz} = \frac{V\alpha}{\pi i}\sqrt{\frac{z-a}{z+a}}\int_{-a}^{a}\frac{1}{\xi - z}\sqrt{\frac{a+\xi}{a-\xi}}\,d\xi. \qquad (15.13)$$

Стоящий справа интеграл без труда вычисляется. В самом деле, функция

$$f(z) = \sqrt{\frac{z+a}{z-a}} - 1$$

голоморфна во всей плоскости, разрезанной по отрезку AB оси Ox, и обращается на бесконечности в нуль. Поэтому опять применима формула (15.6). Стягивая контур L к дважды пробегаемому отрезку AB, будем иметь на верхней стороне этого отрезка

$$f(\xi + i0) = \frac{1}{i}\sqrt{\frac{a+\xi}{a-\xi}} - 1 = -i\sqrt{\frac{a+\xi}{a-\xi}} - 1,$$

а на нижней

$$f(\xi - i0) = -\frac{1}{i}\sqrt{\frac{a+\xi}{a-\xi}} - 1 = i\sqrt{\frac{a+\xi}{a-\xi}} - 1,$$

поэтому из формулы (15.6) получим

$$\sqrt{\frac{z+a}{z-a}} - 1 = \frac{1}{2\pi i}\int_{-a}^{a}\frac{f(\xi+i0) - f(\xi-i0)}{\xi - z}\,d\xi =$$

$$= -\frac{1}{\pi}\int_{-a}^{a}\sqrt{\frac{a+\xi}{a-\xi}}\,\frac{d\xi}{\xi - z},$$

откуда

$$\int_{-a}^{a}\sqrt{\frac{a+\xi}{a-\xi}}\,\frac{d\xi}{\xi - z} = \pi\left\{1 - \sqrt{\frac{z+a}{z-a}}\right\}. \qquad (15.14)$$

Итак, в случае движения плоской пластинки со скоростью V под углом атаки α для комплексной скорости имеем:

$$\frac{dw}{dz} = iV\alpha\left\{1 - \sqrt{\frac{z-a}{z+a}}\right\}. \qquad (15.15)$$

Найдем предельное значение комплексной скорости при подходе к точкам отрезка AB сверху:

$$v_x(\xi + 0) - iv_y(\xi, +0) = iV\alpha\left\{1 - i\sqrt{\frac{a-\xi}{a+\xi}}\right\} = V\alpha\sqrt{\frac{a-\xi}{a+\xi}} + iV\alpha,$$

так что

$$v_x(\xi, +0) = V\alpha\sqrt{\frac{a-\xi}{a+\xi}}, \qquad v_y(\xi - 0) = -V\alpha.$$

При подходе снизу будет:

$$v_x(\xi, -0) = -V\alpha\sqrt{\frac{a-\xi}{a+\xi}}, \quad v_y(\xi, -0) = -V\alpha.$$

Интенсивность $\gamma(\xi)$ тех вихрей, распределенных по отрезку AB, которыми можно заменить контур с тем, чтобы получить рассматриваемое течение определяется разрывом касательной составляющей скорости

$$\gamma(\xi) = v_x(\xi, -0) - v_x(\xi, +0)$$

и, следовательно,

$$\gamma(\xi) = -2V\alpha\sqrt{\frac{a-\xi}{a+\xi}} \tag{15.16}$$

Полная интенсивность всех этих вихрей и определяет, очевидно, величину циркуляции

$$\Gamma = \int_{\alpha}^{a}\gamma(\xi)\,d\xi = -2V\alpha\int_{-a}^{a}\sqrt{\frac{a-\xi}{a+\xi}}\,d\xi = -2V\alpha\pi a \tag{15.17}$$

Интенсивность вихрей обращается в нуль на заднем конце крыла, где скорость остается конечной, к переднему же краю крыла интенсивность вихрей беспредельно растет, с этим связано наличие бесконечной скорости вблизи переднего края крыла, а также наличие подсасывающей силы, о чем шла речь в § 11.

В качестве второго примера возьмем дужку в форме параболы

$$F(x) = h\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) \tag{15.18}$$

Исходя из (15.10), без труда получим:

$$\left.\begin{aligned} &\Gamma = 2\pi aV\left(\alpha + \frac{h}{a}\right); \qquad X = -2\pi\rho aV^2\alpha\left(\alpha + \frac{h}{a}\right);\\ &Y = 2\pi\rho aV^2\left(\alpha - \frac{h}{a}\right); \qquad L = -\pi\rho V^2a^2\alpha. \end{aligned}\right\} \tag{15.19}$$

Циркуляция и подъемная сила обращаются в нуль при $\alpha = -h/a$, следовательно, критической осью служит прямая, проходящая через

вершину дужки и задний ее конец. Общая формула (15.7) в данном случае даст:

$$\frac{dw}{dz} = \frac{V}{\pi i}\sqrt{\frac{z-a}{z+a}}\int_{-a}^{a}\frac{z+\frac{2h\zeta}{a^2}}{\zeta-z}\sqrt{\frac{a+\zeta}{a-\zeta}}\,d\zeta.$$

Воспользовавшись теперь формулой (15.14) и вычитающей из нее формулой

$$\int_{-a}^{a}\sqrt{\frac{a-\zeta}{a+\zeta}}\frac{\zeta}{\zeta-z}\,d\zeta = \int_{-a}^{a}\sqrt{\frac{a+\zeta}{a-\zeta}}\left\{1+\frac{z}{\zeta-z}\right\}d\zeta =$$

$$= \pi a + \pi z\left\{1-\sqrt{\frac{z+a}{z-a}}\right\} \qquad (15.20)$$

без труда получим:

$$\frac{dw}{dz} = iV\left\{z+\frac{2hz}{a^2}-\left(a+\frac{2h}{a}+\frac{2hz}{a^2}\right)\sqrt{\frac{z-a}{z+a}}\right\}. \qquad (15.21)$$

Для интенсивности вихрей аналогично (15.16) найдем:

$$\gamma(\xi) = v_x(\xi,-0)-v_x(\xi,+0) = -2v_x(\xi,0) =$$

$$= 2V\left(1+\frac{2h}{a}-\frac{2h\xi}{a^2}\right)\sqrt{\frac{a-\xi}{a+\xi}}. \qquad (15.22)$$

Перейдем от переменной ξ к переменной θ, положив

$$\xi = a\cos\theta;\quad 0\leqslant\theta\leqslant\pi, \qquad (15.23)$$

тогда

$$\sqrt{\frac{a-\xi}{a+\xi}} = \operatorname{tg}\frac{\theta}{2};\quad (a-\xi)\sqrt{\frac{a-\xi}{a+\xi}} = a\sin\theta$$

и предыдущая формула примет вид

$$\gamma(\xi) = -2V\left(a\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}-\frac{4h}{a}\sin\theta\right). \qquad (15.24)$$

Изложенный здесь метод решения задачи принадлежит Л. И. Седову.

Дадим теперь другой метод решения задачи о тонком крыле. Совершим конформное преобразование внешности отрезка AB оси Ox на внешность круга K единичного радиуса в плоскости ζ:

$$z = \frac{a}{2}\left(\zeta+\frac{1}{\zeta}\right).$$

В частности, полагая на круге K

$$\zeta = e^{i\theta}.$$

получим для точек отрезка AB представление

$$x = a\cos\theta, \quad y = 0. \tag{15.25}$$

Комплексный потенциал

$$w(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$$

удобнее отыскивать в плоскости ζ. Для мнимой части его мы имеем представление (15.3):

$$\psi(x, 0) = V[ax - F(x)] \quad \text{при} \quad |x| \leqslant a.$$

Введем обозначение

$$F(a\cos\theta) = af(\theta); \tag{15.26}$$

тогда предыдущее условие может быть записано в виде

$$\psi = aV[a\cos\theta - f(\theta)] \quad \text{при} \quad \zeta = e^{i\theta}.$$

Разложим четную функцию $f(\theta)$ в тригонометрический ряд:

$$f(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos n\theta; \tag{15.27}$$

тогда

$$\psi = -aV[A_1 - (A_1 - a)\cos\theta + A_2\cos 2\theta + \ldots] \text{ при } \zeta = e^{i\theta}. \tag{15.28}$$

Но ведь комплексный потенциал w должен в плоскости ζ разлагаться в ряд вида

$$w = \frac{\Gamma}{2\pi i}\ln\zeta + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n' + ic_n''}{\zeta^n};$$

подставляя в этот ряд

$$\zeta = e^{i\theta}$$

и отделяя вещественную и мнимую части, получим:

$$\varphi = \frac{\Gamma}{2\pi}\theta + c_0' + \sum_{n=1}^{\infty}(c_n'\cos n\theta + c_n''\sin n\theta),$$

$$\psi = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(c_n''\cos n\theta - c_n'\sin n\theta) \quad \text{при} \quad \zeta = e^{i\theta}.$$

Сравнение с (15.28) показывает, что

$$c_0'' = -aVA_0, \quad c_1'' = -aV(A_1 - a), \quad c_n'' = -aVA_n \quad (n = 2, 3, \ldots),$$
$$c_n' = 0 \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

кроме того, не нарушая общности, можно положить

$$c_0 = 0.$$

В результате приходим к следующему представлению потенциала φ на круге K:

$$\varphi = \frac{\Gamma}{2\pi}\theta + aV\alpha\sin\theta - aV\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n\theta; \qquad (15.29)$$

заменяя здесь θ через x по формуле (15.25), получим значения потенциала φ на отрезке AB оси Ox.

Найдем теперь касательные составляющие скорости на верхней и нижней сторонах профиля. На верхней стороне отрезка AB угол θ меняется от 0 до π; принимая еще во внимание что

$$dx = -a\sin\theta\, d\theta,$$

получим

$$v_x(x+0) = \frac{d\varphi}{dx} = \frac{d\varphi}{d\theta}\frac{d\theta}{dx} = -\frac{1}{a\sin\theta}\frac{d\varphi}{d\theta} =$$

$$= -\frac{\Gamma}{2\pi a\sin\theta} - \frac{aV\cos\theta}{\sin\theta} + \frac{V}{\sin\theta}\sum_{n=1}^{\infty} nA_n\cos n\theta. \qquad (15.30)$$

Чтобы в правом конце дужки, которому соответствует $\theta = 0$, скорость оставалась конечной необходимо принять

$$\Gamma = 2\pi a\left\{-V\alpha + V\sum_{n=1}^{\infty} nA_n\right\}. \qquad (15.31)$$

Поэтому будем окончательно иметь:

$$v_x(x,+0) = \frac{aV(1-\cos\theta)}{\sin\theta} - V\sum_{n=1}^{\infty} nA_n\frac{1-\cos n\theta}{\sin\theta}. \qquad (15.32)$$

На нижней стороне профиля скорость переменит свой знак

$$v_x(x,-0) = -v_x(x,+0).$$

Для интенсивности вихрей

$$\gamma(x) = v_x(x,-0) - v_x(x,-0) = -2v_x(x,+0)$$

получим следующее тригонометрическое представление:

$$\gamma(x) = -2aV\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} + 2V\sum_{n=1}^{\infty} nA_n\frac{1-\cos n\theta}{\sin\theta}. \qquad (15.33)$$

Иногда удобно исходить из тригонометрического ряда

$$F(x) = \frac{B_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} B_n\cos n\theta. \qquad (15.34)$$

Вследствие (15.26) и (15.27) имеем:

$$-f'(a\cos\theta)\,a\sin\theta = af'(\theta) = -a\sum_{n=1}^{\infty} nA_n \sin n\theta,$$

поэтому получаем тождество

$$\left(\frac{B_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos n\theta\right)\sin\theta = \sum_{n=1}^{\infty} nA_n \sin n\theta,$$

и так как

$$2\cos n\theta \sin\theta = \sin(n+1)\theta - \sin(n-1)\theta,$$

то между B_n и A_n будут существовать соотношения

$$nA_n = \frac{1}{2}(B_{n-1} - B_{n+1}) \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{15.35}$$

Подставляя это значение в (15.33), после простых преобразований найдем:

$$\gamma(x) = -2\nu' \operatorname{tg}\frac{\theta}{2} + V\sum_{n=1}^{\infty}(B_{n-1} - B_{n-1})\frac{1-\cos n\theta}{\sin\theta} -$$

$$- -2a\nu' \operatorname{tg}\frac{\theta}{2} - VB_0\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta} + V\sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{\cos(n-1)\theta - \cos(n+1)\theta}{\sin\theta},$$

и окончательно

$$\gamma(x) = 2V\left(\frac{B_0}{2} - \alpha\right)\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} + 2\nu'\sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin n\theta. \tag{15.36}$$

Например, в случае параболической дужки (15.18)

$$F'(x) = -\frac{2hx}{a^2} = -\frac{2h}{a}\cos\theta, \quad B_1 = -\frac{2h}{a}, \quad B_n = 0 \quad (n \neq 1),$$

и мы сразу получаем формулу (15.24).

Имея распределение вихрей, мы сразу можем написать выражение для комплексной скорости

$$\frac{dw}{dz} = \frac{1}{2\pi i}\int_a^a \frac{\gamma(\xi)\,d\xi}{\xi - z}. \tag{15.37}$$

Так как вследствие (15.35)

$$\sum_{n=1}^{\infty} nA_n = \frac{1}{2}(B_0 + B_1),$$

то для циркуляции Γ, пользуясь (15.31), получим

$$\Gamma = 2\pi a V\left(\frac{B_0 - B_1}{2} - \alpha\right), \tag{15.38}$$

после чего сразу выписываются выражения для сил

$$\left.\begin{aligned} X &= \varepsilon\Gamma V\alpha = 2\pi a\varepsilon V^2\alpha\left(\frac{B_2+B_1}{2}-\alpha\right);\\ Y &= -\rho\Gamma V = -2\pi a\varepsilon V^2\left(\frac{B_0+B_1}{2}-\sigma\right). \end{aligned}\right\} \tag{15.39}$$

Чтобы получить момент относительно начала координат сил, действующих на профиль разложим (15.37) в окрестности бесконечно далекой точки

$$\frac{dw}{dz} = -\frac{1}{2\pi i}\left\{\frac{1}{z}\int_{-a}^{a}\gamma(\xi)\,d\xi + \frac{1}{z^2}\int_{-a}^{a}\xi\gamma(\xi)\,d\xi + \ldots\right\}.$$

Итак,

$$A_2 = -\frac{1}{2\pi i}\int_{-a}^{a}\xi\gamma(\xi)\,d\xi, \tag{15.40}$$

и по формуле (8.4)

$$L = \rho V\int_{-a}^{a}\xi\gamma(\xi)\,d\xi, \tag{15.41}$$

но

$$\begin{aligned}\int_{-a}^{a}\xi\gamma(\xi)\,d\xi &= \\ &= \int_{\pi}^{0} a\cos\theta 2V\left[\left(\frac{B_0}{2}-\alpha\right)\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin n\theta\right](-a\sin\theta)\,d\theta = \\ = Va^2(B_0-2\sigma)\int_{0}^{\pi}\cos\theta(1-\cos\theta)\,d\theta + Va^2\sum_{n=1}^{\infty}\int_{0}^{\pi}B_n\sin n\theta\sin 2\theta\,d\theta = \\ = -\frac{\pi Va^2(B_0-2\sigma)}{2}+\frac{\pi Va^2B_2}{2},\end{aligned}$$

и, следовательно,

$$L = \frac{\pi\rho V^2a^2}{2}(2\alpha - B_0 + B_2). \tag{15.42}$$

Таким образом, для вычисления сил достаточно знать три первых коэффициента разложения (15.34).

§ 16. Неустановившееся движение плоского контура. В § 4 нами было рассмотрено поступательное течение, вызываемое движущимся круговым цилиндром. Рассмотрим теперь вопрос о неустановившемся движении произвольного плоского твердого контура C.

Выбирая фиксированную точку O твердо связанную с контуром C, за полюс, мы можем характеризовать движение контура C проекциями U и V скорости точки O и угловой скоростью вращения ω контура C около точки O. Положение последней в рассматриваемый момент примем за начало координат.

Безвихревое движение безграничной жидкости, находящейся вне контура C, определяется комплексным потенциалом

$$w = \varphi + i\psi$$

причем на контуре C должно выполняться граничное условие

$$\psi = Uy - Vx - \frac{\omega}{2}(x^2 + y^2) \qquad (16.1)$$

Однако этим движение жидкости полностью еще не определяется, необходимо задать еще величину циркуляции Γ по контуру C.

Введем теперь в рассмотрение четыре комплексных потенциала

$$w_k = \varphi_k + i\psi_k \qquad (k = 1, 2, 3, 4),$$

последний из которых w_4 соответствует чисто циркуляционному обтеканию контура C, так что

$$\psi_4 = 0 \text{ на } C \qquad (16.2)$$

причем циркуляция имеет величину Γ, а три остальных потенциала определяют бесциркуляционные течения в безграничной области, лежащей вне контура C, причем удовлетворяются граничные условия:

$$\psi_1 = y, \quad \psi_2 = -x; \quad \psi_3 = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \text{ на } C \qquad (16.3)$$

Очевидно, что w_1 и w_2 определяют течения, возникающие при поступательном движении контура C с единичной скоростью параллельно осям Ox и Oy, а w_3 определяет течение, соответствующее вращению контура C около точки O с единичной угловой скоростью.

Очевидно теперь, что если мы составим комплексный потенциал

$$w = Uw_1 + Vw_2 + \omega w_3 + \Gamma w_4, \qquad (16.4)$$

то он будет удовлетворять всем поставленным выше условиям. Итак, при неустановившемся движении контура C потенциал скорости φ и функция тока ψ линейно зависят от величин U, V, ω и Γ, определяющих движение контура и циркуляцию по нему:

$$\varphi = U\varphi_1 + V\varphi_2 + \omega\varphi_3 + \Gamma\varphi_4, \quad \psi = U\psi_1 + V\psi_2 + \omega\psi_3 + \Gamma\psi_4. \qquad (16.5)$$

Рассмотрим теперь вопрос о силах, действующих на контур со стороны жидкости. Будем исходить из законов количеств движения и моментов количеств движения. Обозначим через K какой-либо весьма большой контур, охватывающий контур C, например окруж-

ность большого радиуса a с центром в точке O. Область расположенную между контурами C и K, обозначим через D.

Проекции на оси координат количества движения жидкости, находящейся в области D, суть

$$K_x = \rho \int_D \int v_x \, dx \, dy = \rho \int_D \int \frac{\partial \varphi}{\partial x} \, dx \, dy;$$

$$K_y = \rho \int_D \int v_y \, dx \, dy = \rho \int_D \int \frac{\partial \varphi}{\partial y} \, dx \, dy.$$

Преобразуем эти выражения по формуле Гаусса; так как функция φ может быть многозначной, следует провести разрез от контура C к контуру K, как показано на рис. 114, и за границу области D следует взять контур L, состоящий из контуров C, K и дважды пробегаемого разреза AB, направление обхода этого контура показано на рисунке. Мы будем тогда иметь, применяя формулу Гаусса и затем формулу интегрирования по частям:

$$K_x = \rho \int_L \varphi \, dy = -\rho \int_L y \, d\varphi;$$

$$K_y = -\rho \int_L \varphi \, dx = \rho \int_L x \, d\varphi,$$

или в комплексной форме:

$$K = K_x + iK_y =$$

$$= -\rho \int_L (y - ix) \, d\varphi = i\rho \int_L z \, d\varphi.$$

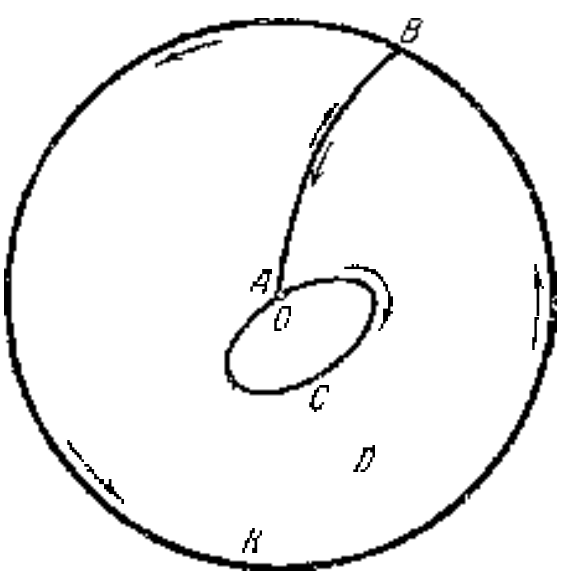

Рис. 114

Так как на двух сторонах разреза AB значения φ различаются на постоянную величину Γ, то в последнем интеграле части, происходящие от двух сторон разреза AB, взаимно уничтожатся, и мы можем написать:

$$K = i\rho \int_K z \, d\varphi - i\rho \int_C z \, d\varphi,$$

причем интегрирование по контуру C производим, как обычно, против часовой стрелки.

По закону количеств движения производная по времени от количества движения той части жидкости, которая находится в области D, равна главному вектору сил давления, приложенных к жидкости вдоль контуров C и K.

На элемент dz контура K действует сила давления $ip\,dz$, поэтому главный вектор этих сил давления есть

$$R_K = i\int_K p\,dz.$$

Обозначив еще через

$$R = i\int_C p\,dz$$

главный вектор сил давления, действующих на контур C со стороны жидкости, и замечая, что на жидкость будут действовать силы прямо противоположные, можем написать закон количеств движения в виде

$$R_K - R = \frac{dK}{dt} = ip\frac{d}{dt}\int_K z\,d\varphi - ip\frac{d}{dt}\int_C z\,d\varphi$$

или

$$R - ip\frac{d}{dt}\int_C z\,d\varphi = R_K - ip\frac{d}{dt}\int_K z\,d\varphi. \qquad (16\,6)$$

Докажем, что правая часть стремится к нулю при неограниченном возрастании a. Для определения давления p мы имеем формулу Лагранжа — Коши

$$p = -\rho\frac{\partial\varphi}{\partial t} - \frac{\rho v^2}{2} + F(t),$$

поэтому

$$R_K = -ip\int_K \frac{\partial\varphi}{\partial t}\,dz - \frac{\rho}{2}\int_K v^2\,dz,$$

далее,

$$-\frac{d}{dt}\int_K z\,d\varphi = -\int_K \frac{dz}{dt}\,d\varphi + \int_K z\,d\frac{d\varphi}{dt} = \int_K (v_x + iv_y)\,d\varphi - \int_K \frac{d\varphi}{dt}\,dz =$$

$$= \int_K (v_x + iv_y)\,v_s\,ds - \int_K \frac{d\varphi}{dt}\,dz,$$

и так как

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{dy}{dt} = \frac{\partial\varphi}{\partial t} - v_x^2 + v_y^2 = \frac{\partial\varphi}{\partial t} + v^2,$$

то

$$\frac{d}{dt}\int_K z\,d\varphi = -\int_K \frac{\partial\varphi}{\partial t}\,dz - \int_K v^2\,dz + \int_K (v_x + iv_y)\,v_s\,ds.$$

В результате получаем:

$$R_K - ip\frac{d}{dt}\int_K z\,d\varphi = ip\int_K \frac{v^2}{2}\,dz - ip\int_K (v_x + iv_y)\,v_s\,ds.$$

и так как скорость v на бесконечности стремится к нулю, имея на контуре K порядок $1/a$ то оба интеграла в правой части имеют порядок $1/a$ и стремятся к нулю при $a \to \infty$. Левая часть равенства (16.6), будучи сколь угодно малой и не зависящей от радиуса a окружности K, должна тождественно равняться нулю откуда

$$R = ip \frac{d}{dt} \int_C z\, d\zeta \tag{16.7}$$

Совершенно аналогично вычисляется главный момент относительно точки O сил давления, приложенных к контуру C:

$$L = \int_C p\,(x\,dx + y\,dy) = \int_C p\, d\frac{r^2}{2}.$$

Момент количеств движения жидкости находящейся в области D, есть

$$I = \rho \int_D \int (xv_y - yv_x)\,dx\,dy = \rho \int_D \int \left(x \frac{\partial \varphi}{\partial y} - y \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) dx\,dy =$$

$$= \rho \int_D \int \left[\frac{\partial (x\varphi)}{\partial y} - \frac{\partial (y\varphi)}{\partial x}\right] dx\,dy = \rho \int_L \varphi\,(x\,dx + y\,dy) =$$

$$= -\rho \int_L \varphi\, d\frac{r^2}{2} = -\rho \int_L \frac{r^2}{2}\, d\varphi = -\rho \int_K \frac{r^2}{2}\, d\varphi + \rho \int_C \frac{r^2}{2}\, d\varphi.$$

По закону моментов количеств движения

$$\frac{dI}{dt} = -L,$$

ибо все силы давления, приложенные к элементам окружности K, проходят через точку O. Далее:

$$\frac{d}{dt} \int_K \frac{r^2}{2}\, d\varphi = \int_K \frac{r^2}{2}\, d\frac{d\varphi}{dt} + \int_K \frac{d}{dt}\left(\frac{r^2}{2}\right) d\varphi = \int_K \frac{d}{dt}\left(\frac{r^2}{2}\right) d\varphi =$$

$$= \int_K r v_r\, d\varphi - \int_K r v_r v_s\, ds,$$

поэтому

$$L = \rho \frac{d}{dt} \int_C \frac{r^2}{2}\, d\varphi - \rho \int_K r v_r v_s\, ds. \tag{16.8}$$

Остается показать равенство последнего интеграла нулю.

Но

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\Gamma}{2\pi i} \frac{1}{z} + \frac{A_2}{z^2} + \dots,$$

и так как для вихря радиальная составляющая скорости обращается в нуль, а касательная имеет значение $\Gamma/2\pi r$, то на окружности K будем иметь

$$v_r = O\left(\frac{1}{a^2}\right), \quad v_s = \frac{\Gamma}{2\pi a} + O\left(\frac{1}{a^2}\right),$$

поэтому в интеграле

$$\int_K r v_r v_s \, ds$$

подынтегральная функция будет порядка $\frac{1}{a^2}$, а сам интеграл порядка $\frac{1}{a}$. Устремляя a к бесконечности из (16.8) получим

$$L = -\rho \frac{d}{dt} \int_C \frac{r^2}{2} n_\gamma. \tag{16.9}$$

Применим полученные формулы в первую очередь для установления связи между силами, действующими на контур при наличии циркуляции Γ и при отсутствии последней.

Прежде всего, вследствие (16.5) и (16.7) имеем

$$R = R_0 + i\rho\Gamma \frac{d}{dt} \int_C z \, d\varphi_1, \tag{16.10}$$

где R_0 означает главный вектор сил, действующих на контур C при отсутствии циркуляции. Если мы воспользуемся, как в §§ 7 и 8, конформным отображением внешности контура C на внешность круга с центром в начале координат в плоскости ζ, то будем иметь:

$$w_1 = \frac{1}{2\pi i} \ln \zeta, \quad \varphi_1 = \frac{\theta}{2\pi}, \tag{16.11}$$

поэтому

$$\int_C z \, d\varphi_1 = \frac{1}{2\pi} \int_C z \, d\theta = k_0 \tag{16.12}$$

где k_0 есть, как было выяснено в § 6, координата конформного центра тяжести C_0 контура C. Обозначая скорость этой точки через q_0, будем иметь:

$$\frac{d}{dt} \int_C z \, d\varphi_1 = \frac{dk_0}{dt} = q_0,$$

и формула (16.10) примет вид

$$R = R_0 + i\rho\Gamma q_0 \tag{16.13}$$

Таким образом, при наличии постоянной циркуляции к силам, действующим на контур при отсутствии циркуляции, добавляется сила

Жуковского, соответствующая скорости конформного центра тяжести контура

Чтобы найти точку приложения этой добавочной силы, надо воспользоваться уравнением моментов. Из формулы (16.9), опять таки вследствие (16.5), получаем

$$L = L_0 + i\Gamma \frac{d}{dt} \int_C \frac{r^2}{2}\, d\varphi_4. \tag{16.14}$$

Для фиксированной точки контура C функция φ_4 с течением времени не изменяется, а

$$\frac{d}{dt}\frac{r^2}{2} = \frac{d}{dt}\frac{x^2+y^2}{2} = x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} =$$

$$= x(U - \omega y) + y(V + \omega x) = Ux + Vy,$$

поэтому добавочный член в формуле (16.14) имеет вид

$$\Gamma\rho\left\{U\int_C x\, d\varphi_4 + V\int_C y\, d\varphi_4\right\} = \Gamma\rho\,\mathrm{Re}\,\{k_0 v_0\}, \tag{16.15}$$

где $v_0 = U + iV$ есть скорость точки O.

Если мы временно возьмем за начало координат конформный центр тяжести C_0, то будем иметь $k_0 = 0$, и, следовательно, момент добавочной силы относительно точки C_0 равен нулю, а сама добавочная сила должна проходить через конформный центр тяжести C_0.

Итак, *при наличии циркуляции на контур действует добавочная сила Жуковского* $i\rho\Gamma q_0$, *приложенная в конформном центре тяжести и соответствующая скорости этой точки*.

Теорема эта была доказана Л. И. Седовым.

Будем теперь рассматривать случай отсутствия циркуляции, так что $\Gamma = 0$. В этом случае скорость жидкости на бесконечности убывает как $1/a^2$. Поэтому живая сила всей жидкости будет в этом случае иметь конечную величину

$$T = \frac{\rho}{2}\int\int (v_x^2 + v_y^2)\, dx\, dy = -\frac{\rho}{2}\int_C \varphi\frac{d\varphi}{dn}\, ds. \tag{16.16}$$

Вследствие уравнений Коши—Римана имеем:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = \frac{\partial\psi}{\partial s}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial s} = -\frac{\partial\psi}{\partial n},$$

и поэтому можно также написать

$$T = -\frac{1}{2}\rho\int_C \varphi\, d\psi. \tag{16.17}$$

Воспользуемся теперь тем, что

$$\varphi = U\varphi_1 + V\varphi_2 + \omega\varphi_3; \quad \psi = U\psi_1 + V\psi_2 + \omega\psi_3 \tag{16.18}$$

и введем обозначения

$$\lambda_{ik} = -\rho \int_C \varphi_i \, d\psi_k \qquad (i, k = 1, 2, 3). \tag{16.19}$$

Докажем, что

$$\lambda_{ik} = \lambda_{ki}. \tag{16.20}$$

В самом деле,

$$\int_C \varphi_i \, d\psi_k - \int_C \varphi_k \, d\psi_i = \int_C \varphi_i \frac{\partial \psi_k}{\partial s} ds - \int_C \varphi_k \frac{\partial \psi_i}{\partial s} ds =$$

$$= \int_C \left(\varphi_i \frac{\partial \varphi_k}{\partial n} - \varphi_k \frac{\partial \varphi_i}{\partial n} \right) ds, \tag{16.21}$$

но по формуле Гаусса

$$\int_D \int (\varphi_i \Delta \varphi_k - \varphi_k \Delta \varphi_i) \, dx \, dy =$$

$$= \int_K \left(\varphi_i \frac{\partial \varphi_k}{\partial n} - \varphi_k \frac{\partial \varphi_i}{\partial n} \right) ds - \int_C \left(\varphi_i \frac{\partial \varphi_k}{\partial n} - \varphi_k \frac{\partial \varphi_i}{\partial n} \right) ds;$$

левая часть обращается в нуль, так как φ_i и φ_k — гармонические функции; первый же интеграл правой части есть малая величина порядка $1/a^2$, ибо φ_i и φ_k можно считать малыми порядка $1/a$, а их нормальные производные малыми порядка $1/a^2$. Интеграл (16.21), будучи сколь угодно мал, должен тождественно равняться нулю, что и доказывает (16.20).

Поэтому живую силу жидкости можно написать в виде:

$$2T = \lambda_{11}U^2 + \lambda_{22}V^2 + \lambda_{33}\omega^2 + 2\lambda_{12}UV + 2\lambda_{13}U\omega + 2\lambda_{23}V\omega. \tag{16.22}$$

Ввиду аналогии этой формулы с формулой для живой силы твердого тела, коэффициенты λ_{ik} носят название *коэффициентов присоединенных масс*.

Напишем теперь формулы для сил

$$R = X + iY = i\rho \frac{d}{dt} \int_C z \, d\sigma, \quad L = \rho \frac{d}{dt} \int_C \frac{r^2}{2} d\sigma \tag{16.23}$$

в следующем виде:

$$X = -\frac{dB_x}{dt}; \quad Y = -\frac{dB_y}{dt}; \quad L = -\frac{dI}{dt}. \tag{16.24}$$

где

$$B_x = \rho \int_C y\, d\varphi = -\rho \int_C \varphi\, dy, \quad B_y = -\rho \int_C x\, d\varphi = \rho \int_C \varphi\, dx,$$

$$I = -\rho \int_C \frac{x^2+y^2}{2}\, d\varphi = \rho \int_C \varphi (x\, dx + y\, dy).$$

Если бы мы приложили к покоящейся жидкости, находящейся вне контура C, мгновенные импульсы сил давления, распределенные по контуру C и имеющие величину $-\rho\varphi$, то мы получили бы рассматриваемое нами движение. Величины B_x и B_y можно трактовать как *проекции на оси координат главного вектора этих импульсивных сил давлений* а I — как *главный момент их относительно начала координат*. Замечая что на контуре C

$$y = \psi_1, \quad x = -\psi_2, \quad -\frac{x^2+y^2}{2} = \psi_3, \tag{16 25}$$

можем написать:

$$B_1 = -\rho \int_C \varphi\, d\psi_1 = -U \int_C \varphi_1\, d\psi_1 - pV \int_C \varphi_2\, d\psi_1 - \rho\omega \int_C \varphi_3\, d\psi_1 =$$

$$= \lambda_{11} U + \lambda_{12} V - \lambda_{13}\omega = \frac{\partial T}{\partial U}.$$

В результате аналогичных вычислений находим:

$$\left.\begin{aligned} B_x &= \lambda_{11} U + \lambda_{12} V + \lambda_{13}\omega = \frac{\partial T}{\partial U}, \\ B_y &= \lambda_{21} U + \lambda_{22} V + \lambda_{23}\omega = \frac{\partial T}{\partial V}, \\ I &= \lambda_{31} U + \lambda_{32} V + \lambda_{33}\omega = \frac{\partial T}{\partial \omega}. \end{aligned}\right\} \tag{16 26}$$

Необходимо заметить, что коэффициенты λ_{ik} зависят от выбора системы координат и, вообще говоря, меняются с течением времени.

Поэтому выгодно перейти к подвижной системе координат Oxy, неизменно связанной с контуром C. В самом деле, в этой системе координат граничные условия (16 25) для функций ψ_1, ψ_2, ψ_3 будут все время одними и теми же, а следовательно, функции φ_1, φ_2, φ_3 не будут зависеть от времени. Потенциалы φ_1, φ_2, φ_3 тоже не будут зависеть от времени, а следовательно, коэффициенты λ_{ik} тоже будут постоянными.

Потенциал

$$\varphi = U\varphi_1 + V\varphi_2 + \omega\varphi_3 \tag{16 27}$$

и все другие величины будут зависеть от времени только через посредство U, V, ω. При вычислении сил в подвижной системе

координат нужно учитывать то обстоятельство, что в формулах (16 24) входят абсолютные производные. Так как подвижная система координат вращается с угловой скоростью ω, то между абсолютной и относительной (взятой в подвижной системе координат) производными вектора $\boldsymbol{B}$ будем иметь соотношения

$$\frac{dB_x}{dt} = \frac{\partial B_x}{\partial t} - \omega B_y, \qquad \frac{dB_y}{dt} = \frac{\partial B_y}{\partial t} + \omega B_x. \tag{16 28}$$

последние члены в этих формулах учитывают изменение вектора $\boldsymbol{B}$, происходящее за счет переноса его вместе с подвижной системой координат

Точно так же, при вычислении абсолютной производной момента I, надо учесть то обстоятельство, что при движении контура C начало O подвижной системы перемещается; если мы в рассматриваемый момент t совместим неподвижную систему координат с подвижной, то через промежуток времени dt начало подвижной системы координат будет в точке с координатами $U dt$ $V dt$. Приводя импульсы, распределенные по контуру C, к этой точке и беря затем момент относительно начала неподвижной системы координат, получим:

$$I + \frac{dI}{dt} dt = I + \frac{\partial I}{\partial t} dt + U dt \cdot B_y - V dt \cdot B_x,$$

откуда и вытекает искомая формула

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\partial I}{\partial t} + UB_y - VB_x. \tag{16.29}$$

Итак, при введении подвижной системы координат, твердо связанной с контуром, силы действующие на контур со стороны жидкости, могут быть определены формулами

$$\left.\begin{aligned} X &= -\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial T}{\partial U} + \omega \frac{\partial T}{\partial V}, \quad Y = -\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial T}{\partial V} - \omega \frac{\partial T}{\partial U}; \\ L &= -\frac{\partial I}{\partial t} - UB_y + VB_x = -\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial T}{\partial \omega} - U\frac{\partial T}{\partial V} + V\frac{\partial T}{\partial U}. \end{aligned}\right\} \tag{16.30}$$

В качестве примера рассмотрим движение эллипса с полуосями a и b. Направим оси подвижной системы координат по осям эллипса

Воспользуемся конформным отображением

$$z = \frac{a+b}{2}\zeta + \frac{a-b}{2\zeta} \tag{16 31}$$

внешности эллипса на внешность круга K единичного радиуса

Комплексный потенциал w_1 должен определиться из граничного условия

$$\psi_1 = y \tag{16.32}$$

или

$$\operatorname{Im} w_1 = \operatorname{Im} z \text{ на } K. \tag{16.33}$$

Так как на круге K

$$\zeta = e^{i\theta}, \quad \frac{1}{\zeta} = e^{-i\theta}, \quad \overline{\zeta} = e^{-i\theta} = \frac{1}{\zeta},$$

то мы можем написать, что на круге K

$$\operatorname{Im} z = \operatorname{Im}\left\{\frac{a+b}{2}\zeta + \frac{a-b}{2\zeta}\right\} =$$

$$= -\operatorname{Im}\frac{a+b}{2}\zeta + \operatorname{Im}\frac{a-b}{2\zeta} = -\operatorname{Im}\frac{a+b}{2\zeta} + \operatorname{Im}\frac{a-b}{2\zeta} = \operatorname{Im}\frac{-b}{\zeta}.$$

Поэтому условие (16.33) может быть записано так:

$$\operatorname{Im} w_1 = \operatorname{Im}\frac{-b}{\zeta} \text{ на } K.$$

Но то да ясно что функция

$$w_1 = -\frac{b}{\zeta}, \tag{16.34}$$

голоморфная вне круга K и удовлетворяющая граничному условию (16.33), и представляет искомый комплексный потенциал w_1.

Точно так же граничное условие для комплексного потенциала w_2 есть

$$\psi_2 = -\lambda$$

или

$$\operatorname{Im} w_2 = \operatorname{Im}\{-iz\} = \operatorname{Im}\left\{-i\frac{a+b}{2}\zeta - i\frac{a-b}{2\zeta}\right\} =$$

$$= \operatorname{Im}\left\{-\frac{i(a+b)}{2}\zeta - i\frac{a-b}{2\zeta}\right\} - \operatorname{Im}\left\{-\frac{i(a+b)}{2\zeta} - \frac{i(a-b)}{2\zeta}\right\} =$$

$$= \operatorname{Im}\left\{-\frac{ia}{\zeta}\right\},$$

откуда вытекает, что

$$w_2 = -\frac{ia}{\zeta}. \tag{16.35}$$

Наконец, для определения комплексного потенциала w_3 имеем условие

$$\psi_3 = -\frac{1}{2}(x^2 + y^2) \text{ на } K. \tag{16.36}$$

На круге K

$$x^2+y^2=z\bar{z}=\frac{1}{4}\left\{(a+b)\zeta+\frac{a-b}{\zeta}\right\}\left\{(a+b)\bar{\zeta}+\frac{a-b}{\bar{\zeta}}\right\}=$$
$$=\frac{1}{4}\left\{(a+b)^2\zeta\bar{\zeta}-(a^2-b^2)\left(\frac{\zeta}{\bar{\zeta}}+\frac{\bar{\zeta}}{\zeta}\right)+\frac{(a-b)^2}{\zeta\bar{\zeta}}\right\}=$$
$$=\frac{1}{4}\left\{(a+b)^2+(a^2-b^2)\left(-\frac{1}{\zeta^2}+\frac{1}{\bar{\zeta}^2}\right)+(a-b)^2\right\}=$$
$$=\frac{a^2+b^2}{2}+\frac{a^2-b^2}{4}\left(\frac{1}{\bar{\zeta}^2}+\frac{1}{\zeta^2}\right).$$

Поэтому условие (16.36) можно написать так

$$\operatorname{Im}\omega_3=\operatorname{Im}\left\{-\frac{iz\bar{z}}{2}\right\}=-\frac{1}{8}\operatorname{Im}\left\{(2a^2+2b^2)i-i(a^2-b^2)\left(\frac{1}{\zeta^2}+\frac{1}{\bar{\zeta}^2}\right)\right\}=$$
$$=-\frac{1}{8}\operatorname{Im}\left\{(2a^2+2b^2)i-i(a^2-b^2)\left(\frac{1}{\zeta^2}-\frac{1}{\bar{\zeta}^2}\right)\right\}=$$
$$=-\frac{1}{4}\operatorname{Im}\left\{i(a^2+b^2)+i\frac{a^2-b^2}{\zeta^2}\right\},$$

откуда вытекает, что

$$\omega_3=-\frac{a^2+b^2}{4}+\frac{(a^2-b^2)}{4\zeta^2},$$

или отбрасывая несущественную постоянную

$$\omega_3=-\frac{(a^2-b^2)}{4\zeta^2}. \tag{16.37}$$

Наконец циркуляционное обтекание эллипса определяется формулой

$$\omega_4=\frac{1}{2\pi i}\ln\zeta. \tag{16.38}$$

Полный комплексный потенциал дается формулой

$$\omega=-\frac{Uz}{\zeta}-\frac{iVa}{\zeta}-\frac{m(a^2-b^2)}{4\zeta^2}+\frac{\Gamma}{2\pi i}\ln\zeta. \tag{16.39}$$

Для определения сил надо вычислить коэффициенты присоединенных масс.

Например

$$\lambda_{11}=-\rho\int_C\varphi_1\,dy_1$$

по на круге K

$$\omega_1=-\frac{b}{\zeta}=-be^{-i\theta},\quad \varphi_1=-b\cos\theta,\quad y_1=b\sin\theta,$$

поэтому

$$\lambda_{11} = \rho b^2 \int_0^{2\pi} \cos^2\theta \, d\theta = \pi\rho b^2.$$

Точно так же без труда найдем:

$$\lambda_{22} = \pi\rho a^2, \quad \lambda_{33} = \frac{\pi\rho (a^2 - b^2)^2}{8}; \quad \lambda_{12} = \lambda_{13} = \lambda_{23} = 0.$$

В случае бесциркуляционного течения живая сила

$$2T = \lambda_{11} U^2 + \lambda_{22} V^2 + \lambda_{33}\omega^2 = \pi\rho \left\{ b^2 U^2 + a^2 V^2 + \frac{(a^2 - b^2)^2}{8} \omega^2 \right\}.$$

Пользуясь формулами (16.30), получим следующие выражения для сил:

$$\left.\begin{aligned} X &= -\pi\rho b^2 \frac{dU}{dt} + \pi\rho a^2 \omega V; \quad Y = -\pi\rho a^2 \frac{dV}{dt} - \pi\rho b^2 \omega U, \\ L &= -\frac{\pi\rho (a^2 - b^2)^2}{8} \frac{d\omega}{dt} - \pi\rho (a^2 - b^2) UV \end{aligned}\right\} \quad (16.40)$$

В случае наличия циркуляции Γ, нужно прибавить еще силу Жуковского, приложенную в центре эллипса (так как $k_0 = 0$) и соответствующую скорости этой точки $U + iV$, т. е. силу

$$i\rho\Gamma (U + iV) = -\rho\Gamma V + i\rho\Gamma U,$$

поэтому выражение для момента останется без изменения, а выражения для сил примут вид

$$\left.\begin{aligned} X &= -\pi\rho b^2 \frac{dU}{dt} + \pi\rho a^2 \omega V - \rho\Gamma V; \\ Y &= -\pi\rho a^2 \frac{dV}{dt} - \pi\rho b^2 \omega U + \rho\Gamma U. \end{aligned}\right\} \quad (16.41)$$

§ 17. Обтекание с отрывом струй. Метод Кирхгоффа. Разобранные нами выше случаи обтекания цилиндрических тел плоскопараллельным потоком жидкости предполагали непрерывность скорости течения во всех точках потока. При этом было показано, что при отсутствии циркуляции чисто поступательный потенциальный поток не оказывает результирующего давления на обтекаемое тело. В попытках найти объяснение этому парадоксу Гельмгольц и Кирхгоффа внели в рассмотрение как возможную форму движения жидкости, обтекание с образованием поверхностей разрыва непрерывности скорости. При таком обтекании некоторая линия тока, приходя из бесконечности и встречая нормально контур обтекаемого тела, разделяется на две ветви, которые следуют вдоль контура тела до некоторых точек B_1 и B_2 (рис. 115), после чего обе линии тока B_1C и B_2C отрываются от контура и уходят в бесконечность, отделяя область течения I от области покоя II.

Казалось естественным решать задачу в предположении, что область покоя II заполнена жидкостью той же плотности что и жидкость в области потока I. Такая схема вызывала возражения, главное из которых заключалось в том, что поверхность разрыва, представляющая собой тонкий вихревой слой, неустойчива. Распадаясь на отдельные вихри, поверхность разрыва быстро заполняет зону II вихревыми движениями. Многочисленные наблюдения подтверждали наличие такой картины явления и привели к созданию теории вихревых дорожек Кармана.

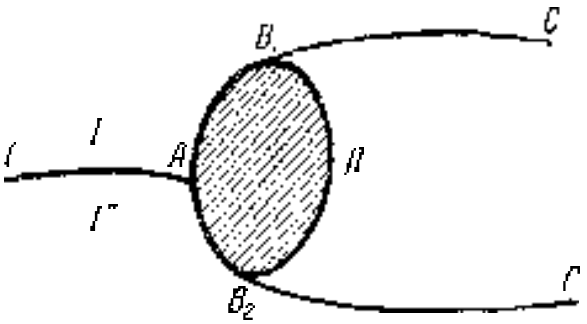

Рис. 115

Однако на самом деле существуют различные режимы обтекания тел. При достаточно больших скоростях [1]) поток жидкости полностью отрывается от тела у кромок B_1 и B_2, и тогда за телом образуется зона постоянного давления, заполненная парами жидкости и выделившимися из жидкости газами. При этом плотность среды ρ' в области II будет значительно меньше плотности ρ жидкости в основном потоке. При малых ρ'/ρ поверхности раздела B_1C и B_2C оказываются практически устойчивыми и теоретические расчеты дают хорошее совпадение с опытом. К задачам, решения которых методами теории струй удачно совпадают с опытом, относятся в первую очередь задачи о глиссировании, о кавитационном обтекании тел и об истечении струй жидкости из отверстий.

Перейдем теперь к изложению метода Кирхгоффа. Становясь на точку зрения теории обтекания с отрывом струй, мы будем считать поле скоростей непрерывным и потенциальным в области течения I. Точка разветвления A линии тока, прилегающей к передней части обтекаемого контура, должна тогда быть критической точкой, в которой скорость $v = 0$, иначе бы вектор скорости терпел разрыв непрерывности по направлению. В зоне застоя II, протягивающейся в бесконечность, скорость везде равна нулю и, следовательно, давление постоянно, если отсутствуют массовые силы, что мы и будем предполагать в дальнейшем. В таком случае линии тока B_1C и B_2C можно рассматривать как свободные границы жидкости, и величина скорости течения на этих линиях должна в силу интеграла Бернулли — Коши оставаться постоянной и равной величине скорости потока в бесконечности v_∞.

В области течения I предполагается существование комплексного потенциала $w = \varphi + i\psi$, при этом, так как комплексный потенциал определяется до аддитивной постоянной вида $c = c_1 + ic_2$, то постоян-

[1]) Точнее при достаточно малых числах кавитации, см. § 21.

ные c_1 и c_2 всегда можно считать выбранными так, чтобы потенциал скорости φ обращался в нуль в точке разветвления A критической линии тока и чтобы вдоль этой линии $\psi = 0$. Так как вдоль линии тока $\psi = 0$ скорость не имеет, кроме точки A, других критических точек и, значит,

$$v_s = \frac{\partial \varphi}{\partial s} > 0,$$

причем $\lim v_s = |v_\infty|$ при удалении в бесконечность как по линии AC так и по ветвям B_1C и B_2C, то очевидно, что потенциал скорости φ изменяется монотонно вдоль линии $\psi = 0$ и притом от $-\infty$ до 0 при следовании в безграничном потоке по линии CA из бесконечности до точки A и от 0 до $+\infty$ при следовании из точки A в бесконечность по каждой ветви AB_1C и AB_2C. Предполагая, что течение в области I вне контура тела и, значит, вне линии тока $\psi = 0$ нигде не имеет критических точек и что $\lim v = v_\infty$ при удалении в бесконечность по любому направлению в области I, мы приходим к аналогичному заключению, что при следовании по течению вдоль всякой линии тока $\psi = c \neq 0$ потенциал скорости изменяется монотонно от $-\infty$ до $+\infty$.

Обращаясь к изменению функции тока ψ при следовании вдоль эквипотенциальной линии $\varphi = \text{const}$, и вспоминая, что

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = -v_y; \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = v_x,$$

имеем:

$$d\psi = -v_y\,dx + v_x\,dy = v(-\sin\theta\,dx + \cos\theta\,dy) =$$
$$= v\left[\cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)dx + \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)dy\right] = v\,d\sigma$$

где $d\sigma$ — элемент эквипотенциальной линии, причем из двух возможных направлений $d\sigma$ взято то, которое получается при помощи *положительного* поворота против часовой стрелки вектора v на $\pi/2$.

Так как эквипотенциальные линии служат ортогональными траекториями линий тока, имеют либо оба конца в бесконечности, либо один конец в бесконечности, а другой на линии тока $\psi = 0$, то очевидно, что, следуя вдоль эквипотенциальной линии по указанному направлению $d\sigma$, мы будем иметь монотонное возрастание функции тока ψ либо от $-\infty$ до $+\infty$, либо от $-\infty$ до 0, либо от 0 до $+\infty$. Таким образом и безграничном потоке линия тока $\psi = 0$ разделит область течения I на две частные области, I', внутри которой $\psi > 0$, и I'', где $\psi < 0$.

Взяв плоскость течения за плоскость комплексного переменного $z = x + iy$, примем за начало координат критическую точку A и сопоставим с этой плоскостью плоскость комплексного потенциала $\omega = \varphi + i\psi$, разрезанную вдоль вещественной оси от $\varphi = 0$ до

$\varphi = +\infty$ (рис. 116) Из предыдущих указаний на поведение функций φ и ψ при следовании в плоскости z вдоль линий тока и вдоль эквипотенциальных линий явствует, что каждой точке плоскости z, взятой в области течения l, соответствует определенная точка плоскости w (хотя бы еще и не разрезанной), и обратно каждой точке *разрезанной* плоскости w соответствует определенная точка плоскости z в области l, при этом точки $z = 0$, $w = 0$, а также $z = \infty$, $w = \infty$ являются соответствующими.

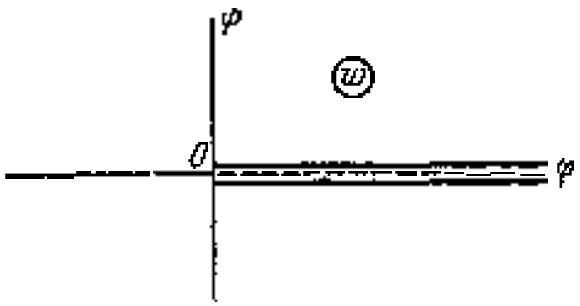

Рис. 116

Задача обтекания тела безграничным потоком будет решена, если удастся найти аналитическую функцию

$$w = f(z), \tag{17.1}$$

конформно отображающую область l на разрезанную плоскость w, или же, наоборот, если удастся найти обратную функцию

$$z = F(w), \tag{17.2}$$

отображающую разрезанную плоскость w на область l плоскости z.

Заметим, что вследствие указанного взаимно однозначного соответствия функция F должна также быть регулярна и однозначна на разрезанной плоскости w. Производная этой аналитической функции

$$\frac{1}{v} = \frac{dz}{dw} = F'(w), \tag{17.3}$$

как известно, также является аналитической функцией на разрезанной плоскости w. Кирхгофф поставил задачу о разыскании аналитической зависимости между dz/dw и w вместо отыскания зависимости (17.2), иначе говоря, задачу о конформном отображении разрезанной плоскости w на ту часть плоскости переменной

$$\frac{1}{\bar{v}} = \frac{v_x + iv_y}{|v|^2}, \tag{17.4}$$

которая соответствует области течения l плоскости z.

Разыскание границ упомянутой части плоскости $1/\bar{v}$ не представляет труда в том случае, когда обтекаемый контур в плоскости z состоит из прямолинейных отрезков. В самом деле, положив $v = |v| e^{i\theta}$ и заметив, что

$$\frac{1}{\bar{v}} = \frac{e^{i\theta}}{|v|},$$

мы видим, что при прямом обтекании, например пластинки B_1B_2 (рис. 117), границам области I плоскости z, состоящим из линий тока B_1C_1 и B_2C_2, где $|v| = |v_\infty|$, и отрезков прямой AB_1, где $\theta = \pi/2$, и AB_2, где $\theta = -\pi/2$, будут в плоскости $1/\bar{v}$ соответствовать (рис. 118) дуга окружности $B_1'C_1'$ с центром в начале координат радиуса $1/|v_\infty|$, дуга той же окружности $B_2'C_2'$, отрезок нижней половины мнимой оси от ∞ до точки B_2' и отрезок верхней половины

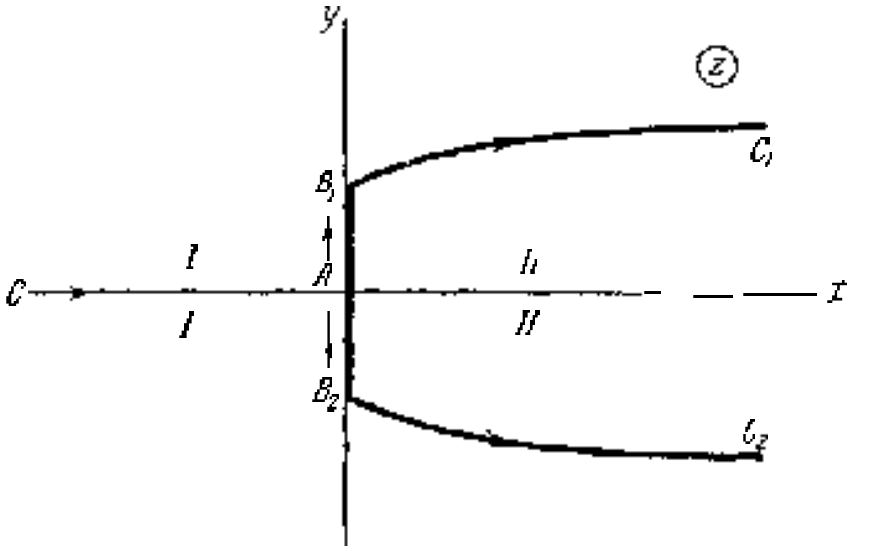

Рис. 117

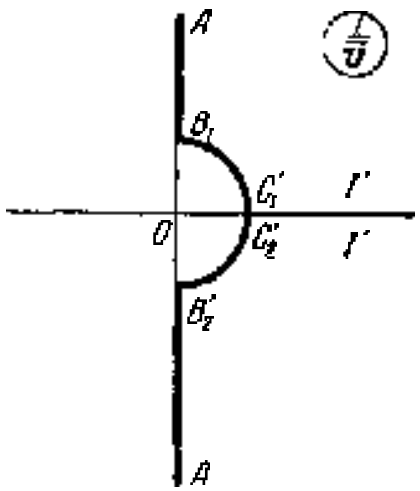

Рис. 118

этой оси от ∞ до точки B'. Таким образом области I на плоскости z соответствует в плоскости $1/\bar{v}$ область I', представляющая правую полуплоскость за вычетом полукруга.

Если бы удалось найти аналитическую зависимость

$$\frac{dz}{dw} = \frac{1}{v} = \chi(w), \tag{17.5}$$

отображающую конформно разрезанную плоскость w на область I' плоскости $1/\bar{v}$, то интегрированием (17.5)

$$z = \int_0^w \chi(w)\,dw \tag{17.6}$$

мы получили бы искомую зависимость между w и z, и задача обтекания была бы решена.

В рассматриваемом примере эту зависимость нетрудно найти. В самом деле, совершая конформное преобразование при помощи формулы

$$u = -\frac{1}{\sqrt{w}},$$

мы увидим (рис. 119), что разрезанной плоскости w будет соответствовать нижняя полуплоскость u; при этом точка A переходит, очевидно, на бесконечность, точка C переходит в начало координат; точки B_1 и B_2, которые в плоскости w имели одну и ту же координату c, где c — некоторое положительное вещественное число,

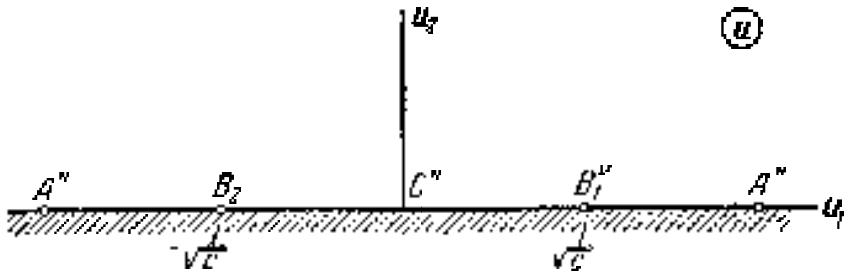

Рис. 119

подлежащее дальнейшему определению, перейдут в точки B_1'' и B_2'', имеющие координаты $+\frac{1}{\sqrt{c}}$ и $-\frac{1}{\sqrt{c}}$.

Если $u = u_1 + iu_2$ рассматривать как комплексный потенциал некоторого фиктивного течения, происходящего на плоскости $\chi = 1/v$, то в этом фиктивном течении на линии $A'B_2'C'B_1'A'$ функция тока u_2 все время равна нулю, а потенциал u_1 меняется от $-\infty$ до $+\infty$. Следовательно, рассматриваемое фиктивное течение сводится к обтеканию полукруга $B_2'C'B_1'$. Если мы дополним полуокружность $B_2'C'B_1'$ до полной окружности и рассмотрим бесциркуляционное обтекание этой окружности потоком, имеющим на бесконечности скорость V, параллельную оси Oy то, в частности, получим в качестве одной из линий тока линию $A'B_2'C'B_1'A'$.

Применяя общую формулу (3.13) к частному случаю бесциркуляционного обтекания круга потоком, параллельным на бесконечности оси Oy, получим.

$$w = -iV\left(z - \frac{a^2}{z}\right).$$

В нашем случае роль комплексного потенциала играет u, роль z играет χ, радиус круга a равен $1/v_\infty$, поэтому получаем:

$$u = -iV\left(\chi - \frac{1}{v_\infty^2 \chi}\right).$$

Для точки B_1 имеем:

$$\chi = \frac{i}{v_\infty}; \quad u = -\frac{1}{\sqrt{c}};$$

подставляя эти значения в предыдущую формулу, находим:

$$V = \frac{v_\infty}{2\sqrt{c}},$$

и, следовательно,

$$u = -\frac{lv_\infty}{2\sqrt{c}}\left(\chi - \frac{1}{v_\infty^2 \chi}\right).$$

Решаем это уравнение относительно χ:

$$\chi = \frac{i\sqrt{c}}{v_\infty} u \perp \frac{\sqrt{1 - cu^2}}{v_\infty}.$$

В точке C имеем $u = 0$, $\chi = 1/v_\infty$, следовательно, надо взять знак плюс. Возвращаясь к прежним обозначениям, получим требуемое выражение

$$\frac{dz}{dw} = \frac{1}{v_\infty}\left\{\sqrt{1 - \frac{c}{w}} + i\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{w}}\right\} = \frac{1}{v_\infty}\frac{\sqrt{w - c} + i\sqrt{c}}{\sqrt{w}}, \quad (17.7)$$

или

$$\frac{dz}{dw} = \frac{i}{v_\infty}\frac{\sqrt{c - w} + \sqrt{c}}{\sqrt{w}}; \quad (17.8)$$

интегрирование последнего равенства дает окончательную зависимость (в точке A при $z = 0$ имеем $w = 0$):

$$z = \frac{i}{v_\infty}\int_0^w \frac{\sqrt{c - w} + \sqrt{c}}{\sqrt{w}}\, dw =$$

$$= \frac{i}{v_\infty}\left[\sqrt{w(c - w)} + \frac{c}{2}\arccos\frac{c - 2w}{c} + 2\sqrt{cw}\right].$$

Значению $w = c$ должно отвечать значение $z = hl/2$, где h — ширина пластинки, поэтому

$$\frac{hl}{2} = \frac{l}{v_\infty}\left(\frac{\pi c}{2} + 2c\right) = \frac{(\pi + 4)cl}{2v_\infty},$$

откуда найдется постоянная c:

$$c = \frac{hv_\infty}{\pi + 4}. \quad (17.9)$$

Чтобы получить линию струи B_1C_1, воспользуемся (17.7):

$$z = \frac{ih}{2} + \int_c^w \frac{1}{v_\infty} \frac{\sqrt{w-c} + i\sqrt{c}}{\sqrt{w}}\, dw =$$

$$= \frac{ih}{2} + \frac{1}{v_\infty}\left\{\sqrt{w(w-c)} - c \ln \frac{\sqrt{w} + \sqrt{w-c}}{\sqrt{c}} - 2i\sqrt{cw} - 2ic\right\}.$$

На линии тока B_1C_1 имеем $\psi = 0$, $w = \varphi$, поэтому отделяя в предыдущей формуле вещественную и мнимую части, находим уравнение линии B_1C_1 в параметрической форме:

$$x = \frac{1}{v_\infty}\left\{\sqrt{\varphi(\varphi-c)} - c \ln \frac{\sqrt{\varphi} + \sqrt{\varphi-c}}{\sqrt{c}}\right\}; \quad y = \frac{h}{2} + \frac{2\sqrt{c}}{v_\infty}(\sqrt{\varphi} - \sqrt{c})$$

Очевидно, что струя за пластинкой бесконечно расширяется.

Давление P на пластинку легко найти непосредственным вычислением, основываясь на интеграле Бернулли — Коши

$$p + \frac{1}{2}\rho |v|^2 = \frac{1}{2}\rho v_\infty^2 + p_\infty,$$

откуда

$$p - p_\infty = \frac{1}{2}\rho\left(v_\infty^2 - |v|^2\right)$$

Так как p_∞ равно давлению в зоне застоя II позади пластинки, то разность $p - p_\infty$ выражает равнодействующую сил давлений, приложенных с обеих сторон пластинки на единицу ее площади. Таким образом,

$$P = 2\int_0^{\frac{h}{2}} (p - p_\infty)\, dy = \rho \int_0^{\frac{h}{2}} \left(v_\infty^2 - |v|^2\right) dy. \qquad (17.10)$$

На участке AB_1 линии тока $\psi = 0$ имеем:

$$x = 0, \quad w = \varphi(y),$$

и из формулы (17.7) получаем:

$$\frac{dy}{d\varphi} = \frac{1}{v_\infty} \frac{\sqrt{c-\varphi} + \sqrt{c}}{\sqrt{\varphi}}.$$

Далее, так как на участке AB_1 $v_x = 0$, то

$$|v| = v_y = \frac{d\varphi}{dy} = v_\infty \frac{\sqrt{\varphi}}{\sqrt{c-\varphi} + \sqrt{c}},$$

и выражение для силы P может быть преобразовано к виду

$$P = \rho \int_0^{\frac{h}{2}} \left[v_x^2 - \left(\frac{d\varphi}{dy} \right)^2 \right] dy = \rho \int_0^c \left(v_x^2 \frac{dy}{d\varphi} - \frac{d\varphi}{dy} \right) d\varphi =$$

$$= \rho v_\infty \int_0^c \left(\frac{\sqrt{c-\varphi} + \sqrt{c}}{\sqrt{\varphi}} - \frac{\sqrt{\varphi}}{\sqrt{c-\varphi} + \sqrt{c}} \right) d\varphi =$$

$$= \rho v_\infty \int_0^c \left(\frac{\sqrt{c-\varphi} + \sqrt{c}}{\sqrt{\varphi}} + \frac{\sqrt{c-\varphi} - \sqrt{c}}{\sqrt{\varphi}} \right) d\varphi = 2\rho v_\infty \int_0^c \frac{\sqrt{c-\varphi}}{\sqrt{\varphi}}\, d\varphi.$$

Интегрируя находим:

$$P = 2\rho v_\infty \left(\sqrt{(c-\varphi)\varphi} \Big|_0^c + \frac{1}{2} c \arcsin \frac{2\varphi - c}{c} \Big|_0^c \right) = \pi c \rho v_\infty.$$

Подставляя сюда значение c из (17.9), приходим к окончательному выражению:

$$P = \frac{\pi}{4+\pi} h \rho v_\infty^2 \tag{17.11}$$

§ 18. Метод Жуковского — Митчеля. Истечение из отверстия. Удар струи в пластинку. Глиссирующая пластинка. По идее Плавка II. Е Жуковским, а также Митчелем было предложено видоизменение метода Кирхгоффа, состоящее в замене функции $\frac{1}{v} = \frac{dz}{dw}$ через функцию $Z = \ln\left(\frac{\bar{v}_\infty}{\bar{v}}\right)$ и в разыскании затем конформного отображения разрезанной плоскости w на ту часть плоскости Z, которая соответствует области течения I в плоскости z.

Если обтекаемый контур составлен из прямолинейных отрезков, то разыскание упомянутого отображения может быть достигнуто при помощи известной формулы Шварца — Кристоффеля, потому что в этом случае границам области течения I плоскости z будут соответствовать в плоскости $Z = X + Yi$ прямые $X = \text{const}$ и $Y = \text{const}$. В самом деле написав:

$$v = |v|\, e^{\beta i}, \quad v_\infty = |v_\infty|\, e^{\alpha i}$$

и заметив, что

$$Z = \ln\left(\frac{\bar{v}_\infty}{\bar{v}}\right) = \ln \frac{|v_\infty|}{|v|}\, e^{(-\alpha+\beta)i} = \ln \frac{|v_\infty|}{|v|} + (-\alpha+\beta)i,$$

мы видим, что следуя по пограничной линии тока $\psi = 0$ плоскости z вдоль плоской стенки, мы будем иметь $Y = (-\alpha + 0) = \text{const}$, а следуя вдоль свободной пограничной струи, где $|v| = |v_\infty|$, мы получим $X = \ln 1 = 0$

В качестве первого примера рассмотрим задачу об истечении жидкости из сосуда, ограниченного двумя бесконечными симметричными стенками. Выберем оси Ox и Oy в плоскости z, как указано на рис. 120. Обозначим через α угол, под которым наклонены стенки сосуда к отрицательной оси Ox, и через $2b$ ширину отверстия BB' сосуда, наконец через Q обозначим расход.

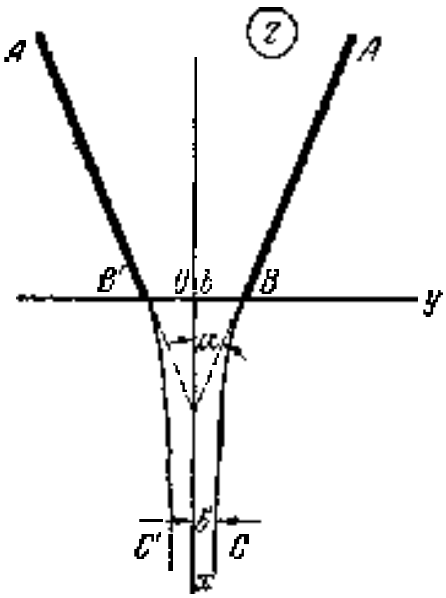

Рис. 120.

Если ширину струи на бесконечности обозначить через $2b'$ а скорость струи на бесконечности обозначить через c, то мы будем иметь очевидное соотношение

$$2cb' = Q.$$

Чтобы полностью определить b' и c нам надо будет найти еще одно соотношение между неизвестными величинами b' и c и данными b, α, Q.

Принимая, что на линии тока ABC функция тока $\psi = 0$, мы должны иметь на линии тока $A'B'C'$ соотношение $\psi = -Q$, чтобы получить заданный расход Q. Потенциал φ меняется как на линии ABC, так и на линии $A'B'C'$ от $-\infty$ до $+\infty$, мы примем, что значение φ в точках B и B' равно 0; тогда в плоскости комплексного потенциала $w = \varphi + i\psi$ области течения будет соответствовать полоса (рис. 121) ширины Q

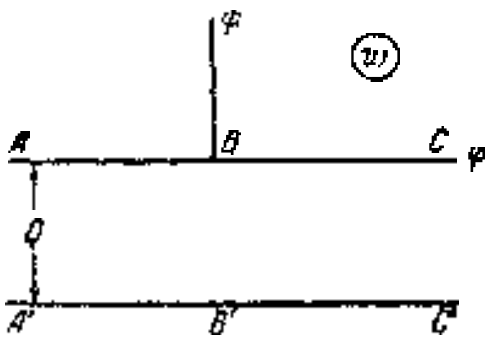

Рис. 121.

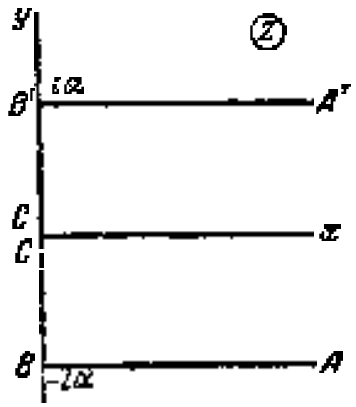

Рис 122

Рассмотрим теперь, во что перейдет область течения на плоскости переменного Жуковского

$$Z = \ln\frac{c}{v} = X + iY, \quad X = \ln\frac{c}{|v|}, \quad Y = \theta,$$

где θ — угол вектора скорости с осью Ox. Очевидно, что $\theta = -\alpha$ на AB, $\theta = \alpha$ на $A'B'$, $|v| = c$ на BC и $B'C'$, следовательно, в плоскости Z мы получаем область в виде полуполосы (рис. 122), распо-

ложенной справа от оси Oy, так как очевидно, что $|v| < c$. Чтобы получить конформное отображение этой полуполосы на полосу в плоскости w, введем еще одну вспомогательную плоскость t и примем, что области течения соответствует на этой плоскости верхняя полуплоскость (рис. 123). Как известно, такое конформное отображение полностью определяется, если задано соответствие трех контурных точек. Примем поэтому, что точка C переходит в точку $t = 0$, точка B в точку $t = 1$ и точка A в точку $t = \infty$, при этом по симметрии точка B' перейдет в точку $t = -1$.

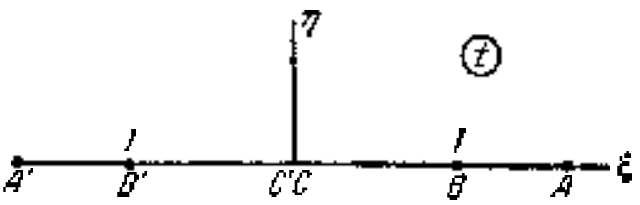

Рис. 123.

Нетрудно теперь определить зависимость w и Z от t. Найдем сначала функцию $w(t)$. Если на время рассматривать плоскость t как плоскость некоторого фиктивного течения, а w — как соответствующий комплексный потенциал, то очевидно, что все линии тока должны идти из точки A в точку C, причем количество поступающей в точку C из верхней полуплоскости жидкости равно Q. Но как раз такое течение мы должны получить, если представим себе, что в точке C находится сток интенсивности $2Q$ и что никаких других особенностей больше нет. Значит, можно принять, что

$$w = -\frac{2Q}{2\pi}\ln t = -\frac{Q}{\pi}\ln t$$

(произвольная постоянная пропадет, ибо при $t = 1$ должно быть $w = 0$). Можно, впрочем, непосредственно проверить, что эта функция отображает верхнюю полуплоскость t на полосу AC' плоскости w.

Чтобы найти функцию $Z(t)$, надо найти конформное отображение полуполосы плоскости Z на верхнюю полуплоскость t.

Рассматривая эту полосу как треугольник, одна из вершин которого удалена в бесконечность, отобразим его на верхнюю полуплоскость вспомогательной комплексной переменной $t = \xi + i\eta$ по формуле Шварца — Кристоффеля. Последняя формула, как известно, имеет вид

$$Z = A\int (t-\xi_1)^{\frac{\alpha_1}{\pi}-1}(t-\xi_2)^{\frac{\alpha_2}{\pi}-1}\dots(t-\xi_n)^{\frac{\alpha_n}{\pi}-1}\,dt + B \qquad (18.1)$$

и служит для конформного отображения внутренности некоторого n-угольника плоскости Z с внутренними углами $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ на верхнюю половину плоскости t, периметру многоугольника будет соответствовать вся вещественная ось ξ, точки которой $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ отвечают вершинам многоугольника; постоянные A и B зависят от положения и ориентировки многоугольника на плоскости Z. В функцию (18.1) входят $2n + 3$ независимых между собой параметра n

вещественных чисел $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, $n-1$ из n чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, связанных известной из геометрии зависимостью

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = (n-2)\pi,$$

и по два параметра в каждом из комплексных постоянных A и B.

Так как вид и положение многоугольника вполне определяются заданием $2n$ координат его вершин, то мы заключаем, что при пользовании формулой Шварца — Кристоффеля можно по произволу располагать тремя параметрами, задавая, например, наперед ξ_1, ξ_2, ξ_3, что вполне согласуется со сказанным выше о полной определенности конформного отображения при задании соответствия трех контурных точек.

В нашем случае в вершинах треугольника $BB'A$ имеем углы

$$\alpha_1 = \frac{\pi}{2}, \qquad \alpha_2 = \frac{\pi}{2}, \qquad \alpha_3 = 0,$$

причем вершинам B, B', A соответствуют в плоскости t точки

$$\xi_1 = 1, \qquad \xi_2 = -1, \qquad \xi_3 = \infty.$$

Но в случае, когда $\xi_n = \infty$, формула Шварца — Кристоффеля принимает вид

$$Z = A \int (t-\xi_1)^{\frac{\alpha_1}{\pi}-1} (t-\xi_2)^{\frac{\alpha_2}{\pi}-1} \ldots (t-\xi_{n-1})^{\frac{\alpha_{n-1}}{\pi}-1} dt + B \qquad (18.2)$$

Применяя ее к нашему случаю и замечая, что $Z = 0$ при $t = 0$, получим:

$$Z = K \int_0^t \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = K \arcsin t.$$

Так как в точке B при $t = 1$ должно быть $Z = -lz$, то легко находим, что

$$K = -\frac{2iz}{\pi},$$

и, следовательно,

$$Z = -\frac{2iz}{\pi} \arcsin t. \qquad (18.3)$$

Присоединяя сюда уравнение

$$w = -\frac{Q}{\tau} \ln t, \qquad (18.4)$$

мы получаем решение задачи в параметрической форме. Исключая t, мы можем получить соотношение между w и z в явной форме, но для всех расчетов удобнее пользоваться полученными формулами.

Найдем, например, уравнение струи BC. Здесь t меняется от 0 до 1, и мы получаем из (18.3):

$$X + iY = \ln \frac{c}{v} + i\theta = -\frac{2\alpha}{\pi} \arcsin t,$$

так что

$$\theta = -\frac{2\alpha}{\pi} \arcsin t, \quad t = -\sin \frac{\pi\theta}{2\alpha}.$$

Из формулы (18.4) получим:

$$w = \varphi = -\frac{Q}{\pi} \ln\left(-\sin \frac{\pi\theta}{2\alpha}\right),$$

так как $\psi = 0$ на BC. Наконец, общая формула

$$c\frac{dz}{dw} = e^{\zeta}$$

приводит в данном случае к соотношению

$$dz = \frac{1}{c} e^{i\theta}\, d\varphi,$$

и, так как

$$dz = dx + i\,dy, \quad d\varphi = -\frac{Q}{2\alpha} \operatorname{ctg} \frac{\pi\theta}{2\alpha} d\theta,$$

то получаем:

$$dx = \frac{1}{c} \cos\theta\, d\varphi = -\frac{Q}{2\alpha c} \cos\theta \operatorname{ctg} \frac{\pi\theta}{2\alpha} d\theta;$$

$$dy = \frac{1}{c} \sin\theta\, d\varphi = -\frac{Q}{2\alpha c} \sin\theta \operatorname{ctg} \frac{\pi\theta}{2\alpha} d\theta.$$

Интегрируя эти соотношения и замечая, что в точке B при $\theta = -\alpha$ имеем $x = 0$, $y = b$, получаем окончательные уравнения струи BC:

$$x = -\frac{Q}{2\alpha c} \int_{-\alpha}^{\theta} \cos\theta \operatorname{ctg} \frac{\pi\theta}{2\alpha} d\theta; \quad y = b - \frac{Q}{2\alpha c} \int_{-\alpha}^{\theta} \sin\theta \operatorname{ctg} \frac{\pi\theta}{2\alpha} d\theta. \quad (18.5)$$

Так как ширина струи на бесконечности есть $2b'$, то $y \to b'$ при $\theta \to 0$, и мы получаем соотношение

$$b' = b - \frac{Q}{2\alpha c} \int_{-\alpha}^{0} \sin\theta \operatorname{ctg} \frac{\pi\theta}{2\alpha} d\theta.$$

Комбинируя его с равенством

$$2b'c = Q,$$

находим для c значение

$$c = \frac{Q}{2b}\left[1 + \frac{1}{\alpha} \int_{0}^{\alpha} \sin\theta \operatorname{ctg} \frac{\pi\theta}{2\alpha} d\theta\right] \quad (18.6)$$

и для сжатия струи величину

$$\frac{b'}{b} = \frac{Q}{2bc} = \frac{1}{1 + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin\theta \operatorname{ctg}\frac{\pi\theta}{2\alpha}\, d\theta}. \qquad (18.7)$$

Формулы сильно упрощаются в частном случае, когда $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

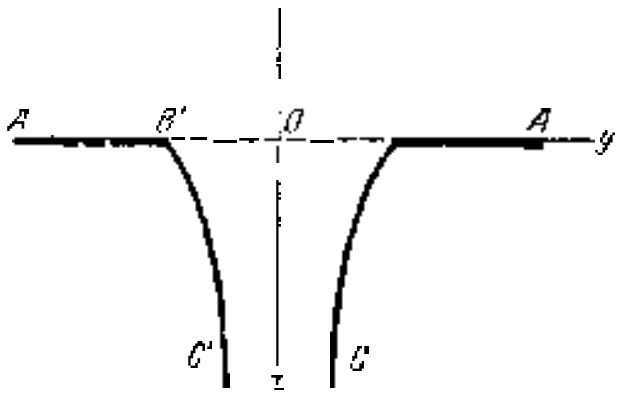

Рис. 124

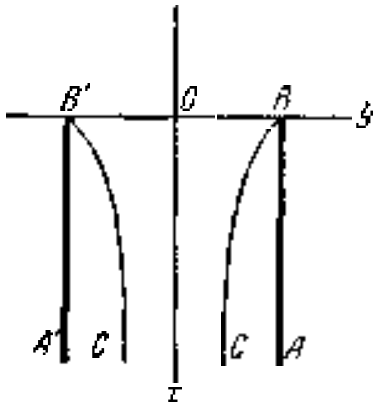

Рис. 125.

В этом случае стенки служат продолжением друг друга (рис. 124). Из предыдущих формул без труда получим для сжатия струи величину

$$\frac{b'}{b} = \frac{\pi}{2+\pi} \approx 0{,}61,$$

а для скорости на бесконечности

$$c = \frac{Q(\pi+2)}{2\pi b}.$$

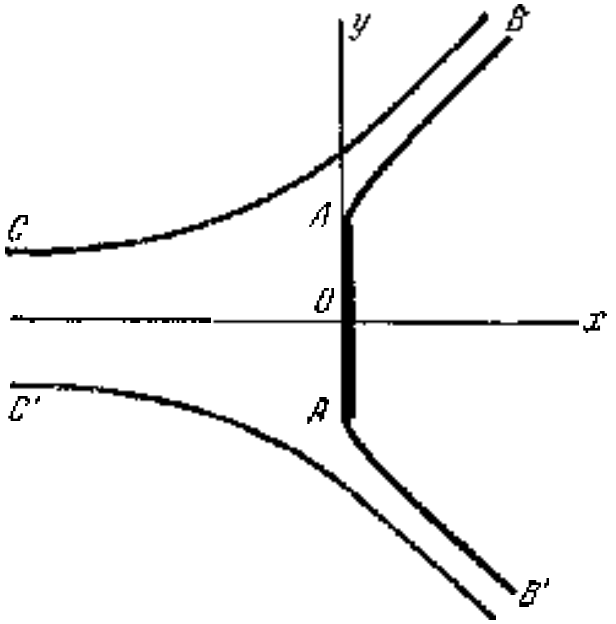

Рис. 126.

В предельном случае $\alpha = \pi$ получается истечение из насадка, бесконечно заглубленного в жидкость (рис. 125). В этом случае сжатие струи достигает своего предельного значения

$$\frac{b'}{b} = \frac{1}{2}.$$

В качестве второго примера рассмотрим задачу о прямом ударе струи конечной ширины в пластинку, перпендикулярную к струе и симметрично относительно нее расположенную (рис. 126). Толщину струи на бесконечности обозначим через $2b$, длину пластинки через $2l$, а расход струи через Q, так что скорость струи на бесконечности

будет равна

$$c = \frac{Q}{2b}.$$

Расположим оси координат, как показано на рис. 126. Пусть $\psi = 0$ на линии тока, упирающейся в середину пластинки O и разветвляющейся затем на OAB и $OA'B'$, тогда на верхней границе струи CB будет $\psi = Q/2$, а на нижней $C'B'$ будет $\psi = -Q/2$. Принимая еще, что в точке O значение потенциала φ равно нулю, получим отображение области течения на плоскость комплексного потенциала w в виде симметричной относительно вещественной оси полосы ширины Q, разрезанной по положительной вещественной оси (рис. 127). Отображения точек A и A' лягут в одну и ту же точку $w = \varphi_0 > 0$ с двух сторон разреза. На плоскости

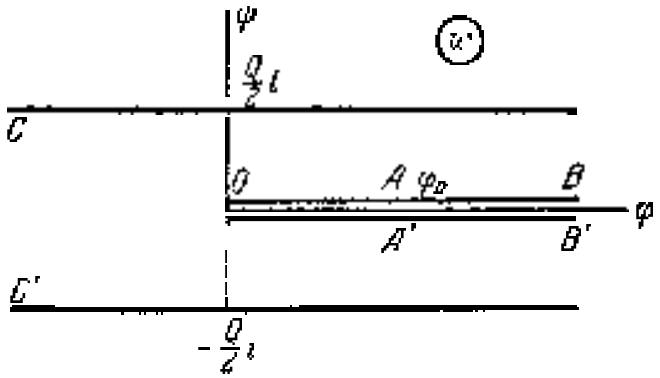

Рис. 127.

$$\zeta = i\,\frac{dz}{dw} = \frac{c}{v} = \frac{c}{v}\,e^{i\theta}$$

(рис. 128) верхней половине пластинки OA, на которой $\theta = \pi/2$, будет соответствовать верхняя часть чисто мнимой оси, идущая из бесконечности до точки $\zeta = i$, внутренней границе струи AB, на которой $|v| = c$, будет соответствовать дуга AB окружности единичного радиуса с центром в точке $\zeta = 0$, идущая от точки $\zeta = i$ до точки $\zeta = e^{im}$, где m есть угол, под которым наклонено к первоначальному направлению струи направление скорости в каждой из двух струй, на которые разбивается струя вследствие удара; наконец, на внешней границе струи CB тоже будет $|v| = c$, а угол θ меняется от π в точке B до 0 в точке C, поэтому BC перейдет на плоскость ζ в дугу BC единичной окружности, заключенную между точками $\zeta = e^{im}$ и $\zeta = 1$.

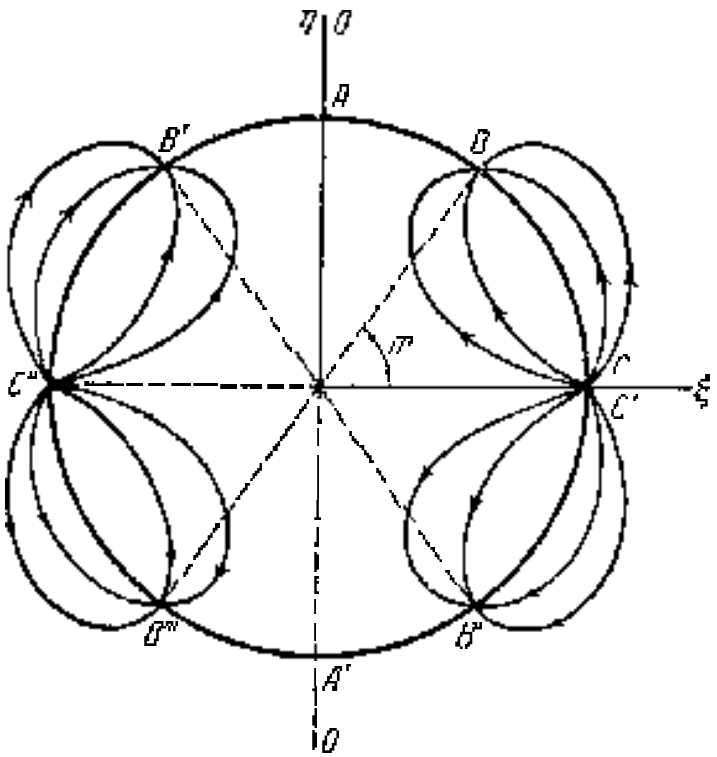

Рис. 128

Проводя эти рассуждения, нетрудно убедиться, что область течения перейдет на плоскости ζ в правую полуплоскость за вычетом полукруга, ограниченного полуокружностью $ABCB'A'$ (рис. 128). Чтобы найти конформное отображение друг на друга двух областей, полученных нами в плоскостях w и ζ, представим себе на время, что плоскость ζ представляет плоскость некоторого фиктивного течения, а w есть комплексный потенциал этого течения. Все линии тока идут, как видно из рис. 128, из точки C либо в точку B либо в точку B'. Проводя эти линии на плоскости ζ, мы можем заключить, что в нашем фиктивном течении точка C представляет источник, а точки B и B' — стоки. Чтобы линии OA и OA' были линиями тока, необходимо поместить в точках B'' и B''', симметричных с точками B и B' относительно оси η, стоки той же интенсивности, что в точках B и B', а в точке C'', симметричной с C, — источник той же интенсивности, что и в точке C. Тогда получится картина течения, изображенная на рис. 128. Очевидно, что в точках C и C'' нужно поместить источники с интенсивностью $2Q$, так как только половина этого расхода будет исходить из точки C в первоначальную область течения, ограниченную линией $OABCB'A'O$. Точно так же в точках B, B', B'', B''' надо поместить стоки интенсивности Q.

Нетрудно теперь по полученным источникам и стокам построить комплексный потенциал

$$w = \frac{2Q}{2\pi} \ln(\zeta - 1) + \frac{2Q}{2\pi} \ln(\zeta + 1) - \frac{Q}{2\pi} \ln(\zeta - e^{i\pi}) - \\ - \frac{Q}{2\pi} \ln(\zeta - e^{-i\pi}) - \frac{Q}{2\pi} \ln(\zeta + e^{-i\pi}) - \frac{Q}{2\pi} \ln(\zeta + e^{-i\pi}) \quad (18.8)$$

или

$$w = \frac{Q}{2\pi} \ln \frac{(\zeta^2 - 1)^2}{(\zeta^2 - e^{2i\pi})(\zeta^2 - e^{-2i\pi})}. \quad (18.9)$$

Положим:

$$Z = \ln \zeta = \ln \frac{e}{|v|} + i\theta, \quad \zeta = e^Z,$$

тогда можно написать:

$$\frac{(\zeta^2 - e^{2i\pi})(\zeta^2 - e^{-2i\pi})}{(\zeta^2 - 1)^2} = \frac{e^{2Z} - 2\cos 2\pi + e^{-2Z}}{e^{2Z} - 2 + e^{-2Z}} = \frac{\operatorname{ch} 2Z - \cos 2\pi}{\operatorname{ch} 2Z - 1} = \\ = \frac{\operatorname{sh}^2 Z + \sin^2 \pi}{\operatorname{sh}^2 Z} = 1 + \frac{\sin^2 \pi}{\operatorname{sh}^2 Z} = 1 - \frac{\sin^2 \pi}{\sin^2 iZ},$$

и, следовательно, формулу (18.9) можно представить в следующем виде:

$$w = -\frac{Q}{2\pi} \ln \left\{ 1 - \frac{\sin^2 \pi}{\sin^2 \left(\theta - i \ln \frac{e}{|v|} \right)} \right\}, \quad (18.10)$$

который будет использован при изучении газовых струй.

Мы имеем:

$$dz = \frac{\zeta}{c}\,dw,$$

пользуясь (18.8) без труда получим, что

$$dz = \frac{Q}{2\pi c}\left\{\frac{2}{\zeta-1} - \frac{2}{\zeta+1} - \frac{e^{im}}{\zeta-e^{im}} - \frac{e^{-im}}{\zeta-e^{-im}} + \right.$$

$$\left. + \frac{e^{-im}}{\zeta+e^{-im}} + \frac{e^{im}}{\zeta+e^{im}}\right\} d\zeta,$$

и, следовательно

$$z = \frac{Q}{2\pi c}\left\{2\ln\frac{\zeta-1}{\zeta+1} - e^{im}\ln\frac{\zeta-e^{im}}{\zeta+e^{im}} - e^{-im}\ln\frac{\zeta-e^{-im}}{\zeta+e^{-im}}\right\}. \quad (18.11)$$

Эта формула совместно с (18.9) дает полное решение задачи в параметрической форме. Остается найти значение m. Для этого надо использовать то обстоятельство, что нам задана длина пластинки $2l$. Применяя формулу (18.11) к точке A, в которой $z = il$, $\zeta = l$, получим:

$$il = \frac{Q}{2\pi c}\left\{2\,\frac{i\pi}{2} - e^{im}\left[\ln\frac{AB}{AB''} - i\frac{\pi}{2}\right] - e^{-im}\left[\ln\frac{AB'}{AB''} + i\frac{\pi}{2}\right]\right\},$$

и так как

$$AB = AB' = 2\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{m}{2}\right) = 2\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{m}{2}\right),$$

$$AB'' = AB' = 2\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{m}{2}\right),$$

то получим следующую связь между l и m

$$l = \frac{Q}{2\pi c}\left[\pi(1-\cos m) + 2\sin m\ln\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{m}{2}\right)\right]. \quad (18.12)$$

Функция от m, стоящая в правой части, монотонно возрастает от 0 до ∞, когда m изменяется от 0 до $\pi/2$, поэтому для всякой пластины длины $2l$ найдется одно и только одно соответствующее значение m.

Силу P давления на пластинку, направленную, очевидно, по положительной оси Ox, проще всего определить из закона количества движения. Берем контрольную поверхность, пересекающую все три струи бесконечно далеко от пластинки, и подсчитаем уносимую через эту поверхность составляющую количества движения жидкости по оси Ox. Основная струя вносит количество движения ρQc, каждая из двух уходящих струй уносит количество движения $\rho Qc/2$, проекция

которого на ось Ox равна $\rho Q\frac{c}{2}\cos m$. Следовательно, искомая уносимая составляющая равна

$$\rho Qc(\cos m - 1);$$

эта составляющая должна по закону количеств движения равняться силе $-P$ воздействия со стороны пластинки на жидкость, так как на всей контрольной поверхности давление одинаково и имеет нулевой главный вектор.

Итак,

$$P = \rho Qc(1 - \cos m). \tag{18.13}$$

В качестве третьего примера возьмем глиссирующую пластинку [1]).

Рассмотрим плоскую пластинку, уходящую на бесконечность и поведенную под углом β к свободной поверхности горизонтального потока несжимаемой жидкости (рис. 129). Поток раздваивается в критической точке B на пластинке, и вдоль пластинки вверх отбрасывается тонкая струйка жидкости. Скорость на свободной поверхности по величине постоянна. Эта схема изображает относительное течение, порождаемое пластинкой, *глиссирующей* (скользящей) с большой скоростью по поверхности воды. Предполагается, что скорость движения настолько велика, что можно пренебречь в законе Бернулли ускорением силы тяжести и считать жидкость несомой. В действительности несомость, в частности, сказывается еще в том, что отбрасываемая струйка не уходит в бесконечность, а стекает в воду.

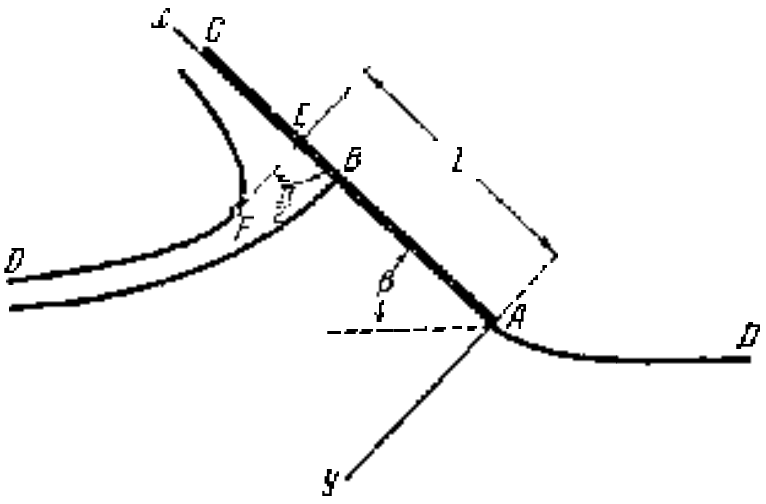

Рис. 129

Проведем нормаль EA к пластинке так, чтобы она являлась касательной к свободной поверхности. Отрезок $l = EA$ условно называется *длиной* глиссирующей пластинки [2]). Направим оси, как показано на рис. 129, и будем считать жидкость бесконечно глубокой. Как и в первом примере, возьмем верхнюю полуплоскость вспомогательного переменного t и отобразим на нее области изменения

---

[1]) Эта часть параграфа подготовлена М. И. Гуревичем.

[2]) Подсчеты показывают (см. ниже), что действие воды на пластинку сосредоточивается почти исключительно на отрезке AE.

функций w и $Z = \ln \frac{V}{dw/dz}$, где $V = |v_\infty|$. Соответствие точек видно на рис. 130. Положим вдоль $DABEC$ $\psi = 0$; тогда вдоль CFD будет $\psi = V\delta$, где δ — толщина струйки на бесконечности. Область изменения w изображена на рис. 131. Разветвленной линии тока BC и BAD соответствует на рис. 131 разрез вдоль действительной оси. Отображающую функцию $w(t)$ можно получить при помощи формулы, аналогичной (18.2). Именно точке D (рис. 131) соответствует на рис. 130 точка $\xi_3 = \infty$. Точки B и C отображаются в точки $\xi_1 = b$ и $\xi_2 = 1$ соответственно.

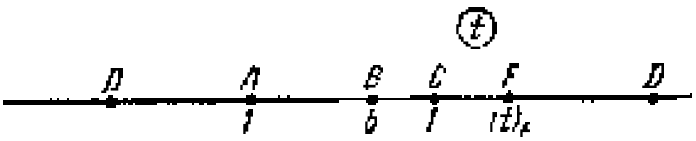

Рис. 130

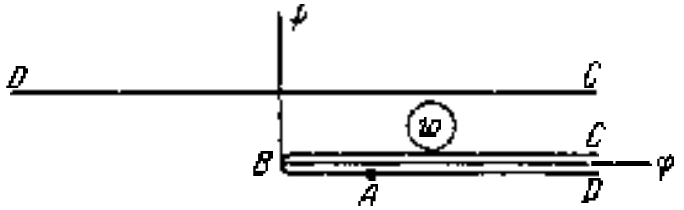

Рис. 131

Внутренние углы в этих точках будут равны $\alpha_1 = 2\pi$, $\alpha_2 = 0$, откуда

$$w = A\int_b^t (t-b)(t-1)^{-1}\,dt = A(t-b) + A(1-b)\ln\frac{1-t}{1+b}. \quad (18.14)$$

Так как при переходе от линии тока BEC к линии тока DC ψ получает приращение $V\delta$, то из (18.14) следует,

$$A = -\frac{V\delta}{\pi(1-b)}.$$

Впоследствии нам понадобится не сама функция w, а только ее производная по t:

$$\frac{dw}{dt} = \frac{V\delta}{\pi(1-b)}\,\frac{t-b}{1-t}. \quad (18.15)$$

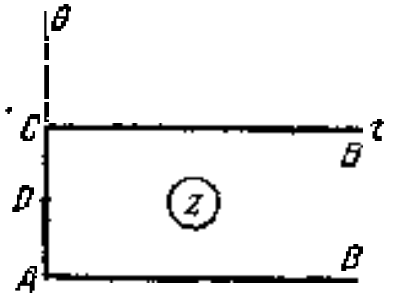

Рис. 132.

Область изменения $Z = \tau + i\Theta$ изображена на рис. 132. Ее легко построить, если проследить за изменением Z вдоль граничных линий тока. Для нахождения $Z(t)$ мы должны в соответствии с рис. 130 и 132 положить, в согласии с (18.1):

A	B	C
$\xi_1 = -1$	$\xi_2 = b$	$\xi_3 = 1$
$\alpha_1 = \frac{\pi}{3}$	$\alpha_2 = 0$	$\alpha_3 = \frac{\pi}{2}$

Чтобы при переходе от AB к BC скачок Z равнялся πi, надо считать множитель $A = -i\sqrt{1-b^2}$. Тогда мы будем иметь

$$Z = -\sqrt{1-b^2}\int_{1}^{t}\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}\,(t-b)} = \ln\frac{1-bt+\sqrt{(1-b^2)(1-t^2)}}{t-b}, \quad (18.16)$$

откуда

$$V\frac{dz}{dw} = \frac{1-bt+\sqrt{(1-b^2)(1-t^2)}}{t-b}. \quad (18.17)$$

Выразим теперь b через угол атаки β. Так как в бесконечности $V\frac{dz}{dw} = e^{-i(\pi-\beta)}$, то

$$e^{-i(\pi-\beta)} = -b - i\sqrt{1-b^2}$$

(при $t > 1$ $\sqrt{1-t^2} = -i\sqrt{t^2-1}$, в чем нетрудно убедиться, следя за аргументом вектора $t-1$ при обходе точки $t=1$), откуда $b = \cos\beta$. Из (18.15) и (18.17) получаем:

$$\frac{dz}{dt} = -\frac{b}{\sqrt{(1-\cos\beta)}}\,\frac{1-t\cos\beta+\sin\beta\sqrt{1-t^2}}{1-t}, \quad (18.18)$$

или, интегрируя от $t=-1$ до t, получим:

$$z = \frac{b}{\pi(1-\cos\beta)}\left[\cos\beta(1+t)-(1-\cos\beta)\ln\frac{1-t}{2}+\right.$$
$$\left.+\sin\beta\left(\frac{\pi}{2}+\arcsin t-\sqrt{1-t^2}\right)\right]. \quad (18.19)$$

Для нахождения «длины пластинки» l нам нужно, очевидно, вычислить действительную часть z в точке F (рис. 130). Значение t в точке F находим из того условия, что в этой точке скорость должна быть перпендикулярна к пластинке, т. е. dz/dw должна быть мнимой величиной. Но из (18.17) следует тогда, что $(t)_F = 1/\cos\beta$. Подставляя $(t)_F$ в (18.19), находим:

$$l = \frac{b}{\pi}\left[\frac{1+\cos\beta}{1-\cos\beta}+\pi\frac{\sin\beta}{1-\cos\beta}+\ln\frac{2\cos\beta}{1-\cos\beta}\right], \quad (18.20)$$

так как

$$\arcsin\frac{1}{\cos\beta} = \frac{\pi}{2} - i\operatorname{arch}\frac{1}{\cos\beta}.$$

Формула (18.20) дает зависимость b от l и β. Сопротивление и подъемную силу пластинки легче всего найти, используя закон количества движения. Проведем в качестве контрольных поверхностей две «вертикальные» плоскости, расположенные одна далеко слева,

другая далеко справа, и еще плоскость, перпендикулярную к пластинке и пересекающую струйку. Разность между количеством движения, входящим за время dt через левую плоскость, и количеством движения, выходящим за тот же промежуток времени через правую плоскость, будет, очевидно, $\rho V \delta V dt$. К этому надо прибавить приращение количества движения за счет течения в струйке. Проекция на горизонталь этой величины будет: $\rho V \delta V dt \cos\beta$. Если P — давление на пластинку, то горизонтальная проекция импульса сил за время dt будет $P \sin\beta\, dt$. Итак, сопротивление будет:

$$P \sin\beta = \rho V^2 \delta (1 + \cos\beta). \tag{18.21}$$

Умножая это выражение на $\operatorname{ctg}\beta$, получим подъемную силу.

$$P \cos\beta = \rho V^2 \delta \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2} \cos\beta \tag{18.22}$$

Очевидно, что момент гидродинамической силы относительно задней кромки пластинки будет

$$M = -\int_{-1}^{1} pz \frac{dz}{dt} dt, \tag{18.23}$$

где p — давление на пластинку, определяемое при помощи интеграла Бернулли. Интеграл, входящий в (18.23), не столь элементарен, как остальные интегралы настоящего параграфа. Однако и он может быть вычислен точно [1]. Приведем только конечный результат:

$$M = -\rho V^2 \frac{\delta^2 \sin\beta}{\pi (1 - \cos\beta)^2} \left[1 + \cos\frac{\beta}{2} + \frac{\pi}{2} \sin\beta + \right.$$
$$\left. + 2(1 - \cos\beta) \ln 2\right]. \tag{18.24}$$

На рис. 133 приведены картины распределения давления по пластинке, полученные при помощи интеграла Бернулли и формул (18.17) и (18.19) [2]. Всюду подобрано одно и то же l (см. рис. 133, где $\beta = 30°$). Эти распределения давлений удовлетворительно согласуются с опытами.

При малых углах атаки ($\beta \to 0$), пренебрегая в квадратных скобках правой части (18.20) членами, малыми по сравнению с $1/\beta^2$, получим:

$$l \approx \frac{4\delta}{\pi\beta^2}. \tag{18.25}$$

---

[1]) Калинин Н., О моменте давления, действующего на глиссирующую пластинку, Ученые записки СГУ, т. 1 (XIV), серия ФМИ, вып. 1, 1938.

[2]) Wagner H., Über Stoss- und Gleitvorgänge an der Oberfläche von Flussigkeiten, ZAMM, H. 4, 1932.

Если l конечно, то δ является малой величиной второго порядка. Из (18.25), (18.21) и (18.22) следует, что сопротивление

$$P\sin\beta \approx \frac{\rho V^2 l}{2}\pi\beta^2,$$

а подъемная сила

$$P\cos\beta \approx \frac{\rho V^2 l}{2}\pi\beta.$$

Момент относительно задней кромки будет равняться при этом

$$M \approx -\rho\frac{V^2}{2}l\pi\beta\frac{3l}{4}.$$

Формулы эти показывают, что при малых углах атаки подъемная сила глиссирующей пластинки равна половине подъемной силы

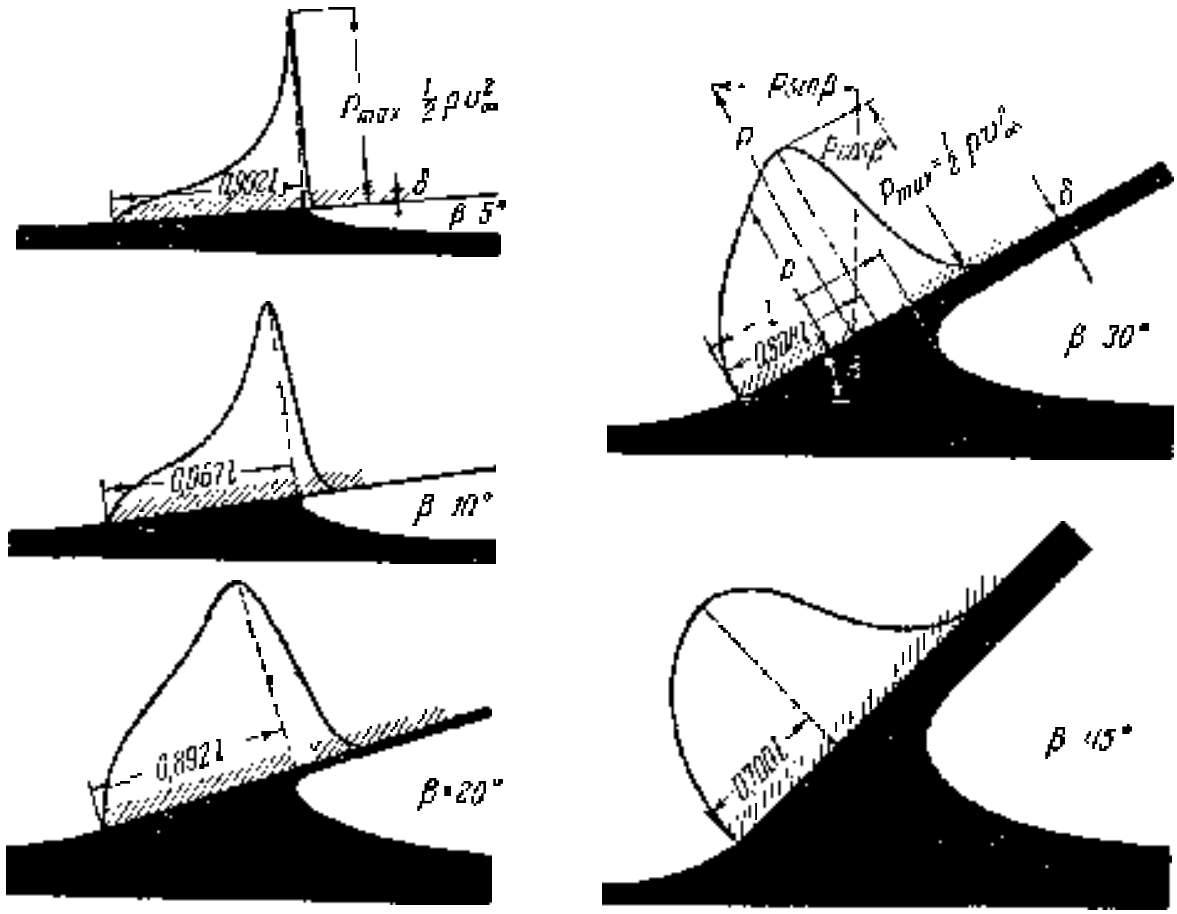

Рис. 133.

плоского крыла и что точка приложения подъемной силы у глиссирующей пластинки помещается, как и у крыла на расстоянии $^3/_4 l$ от задней кромки [см. формулу (15.12) и § 11].

В нашей задаче мы предполагали жидкость бесконечной. Задача о глиссировании с учетом дна решается при помощи эллиптических

функций [1]) Наконец можно учесть и влияние силы тяжести. Эта задача была решена Л. И. Седовым [2]).

§ 19. Метод Леви-Чивита. Леви-Чивита принадлежит математическая постановка задачи для случая обтекания со срывом струй криволинейного контура безграничным во всех направлениях потоком. Допустим, что криволинейный контур имеет угловую точку A (рис. 134), являющуюся точкой разветвления линии тока $\psi = 0$ и критической точкой течения, в которой скорость обращается в нуль; B_1 и B_2 — точки схода с контура свободных струй λ_1 и λ_2, между которыми расположена простирающаяся в бесконечность зона застоя II. Для упрощения вычислений распорядимся выбором единиц так, чтобы скорость потока в бесконечности имела величину $v_\infty = 1$ и, взяв точку A за начало координат, направим ось Ax параллельно вектору v_∞, предполагая при этом, что эта ось не выходит из границ области II.

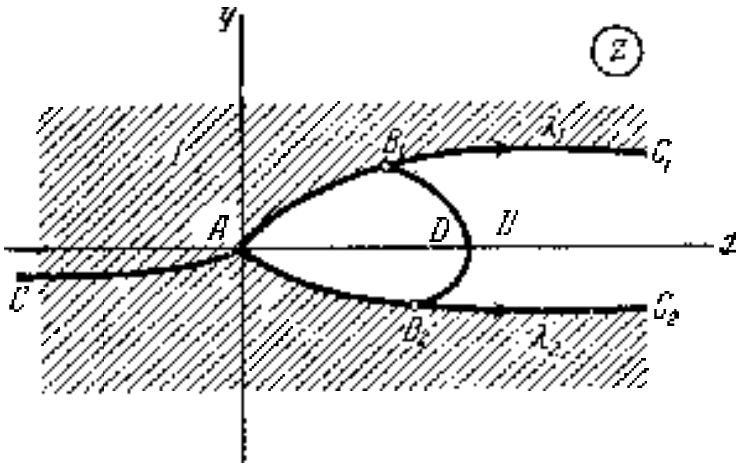

Рис. 134.

Тогда, как было показано в § 17, будет существовать взаимно однозначное соответствие между точками области течения I в плоскости z и всеми точками плоскости комплексного потенциала w, разрезанной вдоль положительной части вещественной оси (рис. 135)

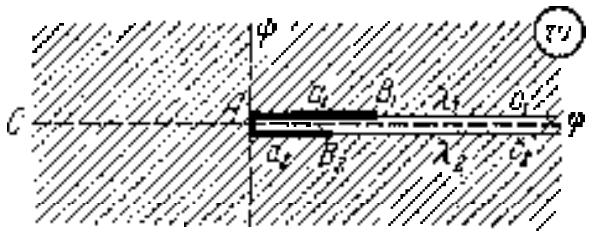

Рис. 135

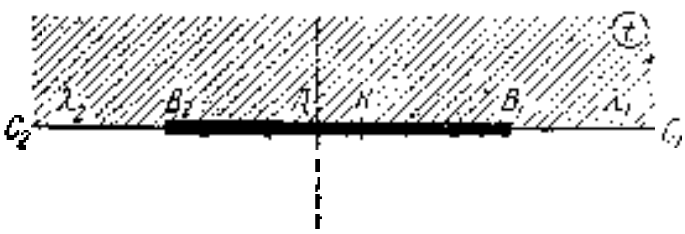

Рис. 136

Отобразим разрезанную плоскость w на верхнюю полуплоскость вспомогательной переменной t (рис. 136) при помощи преобразования

$$w = t^2, \quad t = \pm \sqrt{w}, \tag{19.1}$$

[1]) Гуревич М. И. и Ямпольский А. Р., О движении глиссирующей пластинки, Техника воздушного флота, № 10, 1933. Чаплыгин Ю. С., Глиссирование плоской пластинки бесконечного размаха по поверхности невесомой жидкости конечной глубины, ПММ, т. V, вып. II, 1941.

[2]) Седов Л. И. Плоская задача о глиссировании на поверхности тяжелой жидкости. Труды конференции по теории волнового сопротивления изд. ЦАГИ, 1937. Числовые расчеты см. Чаплыгин Ю. С. Труды ЦАГИ 508, 1940.

сохраняющего соответствие точек

$$w = 0 \leftrightarrow t, \quad w = \infty \leftrightarrow t.$$

Подвергнем, далее, полуплоскость t преобразованию подобия и параллельного переноса так, чтобы отрезок вещественной оси B_2B_1 плоскости t длиною $\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2}$, соответствующий участку контура B_1AB_2 и вообще несимметрично расположенный относительно начала координат плоскости t оказался расположенным на вещественной оси в плоскости второй вспомогательной переменной t' между точками -1 и $+1$ (рис. 137) и чтобы при этом сохранилось соответствие верхних полуплоскостей t и t' и точек $t = \infty$ и $t' = \infty$. Искомое преобразование очевидно, будет:

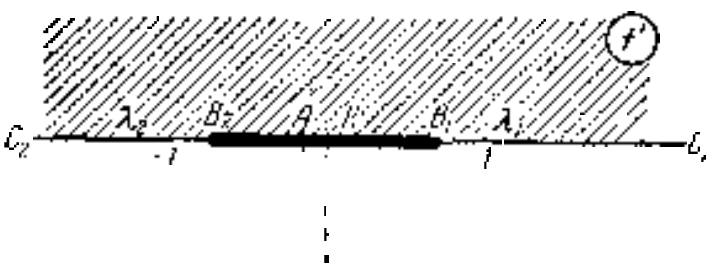

Рис. 137

$$t = \frac{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2}}{2} t' + \frac{\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2}}{2} \quad \text{или} \quad t' = \frac{2t - (\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2})}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2}} \tag{19.2}$$

Введем вместо параметров a_1 и a_2 удобные для дальнейшего рассмотрения параметры a и σ_0 при помощи соотношений

$$a = \frac{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2}}{2} > 0; \quad \cos\sigma_0 = \frac{\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2}}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2}}; \tag{19.3}$$

тогда преобразование (19.2) примет вид

$$t = a(t' + \cos\sigma_0); \quad t' = \frac{t}{a} - \cos\sigma_0 \tag{19.4}$$

Отобразим, наконец, верхнюю полуплоскость t' на внутренность верхнего полукруга единичного радиуса с центром в начале координат плоскости новой переменной ζ при помощи известного преобразования

$$t' = -\frac{1}{2}\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right). \tag{19.5}$$

При этом отрезкам B_2B_1 вещественной оси плоскости t' будет отвечать дуга B_2AB_1 окружности (рис. 138), а внешним частям той же оси от $t' = +1$ до $t' = -\infty$ и от $t = -1$ до $t' = -\infty$ будут отвечать радиусы окружности B_1O и B_2O; точка A на плоскости t' с абсциссой $t' = -\cos\sigma_0$ перейдет в точку $\zeta_0 = e^{i\sigma_0}$, лежащую на окружности в плоскости ζ; точке $t' = \infty$ будет отвечать точка $\zeta = 0$.

Если известны параметры a_1 и a_2 или, что то же, a и σ_0, то формулы преобразований (19.1), (19.4) и (19.5) устанавливают

взаимно однозначное соответствие всех точек разрезанной плоскости w и точек плоскости ζ, лежащих на указанной полуокружности и внутри нее. Этого достаточно для построения картины линий тока $\psi = c$ в плоскости ζ, но для полного решения задачи об обтекании остается еще разыскание преобразования, конформно отображающего область течения l плоскости z на плоскость w или, что эквивалентно, на внутренность упомянутой полуокружности плоскости ζ. Чтобы построить картину линий плоскости ζ, отвечающих линиям тока, заменим, что уравнение любой линии тока плоскости z может быть написано в виде

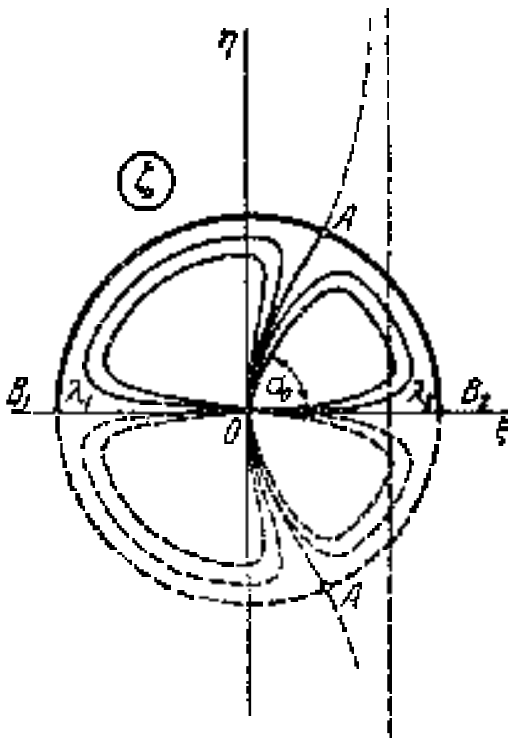

Рис. 138

$$\psi(x, y) = \frac{w - \bar{w}}{2i} = c, \qquad (19.6)$$

где

$$w = \varphi(x, y) + i\psi(x, y);$$
$$\bar{w} = \varphi(x, y) - i\psi(x, y).$$

Далее, вследствие формул (19.1) и (19.4)

$$w = a^2(t' + \cos\sigma_0)^2,$$
$$\bar{w} = a^2(\bar{t}' + \cos\sigma_0)^2,$$

где $\bar{t}'$ есть величина, сопряженная с t'. Уравнение линий тока (19.6) для плоскости t' преобразуется поэтому к виду

$$(t' - \bar{t}')(t' + \bar{t}' - 2\cos\sigma_0) - \frac{2ci}{a^2} = bi = \text{const}. \qquad (19.7)$$

Переходя, наконец, к переменной $\zeta = \xi + i\eta$ по формуле (19.5), получаем уравнение искомых линий в плоскости ζ:

$$\eta[\xi(\xi^2 + \eta^2 + 1) - 2\cos\sigma_0(\xi^2 + \eta^2)](\xi^2 + \eta^2 - 1) = b(\xi^2 + \eta^2)^2. \qquad (19.8)$$

Линии этого семейства кривых шестого порядка, заключенные внутри упомянутой полуокружности, отвечают семейству линий тока области течения l плоскости z.

При этом линия тока $\psi = 0$, идущая из точки $z = -\infty$ на оси Ox и разветвляющейся в точке $z = 0$, соответствует в плоскости ζ кускам:

кривой третьего порядка

$$\xi(\xi^2 + \eta^2 + 1) - 2\cos\sigma_0(\xi^2 + \eta^2) = 0,$$

единичной окружности

$$\xi^2 + \eta^2 - 1 = 0,$$

вещественной оси

$$\eta = 0,$$

заключенные в пределах верхней полуокружности.

Кубическая кривая касается мнимой оси в начале координат и за пределами полуокружности приближается к асимптоте

$$\xi = 2\cos\sigma_0.$$

Внутри полуокружности эта кубическая кривая разделяет семейство линий (19.8) на два пучка замкнутых линий, отвечающих линиям тока в областях I' и I'' течения плоскости z.

Для решения основной задачи отображения области течения z на плоскость ζ Леви-Чивита предложил рассматривать вместо переменной Кирхгоффа $1/v$ и переменной Жуковского $\ln\frac{\overline{v}_\infty}{v}$ комплексную переменную

$$\omega = i\ln\overline{v}. \tag{19.9}$$

Если обозначить через q величину вектора скорости течения v, через θ угол наклона скорости к оси Ox и внести для краткости обозначение $\ln|v| = \ln q = \tau$, так что

$$v = qe^{-i\theta}, \quad \ln\overline{v} = \ln q - i\theta = \tau - i\theta,$$

то

$$\omega = \theta + i\tau \tag{19.10}$$

и, обратно из (19.9)

$$\overline{v} = e^{-i\omega}. \tag{19.11}$$

В силу допущений, положенных в основу теории обтекания со срывом струй, можно наперед указать поведение переменной ω на границах области плоскости ζ, отвечающей области течения I плоскости z. Так, точке $\zeta_0 = e^{i\sigma_0}$, отвечающей точке разветвления $z = 0$, где $v = 0$, соответствует значение $\omega = \infty$. При следовании вдоль дуг AB_1 и AB_2 единичной окружности, отвечающих участкам обтекаемого контура от угловой точки A до точек срыва струй B_1 и B_2, угол наклона вектора скорости θ, т. е. вещественная часть переменной ω, должен получить известную последовательность значений, определяемую формой контура. При следовании вдоль радиусов B_1O и B_2O, отвечающих свободным струям, где величина скорости течения постоянна и равна 1, переменная ω будет получать вещественные значения, причем точкам $\zeta = 1$, $\zeta = 0$, $\zeta = -1$ будут соответствовать значения $\omega = \theta_2$, $\omega = 0$, $\omega = \theta_1$, где θ_1 и θ_2 — углы, которые образует с осью Ox касательная к контуру в точках срыва струй.

Нетрудно теперь видеть, что задача конформного отображения области течения I плоскости z на внутренность верхней полуокруж-

ности плоскости ζ сводится к разысканию функции $\omega(\zeta)$ регулярной внутри полуокружности и удовлетворяющей указанным граничным условиям.

В самом деле, из (19.11) имеем:

$$\frac{dw}{dz} = e^{-i\omega(\zeta)} \quad \text{или} \quad dz = e^{i\omega(\zeta)}\, dw, \tag{19.12}$$

но вследствие преобразований (19.1), (19.4) и (19.5)

$$dw = 2t\, dt = 2a^2 (t' + \cos\sigma_0)\, dt' =$$

$$= \frac{1}{2} a^2 \left(\zeta + \frac{1}{\zeta} - 2\cos\sigma_0\right)\left(1 - \frac{1}{\zeta^2}\right) d\zeta. \tag{19.13}$$

Подставляя это выражение в (19.12) и интегрируя в пределах от значения $\zeta_0 = e^{i\sigma_0}$, при котором $z = 0$, до некоторого ζ, заключенного внутри полуокружности, мы получаем искомое преобразование в форме

$$z = \frac{1}{2} a^2 \int_{\zeta_0}^{\zeta} e^{i\omega(\zeta)} \left(\zeta + \frac{1}{\zeta} - 2\cos\sigma_0\right)\left(\zeta - \frac{1}{\zeta}\right) \frac{d\zeta}{\zeta}. \tag{19.14}$$

Для разыскания функции $\omega(\zeta)$ применим известный принцип симметрии Римана — Шварца. Так как функция $\omega(\zeta)$ внутри верхней полуокружности регулярна, а на горизонтальном диаметре B_1B_2 вещественна и непрерывна в каждой его точке, то функцию $\omega(\zeta)$ можно аналитически продолжить на нижнюю полуокружность по принципу симметрии т. е. определить значения функции для каждой точки $\bar{\zeta} = re^{-i\sigma}$, сопряженной с точкой $\zeta = re^{i\sigma}$ нижней полуокружности, как $\omega(\bar{\zeta}) = \theta(r, \sigma) - i\tau(r, \sigma)$. Продолженная таким образом функция $\omega(\zeta)$ будет регулярна внутри всей единичной окружности $\xi^2 + \eta^2 = 1$, а на самой окружности имеет две сопряженные особые точки $\zeta_1 = e^{i\sigma_0}$ и $\bar{\zeta}_0 = e^{-i\sigma_0}$. При этом, как указывалось выше, вещественная часть искомой (продолженной) функции $\theta(r, \sigma)$ зависит от формы обтекаемого контура, причем эффективное определение этой функции представляет большие трудности. Рассматривая обратную задачу, можно считать $\theta(1, \sigma)$ заданной функцией $\Phi(\sigma)$ параметра σ, остающейся кроме того конечной при всяком σ, как это следует из физического смысла θ, представляющего угол. Заметив, что функции $\theta(r, \sigma)$ и $\tau(r, \sigma)$ являются гармоническими внутри всей единичной окружности, мы можем построить $\theta(r, \sigma)$ по ее значениям на окружности при помощи известного интеграла Пуассона

$$\theta(r, \sigma) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Phi(s)\, \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(\sigma - s) + r^2}\, ds \tag{19.15}$$

По построенной гармонической функции может быть всегда найдена сопряженная с ней гармоническая функция, по известной формуле из теории функций комплексной переменной имеем:

$$\tau(r, \sigma) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Phi(s)\frac{2r\sin(\sigma - s)}{1 - 2r\cos(\sigma - s) + r^2}\,ds, \qquad (19.16)$$

причем $\tau(0, 0) = 0$.

Эти формулы определяют искомую функцию $\omega(\zeta)$ в виде

$$\omega(\zeta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Phi(s)\frac{1 + \zeta e^{-is}}{1 - \zeta e^{-is}}\,ds,$$

в чем убеждаемся проверкой.

Так как по условию аналитического продолжения функция $\Phi(s)$ должна удовлетворять равенству

$$\Phi(-s) = \theta(1, -s) = \theta(1, s) = \Phi(s),$$

или, что то же,

$$\Phi(2\pi - s) = \Phi(s),$$

то после несложных выкладок мы получим для функции $\omega(\zeta)$ выражение

$$\omega(\zeta) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \Phi(s)\frac{1 - \zeta^2}{1 - 2\zeta\cos s + \zeta^2}\,ds \qquad (19.17)$$

Как было выяснено выше, $\omega(0) = 0$, это обстоятельство налагает на функцию $\Phi(s)$ условие

$$\int_0^{\pi} \Phi(s)\,ds = 0, \qquad (19.18)$$

позволяющее определить параметр σ_1.

Определив функцию $\omega(\zeta)$, мы без труда можем найти некоторые геометрические и динамические элементы течения.

Так, для координат любой точки $\zeta = e^{i\sigma}$ верхней полуокружности из формулы (19.14) получаем:

$$\left.\begin{aligned} x &= 2a^2\int_{\sigma}^{\sigma_0} e^{-\tau(\sigma)}\cos\vartheta(\sigma)(\cos\sigma - \cos\sigma_0)\sin\sigma\,d\sigma, \\ y &= 2a^2\int_{\sigma}^{\sigma_0} e^{-\tau(\sigma)}\sin\vartheta(\sigma)(\cos\sigma - \cos\sigma_0)\sin\sigma\,d\sigma. \end{aligned}\right\} \qquad (19.19)$$

Подставляя сюда значения $\sigma = 0$ и $\sigma = \pi$, мы получаем координаты точек срыва струй B_2 и B_1

Для длины элемента любой линии тока формула (19.12) дает:

$$|dz| = e^{-\tau(r,\sigma)}|dw| = 2a^2 e^{-\tau(r,\sigma)}|\cos\sigma - \cos\sigma_0|\sin\sigma\, d\sigma \quad (19.20)$$

и, в частности, для длины элемента свободных струй s_1 и s_2, где $\tau = 0$, имеем:

$$|dz| = |dw|.$$

Для радиуса кривизны R линий тока остается имеем:

$$\frac{1}{R} = e^{-\tau(r,\sigma)}\frac{d\theta(r,\sigma)}{|dw|}. \quad (19.21)$$

Вычислим теперь давление R, оказываемое потоком на тело. Мы имеем очевидно:

$$R = -\int_{B_1AB_2} pn\,ds - \int_{B_2DB_1} pn\,ds,$$

где B_2DB_1 есть задняя часть контура C, находящаяся в застойной области. Если давление в этой застойной области есть p_0, то в области течения мы будем иметь:

$$p + \frac{\rho|v|^2}{2} = p_0 + \frac{\rho}{2},$$

ибо на линиях B_1C и B_2C давление равно p_0, а скорость равна 1. А тогда ясно, что

$$R = -\int_{B_1AB_2}\left[p_0 + \frac{\rho}{2}(1-|v|^2)\right]n\,ds - \int_{B_2DB_1}p_0 n\,ds =$$

$$= -\frac{\rho}{2}\int_{B_1AB_2}(1-|v|^2)n\,ds.$$

Обозначая проекции силы R на оси координат через X и Y и замечая, что

$$\cos(\widehat{n, x})\,ds = dy, \quad \cos(\widehat{n, y})\,ds = -dx,$$

легко найдем, что

$$\overline{P} = X - iY = -\frac{\rho}{2}\int_{B_1AB_2}(1-|v|^2)(dy + i\,dx) = -\frac{i\rho}{2}\int_{B_1AB_2}(1-|v|^2)\,d\bar{z}$$

Очевидно, что v и dz имеют на B_1AB_2 или одинаковое, или прямо противоположное направление, почему

$$v\,d\bar{z} = \bar{v}\,dz, \quad |v|^2 d\bar{z} = \bar{v}^2 dz$$

и, значит,

$$\overline{P} = -\frac{i\rho}{2}\int_{B_1AB_2}(dz - \bar{v}^2 dz)$$

Пользуясь формулами

$$\bar{v} = \frac{dw}{dz} = e^{-i\omega(\zeta)} \qquad dz = e^{i\omega(\zeta)}\,dw; \quad dz = e^{-i\overline{\omega(\zeta)}}\,d\bar{w},$$

получим:

$$\bar{P} = -\frac{i\rho}{2}\left[\int e^{-i\overline{\omega(\zeta)}}\,dw - \int e^{-i\omega(\zeta)}\,dw\right],$$

причем переходя к плоскости ζ, мы должны брать интегралы по верхней полуокружности единичного круга, пробегаемой по часовой стрелке.

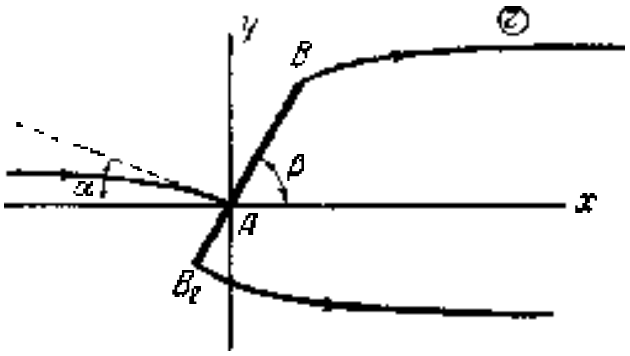

Рис. 139.

Как известно, $\omega(\zeta)$ в комплексно-сопряженных точках принимает комплексные сопряженные значения; то же самое имеет место и для dw вследствие равенства (19.13). Поэтому $\int e^{-i\omega(\zeta)}\,d\bar{w}$, взятый по верхней полуокружности, равен $\int e^{-i\omega(\zeta)}\,dw$, взятому по нижней полуокружности против часовой стрелки; тогда ясно, что

$$\bar{P} = -\frac{i\rho}{2}\oint e^{-i\omega(\zeta)}\,dw =$$

$$= -\frac{i\rho a^2}{4}\oint e^{-i\omega(\zeta)}\left(\zeta + \frac{1}{\zeta} - 2\cos\alpha_0\right)\left(\zeta - \frac{1}{\zeta}\right)\frac{d\zeta}{\zeta^2},$$

причем интеграл взят по контуру единичной окружности в положительном направлении. А так как функция $\omega(\zeta)$ имеет внутри единичной окружности единственную особенность в точке $\zeta = 0$, и окрестности которой

$$e^{-i\omega(\zeta)} = 1 - i\zeta\omega'(0) - \frac{\zeta^2}{2}\left[i\omega''(0) + \omega'^2(0)\right] + \ldots$$

то, применяя теорему вычетов и переходя к комплексно-сопряженным величинам, легко находим формулу Леви-Чивита:

$$P = \frac{\pi a^2}{4}\omega'^2(0) + \frac{i\pi\rho a^2}{2}\left\{2\cos\alpha_0\omega'(0) - \frac{1}{2}\omega''(0)\right\}. \qquad (19.22)$$

В качестве примера на применение метода Леви-Чивита рассмотрим случай косого обтекания пластинки (рис. 139), образующей угол β с v_∞.

Здесь для линии тока $\psi = 0$ имеем:

на участке AB_1 $\theta_1 = \beta$,

на участке AB_2 $\theta_2 = \beta - \tau$,

и функция $\Phi(s)$ будет иметь значения,

$$\Phi(s) = \frac{\alpha}{\beta} - \pi, \text{ если } 0 < s < \sigma_0,$$
$$\Phi(s) = \frac{\alpha}{\beta}, \quad \text{» } \sigma_0 < s < \pi.$$

Условие

$$\int_0^{\pi} \Phi(s)\, ds = 0$$

даст

$$\left(\frac{\alpha}{\beta} - \pi\right)\sigma_0 - \frac{\alpha}{\beta}(\pi - \sigma_0) = 0,$$

откуда

$$\sigma_0 = \frac{\alpha}{\beta}$$

Для построения преобразующей функции $\omega(\zeta)$ находим интеграл

$$I(s) = \int \frac{1 - \zeta^2}{1 - 2\zeta\cos s + \zeta^2}\, ds = 2\operatorname{arctg}\left(\frac{1+\zeta}{1-\zeta}\operatorname{tg}\frac{s}{2}\right) = i\ln\left[e^{is}\frac{\zeta - e^{-is}}{\zeta - e^{is}}\right],$$

и тогда

$$\omega(\zeta) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \Phi(s)\frac{1-\zeta^2}{1-2\zeta\cos s + \zeta^2}\, ds =$$
$$= -\frac{\pi - \sigma_0}{\pi}[I(\sigma_0) - I(0)] + \frac{\sigma_0}{\pi}[I(\pi) - I(\sigma_0)].$$

Так как $I(0) = 0$, то

$$\omega(\zeta) = -I(\sigma_0) + \frac{\sigma_0}{\pi}I(\pi) = -i\ln\left(e^{i\sigma_0}\frac{\zeta - e^{-i\sigma_0}}{\zeta - e^{i\sigma_0}}\right) + \frac{i\sigma_0}{\pi}\ln(-1) =$$
$$= -i\ln\left(e^{i\sigma_0}\frac{\zeta - e^{-i\sigma_0}}{\zeta - e^{i\sigma_0}}\right) - \sigma_0 = -i\ln\left(\frac{\zeta - e^{-i\sigma_0}}{\zeta - e^{i\sigma_0}}\right).$$

Отделяя вещественную часть от мнимой, имеем для точек полуокружности, где $\zeta = e^{i\sigma}$:

$$\tau(\sigma) = \ln\left|\frac{\sin\frac{\sigma_0 - \sigma}{2}}{\sin\frac{\sigma_0 + \sigma}{2}}\right| \text{ и } e^{-\tau(\sigma)} = \frac{\sin\frac{\sigma_0 + \sigma}{2}}{\left|\sin\frac{\sigma_0 - \sigma}{2}\right|},$$

после чего по формуле (19.20) вычисляем:

$$|dz| = 4a^2\sin^2\frac{\sigma_0 + \sigma}{2}\sin\sigma\, d\sigma$$

и интегрируя в пределах от 0 до σ_0 и от σ_0 до π, определяем длины h_2 и h_1 участков пластинки AB_2 и AB_1:

$$h_1 = a^2[2 + 2\cos\sigma_0 + 2\cos\sigma_0\sin^2\sigma_0 + (\pi - \sigma_0)\sin\sigma_0],$$
$$h_2 = a^2(2 - 2\cos\sigma_0 + 2\cos\sigma_0\sin^2\sigma_0 + \sigma_0\sin\sigma_0)$$

Из условия $h = h_1 + h_2$ получаем значение параметра a:

$$a^4 = \frac{h}{4 + \pi \sin \alpha_0} = \frac{h}{4 + \pi \sin \beta}.$$

Для вычисления сопротивления по формуле Леви-Чивита имеем:

$$\omega'(\zeta) = -i\left(\zeta - \frac{1}{\zeta - e^{-i\alpha_0}} - \frac{1}{\zeta - e^{i\alpha_0}}\right); \quad \omega''(\zeta) = i\left[\frac{1}{(\zeta - e^{-i\alpha_0})^2} - \frac{1}{(\zeta - e^{i\alpha_0})^2}\right],$$

откуда

$$\omega'(0) = -2\sin\alpha_0; \quad \omega''(0) = -2\sin 2\alpha_0,$$

и, подставляя в (19.22), находим:

$$P = \pi\rho a^2 \sin\alpha_0 (\sin\alpha_0 - i\cos\alpha_0),$$

откуда получаем формулу Рэлея

$$|P| = \pi\rho a^2 \sin\alpha = \frac{\pi\rho h \sin\alpha_0}{4 + \pi\sin\alpha_0} = \frac{\pi\rho h \sin\beta}{4 + \pi\sin\beta},$$

причем

$$|v_\infty| = 1.$$

§ 20. Давление при обтекании со срывом струй и при обтекании с циркуляцией. Если происходит обтекание со срывом струй некоторого контура, обладающего осью симметрии, ориентированной в потоке параллельно скорости в бесконечности v_∞ (рис. 140), то очевидно что результирующее давление потока на такой контур направлено по вектору v_∞ и может быть выражено формулой

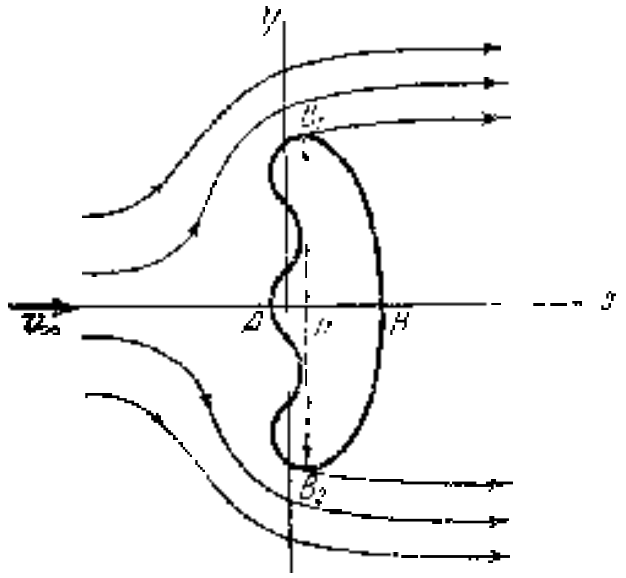

Рис. 140

$$P - P_1 = -\oint_{B_1 B B_1 A B_2} p\cos(\widehat{n, x})\,ds =$$

$$= \int_{B_1 A B} p\cos(\widehat{n, x})\,ds -$$

$$- \int_{B_1 B B} p\cos(\widehat{n, x})\,ds.$$

Замечая, что $\cos(\widehat{n, \lambda})\,ds = dy$ и обозначая через h расстояние между точками срыва струй B_1 и B_2 имеем:

$$P = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} p\,dy - hp_\infty,$$

так как p_∞ всюду во всей зоне застоя. Применяя, далее, интеграл Бернулли — Коши, получаем:

$$P = \frac{1}{2}\rho \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (v_\infty^2 - v^2)\, dy, \tag{20.1}$$

откуда приходим к простому неравенству, подмеченному впервые С. А. Чаплыгиным:

$$P < \frac{1}{2}\rho h v_\infty^2. \tag{20.2}$$

В частности, это неравенство будет иметь место и при лобовом ударе струи на круговую дужку, обращенную к потоку либо выпуклостью, либо вогнутостью (рис. 141). Если r есть радиус дуги и 2β — угол, ею стягиваемый, то

$$h = 2r \sin\beta \quad \text{и} \quad P < \rho r v_\infty^2 \sin\beta = P_1. \tag{20.3}$$

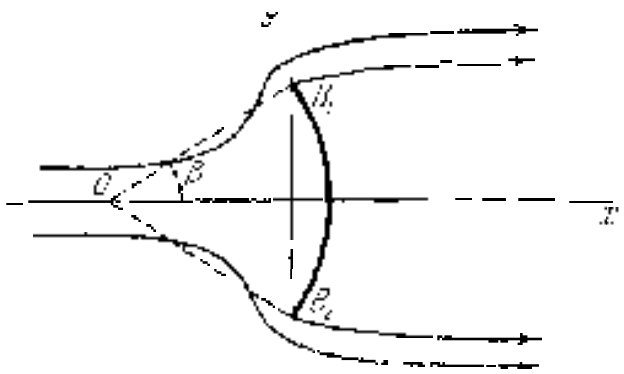

Рис. 141

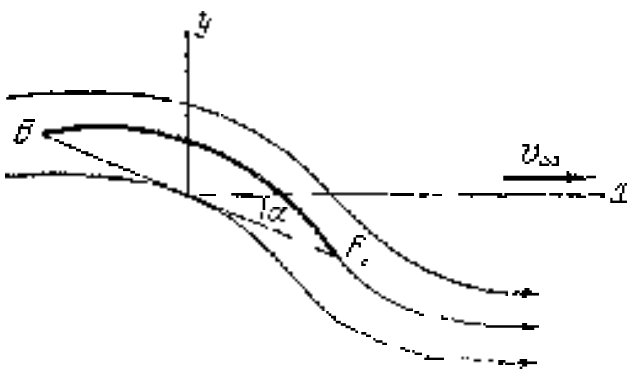

Рис. 142

Если же такая круговая дуга обтекается потоком с углом атаки α без срыва струй и при наличии циркуляции, подобранной при условии, чтобы скорость у заднего края дуги оставалась конечной (рис. 142), то величина поддерживающей силы выразится формулой (13.21):

$$P_1 = 4\pi\rho v_\infty^2 r \sin\frac{\beta}{2}\sin\left(\alpha + \frac{\beta}{2}\right).$$

Сравнивая с формулой (20.3), получаем, что

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{\cos\frac{\beta}{2}}{2\alpha\sin\left(\alpha + \frac{\beta}{2}\right)}.$$

Если угол β взять таким, чтобы было

$$\frac{\cos\frac{\beta}{2}}{2\tau\sin\left(\alpha+\frac{\beta}{2}\right)}<1, \tag{20.4}$$

то P_0 будет меньше P_1; при угле атаки $\alpha=0$ это условие дает $\beta\geqslant 18^\circ 22'$; при $\alpha>0$ для угла β получается еще меньшее значение, начиная с которого будет удовлетворяться условие (20.4). Этот вывод указывает на несостоятельность элементарного объяснения подъема аэроплана или воздушного змея действием косого удара струи.

§ 21. Обтекание с кавитацией. Мы знаем, что скорость жидкости обращается в бесконечность в острых кромках профиля. В стационарном решении согласно уравнению Бернулли в острых кромках возникнут при этом бесконечно большие отрицательные давления. Если кривизна обтекаемого профиля везде конечна, то и давление будет конечным, но оно может принимать в математическом решении большие по абсолютной величине отрицательные значения. В реальной жидкости отрицательные давления практически не появляются. Дело в том, что когда давление падает до определенной, зависящей от температуры жидкости малой положительной величины p_d, жидкость в определенных условиях начинает испаряться; образуется область, заполненная парами жидкости, сплошность движения нарушается. Явление это называется кавитацией.

При развитой кавитации образуются целые полости — каверны, наполненные парами жидкости. На границе между такой полостью и жидкостью можно принимать давление постоянным и равным величине p_d; поэтому эту границу можно рассматривать как свободную поверхность — струю, сходящую с обтекаемого контура. Так как давление на бесконечности p_∞ будет больше, чем p_d, то в отличие от того, что имеет место при обычном струйном обтекании, теперь свободная поверхность не будет уходить на бесконечность, а будет стремиться замкнуться на конечном расстоянии от профиля (рис. 143).

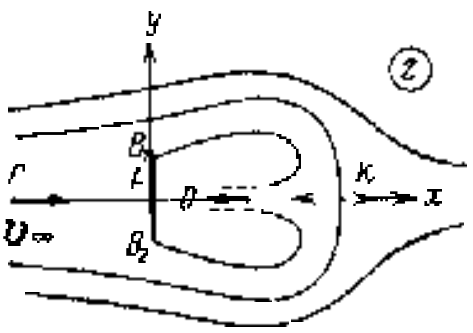

Рис. 143.

Мы можем рассмотреть следующую идеальную схему явления. Считаем, что при обтекании позади тела образуются свободные поверхности, которые смыкаются сзади тела и порождают струю, втекающую внутрь полости кавитации. Пренебрежем возвратом во внешний поток масс жидкости, втекающих внутрь каверны. Тогда нам придется ввести струю, направленную внутрь каверны, а само движение рассматривать на римановой поверхности, причем считать, что струя

переходит на второй лист поверхности и там уходит на бесконечность. Примем еще, что давление вдоль поверхности каверны всюду равно p_d (давление невозмущенного потока $p_\infty > p_d$) и что направление струи, входящей в каверну, прямо противоположно направлению скорости потока, набегающего на тело [1])

Метод решения задачи проиллюстрируем на примере прямого обтекания пластинки (рис 143) с образованием за пластинкой кавитационной полости AB_1DB_2 Требуется найти и форму границы области кавитации и все обтекание [2])

Введем вспомогательную плоскость t и представим себе, что вся внешность каверны отображена конформно на внутренность полукруга $|t|=1$ с диаметром вдоль действительной оси t (рис. 144). Пусть при этом поверхность струи переходит в верхний полукруг, а точки B_1 и B_2 (края пластинки) переходят в точки $t=-1$ и $t=+1$ соответственно (точки B_1' и B_2' плоскости t). Мы уже условились втекание струйки в полость каверны представлять как переход на второй лист римановой поверхности. Пусть это втекание происходит в точке D Перейдя на второй лист в точке D, струя уходит на бесконечность Пусть точке D отвечает на плоскости t точка D'. Так как D лежит на струе, то D' находится на полуокружности в плоскости t, причем в силу симметрии задачи точке D отвечает точка t. Кроме критической точки A, которая переходит в $A'(t=0)$, мы будем иметь в нашем потоке еще одну критическую точку K (положение ее заранее неизвестно) вне области кавитации. Пусть она переходит в точку K' на мнимой оси с координатой $t=ik\,(0<k<1)$. Наконец, бесконечно удаленной точке C первого листа плоскости z отвечает точка C' с координатой $t=ic\,(0<c<k<1)$. Пусть отображение дается функцией $z=f(t)$. Обозначим, как всегда, $w(z)=w(f(t))=W(t)$ и будем рассматривать $W(t)$ как комплексный потенциал некоторого фиктивного течения внутри нашей полуокружности плоскости t. По особенностям в плоскости t легко определить вид функции dW/dt. Действительно, в нашем фиктивном течении мы должны расположить особенность типа стока в точке D', особенность типа диполя в точке C', вихрь в точке D'; точки K' и A' этого течения, так же как и B_1', B_2', должны быть критическими точками Таким образом, dW/dt имеет полюс первого порядка в точке $t=t$, полюс второго порядка

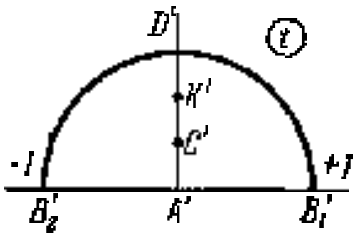

Рис. 144

[1]) Эта схема была предложена в работе Эфрос Д. А., Гидродинамическая теория плоско-параллельного квазистационарного течения, ДАН СССР 51 № 14, 1946

[2]) Задача эта была решена Гуревичем М. И. в работе «Об одной схеме струйного обтекания плоской пластинки». Труды ЦАГИ, № 612, 1947,

в точке $t = ic$, нули первого порядка в точках $t = 0$, $t = ik$, $t = 1$, $t = -1$. Так как на полукруге и на диаметре $\psi = \text{const}$, мы можем продолжить $W(t)$ на всю плоскость, используя отражение от диаметра и инверсию по отношению к единичному кругу. Тогда прибавятся еще полюс 1-го порядка в точке $t = -i$, полюса второго порядка в точках $t = -ic$, $t = -\frac{i}{c}$, $t = +\frac{i}{c}$, нули первого порядка в точках $t = -ik$, $t = -\frac{i}{k}$, $t = -\frac{1}{i}\frac{i}{k}$. Функция dW/dt будет, таким образом, рациональной функцией на всей плоскости, и для нее можно сразу написать:

$$\frac{dW}{dt} = A\frac{t(t-ik)(t+ik)\left(t-\frac{i}{k}\right)\left(t+\frac{i}{k}\right)(1+t)(1-t)}{(t-i)(t+i)(t-ic)^2(t+ic)^2\left(t-\frac{i}{c}\right)^2\left(t-\frac{i}{c}\right)^2} =$$

$$= A\frac{t(1-t^2)(t^2+k^2)\left(t^2+\frac{1}{k^2}\right)}{(t^2+1)(t^2+c^2)^2\left(t^2+\frac{1}{c^2}\right)^2}, \quad (21.1)$$

где A — постоянная.

Обозначим теперь через v_1 постоянную величину скорости на границе каверны. Легко найти выражение $\frac{1}{v_1}\frac{dw}{dz}$ в функциях от t. Действительно, заметим прежде всего что внутри верхнего полукруга функция $\frac{1}{v_1}\frac{dw}{dz}$ имеет нули в точках $t = 0$ и $t = ik$.

Далее, $\left|\frac{1}{v_1}\frac{dw}{dz}\right| = 1$ на струе, т. е. на верхнем полукруге; аргумент $\frac{1}{v_1}\frac{dw}{dz}$ будет постоянным, равным $\pi/2$ на отрезке горизонтального диаметра $A'B_1'$ и равным $-\pi/2$ на отрезке $B_2'A'$. Отсюда при зеркальном отображении $\frac{1}{v_1}\frac{dw}{dz}$ через окружность нули переходят в полюсы, а при отображении через действительный диаметр нули переходят в нули. Строя $\frac{1}{v_1}\frac{dw}{dz}$ по нулям и полюсам, получим:

$$\frac{1}{v_1}\frac{dw}{dz} = B\frac{t(t-ik)(t+\frac{1}{2}ik)}{\left(t-\frac{i}{k}\right)\left(t+\frac{i}{k}\right)} = B\frac{t(t^2+k^2)}{t^2+\frac{1}{k^2}}, \quad (21.2)$$

где B — постоянная, которую мы сразу же найдем из условия, что при $t \to \infty$ будет $\frac{1}{v_1}\frac{dw}{dz} = \frac{v_2}{v_1}e^{-i\alpha} = -1$ (скорость, по нашему предположению, направлена в точке D в сторону, противоположную направлению обтекания). Таким образом, $-1 = B\frac{i(k^2-1)}{\frac{1}{k^2}-1} = -Bik^2$.

Итак:

$$\frac{1}{v_1}\frac{dw}{dz} = -i\frac{t(t^2+k^2)}{k^2t^2+1}. \tag{21.3}$$

Из (21.1) и (21.3) сразу следует, что

$$\frac{dz}{dt} = i\frac{Ak^2}{v_1}\frac{(1-t^2)\left(t^2+\frac{1}{k^2}\right)^2}{(1+t^2)(t^2+c^2)^2\left(t^2+\frac{1}{c^2}\right)^2}. \tag{21.4}$$

Для определения значений трех постоянных c, k и A будут служить три условия: 1. Условие для скорости набегающего потока. 2. Условие однозначности соответствия $z(t)$ в точке $t=ic$ и в точке $z=\infty$. 3. Уравнение, дающее ширину l пластинки.

Первое условие приведет по (21.3) к равенству (при $t=ic$ $dw/dz=v_\infty$)

$$\frac{v_\infty}{v_1} = \frac{c(k^2-c^2)}{1-k^2c^2}. \tag{21.5}$$

Второму условию мы удовлетворим, если потребуем равенства нулю вычета dz/dt в точке $t=ic$. Это может быть очевидно сведено к равенству

$$\left\{\frac{d}{dt}\ln\left[\frac{dz}{dt}(t-ic)^2\right]\right\}_{t=ic}=0,$$

так что по (21.4)

$$\left\{\frac{d}{dt}\ln\left[\frac{(1-t^2)\left(t^2+\frac{1}{k^2}\right)}{(t^2+1)(t+ic)^2\left(t^2+\frac{1}{c^2}\right)}\right]\right\}_{t=ic}=0. \tag{21.6}$$

Произведя несложные выкладки, мы получим из (21.6):

$$k^2 = \frac{5c^2-1}{c^2(3+c^2)}. \tag{21.7}$$

Уравнения (21.5) и (21.7) определяют k и c через v_∞/v_1. Для определения A надо использовать условие, дающее ширину пластинки:

$$l = \int_{-1}^{+1}\frac{dz}{dt}\,dt. \tag{21.8}$$

Интегрирование в (21.8) выполняется, если разложить (21.4) на элементарные дроби. Если использовать еще (21.5) и (21.7),

получим:

$$\frac{l}{A}=\frac{2}{v_1(5c^2-1)(3+c^2)}\left[\tau+4\frac{v_\infty}{v_1}\operatorname{arctg}c+\frac{16c^4}{(1-c^4)(1+c^2)}\left(1-\frac{v_\infty^2}{v_1^2}\right)\right]. \tag{21.9}$$

Наконец, мы можем найти и силу X, действующую на пластинку. Не останавливаясь на расчетах, приведем из статьи М. И. Гуревича [1]) рисунок, представляющий отношение сопротивления X к сопротивлению $P=\frac{\pi l\rho v_\infty^2}{4+\pi}$, отвечающему струйному обтеканию без кавитации [ср. (17.11) § 17 этой главы] (рис. 145). По оси абсцисс отложено так называемое число кавитации σ. Последнее выражается по формуле

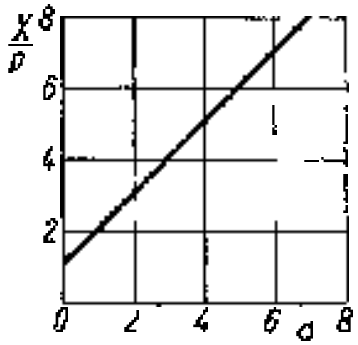

Рис 145.

$$\sigma=\frac{p_\infty-p_d}{\frac{1}{2}\rho v_\infty^2}.$$

Применив уравнение Бернулли, получим без труда, что отношение v_∞/v_1, входящее в наши формулы, просто выражается через число кавитации. Именно:

$$\frac{v_1^2}{v_\infty^2}=1+\sigma.$$

[1]) См. сноску на стр. 355.

ГЛАВА СЕДЬМАЯ

ПРОСТРАНСТВЕННАЯ ЗАДАЧА О ДВИЖЕНИИ ТЕЛА В ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

§ 1. Безвихревое движение. Движение шара. Перейдем теперь к рассмотрению пространственных течений идеальной несжимаемой жидкости. Считая движение безвихревым, вводим потенциал скорости $\varphi(x, y, z, t)$, так что проекции скорости будут

$$v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad v_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z}. \tag{1.1}$$

Уравнение неразрывности

$$\operatorname{div} v = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

показывает, что функция φ должна удовлетворять уравнению Лапласа

$$\Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0. \tag{1.2}$$

Давление p определяется формулой Лагранжа — Коши

$$p = -\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{\rho v^2}{2} - V + F(t), \tag{1.3}$$

где V — потенциал внешних сил.

Часто удобно пользоваться не декартовыми координатами x, y, z, а какими-либо криволинейными ортогональными координатами q_1, q_2, q_3. Последние выбираются в соответствии с рассматриваемой задачей.

Выведенное в первой главе уравнение неразрывности в криволинейных ортогональных координатах (13.3) для случая несжимаемой жидкости имеет вид

$$\frac{\partial (v_1 H_2 H_3)}{\partial q_1} + \frac{\partial (v_2 H_3 H_1)}{\partial q_2} + \frac{\partial (v_3 H_1 H_2)}{\partial q_3} = 0,$$

где H_1, H_2, H_3 — параметры Ламэ. Проекции скорости на оси криволинейных координат выражаются формулами (глава первая, § 20, задача 5)

$$v_1 = \frac{1}{H_1} \frac{\partial \varphi}{\partial q_1}; \quad v_2 = \frac{1}{H_2} \frac{\partial \varphi}{\partial q_2}; \quad v_3 = \frac{1}{H_3} \frac{\partial \varphi}{\partial q_3}. \tag{1.4}$$

Поэтому уравнение Лапласа в криволинейных ортогональных координатах имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{H_2H_3}{H_1}\frac{\partial\varphi}{\partial q_1}\right)+\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{H_3H_1}{H_2}\frac{\partial\varphi}{\partial q_2}\right)+\frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{H_1H_2}{H_3}\frac{\partial\varphi}{\partial q_3}\right)=0 \quad (1.5)$$

В качестве простейшего примера рассмотрим задачу о поступательном движении шара радиуса a вдоль оси Oz с постоянной скоростью U. Вводя сферические координаты r, θ, λ, связанные с декартовыми координатами при помощи соотношений

$$x=r\sin\theta\cos\lambda,\quad y=r\sin\theta\sin\lambda,\quad z=r\cos\theta,$$

будем иметь:

$$H_r=1,\quad H_\theta=r,\quad H_\lambda=r\sin\theta,$$

и уравнение Лапласа имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\lambda^2}=0. \quad (1.6)$$

Граничное условие на поверхности S шара должно иметь вид

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n}=u_n,$$

где u_n есть проекция на направление нормали скорости U точки поверхности S, направленной параллельно оси Oz, поэтому

$$u_n=U\cos\theta,$$

и мы получаем граничное условие

$$\frac{\partial\varphi}{\partial r}=U\cos\theta \quad \text{при } r=a. \quad (1.7)$$

Итак, в области вне сферы S надо найти решение уравнения (1.6), удовлетворяющее граничному условию (1.7); кроме того, должно выполняться условие, что на бесконечности скорость обращается в нуль.

Из соображений симметрии ясно, что φ не будет зависеть от λ. На основании вида граничного условия (1.7) можно попытаться искать потенциал в виде произведения

$$\varphi=P(r)\cos\theta.$$

В самом деле, уравнение (1.6) обращается в этом случае в обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dP}{dr}\right)-2P=0, \quad (1.8)$$

принадлежащее к типу уравнений Эйлера. Полагая $P=r^k$, найдем для определения k уравнение

$$k(k+1)-2=0,$$

откуда $k_1 = 1$, $k_2 = -2$. Отсюда следует, что общим решением уравнения (1.8) является

$$P(r) = Ar + \frac{B}{r^2}.$$

Постоянную A нужно приравнять нулю так как иначе не получится нулевой скорости на бесконечности. Итак, нужно принять,

$$\varphi = \frac{B\cos\theta}{r^2}.$$

Остается использовать граничное условие (1.7) для определения постоянной B.

$$-\frac{2B\cos\theta}{a^3} = U\cos\theta, \quad B = -\frac{Ua^3}{2}.$$

Итак, искомое течение определяется потенциалом скорости

$$\varphi = -\frac{Ua^3\cos\theta}{2r^2}. \tag{1.9}$$

Налагая на это течение поступательное течение со скоростью U в направлении отрицательной оси Oz для которого потенциалом скорости является

$$\varphi = -Uz = -Ur\cos\theta,$$

получим потенциал обтекания шара таким поступательным потоком

$$\varphi = -U\left(r + \frac{a^3}{2r^2}\right)\cos\theta \tag{1.10}$$

Это течение имеет уже установившийся характер поэтому давление будет определяться интегралом Бернулли — Коши

$$p = -\frac{\rho v^2}{2} - p_0, \tag{1.11}$$

если внешние силы отсутствуют.

Проекции скорости определяются формулами

$$v_r = \frac{\partial\varphi}{\partial r} = -U\left(1 - \frac{a^3}{r^3}\right)\cos\theta,$$

$$v_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} = U\left(1 - \frac{a^3}{2r^3}\right)\sin\theta;$$

$$v_\lambda = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda} = 0.$$

В частности, на поверхности шара будем иметь:

$$v_r = 0; \quad v_\theta = \frac{3}{2}U\sin\theta, \quad v_\lambda = 0,$$

для давления получим формулу

$$p = p_0 - \frac{9}{8}\rho U^2\sin^2\theta;$$

из нее видно, что распределение давления относительно экваториальной плоскости $\vartheta = \pi/2$, перпендикулярной к направлению потока на бесконечности, симметрично. А тогда ясно, что давления, приложенные к поверхности шара, взаимно уравновешиваются. Таким образом шар при равномерном поступательном движении не испытывает никакого сопротивления со стороны жидкости. Этот результат, резко противоречащий данным опыта, носит название *парадокса Эйлера — Даламбера*. Он объясняется тем, что в действительности безотрывное безвихревое обтекание шара не имеет места, с поверхности шара срываются вихри, которые видоизменяют как картину течения, так и распределение давления по поверхности шара.

§ 2. Обтекание эллипсоида. Пусть рассматривается обтекание трехосного эллипсоида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \tag{2.1}$$

поступательным потенциальным потоком несжимаемой жидкости, скорость которой в бесконечности U направлена по оси Ox. Попытаемся найти потенциал течения φ, как решение уравнения Лапласа, удовлетворяющее пограничным уравнениям:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = U, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0 \tag{2.2}$$

для бесконечно далеких точек,

$$\frac{d\varphi}{dn} = 0 \tag{2.3}$$

на поверхности эллипсоида.

Равенство (2.3) выражает условие безотрывного обтекания и в развернутой форме принимает вид

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}\cos(\widehat{n, x}) + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\cos(\widehat{n, y}) + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\cos(\widehat{n, z}) = 0$$

или

$$\frac{x}{a^2}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{y}{b^2}\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{z}{c^2}\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0. \tag{2.4}$$

Чтобы подобрать искомое решение уравнения Лапласа, возьмем за исходный пункт известное выражение для *ньютонова* потенциала притяжения однородным эллипсоидом (2.1) внешней точки (x, y, z):

$$V_e(x, y, z) =$$

$$= \pi abc \int_{\lambda}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{a^2+u} - \frac{y^2}{b^2+u} - \frac{z^2}{c^2+u}\right) \frac{du}{\sqrt{(a^2+u)(b^2+u)(c^2+u)}}, \tag{2.5}$$

где λ есть положительный корень уравнения

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda} + \frac{y^2}{b^2+\lambda} + \frac{z^2}{c^2+\lambda} - 1 = 0, \tag{2.6}$$

Если точка (x, y, z) лежит внутри эллипсоида, то теория притяжения дает для ньютонова потенциала выражение

$$V_i(x, y, z) =$$

$$= \pi abc \int_0^\infty \left(1 - \frac{x^2}{a^2+u} - \frac{y^2}{b^2+u} - \frac{z^2}{c^2+u}\right) \frac{du}{\sqrt{(a^2+u)(b^2+u)(c^2+u)}}. \quad (2.7)$$

Вводя для краткости обозначения:

$$\left.\begin{aligned} A(x, y, z) &= abc \int_\lambda^\infty \frac{du}{(a^2+u)\sqrt{(a^2+u)(b^2+u)(c^2+u)}}, \\ B(x, y, z) &= abc \int_\lambda^\infty \frac{du}{(b^2+u)\sqrt{(a^2+u)(b^2+u)(c^2+u)}}, \\ C(x, y, z) &= abc \int_\lambda^\infty \frac{du}{(c^2+u)\sqrt{(a^2+u)(b^2+u)(c^2+u)}}, \\ D(x, y, z) &= abc \int_\lambda^\infty \frac{du}{\sqrt{(a^2+u)(b^2+u)(c^2+u)}}, \end{aligned}\right\} \quad (2.8)$$

мы перепишем предыдущие выражения для V_e и V_i в виде

$$V_e = \pi(D - Ax^2 - By^2 - Cz^2); \qquad V_i = \pi(D_0 - A_0x^2 - B_0y^2 - C_0z^2),$$

где A_0, B_0, C_0, D_0 суть значения A, B, C, D при $\lambda = 0$. Отсюда найдутся для компонентов силы притяжения на внешнюю точку (x, y, z) следующие выражения:

$$X = -\frac{\partial V_e}{\partial x} = 2\pi Ax - \frac{\partial V_e}{\partial \lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial x} = 2\pi Ax, \quad (2.9)$$

так как

$$\frac{\partial V_e}{\partial \lambda} = \pi abc\left(1 - \frac{x^2}{a^2+\lambda} - \frac{y^2}{b^2+\lambda} - \frac{z^2}{c^2+\lambda}\right)\frac{1}{\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}} = 0$$

вследствие уравнения (2.6). Аналогично найдутся

$$Y = 2\pi By; \quad Z = 2\pi Cz.$$

Во всех внешних точках V_e, а значит, и X, Y, Z удовлетворяют уравнению Лапласа. Будем теперь искать решение уравнения Лапласа, удовлетворяющее пограничным условиям (2.2) и (2.4) в форме

$$\varphi = Ux + kX(x, y, z) = 2\pi kAx + Ux, \quad (2.10)$$

где k — некоторая постоянная, подлежащая дальнейшему определению. Вычисляя $\partial\varphi/\partial x$, имеем:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = 2\pi k\left(A + x\frac{\partial A}{\partial\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial x}\right) + U. \qquad (2.11)$$

На поверхности эллипсоида $\lambda = 0$, и тогда

$$\frac{\partial A}{\partial\lambda} = -\frac{1}{a^2}.$$

Далее дифференцируя по x уравнение (2.6), находим:

$$\frac{2x}{a^2+\lambda}\left[\frac{x^2}{(a^2+\lambda)^2} + \frac{y^2}{(b^2+\lambda)^2} + \frac{z^2}{(c^2+\lambda)^2}\right]\frac{\partial\lambda}{\partial x} = 0,$$

откуда при $\lambda = 0$

$$\frac{\partial\lambda}{\partial x} = -\frac{2x}{a^2p^2},$$

где

$$p^2 = \frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}.$$

Таким образом для поверхности эллипсоида

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = 2\pi k\left(A_0 - \frac{2x^2}{a^4p^2}\right) + U$$

и аналогично

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = -2\pi k\frac{2yx}{a^2b^2p^2}; \quad \frac{\partial\varphi}{\partial z} = -2\pi k\frac{2zx}{a^2c^2p^2}.$$

Внося эти выражения в пограничное условие (2.4), получаем уравнение

$$2\pi kA_0\frac{x}{a^2} + U\frac{x}{a^2} - 2\pi k\frac{2x}{a^2p^2}\left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}\right) = 0$$

или

$$2\pi k(A_0 - 2) + U = 0,$$

откуда

$$k = \frac{U}{2\pi(2 - A_0)}.$$

Таким образом,

$$\varphi = U\left[x + \frac{xA(x, y, z)}{2 - A_0}\right]. \qquad (2.12)$$

При этом легко видеть, что при удалении точки (x, y, z) в бесконечность каждая из производных $\frac{\partial A}{\partial x}$, $\frac{\partial A}{\partial y}$, $\frac{\partial A}{\partial z}$ стремится к нулю, как $1/r^2$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, а само A — как $1/r$, что обеспечивает выполнение условий (2.2). Следовательно, формула (2.12) и является искомым решением уравнения Лапласа.

Нетрудно, далее, видеть, что если скорость v_∞ образует с осями обтекаемого эллипсоида углы α, β, γ, то, разлагая поступательный поток на три потока со скоростями $v_\infty \cos\alpha$, $v_\infty \cos\beta$ и $v_\infty \cos\gamma$, направленными параллельно осям эллипсоида мы получим для потенциала скорости результирующего течения выражение

$$\varphi = v_\infty \left(x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma + \frac{Ax\cos\alpha}{2 - A_0} + \frac{By\cos\beta}{2 - B_0} + \frac{Cz\cos\gamma}{2 - C_0} \right). \quad (2.13)$$

Для случая обтекания сфероида ($a - b > c$) потоком скорости v_∞, которого v_∞ параллельна оси Oz, предыдущие формулы дают:

$$A = B = a^2 c \int_\lambda^\infty \frac{du}{(a^2+u)^2 \sqrt{c^2+u}} = \frac{2a^2 c}{(\sqrt{a^2-c^2})^3} \int_\nu^\infty \frac{d\nu}{(1+\nu^2)^2},$$

где

$$c^2 + \lambda = (a^2 - c^2)\nu^2.$$

Вводя эксцентриситет

$$e = \frac{\sqrt{a^2-c^2}}{a},$$

находим:

$$A = B = \frac{\sqrt{1-e^2}}{e^3} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\nu - \frac{\nu}{1+\nu^2} \right). \quad (2.14)$$

Аналогично найдется:

$$C = a^2 c \int_\lambda^\infty \frac{du}{(a^2+u)(c^2+u)\sqrt{c^2+u}} = \frac{2a^2 c}{(\sqrt{a^2-c^2})^3} \int_\nu^\infty \frac{d\nu}{(1+\nu^2)\nu^2} =$$

$$= \frac{2\sqrt{1-e^2}}{e^3} \left(\frac{1}{\nu} + \operatorname{arctg}\nu - \frac{\pi}{2} \right). \quad (2.15)$$

Потенциал течения для такого сплюснутого эллипсоида вращения принимает вид

$$\varphi = \frac{v_\infty C z}{2 - C_0}. \quad (2.16)$$

Значение для C_0 здесь получится из формулы (2.15), если для ν принять то значение, которое соответствует $\lambda = 0$, а именно:

$$\nu = \frac{c}{\sqrt{a^2-c^2}} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{e};$$

тогда

$$C_0 = \frac{2\sqrt{1-e^2}}{e^3} \left(\frac{e}{\sqrt{1-e^2}} + \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1-e^2}}{e} - \frac{\pi}{2} \right).$$

Но

$$\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1-e^2}}{e}-\frac{\pi}{2}=-\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1-e^2}}{e}=-\arcsin e,$$

и, значит,

$$C_0=\frac{2\sqrt{1-e^2}}{e^3}\left[\frac{e}{\sqrt{1-e^2}}-\arcsin e\right]. \tag{2.17}$$

Внося выражения для C и C_0 в формулу для φ, получаем:

$$\varphi=\frac{v_\infty z\left(\frac{1}{\nu}-\operatorname{arctg}\nu\right)}{\arcsin e-e\sqrt{1-e^2}}. \tag{2.18}$$

Если взять теперь $c=0$ и, значит, $e=1$, то мы получаем потенциал обтекания кругового диска радиуса a потоком, скорость которого в бесконечности направлена по оси диска

$$\varphi=\frac{2}{\pi}v_\infty z\left(\frac{1}{\nu}-\operatorname{arctg}\nu\right), \tag{2.19}$$

где $a^2\nu^2=\lambda$, а λ есть положительный корень уравнения

$$\frac{x^2+y^2}{a^2+\lambda}+\frac{z^2}{\lambda}=1.$$

§ 3. Функция тока для осесимметричного течения. Течение называется *осесимметричным*, если линии тока расположены в плоскостях, проходящих через данную ось, и в каждой такой плоскости картина распределения линий тока одинакова. Если ось симметрии принять за ось Oz цилиндрических координат ρ, θ, z, то из определения следует, что $v_\theta=0$, и уравнение неразрывности (13.1) главы первой для установившегося осесимметричного течения несжимаемой жидкости принимает вид

$$\frac{\partial(\rho v_\rho)}{\partial\rho}-\frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z}=0 \quad\text{или}\quad \frac{\partial(\rho v_\rho)}{\partial\rho}=\frac{\partial(-\rho v_z)}{\partial z}. \tag{3.1}$$

Дифференциальное уравнение любой линии тока для осесимметричного течения, очевидно, будет:

$$\frac{d\rho}{v_\rho}=\frac{dz}{v_z} \quad\text{или}\quad v_\rho\,dz-v_z\,d\rho=0. \tag{3.2}$$

Соотношение (3.1) показывает, что ρ служит интегрирующим множителем уравнения (3.2), левая часть которого по умножении на ρ будет представлять собою полный дифференциал некоторой функции $\psi(\rho, z)$:

$$d\psi=\rho v_\rho\,dz-\rho v_z\,d\rho, \tag{3.3}$$

так что

$$v_\rho=\frac{1}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial z};\quad v_z=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial\rho}. \tag{3.4}$$

Функция ψ (введенная в рассмотрение Стоксом) называется *функцией тока*. На каждой линии тока эта функция сохраняет постоянное значение и, следовательно, будет оставаться постоянной на поверхности, получаемой вращением данной линии тока вокруг оси симметрии. Если на одной из таких поверхностей $\psi = c_0$ мы фиксируем любую точку $A(\rho_0, z_0)$ (рис. 146), а на другой поверхности $\psi = c$ возьмем некоторую точку $P(\rho, z)$ и проведем поверхность S произвольного вида, опирающуюся на коаксиальные окружности Γ_0 и Γ, лежащие на упомянутых поверхностях и проходящие через точки A и P, то объем Π жидкости, протекшей через поверхность S за единицу времени, выразится разностью значений функции тока, умноженной на 2π.

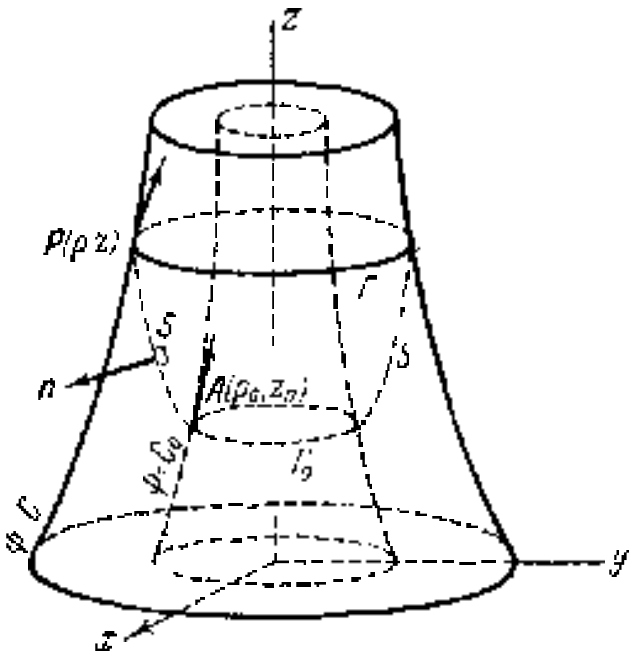

Рис 146.

$$\Pi = 2\pi [\psi(\rho, z) - \psi(\rho_0, z_0)] = (c - c_0)\, 2\pi. \qquad (3.5)$$

В самом деле, вычисляя поток скорости через поверхность S, имеем:

$$\Pi = \int_S v \cdot n\, dS = \int_S (v_\rho n_\rho + v_z n_z)\, dS,$$

где n — орт нормали, направленной во внешнюю сторону поверхности S, т. е. от оси Oz. Замечая, что

$$n_\rho\, dS = \rho\, d\theta\, dz, \qquad n_z\, dS = -\rho\, d\theta\, d\rho,$$

так как знак n_z противоположен знаку $d\rho$, имеем:

$$\Pi = \int_0^{2\pi} d\theta \int_{AP} (v_\rho \rho\, dz - v_z \rho\, d\rho) = 2\pi \int_{AP} \left(\frac{\partial \psi}{\partial z}\, dz + \frac{\partial \psi}{\partial \rho}\, d\rho \right) =$$

$$= 2\pi [\psi(\rho, z) - \psi(\rho_0, z_0)].$$

Вводя в рассмотрение функцию тока ψ, мы можем еще не предполагать течение потенциальным. Вычислим составляющие вихря скорости при наличии функции тока в рассматриваемом осесим-

метричном течении. Для этого достаточно общее выражение вихря в криволинейных координатах

$$\operatorname{rot} v = \frac{1}{H_2H_3}\left[\frac{\partial (H_3v_3)}{\partial q_2} - \frac{\partial (H_2v_2)}{\partial q_3}\right] e_1 +$$

$$+ \frac{1}{H_3H_1}\left[\frac{\partial (H_1v_1)}{\partial q_3} - \frac{\partial (H_3v_3)}{\partial q_1}\right] e_2 + \frac{1}{H_1H_2}\left[\frac{\partial (H_2v_2)}{\partial q_1} - \frac{\partial (H_1v_1)}{\partial q_2}\right] e_3,$$

выведенное нами в первой главе, применить к цилиндрическим координатам. Полагая $q_1 = r$, $q_2 = \theta$, $q_3 = z$, так что $H_1 = 1$, $H_2 = \rho$, $H_3 = 1$ и $v_1 = v_r = \frac{1}{\rho}\frac{\partial \psi}{\partial z}$, $v_2 = v_\theta = 0$, $v_3 = v_z = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \psi}{\partial \rho}$, мы получаем:

$$\operatorname{rot} v = \left[\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial \psi}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial \psi}{\partial \rho}\right)\right] e_2,$$

т. е.

$$(\operatorname{rot} v)_r = 0, \quad (\operatorname{rot} v)_z = 0, \quad \rho (\operatorname{rot} v)_\theta = \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \rho^2} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial \psi}{\partial \rho}. \quad (3.6)$$

Таким образом вихрь скорости в осесимметричном течении направлен по касательной к окружности, служащей поперечным сечением поверхности $\psi = \text{const}$, в данной точке. Если течение безвихревое, то функция тока должна удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \rho^2} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial \psi}{\partial \rho} = 0. \quad (3.7)$$

Потенциал же скоростей φ должен удовлетворять уравнению Лапласа, которое для осесимметричного течения в цилиндрических координатах примет вид

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \varphi}{\partial \rho} = 0. \quad (3.8)$$

Вследствие соотношений (3.4) между потенциалом φ и функцией тока ψ будут иметь место зависимости

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \rho} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \psi}{\partial z}; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \psi}{\partial \rho}. \quad (3.9)$$

Эти зависимости позволяют определить функцию тока если потенциал скорости известен, по формуле

$$\psi(\rho, z) = \psi(\rho_0, z_0) + \int_{(\rho_0, z_0)}^{(\rho, z)} \left(\rho \frac{\partial \varphi}{\partial r}\right) dz - \left(\rho \frac{\partial \varphi}{\partial z}\right) d\rho. \quad (3.10)$$

Так, например, для однородного поступательного течения, постоянная скорость которого v_∞ направлена по оси Oz, мы имеем, очевидно,

$$\varphi = v_\infty z.$$

Выбирая ось Oz за линию тока $\psi = 0$, получаем по формуле (3.10):

$$\psi = -\frac{1}{2}\rho^2 v_\infty. \tag{3.11}$$

Для источника обильности q, помещенного на оси Oz в начале координат, согласно формуле (11.8) главы пятой имеем:

$$\varphi = -\frac{1}{4\pi}\frac{q}{r} = -\frac{1}{4\pi}\frac{q}{\sqrt{\rho^2+z^2}}.$$

Линиями тока здесь служат лучи, исходящие из начала координат. Выбирая ось Oz за линию тока $\psi = 0$, находим:

$$\psi = \frac{q}{4\pi}\int_{(0,\,z_0)}^{(\rho,\,z)} \frac{\rho^2\,dz - \rho z\,d\rho}{(\sqrt{\rho^2+z^2})^3} = \frac{q}{4\pi}\int_{(0,\,z_0)}^{(\rho,\,z)} \left[\frac{dz}{\sqrt{\rho^2+z^2}} - \frac{z(\rho\,d\rho + z\,dz)}{(\sqrt{\rho^2+z^2})^3}\right] =$$

$$= \frac{q}{4\pi}\int_{(0,\,z_0)}^{(\rho,\,z)} d\left(\frac{z}{\sqrt{\rho^2+z^2}}\right) = -\frac{q}{4\pi}\left(1 - \frac{z}{\sqrt{\rho^2+z^2}}\right). \tag{3.12}$$

Если течение создается несколькими источниками или стоками, то вследствие линейности уравнений (3.7) и (3.8) будет иметь место принцип наложения полей. Так, для течения, созданного источником и стоком одинаковой обильности q, помещенными на оси Oz в точках $z = -a$ и $z = -a$, имеем:

$$\varphi = \frac{q}{4\pi}\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right) = \frac{q}{4\pi}\left(\frac{1}{\sqrt{(z-a)^2+\rho^2}} - \frac{1}{\sqrt{(z+a)^2+\rho^2}}\right) \tag{3.13}$$

$$v = \frac{q}{4\pi}\left(\frac{z+a}{\sqrt{(z+a)^2+\rho^2}} - \frac{z-a}{\sqrt{(z-a)^2+\rho^2}}\right) = \frac{q}{4\pi}(\cos\gamma_1 - \cos\gamma_2), \tag{3.14}$$

где γ_1 и γ_2 — углы, образованные с осью Oz радиусами-векторами r_1 и r_2.

Отсюда при переходе к пределу при $a \to 0$, считая, что произведение $q \cdot 2a$ стремится к конечному пределу M, получаем для течения, создаваемого диполем, момент которого M направлен в отрицательную сторону оси Oz

$$v = \frac{M}{4\pi}\frac{z}{(\sqrt{\rho^2+z^2})^3} = -\frac{M}{4\pi}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right), \tag{3.15}$$

где $r = \sqrt{\rho^2+z^2}$.

$$\psi = \frac{M}{4\pi}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{r}\right) = \frac{M\rho^2}{4\pi(\sqrt{\rho^2+z^2})^3}. \tag{3.16}$$

§ 4. Метод источников и стоков. Этот метод был применен впервые Ранкином к пространственной задаче об обтекании тела и состоит в замене обтекаемого тела такой системой источников и стоков, чтобы поверхность тела служила одной из поверхностей тока при этом, очевидно, необходимо должна равняться нулю алгебраическая сумма обильностей источников, вводимых внутрь границ тела для построения нужной картины течения.

Подбор упомянутой системы источников и стоков по заданной наперед форме поверхности обтекаемого тела представляет большие трудности.

Рассмотрим на ряде простейших случаев обратную задачу разыскания тех форм поверхностей, которые могут быть взяты за границы обтекаемого тела при наперед заданном расположении источников.

а) *Источник и сток равной обильности* внесенные в однородный поступательный поток. Считая, что скорость v_∞ однородного потока направлена по оси Oz, поместим источник обильности q на ось Oz в точку $z = -a$ а сток в точку $z = a$ той же оси Тогда результирующее течение будет осесимметричным, и по принципу наложения потенциал φ течения выразится формулой

$$\varphi = v_\infty z + \frac{q}{4\pi}\left(\frac{1}{\sqrt{(z-a)^2+\rho^2}} - \frac{1}{\sqrt{(z+a)^2+\rho^2}}\right), \tag{4.1}$$

а функция тока

$$\psi = \frac{1}{2}\rho^2 v_\infty + \frac{q}{4\pi}\left(\frac{z+a}{\sqrt{(z+a)^2+\rho^2}} - \frac{z-a}{\sqrt{(z-a)^2+\rho^2}}\right) =$$

$$= -\frac{1}{2}\rho^2 v_\infty + \frac{q}{4\pi}(\cos\gamma_1 - \cos\gamma_2), \tag{4.2}$$

где γ_1 — угол, образованный с осью Oz радиусом-вектором r_1, проведенным в данную точку P поля из источника, а $\gamma_2 = \widehat{(z, r_2)}$, где r_2 — радиус-вектор, проведенный из стока (рис 147) Для построения поверхностей тока $\psi = \text{const}$. можно применить известный графический прием Максвелла сложения скалярных полей, описанный нами в § 12 предыдущей главы. Поверхность тока $\psi = 0$ будет состоять из внешних отрезков оси Oz и некоторой замкнутой поверхности, получаемой вращением овала $KNLQ$ вокруг оси Oz. Критические точки K и L, где течение разветвляется и скорость обращается в нуль, определяются условием

$$(v_\rho)_{\rho=0} = 0$$

или вследствие (4.1)

$$v_\infty - \frac{q}{4\pi}\left(\frac{z-a}{r_2^3} - \frac{z+a}{r_1^3}\right) = 0. \tag{4.3}$$

При $\rho = 0$ и $z > a > 0$ будет $r_1 = z + a$, $r_2 = z - a$, и уравнение (4.3) принимает вид

$$v_\infty - \frac{q}{4\pi}\left[\frac{1}{(z-a)^2} - \frac{1}{(z+a)^2}\right] = 0; \qquad (4.4)$$

критическое значение $z = z_0$, соответствующее точке L, определится как вещественный положительный корень уравнения

$$-v_\infty (z^2 - a^2)^2 - aqz = 0. \qquad (4.5)$$

Если же $\rho = 0$ и $z < -a < 0$, то $r_1 = -(z + a)$, $r_2 = -(z - a)$, и уравнение (4.5) получит вид

$$v_\infty + \frac{q}{4\pi}\left[\frac{1}{(z-a)^2} - \frac{1}{(z+a)^2}\right] = 0,$$

Полагая $z = -z'$, имеем уравнение для z':

$$v_\infty + \frac{q}{4\pi}\left[\frac{1}{(z'+a)^2} - \frac{1}{(z'-a)^2}\right] = 0,$$

тождественное с уравнением (4.4). Таким образом, критической точке K будет соответствовать значение $z = -z_0$. Поперечник

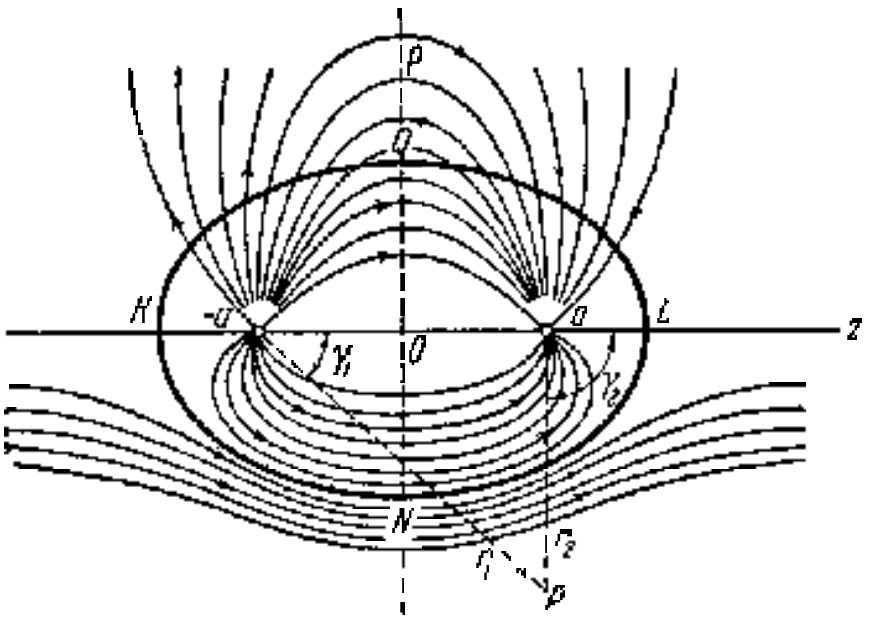

Рис. 147.

$QV = 2P_0$ обтекаемой поверхности определится, если в уравнении этой поверхности $\psi = 0$ положить $z = 0$, что приводит к уравнению шестой степени

$$\pi^2 v_\infty^2 (a^2 + \rho^2)\rho^4 = a^2 q^2.$$

б) *Дублет* с моментом M, направленным против однородного поступательного течения, дает знакомую уже нам картину обтекания шара.

В этом случае

$$\varphi = v_\infty z + \frac{Mz}{4\pi r^3},$$

$$\psi = -\frac{1}{2} v_\infty \rho^2 + \frac{M\rho^2}{4\pi r^3},$$

где

$$r = \sqrt{z^2 + \rho^2}.$$

Радиус R обтекаемого шара определится из условия $\varphi = 0$.

$$R = \sqrt[3]{\frac{M}{2\pi v_\infty}}.$$

Если M выразить через R, то предыдущие выражения для φ и ψ примут вид

$$\varphi = v_\infty z \left(1 + \frac{R^3}{2r^3}\right), \tag{4.6}$$

$$\psi = -\frac{1}{2} v_\infty \rho^2 \left(1 - \frac{R^3}{r^3}\right). \tag{4.7}$$

в) *Одиночный источник обильности* q, внесенный в однородный поступательный поток, дает картину обтекания полубесконечного

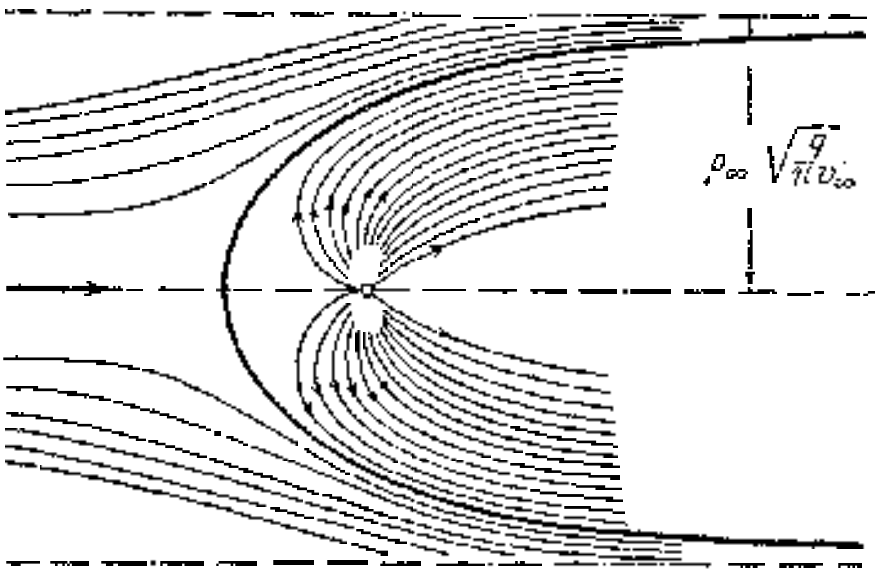

Рис. 148

тела вращения (рис. 148). Этот случай можно трактовать как частный случай источника и стока, когда сток удаляется в бесконечность. Взяв источник в начале координат, мы из формул (4.1) и (4.2) непосредственно получаем:

$$\varphi = v_\infty z - \frac{q}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{z^2 + \rho^2}}, \tag{4.8}$$

$$\psi = -\frac{1}{2} \rho^2 v_\infty + \frac{q}{4\pi} \frac{z}{\sqrt{z^2 + \rho^2}} + \frac{q}{4\pi}. \tag{4.9}$$

Форма поверхности обтекаемого полубесконечного тела определяется уравнением

$$\psi = -\frac{1}{2}\rho^2 v_\infty + \frac{q}{4\pi}\left(\frac{z}{\sqrt{z^2+\rho^2}} + 1\right) = 0. \qquad (4.10)$$

Критическая точка $z = z_0$ определится условием $v_z = 0$ при $\rho = 0$. Имеем:

$$v_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z} = v_\infty + \frac{q}{4\pi}\frac{z}{r^3} = 0,$$

где $r = \sqrt{z^2+\rho^2}$.

Отсюда заключаем, что $z_0 = -z_0' < 0$, но тогда при $\rho = 0$ будет $r = z_0'$, и предыдущее уравнение примет вид

$$v_\infty - \frac{q}{4\pi z_0'^2} = 0,$$

откуда

$$z_0' = +\frac{1}{2}\sqrt{\frac{q}{\pi v_\infty}} \quad \text{и} \quad z_0 = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{q}{\pi v_\infty}}.$$

Уравнение (4.10) при $z = +\infty$ дает:

$$\rho_\infty = \sqrt{\frac{q}{\pi v_\infty}}. \qquad (4.11)$$

Это означает, что при возрастании z поверхность обтекаемого тела приближается асимптотически к круговому цилиндру.

г) *Линейно-распределенные источники* на отрезке оси Oz от $z = 0$ до $z = a$ с переменной обильностью $q(\zeta)\,d\zeta$ на элементе $d\zeta$, будучи внесены в однородно-поступательный поток, создают течение с потенциалом

$$\varphi = v_\infty z - \frac{1}{4\pi}\int_0^a \frac{q(\zeta)\,d\zeta}{\sqrt{(z-\zeta)^2+\rho^2}} \qquad (4.12)$$

и функцией тока

$$\psi = -\frac{1}{2}v_\infty \rho^2 + \frac{1}{4\pi}\int_0^a \frac{(z-\zeta)\,q(\zeta)\,d\zeta}{\sqrt{(z-\zeta)^2+\rho^2}} - \frac{1}{4\pi}\int_0^a q(\zeta)\,d\zeta. \qquad (4.13)$$

Если алгебраическая сумма обильностей линейно-распределенных источников равна нулю, то последний интеграл исчезает, и поверхность тока $\psi = 0$ будет состоять из отрезков оси Oz и некоторой замкнутой поверхности

$$\frac{1}{4\pi}\int_0^a \frac{(z-\zeta)\,q(\zeta)\,d\zeta}{\sqrt{(z-\zeta)^2+\rho^2}} - \frac{1}{2}v_\infty \rho^2 = 0 \qquad (\rho > 0). \qquad (4.14)$$

охватывающей отрезок с источниками и стоками. Если, наоборот, задать вид поверхности (4.14), т. е. считать ρ известной функцией от z, то разыскание неизвестного распределения $q(\zeta)$ источников и стоков на данном отрезке оси Oz, при котором данная поверхность обтекалась бы течением, сводится к решению интегрального уравнения (4.14).

§ 6. Поперечное обтекание осесимметричных тел. Предыдущий метод источников и стоков можно применить к задаче обтекания тела вращения, для которого ось Oz служит осью симметрии, помещенного в поступательный поток, скорость которого в бесконечности перпендикулярна к оси Oz. Примем плоскость, проходящую через ось Oz параллельно вектору v_∞, за плоскость Oxz, для которой азимутальный угол $\theta = 0$, и поместим по предложению Кармана на отрезке оси Oz от $z = 0$ до $z = a$ линейно-распределенные дублеты, направив их оси навстречу потоку в плоскости Oxz. Считая, что ось Ox направлена по вектору v_∞ и, значит, момент дублета $\mu(\zeta)\,d\zeta$, приходящийся на отрезке $d\zeta$, направлен в отрицательную сторону оси Ox, мы получим в пространстве течение, потенциал которого φ' согласно формуле (3.15) выразится в виде

$$\varphi' = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int_0^a \frac{\mu(\zeta)\,d\zeta}{r},$$

где

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + (z-\zeta)^2} = \sqrt{\rho^2 + (z-\zeta)^2}.$$

Выполняя дифференцирование, находим:

$$\varphi' = -\frac{1}{4\pi}\int_0^a \mu(\zeta)\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x}\,d\zeta = \frac{1}{4\pi}\int_0^a \mu(\zeta)\frac{x}{r^3}\,d\zeta =$$

$$= \frac{\rho\cos\theta}{4\pi}\int_0^a \frac{\mu(\zeta)\,d\zeta}{[\sqrt{\rho^2 + (z-\zeta)^2}]^3}, \qquad (5.1)$$

и следовательно, компоненты скорости v' этого течения по осям цилиндрических координат будут:

$$\left.\begin{aligned} v'_\rho &= \frac{\partial\varphi'}{\partial\rho} = \frac{\cos\theta}{4\pi}\int_0^a \frac{\mu(\zeta)\,[(z-\zeta)^2 - 2\rho^2]}{[\sqrt{\rho^2 + (z-\zeta)^2}]^5}\,d\zeta, \\ v'_z &= \frac{\partial\varphi'}{\partial z} = -\frac{3\rho\cos\theta}{4\pi}\int_0^a \frac{\mu(\zeta)\,(z-\zeta)\,d\zeta}{[\sqrt{\rho^2 + (z-\zeta)^2}]^5}, \\ v'_\theta &= \frac{1}{\rho}\frac{\partial\varphi'}{\partial\theta} = -\frac{\sin\theta}{4\pi}\int_0^a \frac{\mu(\zeta)\,d\zeta}{[\sqrt{\rho^2 + (z-\zeta)^2}]^3}. \end{aligned}\right\} \qquad (5.2)$$

Однородное поступательное течение имеет потенциал

$$\varphi_0 = v_\infty x = v_\infty \rho \cos\theta,$$

и компоненты скорости этого течения будут

$$v_{0\rho} = v_\infty \cos\theta, \quad v_{0z} = 0, \quad v_{0\theta} = -v_\infty \sin\theta.$$

Таким образом, мы получаем компоненты результирующего течения в виде

$$v_\rho = v_\infty \cos\theta + \frac{\partial\varphi'}{\partial\rho}; \quad v_z = -\frac{\partial\varphi'}{\partial z}, \quad v_\theta = -v_\infty \sin\theta + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\varphi'}{\partial\theta}.$$

Дифференциальные уравнения линий тока результирующего течения будут:

$$\frac{d\rho}{v_\infty \cos\theta + \frac{\partial\varphi'}{\partial\rho}} = \frac{dz}{\frac{\partial\varphi'}{\partial z}} = \frac{\rho\, d\theta}{-v_\infty \sin\theta + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\varphi'}{\partial\theta}}. \tag{5.3}$$

Если поверхность обтекаемого тела, получаемая вращением определенной кривой $\rho = \rho(z)$ вокруг оси Oz, должна являться одной из поверхностей тока, на которой будут лежать линии из семейства (5.3), то значение $d\rho/dz$, доставляемое уравнением меридиачной кривой $\rho = \rho(z)$ и не зависящее от азимутального угла θ, должно совпадать со значением

$$\frac{d\rho}{dz} = \frac{v_\infty \cos\theta + \frac{\partial\varphi'}{\partial\rho}}{\frac{\partial\varphi'}{\partial z}}, \tag{5.4}$$

доставляемым уравнениями (5.3). Подставляя сюда вместо $\partial\varphi'/\partial\rho$ и $\partial\varphi'/\partial z$ их выражения по формулам (5.2) и замечая при этом, что условие независимости от угла θ действительно соблюдается, мы приходим к следующему интегральному уравнению для функции $\mu(\zeta)$:

$$\frac{1}{4\pi}\left[3\rho\frac{d\rho}{dz}\int_0^a \frac{\mu(\zeta)(z-\zeta)}{r^5}\,d\zeta + \int_0^a \frac{\mu(\zeta)[(z-\zeta)^2 - 2\rho^2]}{r^5}\,d\zeta\right] + v_\infty = 0. \tag{5.5}$$

§ 6. Движение твердого тела в безграничной жидкости. Рассмотрим движение жидкости, вызываемое движением тела, ограниченного поверхностью S, в безграничной несжимаемой идеальной жидкости, покоящейся на бесконечности. Мы будем при этом считать, что на жидкость никакие внешние силы не действуют и что движение жидкости безвихревое.

Обозначим потенциал скорости в рассматриваемый момент времени t через $\varphi(x, y, z)$, так что проекции скорости суть

$$v_x = \frac{\partial\varphi}{\partial x}; \quad v_y = \frac{\partial\varphi}{\partial y}; \quad v_z = \frac{\partial\varphi}{\partial z}. \tag{6.1}$$

Уравнение неразрывности

$$\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}=0$$

показывает, что функция φ должна удовлетворять уравнению Лапласа

$$\Delta\varphi=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=0 \tag{6.2}$$

во всей области течения, т. е. вне поверхности S. Мы будем считать потенциал φ однозначной функцией. В каждой точке M поверхности S должно выполняться граничное условие

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n}=u_n, \tag{6.3}$$

где u_n есть проекция на нормаль n к поверхности S скорости u точки M той же поверхности. Для определенности мы будем считать нормаль n внешней к поверхности S, т. е. направленной внутрь жидкости.

Условие, что жидкость на бесконечности покоится, приводит к граничным условиям

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\lim_{r\to\infty}\frac{\partial\varphi}{\partial y}=\lim_{r\to\infty}\frac{\partial\varphi}{\partial z}=0, \tag{6.4}$$

где $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Можно считать, что $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial y}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial z}$ стремятся к нулю при $r\to\infty$ как величины порядка $1/r^3$, а φ — как величина порядка $1/r^2$. В самом деле, введем сферические координаты r, θ, λ с центром в начале координат и разложим $\varphi(x, y, z)$ в окрестности бесконечно удаленной точки в ряд по убывающим степеням r. Отбрасывая несущественную постоянную, будем иметь разложение вида

$$\varphi=\frac{A}{r}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{Y_n(\theta,\lambda)}{r^{n+1}},$$

где $Y_n(\theta, \lambda)$ — сферические функции. Пусть Σ есть сфера радиуса R с центром в начале координат. Вследствие несжимаемости жидкости поток скорости через Σ должен равняться нулю

$$\int_{\Sigma}\int\frac{\partial\varphi}{\partial r}\,ds=0,$$

и так как

$$\frac{\partial\varphi}{\partial r}=-\frac{A}{r^2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)\,Y_n(\theta,\lambda)}{r^{n+2}},$$

то

$$-4\pi A-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{R^{n+2}}\int_{\Sigma}\int Y_n(\theta,\lambda)\,ds=0,$$

откуда

$$A=0.$$

Итак, вблизи бесконечно удаленной точки мы имеем разложение вида

$$\varphi=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{Y_n(\vartheta,\lambda)}{r^{n+1}},$$

откуда и вытекает в частности, что при $r\to\infty$ φ стремится к нулю как $1/r^2$, а v_x, v_y, v_z как $1/r^3$.

Для определения функции φ нам нужно знать величины u_n, т. е. нормальные к поверхности S составляющие скоростей точек этой поверхности. Но известно, что распределение скоростей твердого тела вполне определяется заданием скорости одной точки этого тела и заданием угловой скорости вращения тела. Выбирая за эту точку начало координат O и обозначая через $\boldsymbol{U}$ вектор скорости этой точки, считаемой неподвижно связанной с телом, а через $\boldsymbol{\omega}$ вектор угловой скорости вращения тела, для скорости $\boldsymbol{u}$ произвольной точки M тела будем иметь формулу

$$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{U}+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r},$$

где $\boldsymbol{r}$ есть радиус-вектор точки M относительно точки O.

В проекциях на оси координат будем иметь:

$$\begin{aligned}u_x&=U_x+\omega_y z-\omega_z y,\\ u_y&=U_y+\omega_z x-\omega_x z,\\ u_z&=U_z+\omega_x y-\omega_y x.\end{aligned}$$

Введем для краткости обозначения

$$\cos(\widehat{n,x})=\alpha,\quad \cos(\widehat{n,y})=\beta,\quad \cos(\widehat{n,z})=\gamma$$

для косинусов углов, составляемых нормалью к поверхности S с осями координат. В точках поверхности S

$$\begin{aligned}u_n&=u_x\alpha+u_y\beta+u_z\gamma=\\ &=(U_x+\omega_y z-\omega_z y)\alpha+(U_y+\omega_z x-\omega_x z)\beta+(U_z+\omega_x y-\omega_y x)\gamma.\end{aligned}$$

Поэтому условие (6.3) принимает вид

$$\begin{aligned}-\frac{\partial\varphi}{\partial n}&=U_x\alpha+U_y\beta+U_z\gamma+\omega_x(y\gamma+z\beta)+\\ &\quad+\omega_y(z\alpha-x\gamma)+\omega_z(x\beta-y\alpha).\end{aligned}\tag{6.5}$$

Из него видно, что функция φ должна представляться в следующем виде:

$$\varphi = U_x\varphi_1 + U_y\varphi_2 + U_z\varphi_3 + \omega_x\varphi_4 + \omega_y\varphi_5 + \omega_z\varphi_6, \tag{6.6}$$

причем все функции φ_1, φ_2, φ_3, φ_4, φ_5, φ_6 должны удовлетворять уравнению (6.2) и условиям (6.4). На поверхности S эти функции должны удовлетворять условиям

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial\varphi_1}{\partial n} = \alpha, && \frac{\partial\varphi_2}{\partial n} = \beta, && \frac{\partial\varphi_3}{\partial n} = \gamma, \\ &\frac{\partial\varphi_4}{\partial n} = -y\gamma - z\beta, && \frac{\partial\varphi_5}{\partial n} = z\alpha - x\gamma, && \frac{\partial\varphi_6}{\partial n} = x\beta - y\alpha, \end{aligned}\right\} \tag{6.7}$$

так как тогда, очевидно, удовлетворится и условие (6.5). Условия (6.7) уже не зависят от векторов U и ω, так что все шесть функций φ_k определяются формой поверхности S и выбором системы координат $Oxyz$. Сравнение условий (6.7) с общим условием (6.5) показывает, что функции φ_1 соответствует тому случаю движения тела, когда

$$U_x = 1, \quad U_y = 0, \quad U_z = 0, \quad \omega_x = 0, \quad \omega_y = 0 \quad \omega_z = 0,$$

т. е. когда тело движется параллельно оси Ox с единичной скоростью. Аналогичное значение имеют функции φ_2 и φ_3. Точно так же функция φ_4 соответствует случаю, когда

$$U_x = U_y = U_z = 0, \quad \omega_x = 1, \quad \omega_y = \omega_z = 0,$$

т. е. когда тело вращается около оси Ox с угловой скоростью вращения, равной единице.

Определим в виде примера эти функции для того случая, когда тело есть трехосный эллипсоид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \tag{6.8}$$

причем $a > b > c$.

В § 2 было найдено решение задачи об обтекании эллипсоида (6.8) потоком, скорость которого на бесконечности направлена параллельно положительной оси Ox и равна U. Принимая в формуле (2.12) $U = -1$, мы получаем решение

$$\varphi = -x - \frac{xA(x, y, z)}{2 - A_0}.$$

Начатая на течение, представляемое этим решением, течение

$$\varphi = x,$$

соответствующее равномерному движению параллельно оси Ox со скоростью, равной единице, мы и получим потенциал скорости

$$\varphi_1 = -\frac{xA(x, y, z)}{2 - A_0} = \frac{1}{2\pi(2 - A_0)}\frac{\partial V_0}{\partial x}, \tag{6.9}$$

соответствующий движению эллипсоида параллельно оси Ox со скоростью единица в жидкости, покоящейся на бесконечности.

Точно так же получим:

$$\left.\begin{aligned} \varphi_2 &= -\frac{yB(x, y, z)}{2-B_0} = \frac{1}{2\pi(2-B_0)}\frac{\partial V_e}{\partial y}, \\ \varphi_3 &= -\frac{zC(x, y, z)}{2-C_0} = \frac{1}{2\pi(2-C_0)}\frac{\partial V_e}{\partial z}. \end{aligned}\right\} \tag{6.10}$$

Заметим, что на поверхности S мы имеем очевидные равенства

$$\varphi_1 = -\frac{A_1}{2-A_0}x, \quad \varphi_2 = -\frac{B_0}{2-B_0}y; \quad \varphi_3 = -\frac{C_1}{2-C_0}z. \tag{6.11}$$

Функцию φ_4 можно получить из следующих соображений. Функция

$$\Phi = \frac{1}{2\pi}\left(y\frac{\partial V_e}{\partial z} - z\frac{\partial V_e}{\partial y}\right) = yz(B-C) = -(2-B_0)z\varphi_2 + (2-C_0)y\varphi_3$$

удовлетворяет, как легко проверить, уравнению Лапласа. На бесконечности эта функция стремится к нулю, как величина порядка $1/r^3$. Наконец, на поверхности S эта функция удовлетворяет условию

$$\begin{aligned} \frac{\partial\Phi}{\partial n} &= (2-C_0)\frac{\partial y}{\partial n}\varphi_1 + (2-C_0)y\frac{\partial\varphi_3}{\partial n} - (2-B_0)\frac{\partial z}{\partial n}\varphi_2 - \\ &- (2-B_0)z\frac{\partial\varphi_2}{\partial n} = -(2-C_0)\beta\frac{C_0 z}{2-C_0} + \\ &+ (2-C_0)y\gamma + (2-B_0)\gamma\frac{B_0 y}{2-B_0} - (2-B_0)z\beta = \\ &= (2-C_0+B_0)y\gamma - (2-B_0+C_0)z\beta; \end{aligned}$$

но на поверхности S имеют место равенства

$$\frac{x}{a^2}:\alpha = \frac{y}{b^2}:\beta = \frac{z}{c^2}:\gamma.$$

поэтому

$$\frac{y\gamma}{b^2} = \frac{z\beta}{c^2}.$$

Следовательно, можно также написать

$$\frac{\partial\Phi}{\partial n} = \left(2-C_0+B_0+\frac{K}{b^2}\right)y\gamma - \left(2-B_0+C_0+\frac{K}{c^2}\right)z\beta;$$

подберем K так, чтобы

$$2-C_0+B_0+\frac{K}{b^2} = 2-B_0+C_0+\frac{K}{c^2},$$

откуда

$$K = \frac{2(B_0 - C_0)\, b^2 c^2}{b^2 - c^2},$$

тогда будем иметь на поверхности S

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = \left(2 + B_1 \frac{b^2 + c^2}{b^2 - c^2} - C_0 \frac{b^2 + c^2}{b^2 - c^2}\right)(y\gamma - z\beta)$$

Сравнивая это условие с условием для функции φ_4, приходим к выводу, что

$$\varphi_4 = \frac{(b^2 - c^2)\,\Phi}{2(b^2 - c^2) + (B_0 - C_0)(b^2 + c^2)} = \frac{(b^2 - c^2)\, yz\,(B - C)}{2(b^2 - c^2) + (B_1 - C_1)(b^2 + c^2)},$$

$$\varphi_5 = \frac{(c^2 - a^2)\, zx\,(C - A)}{2(c^2 - a^2) + (C_0 - A_0)(c^2 + a^2)},$$

$$\varphi_6 = \frac{(a^2 - b^2)\, xy\,(A - B)}{2(a^2 - b^2) + (A_0 - B_0)(a^2 + b^2)}. \tag{6.12}$$

§ 7. Расчет гидродинамических реакций при движении тела. Перейдем теперь к вопросу о силах, которые действуют на твердое тело при его движении в безграничной жидкости. Эти силы приводятся к силам давления, приложенным к элементам поверхности S.

Если $\boldsymbol{n}$ есть орт внешней нормали к поверхности S, то на элемент dS поверхности S будет действовать сила давления $-p\boldsymbol{n}\,dS$.

Для главного вектора $\boldsymbol{R}$ этих сил и для главного момента их относительно начала координат мы получаем выражения

$$\boldsymbol{R} = -\int\int_S p\boldsymbol{n}\,dS; \quad \boldsymbol{L} = -\int\int_S p\,(\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{n})\,dS \tag{7.1}$$

где $\boldsymbol{r}$ есть радиус-вектор точки M поверхности S относительно начала координат. В предположении отсутствия массовых сил давление p определяется по формуле Бернулли

$$p = p_0 - \rho\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{\rho v^2}{2}. \tag{7.2}$$

Подставляя это значение p в предыдущие формулы, мы и определим $\boldsymbol{R}$ и $\boldsymbol{L}$. Удобнее, однако, поступить иначе, а именно исходить из закона количеств движения и закона моментов количеств движения.

Проведем произвольную неподвижную в пространстве поверхность Σ, охватывающую поверхность S. Количество движения $\boldsymbol{K}$ жидкости, заключенной в объеме V между поверхностями S и Σ, есть

$$\boldsymbol{K} = \rho\int\int\int_V \boldsymbol{v}\,d\tau = \rho\int\int\int_V \operatorname{grad}\varphi\,d\tau.$$

Но по теореме Гаусса

$$\int\int\int_V \operatorname{grad}\varphi\, d\tau = \int\int_\Sigma \varphi \mathbf{n}\, dS - \int\int_S \varphi \mathbf{n}\, dS.$$

Изменение за время dt количества движения частиц жидкости заключенных в момент t между поверхностями S и Σ равно импульсу сил давления, действовавших на поверхности S и Σ за промежуток времени dt. Обозначим через $\mathbf{R}'$ главный вектор сил давления, приложенных к поверхности Σ, тогда импульс сил давления, приложенных к поверхностям S и Σ за время dt, будет равен $(\mathbf{R}' - \mathbf{R})\, dt$.

Чтобы подсчитать изменение количества движения частиц жидкости, заключенных в момент времени t между поверхностями S и Σ, нужно учесть то обстоятельство, что за время dt часть этих частиц выйдет через поверхность Σ, другие же частицы за то же время dt войдут через поверхность Σ и окажутся к моменту $t + dt$ внутри объема V. Количество движения частиц жидкости, вышедших за время dt через поверхность Σ, нужно, очевидно, прибавить к количеству движения жидкости, заключенной в объеме V в момент $t + dt$; количество же движения частиц жидкости, вошедших через поверхность Σ нужно будет вычесть.

Так как через элемент dS поверхности Σ за время dt проходит масса жидкости $\rho v_n\, dS\, dt$, несущая количество движения $\rho \mathbf{v} v_n\, dS\, dt$, то полное изменение количества движения рассматриваемых частиц жидкости равно

$$d\mathbf{K} = d\int\int_\Sigma \rho\varphi \mathbf{n}\, dS - d\int\int_S \rho\varphi \mathbf{n}\, dS + \int\int \rho \mathbf{v} v_n\, dS\, dt.$$

Приравнивая это изменение количества движения импульсу сил $(\mathbf{R}' - \mathbf{R})\, dt$, получаем равенство

$$\mathbf{R}' - \mathbf{R} = \frac{d}{dt}\int\int_\Sigma \rho\varphi \mathbf{n}\, dS - \frac{d}{dt}\int\int_S \rho\varphi \mathbf{n}\, dS + \int\int_\Sigma \rho \mathbf{v} v_n\, dS. \quad (7.3)$$

Поверхность Σ мы считаем неподвижной в пространстве, поэтому

$$\frac{d}{dt}\int\int_\Sigma \rho \mathbf{n}\, dS = \int\int_\Sigma \frac{\partial \rho}{\partial t}\mathbf{n}'\, dS \quad (7.4)$$

Воспользовавшись (7.2) и

$$\int\int \rho \mathbf{n}\, dS = p_0 \int\int_\Sigma \mathbf{n}\, dS = 0,$$

имеем равенство

$$\boldsymbol{R}' = -\int_\Sigma\int p\boldsymbol{n}\,dS = \rho\int_\Sigma\int \frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial t}\boldsymbol{n}\,dS + \rho\int_\Sigma\int \frac{v^2}{2}\boldsymbol{n}\,dS. \quad (7.5)$$

Подставляя выражения (7.4) и (7.5) в (7.3), получим основную формулу

$$\boldsymbol{R} = \frac{d}{dt}\int_S\int \rho\boldsymbol{\varphi}\boldsymbol{n}\,dS + \int_\Sigma\int \rho\left(\frac{v^2}{2}\boldsymbol{n} - \boldsymbol{v}v_n\right)dS. \quad (7.6)$$

Здесь Σ есть произвольная поверхность, охватывающая поверхность S. Если принять за Σ сферу очень большого радиуса a, то на этой сфере скорость v будет величиной порядка $1/a^3$, поэтому величина

$$\frac{v^2}{2}\boldsymbol{n} - \boldsymbol{v}v_n$$

будет порядка $1/a^6$, а так как поверхность сферы Σ равна $4\pi a^2$, то второй интеграл в формуле (7.6) будет порядка $1/a^4$ и будет стремиться к нулю при $a\to\infty$. Поэтому, устремляя a к ∞, получим из (7.6) окончательную формулу

$$\boldsymbol{R} = \frac{d}{dt}\int_S\int \rho\boldsymbol{\varphi}\boldsymbol{n}\,dS. \quad (7.7)$$

Совершенно аналогично мы найдем формулу для момента $\boldsymbol{L}$, применяя закон моментов количеств движения.

Момент количеств движения $\boldsymbol{l}$ жидкости, заключенной в объеме V, есть

$$\boldsymbol{l} = \rho\int_V\int\int (\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v})\,d\tau = \rho\int_V\int\int (\boldsymbol{r}\times\operatorname{grad}\varphi)\,d\tau$$

и легко проверить, применяя формулу Гаусса, что

$$\boldsymbol{l} = \rho\int_\Sigma\int \varphi(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{n})\,dS - \rho\int_S\int \varphi(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{n})\,dS.$$

Вместо (7.8) мы будем иметь:

$$\boldsymbol{L}' - \boldsymbol{L} = \frac{d}{dt}\int_\Sigma\int \rho\varphi(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{n})\,dS - \frac{d}{dt}\int_S\int \rho\varphi(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{n})\,dS +$$

$$+\int_\Sigma\int \rho(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v})v_n\,dS.$$

Поэтому вместо (7.6) получим

$$\boldsymbol{L}=\frac{d}{dt}\int_S\int \rho\varphi(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{n})\,dS+\int_\Sigma\int \rho\left[\boldsymbol{r}\times\left(\frac{v^2}{2}\boldsymbol{n}-v v_n\right)\right]dS,$$

а вместо (7.7)

$$\boldsymbol{L}=\frac{d}{dt}\int_S\int \rho\varphi(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{n})\,dS. \tag{7.8}$$

Полученным формулам можно дать следующее истолкование. Сила $\boldsymbol{R}$ и пара $\boldsymbol{L}$ определяют воздействие со стороны жидкости на твердое тело. Если тело находится под действием внешних сил, приводящихся к силе $\boldsymbol{F}$, приложенной в начале координат, и к паре $\boldsymbol{M}$, то его движение будет определяться формулами

$$\frac{d\boldsymbol{G}}{dt}=\frac{d}{dt}\int_S\int \rho\varphi\boldsymbol{n}\,dS+\boldsymbol{F};\quad \frac{d\boldsymbol{Q}}{dt}=\frac{d}{dt}\int_S\int \rho\varphi(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{n})\,dS+\boldsymbol{M},$$

где $\boldsymbol{G}$ есть количество движения твердого тела, $\boldsymbol{Q}$ есть главный момент количеств движения тела относительно начала координат.

Написав предыдущие формулы в виде

$$\frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{G}-\int_S\int \rho\varphi\boldsymbol{n}\,dS\right)=\boldsymbol{F};\quad \frac{d}{dt}\left[\boldsymbol{Q}-\int_S\int \rho\varphi(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{n})\,dS\right]=\boldsymbol{M}, \tag{7.9}$$

мы можем истолковать их следующим образом: при движении твердого тела в жидкости внешние силы должны изменять не только количество движения твердого тела, но еще и систему количеств движения, распределенных вдоль поверхности S, причем на каждую единицу поверхности приходится количество движения $-\rho\varphi\boldsymbol{n}$.

Величина $-\rho\varphi$ представляет, как было выяснено в § 7 главы четвертой, тот мгновенный импульс давлений, который будучи приложен к покоящейся жидкости, мог бы вызвать рассматриваемое безвихревое движение. Величины $-\rho\varphi\boldsymbol{n}$, распределенные вдоль поверхности S, образуют систему таких импульсов.

Обозначим через $\boldsymbol{B}$ главный вектор этих импульсов, а через $\boldsymbol{I}$ — главный момент их относительно начала координат:

$$\boldsymbol{B}=-\rho\int_S\int \varphi\boldsymbol{n}\,dS,\quad \boldsymbol{I}=-\rho\int_S\int \varphi(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{n})\,dS. \tag{7.10}$$

Вектор $\boldsymbol{G}+\boldsymbol{B}$ называется *импульсивной силой*, а вектор $\boldsymbol{Q}+\boldsymbol{I}$ — *импульсивной парой*. Уравнения (7.9) принимают теперь очень простой вид

$$\frac{d(\boldsymbol{G}+\boldsymbol{B})}{dt}=\boldsymbol{F},\quad \frac{d(\boldsymbol{Q}+\boldsymbol{I})}{dt}=\boldsymbol{M}. \tag{7.11}$$

Уравнения движения твердого тела удобно записывать в системе координат, неподвижно связанной с телом. Поступим и мы таким же образом. Пусть оси координат $Oxyz$ будут неподвижно связаны с твердым телом, а оси координат $O_1x_1y_1z_1$ пусть будут неподвижны в пространстве. Предположим еще, что в рассматриваемый момент времени t обе системы осей совпадают.

Вспомним, что

$$\varphi = U_x\varphi_1 + U_y\varphi_2 + U_z\varphi_3 + \omega_x\varphi_4 - \omega_y\varphi_5 + \omega_z\varphi_6 \qquad (7.12)$$

Преимущество подвижной системы координат заключается в том, что в ней функции φ_1, φ_2, φ_3, φ_4, φ_5, φ_6 не зависят от времени, так как пограничные условия (6.7), очевидно, в этом случае не зависят от времени. В формуле (7.12) зависят от времени только составляющие векторов U и ω, определяющих движение твердого тела, причем эти составляющие берутся на оси подвижных координат.

Составим теперь векторы B и I. Мы имеем:

$$\left.\begin{aligned}
B_x &= -\rho\int_S\int \cos\alpha\, dS,\\
B_y &= -\rho\int_S\int \cos\beta\, dS\\
B_z &= -\rho\int_S\int \cos\gamma\, dS,\\
I_x &= -\rho\int_S\int \varphi(y\cos\gamma - z\cos\beta)\, dS,\\
I_y &= -\rho\int_S\int \varphi(z\cos\alpha - x\cos\gamma)\, dS,\\
I_z &= -\rho\int_S\int \varphi(x\cos\beta - y\cos\alpha)\, dS.
\end{aligned}\right\} \qquad (7.13)$$

Введем следующие обозначения:

$$\left.\begin{aligned}
&U_x = U_1,\ U_y = U_2,\ U_z = U_3,\ \omega_x = U_4,\ \omega_y = U_5,\ \omega_z = U_6,\\
&B_x = B_1,\ B_y = B_2,\ B_z = B_3,\ I_x = B_4,\ I_y = B_5,\ I_z = B_6
\end{aligned}\right\} \qquad (7.14)$$

тогда вместо (7.12) можем написать

$$\varphi = \sum_{i=1}^{6} U_i\varphi_i, \qquad (7.15)$$

а вместо (7.13), воспользовавшись (6.7), можем написать

$$B_i = -\rho\int_S\int \varphi\frac{\partial\varphi_i}{\partial n}\, dS. \qquad (7.16)$$

Введем еще обозначения

$$\lambda_{ik} = -\rho \int\int \frac{\partial \varphi_i}{\partial n} \varphi_k \, dS \quad (i, k = 1, 2, 3, 4, 5, 6), \tag{7.17}$$

тогда мы получим из (7.15) и (7.16) следующие основные формулы:

$$B_i = \sum_{k=1}^{6} \lambda_{ik} U_k. \tag{7.18}$$

Легко показать, что

$$\lambda_{ik} = \lambda_{ki}. \tag{7.19}$$

В самом деле, применим к области V, заключенной между поверхностями S и Σ, формулу Грина

$$\int\int\int_V (\varphi_i \Delta\varphi_k - \varphi_k \Delta\varphi_i)\, dV =$$

$$= \int\int_\Sigma \left(\varphi_i \frac{\partial \varphi_k}{\partial n} - \varphi_k \frac{\partial \varphi_i}{\partial n}\right) dS - \int\int_S \left(\varphi_i \frac{\partial \varphi_k}{\partial n} - \varphi_k \frac{\partial \varphi_i}{\partial n}\right) dS.$$

Левая часть равна нулю, ибо

$$\Delta\varphi_i = \Delta\varphi_k = 0.$$

Если Σ есть сфера с центром в начале координат большого радиуса a, то подынтегральная функция в первом интеграле правой части будет порядка $1/a^3$ (ибо φ_i и φ_k порядка $1/a^2$, а $\partial\varphi_i/\partial n$ и $\partial\varphi_k/\partial n$ порядка $1/a^3$); поэтому интеграл будет порядка $1/a^3$ и обращается в нуль при $a \to \infty$, следовательно,

$$\int\int_S \left(\varphi_i \frac{\partial \varphi_k}{\partial n} - \varphi_k \frac{\partial \varphi_i}{\partial n}\right) dS = 0,$$

что равносильно (7.19).

Таким образом, из 36 коэффициентов λ_{ik} независимых будет только 21; эти коэффициенты называются *присоединенными массами тела*. Чтобы более точно выяснить их значение, вычислим еще кинетическую энергию жидкости

$$T = \frac{\rho}{2} \int\int\int v^2 \, d\tau, \tag{7.20}$$

где интеграл берется по всему объему жидкости. Рассмотрим сначала интеграл по области V, заключенной между поверхностями S и Σ; в этом случае по формуле (8.4) главы четвертой имеем:

$$\int\int\int_V v^2 \, d\tau = -\int\int_S \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS + \int\int_\Sigma \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS.$$

Как и выше, легко убедиться, что последний интеграл стремится к нулю при возрастании радиуса a сферы Σ до бесконечности, поэтому для живой силы всей безграничной жидкости, находящейся вне поверхности S, получаем конечное значение

$$T = -\frac{\rho}{2}\int_S \int \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n}\, dS. \tag{7.21}$$

Воспользовавшись теперь представлением (7.15) и определением (7.17) коэффициентов λ_{ik}, найдем:

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{6}\sum_{k=1}^{6}\lambda_{ik}U_iU_k. \tag{7.22}$$

Выражения (7.18) могут теперь быть представлены в очень простом виде:

$$B_i = \frac{\partial T}{\partial U_i}. \tag{7.23}$$

Вернемся теперь к вопросу о вычислении сил, действующих на твердое тело со стороны жидкости. Мы нашли для главного вектора и главного момента этих сил выражения (7.7) и (7.8), которые, пользуясь обозначениями (7.10), можно записать в виде

$$\boldsymbol{R} = -\frac{d\boldsymbol{B}}{dt}, \quad \boldsymbol{L} = -\frac{d\boldsymbol{I}}{dt}. \tag{7.24}$$

Нужно, однако, иметь в виду, что в этих формулах производные по времени берутся в предположении, что векторы $\boldsymbol{B}$ и $\boldsymbol{I}$ вычисляются для неподвижной системы координат. Если же мы берем производные по времени для величин, вычисляемых в подвижной системе координат, то мы будем пользоваться знаком частной производной $\partial/\partial t$.

Вектор $\boldsymbol{B}$ представляет главный вектор системы мгновенных импульсов давлений; будем откладывать его от начала O_1 неподвижной системы координат, тогда $d\boldsymbol{B}/dt$ представляет скорость конца вектора $\boldsymbol{B}$, а $\partial\boldsymbol{B}/\partial t$ представляет, очевидно, относительную скорость конца этого вектора, рассматриваемого по отношению к системе координат с началом в точке O_1, оси которой параллельны осям подвижной системы. Но абсолютная скорость точки равна геометрической сумме относительной скорости и переносной скорости, а последней является в данном случае $\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{B}$, ибо под переносным движением мы должны понимать вращение системы координат с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$. Поэтому мы получаем основную формулу

$$\frac{d\boldsymbol{B}}{dt} = \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{B}. \tag{7.25}$$

При вычислении dI/dt дело обстоит несколько сложнее. Вектор I есть главный момент системы мгновенных импульсов давлений относительно начала O_1 неподвижной системы координат. Но когда мы вычисляем dI/dt, то мы сравниваем значения в два последовательных момента времени t и $t+dt$ главных моментов системы мгновенных импульсов давлений относительно двух различных точек, а именно относительно начала координат подвижной системы в эти два последовательных момента времени. Поэтому dI/dt будет отличаться от

$$\frac{\partial I}{\partial t} - \omega \times I$$

еще добавочным членом, а именно скоростью изменения момента I, взятого около перемещающегося начала координат. Как известно, главный момент системы сил относительно одной точки равен главному моменту той же системы сил относительно другой точки плюс момент главного вектора системы сил, приложенного во второй точке относительно первой точки. Так как радиус-вектор положения начала координат подвижной системы в момент $t+dt$ относительно положения того же начала в момент t есть $U\,dt$, то добавочное изменение момента будет $[U\,dt \times B]$, а скорость его изменения будет $U \times B$. Поэтому мы получаем вторую основную формулу:

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\partial I}{\partial t} + \omega \times I + U \times B \tag{7.26}$$

Итак, силы воздействия со стороны потока на тело определяются следующими формулами:

$$\left.\begin{aligned} R &= \frac{\partial B}{\partial t} - \omega \times B; \\ L &= \frac{\partial I}{\partial t} - \omega \times I - U \times B, \end{aligned}\right\} \tag{7.27}$$

а именно эти силы приводятся к силе R приложенной в начале координат подвижной системы, и к паре L.

§ 8. Примеры. Рассмотрим теперь два частных примера. Прежде всего заметим что формулы сильно упрощаются в том частном случае, когда поверхность S имеет три взаимно перпендикулярные оси симметрии (например, есть поверхность эллипсоида). Направляя оси подвижной системы координат по осям симметрии поверхности S нетрудно убедиться, что все коэффициенты λ_{ik} с разными индексами обращаются в этом случае в нуль, и выражение для кинетической энергии принимает простой вид

$$T = \frac{1}{2}(\lambda_{11}U_x^2 + \lambda_{22}U_y^2 + \lambda_{33}U_z^2 + \lambda_{44}\omega_x^2 + \lambda_{55}\omega_y^2 + \lambda_{66}\omega_z^2). \tag{8.1}$$

Формулы (7.18) примут вид:

$$\left.\begin{aligned} B_x &= \lambda_{11}U_x; \quad B_y = \lambda_{22}U_y; \quad B_z = \lambda_{33}U_z; \\ I_x &= \lambda_{44}\omega_x; \quad I_y = \lambda_{55}\omega_y, \quad I_z = \lambda_{66}\omega_z \end{aligned}\right\} \tag{8.2}$$

и выражения (7.27) для сил запишутся в простом виде:

$$\left.\begin{aligned} R_x &= -\lambda_{11}\frac{dU_x}{dt} - \lambda_{33}\omega_y U_z + \lambda_{22}\omega_z U_y, \\ R_y &= -\lambda_{22}\frac{dU_y}{dt} - \lambda_{11}\omega_z U_x + \lambda_{33}\omega_x U_z, \\ R_z &= -\lambda_{33}\frac{dU_z}{dt} - \lambda_{22}\omega_x U_y + \lambda_{11}\omega_y U_x, \\ L_x &= -\lambda_{44}\frac{d\omega_x}{dt} - (\lambda_{55} - \lambda_{66})\omega_y\omega_z + (\lambda_{22} - \lambda_{33})U_yU_z \\ L_y &= -\lambda_{55}\frac{d\omega_y}{dt} - (\lambda_{66} - \lambda_{44})\omega_z\omega_x + (\lambda_{33} - \lambda_{11})U_zU_x \\ L_z &= -\lambda_{66}\frac{d\omega_z}{dt} + (\lambda_{44} - \lambda_{55})\omega_x\omega_y + (\lambda_{11} - \lambda_{22})U_xU_y \end{aligned}\right\} \tag{8.3}$$

В качестве первого примера рассмотрим движение шара радиуса b. В случае движения шара в направлении оси Ox с единичной скоростью мы имеем:

$$\varphi_1 = -\frac{br\cos\theta}{2r^2},$$

где r, θ, λ — сферические координаты с центром в начале шара и полярной осью, направленной по оси Ox.

Так как на сфере S

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial n} = \alpha = \cos\theta,$$

то

$$\lambda_{11} = -\rho\int_S\int\varphi_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}\,dS = \frac{\rho b}{2}\int_S\int\cos^2\theta\,dS =$$

$$= \frac{\rho b^3}{2}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\cdot\sin\theta\,d\theta\,d\lambda = \frac{2\pi\rho b^3}{3};$$

точно так же будем иметь:

$$\lambda_{22} = \lambda_{33} = \frac{2}{3}\pi\rho b^3.$$

Очевидно, далее, что вращение шара около какого-нибудь диаметра не вызывает движения жидкости, поэтому

$$\varphi_4 = \varphi_5 = \varphi_6 = 0,$$

и следовательно

$$\lambda_{11} = \lambda_{55} = \lambda_{66} = 0$$

Итак, для шара

$$T = \frac{\pi\rho b^3}{3}(U_x^2 + U_y^2 + U_z^2). \tag{8.4}$$

В данном случае удобнее применять неподвижную систему координат, ибо выражение для живой силы (8.4) годится в данном случае для любой системы координат.

Мы имеем, очевидно

$$\boldsymbol{B} = \frac{2}{3}\pi\rho b^3\boldsymbol{U}, \quad \boldsymbol{I} = 0, \tag{8.5}$$

и следовательно по формулам (7.21) видно, что силы воздействия потока на шар приводятся к одной силе, приложенной в центре шара и равной

$$\boldsymbol{R} = -\frac{2}{3}\pi\rho b^3\frac{d\boldsymbol{U}}{dt} \tag{8.6}$$

Если масса шара есть m и на него действует сила $\boldsymbol{F}$, приложенная в центре шара, то движение шара в жидкости будет определяться уравнением

$$m\frac{d\boldsymbol{U}}{dt} = \boldsymbol{F} - \frac{2}{3}\pi\rho b^3\frac{d\boldsymbol{U}}{dt} \quad \text{или} \quad \left(m + \frac{2}{3}\pi\rho b^3\right)\frac{d\boldsymbol{U}}{dt} = \boldsymbol{F} \tag{8.7}$$

Мы видим, что поступательное движение шара в жидкости происходит так, как оно происходило бы в пустоте, если бы масса шара m увеличилась на присоединенную массу

$$\frac{2}{3}\pi\rho b^3,$$

последняя равна половине массы жидкости, вытесняемой шаром.

Рассмотрим теперь движение трехосного эллипсоида с полуосями a, b, c. Функция

$$\varphi_1 = -\frac{\lambda A_0(x, y, z)}{2 - A_0}$$

принимает на поверхности эллипсоида S значение

$$\varphi_1 = \frac{A_0}{2 - A_0}x.$$

Кроме того, она удовлетворяет граничному условию

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial n} - x = \cos(\widehat{n\,x});$$

поэтому сразу находим, что

$$\lambda_{11} = -\rho\int\int_S \varphi_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}\,dS = -\rho\frac{A_0}{2 - A_0}\int\int_S x\cos(\widehat{n\,x})\,dS;$$

но по теореме Гаусса

$$\int_S \int x \cos(\widehat{n\,x})\, dS = \int_\tau \int \int \frac{\partial x}{\partial x}\, d\tau = \tau = \frac{4}{3}\pi abc,$$

где τ — объем эллипсоида. Итак,

$$\lambda_{11} = \frac{4}{3}\pi\rho abc\,\frac{A_0}{2 - A_0}, \tag{8.8}$$

Точно так же получим:

$$\lambda_{22} = \frac{4}{3}\pi\rho abc\,\frac{B_0}{2 - B_0}; \quad \lambda_{33} = \frac{4}{3}\pi\rho abc\,\frac{C_0}{2 - C_0}. \tag{8.9}$$

Мы нашли далее, что

$$\varphi_4 = \frac{(b^2 - c^2)\, yz\,(B - C)}{2(b^2 - c^2) + (B_0 - C_0)(b^2 + c^2)},$$

причем на поверхности эллипсоида

$$\frac{\partial \varphi_4}{\partial n} = y\gamma - z\beta,$$

поэтому

$$\lambda_{44} = -\rho \int_S \int c_4 \frac{\partial \varphi_4}{\partial n}\, dS =$$

$$= -\frac{\rho (b^2 - c^2)(B_0 - C_0)}{2(b^2 - c^2) + (B_0 - C_0)(b^2 + c^2)} \int_S \int yz\,[y\cos(n, \widehat{z}) - z\cos(n\,\widehat{y})]\, dS.$$

По формуле Гаусса

$$\int_S \int [y^2 z \cos(n, \widehat{z}) - yz^2 \cos(n, \widehat{y})]\, dS =$$

$$= \int_\tau \int \int \left[\frac{\partial (y^2 z)}{\partial z} - \frac{\partial (yz^2)}{\partial y}\right] d\tau = \int_\tau \int \int (y^2 - z^2)\, d\tau;$$

последний интеграл легко берется

$$\int_\tau \int \int (y^2 - z^2)\, d\tau = \frac{4}{15}\pi abc\,(b^2 - c^2),$$

и мы окончательно находим:

$$\lambda_{44} = -\frac{4}{15}\,\frac{\pi\rho abc\,(b^2 - c^2)^2 (B_0 - C_0)}{2(b^2 - c^2) + (B_0 - C_0)(b^2 + c^2)}; \tag{8.10}$$

аналогичные формулы получатся для λ_{55} и λ_{66}.

Для того чтобы можно было составить представление о величинах $\lambda_{11}, \lambda_{22}, \ldots$, которые определяются формулами (8.8), (8.9), (8.10), не хватает еще значений A_0, B_0, C_0. Они даются, как мы

видели, формулами (2.8) при $\lambda = 0$. Легко видеть, что A_0, B_0, C_0 зависят лишь от отношений a/b и c/b. В самом деле, вводя вместо u величину t из равенства $u = b^2 t$, получим:

$$A_0 = pq \int_0^\infty \frac{dt}{(p^2+t)\sqrt{(p^2+t)(q^2+t)(1+t)}},$$

$$B_0 = pq \int_0^\infty \frac{dt}{(1+t)\sqrt{(p^2+t)(q^2+t)(1+t)}},$$

$$C_0 = pq \int_0^\infty \frac{dt}{(q^2+t)\sqrt{(p^2+t)(q^2+t)(1+t)}},$$

где

$$p = \frac{a}{b}, \quad q = \frac{c}{b} \quad (a \geqslant b \geqslant c).$$

М. И. Гуревич и И. С. Риман произвели расчеты этих величин в функциях от p и q и дали графики, на основании которых легко подсчитываются коэффициенты присоединенных масс для произвольного эллипсоида.

На рис. 149—155 даны примеры этих графиков. Именно рис. 149 отвечает вытянутому эллипсоиду вращения ($b = c$). Здесь нанесены величины

$$\mu_x = \frac{\lambda_{11}}{\frac{4}{3}\pi\rho ab^2}, \quad \mu_y = \frac{\lambda_{22}}{\frac{4}{3}\pi\rho ab^2}, \quad \mu_{yy} = \frac{\lambda_{66}}{\frac{4}{15}\pi\rho ab^2(a^2+b^2)}$$

$$(\lambda_{33} = \lambda_{22}, \quad \lambda_{44} = 0, \quad \lambda_{66} = \lambda_{55})$$

в функциях от отношения $b/a = 1/p$. Случай шара получим, когда $b/a = 1$, при этом в согласии с результатами, полученными выше, будет:

$$\mu_x = \mu_y = 0{,}5, \quad \mu_{yy} = 0.$$

Рисунки 150—155 отвечают трехосному эллипсоиду. Коэффициенты

$$\mu_x = \frac{\lambda_{11}}{\frac{4}{3}\pi\rho abc}, \quad \mu_y = \frac{\lambda_{22}}{\frac{4}{3}\pi\rho abc}, \quad \mu_z = \frac{\lambda_{33}}{\frac{4}{3}\pi\rho abc}$$

изображены соответственно на рис. 150—152 в виде семейств кривых, зависящих от параметра p (по оси абсцисс отложены всюду

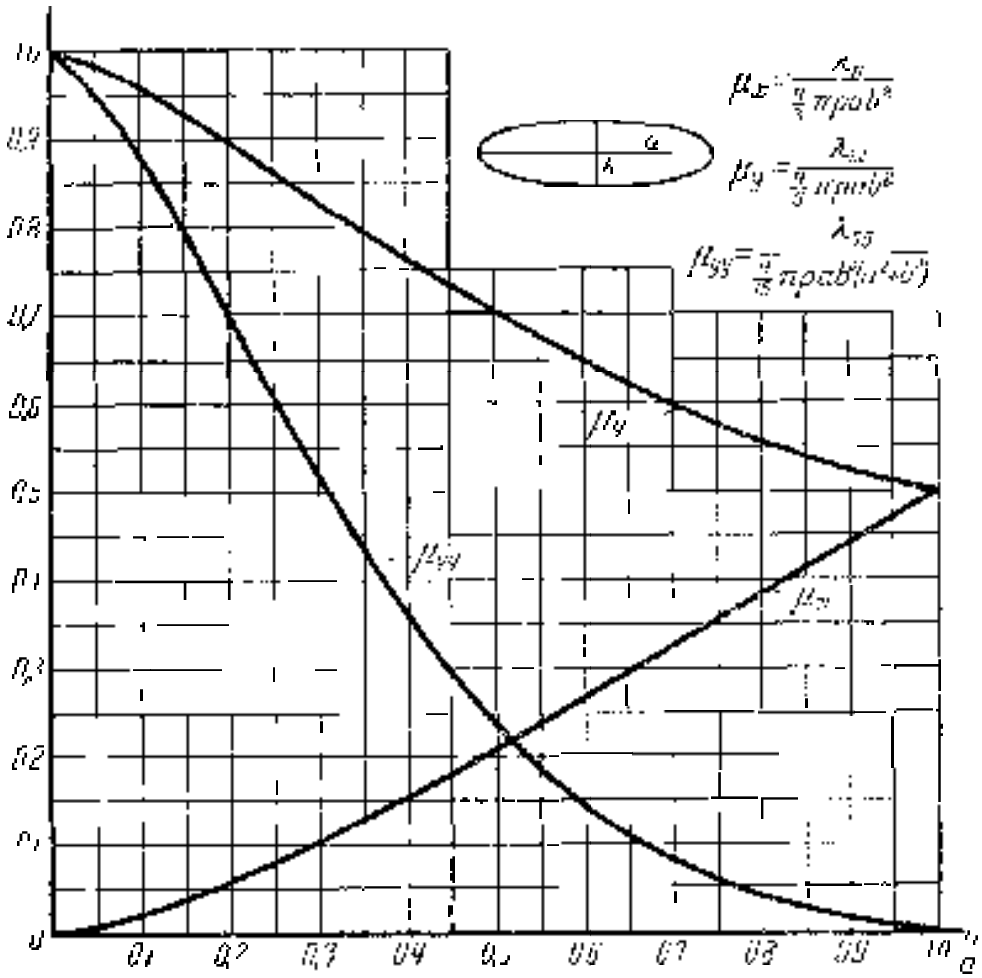

Рис. 149

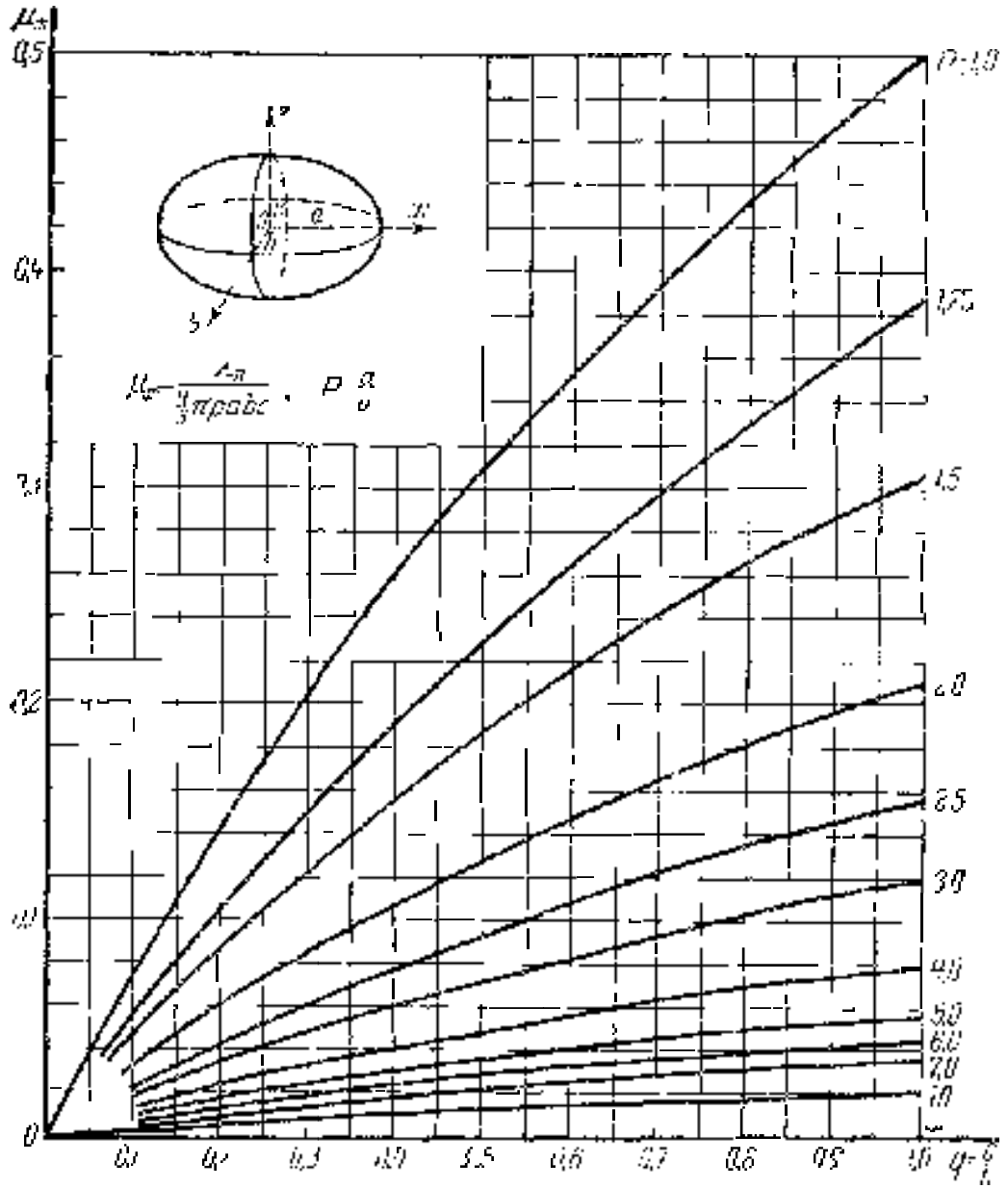

Рис. 150

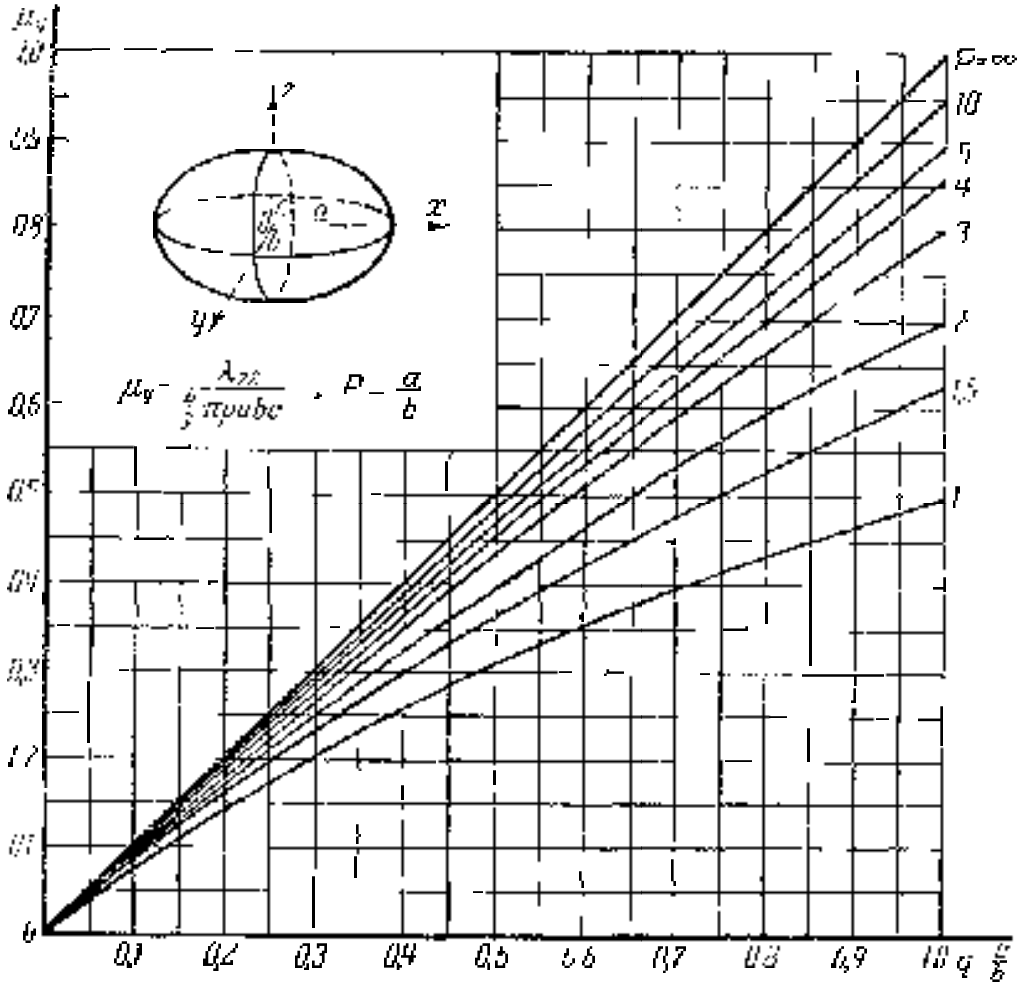

Рис. 151.

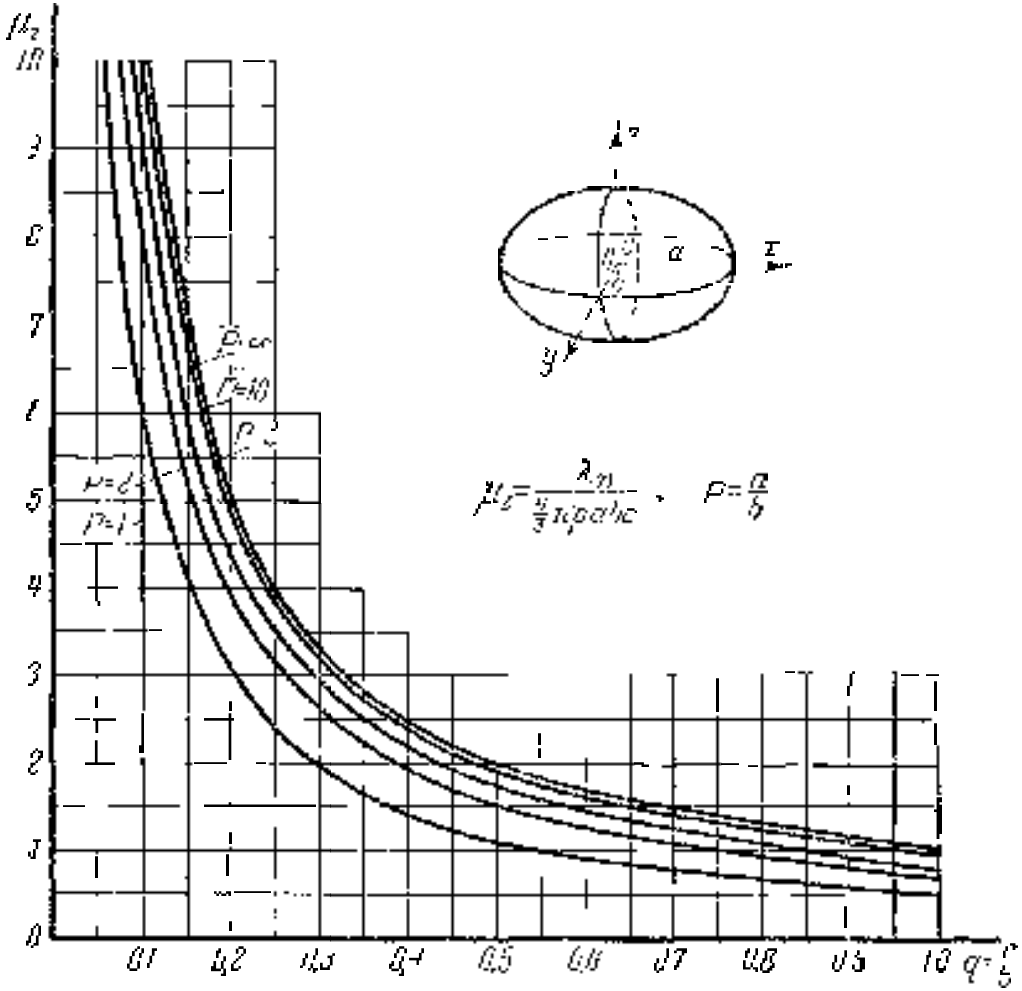

Рис 152.

величины q). Коэффициенты

$$k_{xx} = \frac{\lambda_{44}}{\frac{4}{15}\pi\rho abc\,(b^2+c^2)}, \quad k_{yy} = \frac{\lambda_{55}}{\frac{4}{15}\pi\rho abc\,(a^2+c^2)}, \quad k_{zz} = \frac{\lambda_{66}}{\frac{4}{15}\pi\rho abc\,(a^2+b^2)},$$

изображены соответственно на рис. 153—155.

Предположим, что центр эллипсоида описывает горизонтальную окружность радиуса l со скоростью U, и пусть оси эллипсоида Ox

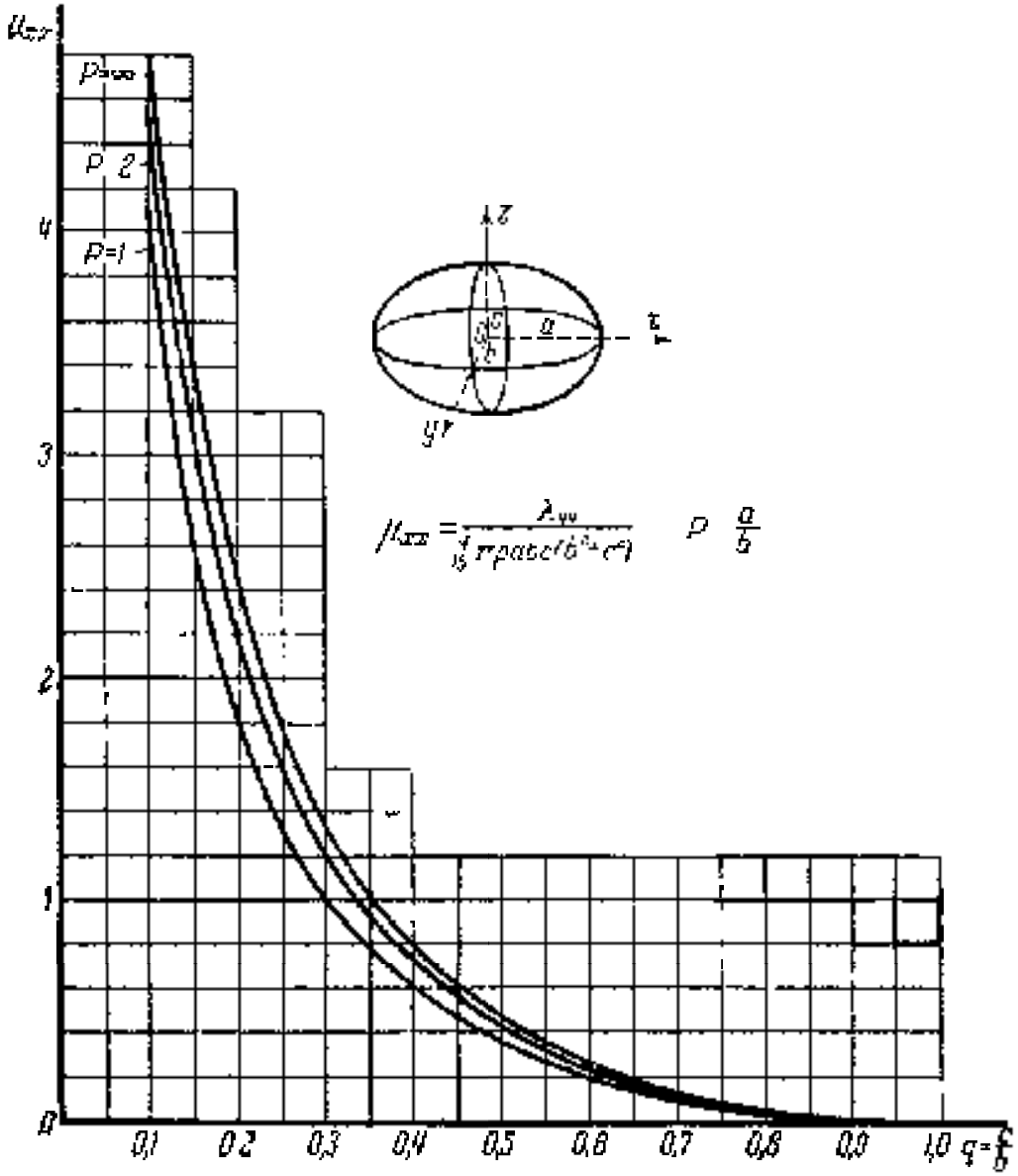

Рис. 153.

и Oy все время горизонтальны и ось Ox составляет с направлением движения центра эллипсоида постоянный угол ϑ. Мы имеем в этом случае очевидные формулы:

$$U_x = U\cos\vartheta; \quad U_y = -U\sin\vartheta \quad U_z = 0;$$

$$\omega_x = 0, \quad \omega_y = 0, \quad \omega_z = \frac{U}{l},$$

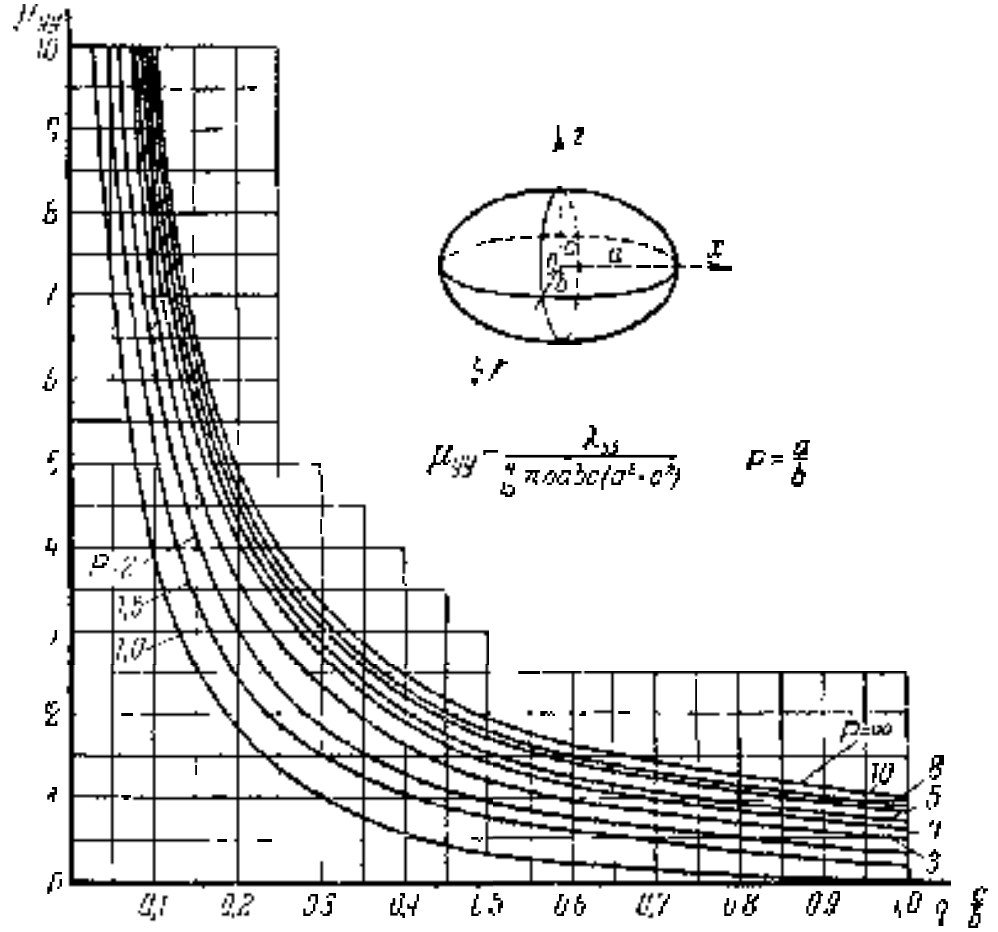

Рис. 154.

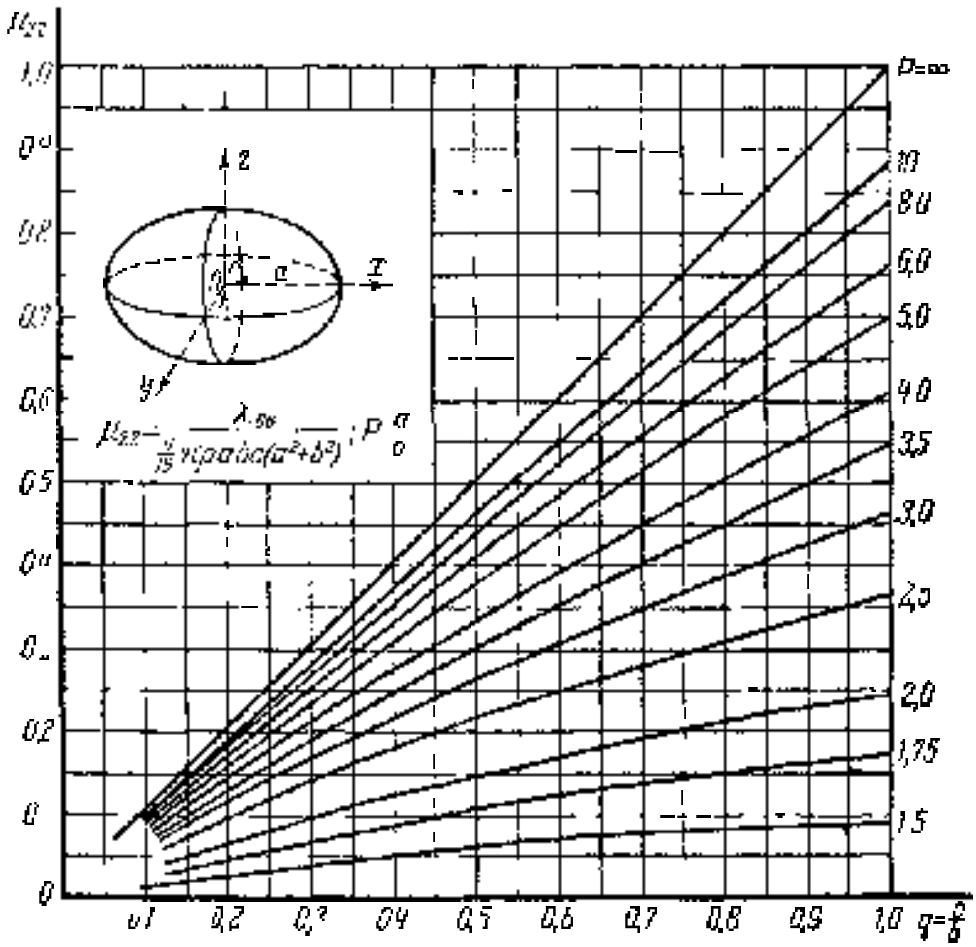

Рис. 155

Поэтому формулы (8.3) дают:

$$\left.\begin{aligned} &R_x = -\lambda_{22}\frac{U^2\sin\vartheta}{l};\quad R_y = -\lambda_{11}\frac{U^2\cos\vartheta}{l};\quad R_z = 0;\\ &L_x = 0;\quad L_y = 0,\quad L_z = (\lambda_{22}-\lambda_{11})\,U^2\sin\vartheta\cos\vartheta \end{aligned}\right\} \tag{8.11}$$

Образуем касательную и нормальную проекции R_t и R_n силы $\boldsymbol{R}$

$$\left.\begin{aligned} &R_t = R_x\cos\vartheta - R_y\sin\vartheta = (\lambda_{11}-\lambda_{22})\frac{U^2\sin\vartheta\cos\vartheta}{l},\\ &R_n = R_x\sin\vartheta + R_y\cos\vartheta = -\frac{U^2}{l}(\lambda_{11}\cos^2\vartheta + \lambda_{22}\sin^2\vartheta) \end{aligned}\right\} \tag{8.12}$$

Таким образом, нормальная составляющая дает добавочную центробежную силу, причем кажущееся увеличение массы эллипсоида равно

$$\lambda_{11}\cos^2\vartheta + \lambda_{22}\sin^2\vartheta$$

Кроме того на тело действует пара с моментом

$$(\lambda_{22}-\lambda_{11})\,U^2\sin\vartheta\cos\vartheta$$

Эта пара пропадает только при $\vartheta = 0$ и $\vartheta = \pi/2$, т. е. когда центр эллипсоида движется в направлении одной из осей Ox или Oy. С наличием этой пары тесно связано и наличие касательной силы R_t. В самом деле, очевидно, что энергия жидкости при рассматриваемом равномерном движении эллипсоида остается все время одной и той же. Сила R_n, очевидно, никакой работы не производит. Наоборот, пара $\boldsymbol{L}$ производит работу, если только она не равна нулю. Но тогда сила R_t должна тоже производить работу так, чтобы общая работа силы R_t и пары $\boldsymbol{L}$ равнялась нулю.

§ 9. Движение тела по инерции. Вернемся теперь к общему случаю, когда живая сила жидкости определяется формулой (7.22). Поставим вопрос о движении твердого тела в жидкости по инерции, когда на тело не действуют никакие внешние силы.

Возьмем для простоты за начало подвижной системы координат центр инерции твердого тела и направим оси координат по главным осям инерции этого тела, тогда для живой силы твердого тела мы будем иметь выражение

$$T_1 = \frac{1}{2}m(U_x^2 + U_y^2 + U_z^2) + \frac{1}{2}(A\omega_x^2 + B\omega_y^2 + C\omega_z^2), \tag{9.1}$$

где m — масса тела, A, B, C — главные центральные моменты инерции.

Главный вектор количеств движения твердого тела $\boldsymbol{G}$ и главный момент количеств движения относительно выбранного начала $\boldsymbol{Q}$ определяются формулами:

$$\left.\begin{aligned} &G_x = \frac{\partial T_1}{\partial U_x};\quad G_y = \frac{\partial T}{\partial U_y};\quad G_z = \frac{\partial T}{\partial U_z};\\ &Q_x = \frac{\partial T_1}{\partial \omega_x};\quad Q_y = \frac{\partial T_1}{\partial \omega_y};\quad Q_z = \frac{\partial T_1}{\partial \omega_z} \end{aligned}\right\} \tag{9.2}$$

Для живой силы полной системы, состоящей из твердого тела и жидкости, мы введем обозначение

$$T_2 = T + T_1, \tag{9.3}$$

ясно, что T_2 имеет вид (7.22), только с заменой коэффициентов λ_{ik} на другие коэффициенты, которые мы обозначим через α_{ik}.

Назовем, далее, вектор

$$\boldsymbol{Q} + \boldsymbol{B} - \boldsymbol{K} \tag{9.4}$$

импульсивной силой, а вектор

$$\boldsymbol{Q} + \boldsymbol{I} = \boldsymbol{N} \tag{9.5}$$

и мпульсивной парой.

Вследствие (7.23) и (9.2) мы имеем формулы:

$$\left.\begin{aligned} K_x &= \frac{\partial T_2}{\partial U_x}, \quad K_y = \frac{\partial T_2}{\partial U_y}; \quad K_z = \frac{\partial T_2}{\partial U_z}; \\ N_x &= \frac{\partial T_2}{\partial \omega_x}; \quad N_y = \frac{\partial T_2}{\partial \omega_y}; \quad N_z = \frac{\partial T_2}{\partial \omega_z}. \end{aligned}\right\} \tag{9.6}$$

Уравнения движения (7.11) запишутся теперь в простом виде

$$\frac{d\boldsymbol{K}}{dt} = \boldsymbol{F}, \quad \frac{d\boldsymbol{N}}{dt} = \boldsymbol{M}. \tag{9.7}$$

В случае отсутствия внешних сил мы будем иметь:

$$\frac{d\boldsymbol{K}}{dt} = 0; \quad \frac{d\boldsymbol{N}}{dt} = 0. \tag{9.8}$$

В подвижных осях координат, повторяя наши прежние рассуждения, мы получим следующие уравнения:

$$\frac{\partial \boldsymbol{K}}{\partial t} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{K} = 0, \quad \frac{\partial \boldsymbol{N}}{\partial t} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{N} + \boldsymbol{U} \times \boldsymbol{K} = 0 \tag{9.9}$$

Легко указать три интеграла этой системы. Умножая первое уравнение скалярно на $\boldsymbol{K}$ найдем.

$$\boldsymbol{K} \frac{\partial \boldsymbol{K}}{\partial t} = 0,$$

откуда

$$K^2 = K_x^2 + K_y^2 + K_z^2 = \text{const}. \tag{9.10}$$

Этот интеграл выражает, очевидно постоянство величины импульсивной силы; он сразу вытекает из первого уравнения (9.8), которое показывает, что вектор $\boldsymbol{K}$ имеет в неподвижной системе координат постоянную величину и постоянное направление.

Точно так же, умножая первое уравнение системы (9.9) скалярно на $\boldsymbol{N}$, а последнее на $\boldsymbol{K}$ и складывая оба полученных уравнения,

найдем:

$$N \cdot \frac{\partial K}{\partial t} + K \cdot \frac{\partial N}{\partial t} = 0,$$

откуда

$$N \cdot K = K_x N_x + K_y N_y + K_z N_z = \text{const}. \tag{9.11}$$

Этот интеграл в связи с (9.10) выражает постоянство проекции момента импульсивной пары на направление импульсивной силы.

Наконец, третий очевидный интеграл системы (9.9) есть

$$T_2 = \text{const} \tag{9.12}$$

В самом деле, умножая первое уравнение системы (9.9) скалярно на U, второе на ω и складывая оба полученных уравнения, найдем, что

$$U \cdot \frac{\partial K}{\partial t} + \omega \cdot \frac{\partial N}{\partial t} = 0, \tag{9.13}$$

с другой стороны, T_2 есть квадратичная форма от U_x, U_y, U_z, ω_x, ω_y, ω_z, поэтому по теореме Эйлера об однородных функциях

$$2T_2 = U_x \frac{\partial T_2}{\partial U_x} + U_y \frac{\partial T_2}{\partial U_y} + U_z \frac{\partial T_2}{\partial U_z} + \omega_x \frac{\partial T_2}{\partial \omega_x} + \omega_y \frac{\partial T_2}{\partial \omega_y} + \omega_z \frac{\partial T_2}{\partial \omega_z} =$$
$$= U \cdot K + \omega \cdot N;$$

дифференцируя это равенство по t и пользуясь (9.13), получим:

$$2\frac{dT_2}{dt} = K \cdot \frac{\partial U}{\partial t} + N \cdot \frac{\partial \omega}{\partial t}.$$

Наконец, вследствие (9.6) мы имеем тождественно:

$$\frac{dT_2}{dt} = \frac{\partial T_2}{\partial U_x}\frac{\partial U_x}{\partial t} + \frac{\partial T_2}{\partial U_y}\frac{\partial U_y}{\partial t} + \frac{\partial T_2}{\partial U_z}\frac{\partial U_z}{\partial t} + \frac{\partial T_2}{\partial \omega_x}\frac{\partial \omega_x}{\partial t} +$$
$$+ \frac{\partial T_2}{\partial \omega_y}\frac{\partial \omega_y}{\partial t} + \frac{\partial T_2}{\partial \omega_z}\frac{\partial \omega_z}{\partial t} = K \cdot \frac{\partial U}{\partial t} + N \cdot \frac{\partial \omega}{\partial t}.$$

Итак,

$$2\frac{dT_2}{dt} = \frac{dT_2}{dt},$$

откуда

$$\frac{dT_2}{dt} = 0 \quad \text{и} \quad T_2 = \text{const}.$$

Разберем теперь вопрос о так называемых установившихся движениях твердого тела в жидкости по инерции, т. е. о движениях, в которых U и ω имеют постоянные значения во все время движения.

Уравнения (9.9) приводятся в этом случае к следующим:

$$\omega \times K = 0, \quad \omega \times N + U \times K = 0. \tag{9.14}$$

Но из этих шести уравнений только четыре независимы. В самом деле, первое уравнение, равносильное

$$\omega = \lambda K, \tag{9.15}$$

показывает, что мгновенная ось вращения направлена по импульсивной силе K. Из последнего уравнения (9.14) найдем:

$$(U - \lambda N) \times K = 0,$$

откуда следует, что

$$U = \lambda N + \mu K. \tag{9.16}$$

При данных λ и μ мы получим шесть линейных однородных уравнений в U_x, U_y, U_z, ω_x, ω_y, ω_z:

$$\left.\begin{aligned} \omega_x - \lambda K_x = 0; \quad U_x - \lambda N_x - \mu K_x = 0, \\ \omega_y - \lambda K_y = 0; \quad U_y - \lambda N_y - \mu K_y = 0; \\ \omega_z - \lambda K_z = 0, \quad U_z - \lambda N_z - \mu K_z = 0. \end{aligned}\right\} \tag{9.17}$$

так как K_x, K_y, K_z, N_x, N_y, N_z суть линейные функции U_x, U_y, U_z, ω_x, ω_y, ω_z с постоянными коэффициентами. Чтобы предыдущая система имела решение, определитель ее должен равняться нулю. Этот определитель есть полином третьей степени от μ. Задавая по произволу λ, мы определим из равенства указанного определителя нулю величину μ, а затем из системы (9.17) найдем все шесть величин U_x, U_y, U_z, ω_x, ω_y, ω_z с точностью до постоянного множителя.

Разберем, в частности, случай, когда $\lambda = 0$, и следовательно,

$$\omega_x = \omega_y = \omega_z = 0 \tag{9.18}$$

Мы имеем дело с поступательным движением твердого тела. Система (9.17) приводится в этом случае к простому виду

$$U_x - \mu K_x = 0, \quad U_y - \mu K_y = 0, \quad U_z - \mu K_z = 0 \tag{9.19}$$

Но при условии (9.18) будет:

$$\left.\begin{aligned} K_x = a_{11}U_x + a_{12}U_y + a_{13}U_z, \\ K_y = a_{21}U_x + a_{22}U_y + a_{23}U_z, \\ K_z = a_{31}U_x + a_{32}U_y + a_{33}U_z. \end{aligned}\right\} \tag{9.20}$$

Введем в рассмотрение поверхность

$$F_1 = \frac{1}{2}(a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz) = 1. \tag{9.21}$$

Отнесем ее к главным осям x', y', z'

$$F_1 = (a_1'x'^2 + a_2'y'^2 + a_3'z'^2) = 1. \tag{9.22}$$

В этой системе осей формулы (9.20) примут вид

$$K_{x'} = a_1' U_{x'}, \quad K_{y'} = a_2' U_{y'}, \quad K_{z'} = a_3 U_{z'}, \tag{9.23}$$

а уравнения (9.19) будут

$$U_{x'} - pa' U_{x'} = 0; \quad U_{y'} - pa_2' U_{y'} = 0, \quad U_{z'} - pa' U_{z'} = 0. \tag{9.24}$$

В общем случае, когда a_1', a_2' и a_3 все отличны друг от друга, возможны три значения для p:

$$p_1 = \frac{1}{a_1'}, \quad p_2 = \frac{1}{a_2'}, \quad p_3 = \frac{1}{a_3'}, \tag{9.25}$$

которым соответствуют три поступательных движения в направлении главных осей поверхности (9.21).

Итак, для твердого тела существуют, вообще говоря, только три взаимно перпендикулярных направления, по которым оно может совершать поступательное инерционное движение.

ГЛАВА ВОСЬМАЯ

ВОЛНОВЫЕ ДВИЖЕНИЯ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

А. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ТЕОРИИ ВОЛН

§ 1. Различные типы волн. В настоящей главе мы будем рассматривать волновые движения идеальной жидкости. Волновые движения характеризуются колебательным движением отдельных частиц жидкости. Яркими случаями волновых движений, наблюдаемых в природе, являются, например, морские приливы и отливы, морские волны, сейши в озерах и т. п.

Уже приведенные примеры указывают на большое разнообразие волновых движений жидкости. Волны могут быть высокими или низкими, длинными или короткими; они могут быть стоячими или могут перемещаться, при этом при перемещении они могут сохранять свою форму или изменять ее; волна может быть одинокой или может быть целый ряд волн, следующих одна за другой, и т. д.

Причины, обусловливающие волновые движения жидкости, также могут быть разного типа. Укажем главнейшие из таких причин. Гравитационные волны происходят под действием силы тяжести, например, если каким-либо образом поверхность жидкости будет выведена из горизонтального положения, то сила тяжести будет стремиться вернуть эту поверхность в ее равновесное положение и заставит каждую частицу колебаться. Мелкие волны, так называемая рябь, происходят под действием капиллярных сил поверхностного натяжения жидкости. Приливные волны происходят под действием притяжения жидкости к Солнцу и Луне. На волновые движения оказывают влияние также силы трения как внутренние, так и внешние. Далее, волны могут образовываться вследствие движения твердого тела в жидкости; таким образом, например, возникают корабельные волны. Наконец, в сжимаемых жидкостях, например в воздухе, могут иметь место упругие волны, состоящие в попеременном расширении и сжатии каждой частицы жидкости. Главное отличие упругих волн от предыдущих типов волн состоит в том, что упругие волны имеют место во всей массе жидкости, в то время как все предыдущие типы волн развиваются, главным образом, на поверхности жидкости и лишь оттуда передаются внутрь жидкости.

Мы рассмотрим сначала гравитационные волны, потом приливные, а также остановимся еще на вопросе о волновом сопротивлении. Хотя в последнее время некоторые волновые движения были изучены вполне строго и полностью, мы будем ограничиваться по большей части приближенными и потому более простыми решениями.

§ 2. Основные уравнения. Рассмотрим генерь происходящие под действием сил тяжести волновые движения однородной несжимаемой идеальной жидкости, ограниченной снизу и с боков некоторыми неподвижными поверхностями (например, дном озера и т. п.), а сверху свободной поверхностью, на которой и образуются видимые глазом волны.

Волновые движения происходят тогда, когда в начальный момент времени имеет место некоторое возмущение жидкости, т. е. некоторое отклонение состояния жидкости от состояния равновесия. При равновесии жидкости скорости всех ее частиц равны нулю, а свободная поверхность жидкости горизонтальна. Поэтому первоначальное возмущение жидкости может слагаться из двух частей: 1) из возмущения свободной поверхности жидкости и 2) из наличия отличных от нуля скоростей различных частиц жидкости. Мы будем предполагать, что первоначальное возмущение жидкости обусловливается причинами, действующими исключительно на свободную поверхность жидкости. Если, например, медленным погружением части твердого тела мы деформируем свободную поверхность жидкости, а потом сразу извлечем тело, то получим таким образом возмущение свободной поверхности жидкости, причем начальные скорости всех частиц будут, конечно, равны нулю. Чтобы получить при горизонтальной свободной поверхности начальные скорости частиц жидкости, предположим, что на поверхности жидкости, кроме обычного нормального давления, вдоль одинакового действовали еще добавочные давления. Такие добавочные давления могут возникнуть, например, на поверхности воды при внезапном порыве ветра. Мы будем считать, что эти добавочные давления действовали весьма малый промежуток времени τ. Интегрируя уравнения движения Эйлера (5.1) главы II за этот промежуток времени τ и принимая во внимание, что в начале промежутка τ было $v_x = v_y = v_z = 0$, мы получим из первого уравнения Эйлера:

$$v_x + \int_0^\tau \left(v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) dt = \int_0^\tau X\, dt - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\tau p\, dt. \tag{2.1}$$

Если считать промежуток времени τ очень малым, но интеграл от давления по этому промежутку времени (этот интеграл называется импульсом давления за промежуток времени τ) конечным, то остальными двумя интегралами можно пренебречь, так как они будут

горизонта. Обозначим еще, как в § 7 главы IV, где было подробно рассмотрено действие мгновенных сил на жидкость, через π импульс мгновенных давлений:

$$\pi = \int_0^{\tau} p\,dt, \tag{2.2}$$

тогда мы получим, что проекции скорости, вызываемой импульсом давления действующим на свободную поверхность жидкости, определяются формулами

$$v_x = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\pi}{\rho}\right); \quad v_y = -\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\pi}{\rho}\right); \quad v_z = -\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\pi}{\rho}\right). \tag{2.3}$$

Итак, движение, возникающее вследствие действия на свободной поверхности жидкости импульсивных давлений, имеет потенциал скорости, и, следовательно, вихри в таком движении отсутствуют. Отметим, что в формуле (2.3) функция π зависит от всех трех координат x, y, z, в то время как из вышесказанного следует, что считать заданной ее можно только на поверхности жидкости. О том, как найти функцию π во всякой точке жидкости, будет сказано в § 21.

Как указывалось в § 7 главы IV, какое бы безвихревое движение мы ни имели:

$$v_x = \frac{\partial \varphi_0}{\partial x}; \quad v_y = \frac{\partial \varphi_0}{\partial y}; \quad v_z = \frac{\partial \varphi_0}{\partial z}; \quad v = \operatorname{grad} \varphi_0,$$

его *можно считать* возникшим под действием мгновенных сил давлений имеющих импульс

$$\pi = -\rho\varphi_0. \tag{2.4}$$

Так как жидкость идеальна и несжимаема, а сила тяжести имеет потенциал, то происходящее движение, будучи безвихревым в начальный момент времени, будет по теореме Лагранжа безвихревым все время. Потенциал скорости обозначим через Φ так что

$$v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}; \quad v_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad v_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z}; \quad v = \operatorname{grad} \varphi \tag{2.5}$$

Уравнение неразрывности

$$\operatorname{div} v = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

дает для определения функции φ уравнение Лапласа

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0, \tag{2.6}$$

Основные уравнения гидродинамики для безвихревого движения упрощаются, как мы знаем из § 2 главы IV, и принимают вид

$$\frac{p}{\rho} = -\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{1}{2} v^2 - V + F(t), \tag{2.7}$$

где V обозначает потенциал внешних сил. Если ось Oz направить вертикально вверх, то потенциал силы тяжести, действующей на единицу массы, определяется формулой

$$V = gz,$$

ибо

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 0; \quad -\frac{\partial V}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial z} = -g. \tag{2.8}$$

Мы будем предполагать происходящее движение настолько медленным, чтобы в формуле (2.7) можно было пренебречь членом $\frac{1}{2} v^2$ и, следовательно, написать:

$$\frac{p}{\rho} = -\frac{\partial \varphi}{\partial t} - gz + F(t). \tag{2.9}$$

Добавочную функцию $F(t)$ можно не писать, ибо вместо φ можно ввести функцию $\varphi_1 = \varphi - \int_0^t F(t)\,dt$, для которой $\frac{\partial \varphi_1}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} - F(t)$. Значок 1 у функции φ_1 в дальнейшем для простоты мы отбросим и напишем таким образом:

$$\frac{p}{\rho} = -\frac{\partial \varphi}{\partial t} - gz \tag{2.10}$$

Формулы (2.5), (2.6) и (2.10), где φ является решением уравнения (2.6), и служат для решения задачи. Однако уравнение Лапласа имеет много решений, и чтобы выбрать из них то единственное, которое нам нужно, надо обратиться к граничным и начальным условиям.

Граница жидкости состоит из неподвижной поверхности (дна) и свободной поверхности. Вблизи неподвижной поверхности жидкость течет параллельно такой поверхности, следовательно, на неподвижной поверхности нормальная составляющая скорости жидкости v_n равна нулю, или так как $v_n = \partial \varphi / \partial n$, то на неподвижной поверхности

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0 \tag{2.11}$$

Свободную поверхность в положении равновесия мы примем за плоскость Oxy, поместив начало координат в некоторой точке этой поверхности. На свободной поверхности жидкости давление p имеет

постоянную величину p_0, равную давлению газа над жидкостью (атмосферное давление воздуха), так как давление должно меняться непрерывно при переходе из газа в жидкость. Поэтому на свободной поверхности

$$\frac{p_0}{\rho} = -\frac{\partial \varphi}{\partial t} - gz.$$

Для простоты мы включим p_0/ρ в $\partial\varphi/\partial t$, введя вместо функции φ функцию $\varphi_2 = \varphi + \frac{p_0}{\rho} t$, для которой $\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} - \frac{p_0}{\rho}$. Значок 2 у функции φ_2 мы опять отбросим, и таким образом уравнение (2.10) напишем окончательно в виде

$$\frac{p - p_0}{\rho} = -\frac{\partial \varphi}{\partial t} - gz. \tag{2.12}$$

Пусть уравнение свободной поверхности к моменту времени t имеет вид

$$z = \zeta(x, y, t), \tag{2.13}$$

тогда из уравнения (2.12) и того условия, что на свободной поверхности $p = p_0$, заключаем, что при $z = \zeta(x, y, t)$ выполняется условие

$$\left[\frac{\partial \varphi(x, y, z, t)}{\partial t}\right]_{z=\zeta(x, y, t)} + g\zeta = 0. \tag{2.14}$$

Но так как колебания жидкости предполагаются бесконечно малыми, то в уравнении (2.10) можно брать значение $\partial\varphi/\partial t$ при $z = 0$ (вместо $z = \zeta$) и, следовательно, писать

$$\frac{\partial \varphi(x, y, 0, t)}{\partial t} + g\zeta = 0, \tag{2.15}$$

или

$$\zeta = -\frac{1}{g}\frac{\partial \varphi(x, y, 0, t)}{\partial t}. \tag{2.16}$$

Продифференцируем уравнение (2.16) по t:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -\frac{1}{g}\frac{\partial^2 \varphi(x, y, 0, t)}{\partial t^2}. \tag{2.17}$$

Но легко видеть, что $\partial\zeta/\partial t$ мало отличается от v_z. В самом деле возьмем какую-нибудь частицу свободной поверхности с координатами x, y, $z = \zeta(x, y, t)$. Проекции скорости этой частицы на оси координат будут:

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}; \quad v_z = \frac{dz}{dt} = \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial \zeta}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial \zeta}{\partial y}\frac{dy}{dt}.$$

Последняя формула следует из того, что $d\zeta/dt$ обозначает производную по времени t от сложной функции $\zeta(x, y, t)$, в которой x и y тоже изменяются с течением времени (ибо частица, принадлежащая свободной поверхности, перемещается не только в вертикальном, но и в горизонтальном направлении). Итак,

$$v_z = \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial \zeta}{\partial x} v_x + \frac{\partial \zeta}{\partial y} v_y,$$

но двумя последними членами можно пренебречь, если считать, что $\partial\zeta/\partial x$ и $\partial\zeta/\partial y$ очень малы, т. е. что касательная плоскость к свободной поверхности мало отличается от горизонтальной плоскости. Итак, на свободной поверхности имеем приближенное равенство

$$v_z = \frac{\partial \zeta}{\partial t}, \tag{2.18}$$

и опять, как выше, можем считать это равенство выполненным при $z = 0$ (вместо $z = \zeta$). Вспоминая еще, что $v_z = \partial\varphi/\partial z$, можем окончательно написать вместо (2.17)

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = -\frac{1}{g}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \tag{2.19}$$

при $z = 0$.

Соберем теперь все полученные результаты. Безвихревые волновые движения идеальной несжимаемой жидкости, происходящие под действием силы тяжести, определяются по формулам

$$v = \operatorname{grad} \varphi,$$

$$\frac{p}{\rho} = -\frac{\partial \varphi}{\partial t} - gz + \frac{p_0}{\rho},$$

где функция φ является решением уравнения Лапласа

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0$$

удовлетворяющим на неподвижных границах условию

$$\frac{\partial f}{\partial n} = 0,$$

а на свободной поверхности условию

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = -\frac{1}{g}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$$

при $z = 0$.

§ 3. Начальные условия. Кроме того, φ должно удовлетворять еще начальным условиям. Эти условия легко получить, если вспомнить то, что выше было сказано о первоначальном возмущении жидкости. Пусть первоначальное возмущение свободной поверхности представляется функцией $h(x, y)$, тогда имеем:

$$\zeta(x, y, 0) = h(x, y),$$

и, следовательно, из уравнения (2.16) найдем:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = f(x, y) \tag{3.1}$$

при

$$t = 0 \text{ и } z = 0,$$

где положено

$$f(x, y) = -gh(x, y) = -g\zeta(x, y, 0).$$

Начальные скорости частиц мы будем считать образовавшимися вследствие действия импульсивных давлений на свободной поверхности (всякое безвихревое движение жидкости можно мысленно считать образовавшимся таким образом). Если этот импульс давления обозначить через $\pi(x, y, z)$, то начальный потенциал скорости будет по уравнению (2.4) равен

$$\varphi_0 = -\frac{1}{\rho}\pi.$$

Мы можем считать первоначальный импульс давлений известным только на свободной поверхности, или, что то же (вследствие бесконечной малости рассматриваемых движений), при $z = 0$. Обозначим:

$$\varphi_0(x, y, 0) = -\frac{1}{\rho}\pi(x, y, 0) = F(x, y).$$

Тогда начальные условия, которым подчинена функция $\varphi(x, y, z, t)$ будут состоять в задании при $z = 0$ и $t = 0$ функций φ и $\partial\varphi/\partial t$:

$$\varphi = F(x, y); \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial t} = f(x, y) \tag{3.2}$$

при $z = 0$ $t = 0$.

Эти добавочные условия вполне определяют движение. В самом деле, не может быть двух различных функций φ_1 и φ_2, удовлетворяющих всем уравнениям (2.6), (2.11), (2.19), (3.2), так как тогда функция $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ удовлетворяла бы всем этим уравнениям, причем начальные условия для φ были бы

$$\varphi = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$$

при $z = 0$, $t = 0$.

Эти начальные условия указывают на полное отсутствие первоначального возмущения, так что жидкость в начальный момент неподвижна и ее свободная поверхность горизонтальна, но тогда, конечно, никакого движения и не произойдет, так что все время будет $\varphi = 0$ и, значит $\varphi_1 = \varphi_2$ т. е двух различных функций φ_1 и φ_2 быть не может.

Очень часто вместо того чтобы рассматривать, какое движение произойдет при заданных начальных условиях, стараются найти движения периодически повторяющиеся. Для этого предполагают, что функция φ имеет следующий вид:

$$\varphi(x, y, z, t) = \cos(\sigma t + \varepsilon)\Phi(x, y, z). \qquad (3.3)$$

Из формул (2.5) и (2.12) видно что тогда скорость в каждой точке будет меняться периодически так же как и давление, причем колебания скорости и давления (вернее переменной части давления) будут гармоническими.

В дальнейшем на отдельных примерах мы увидим, что часто уравнения (2.6), (2.11), (2.19), которым должна удовлетворять функция φ, определяют не только функцию $\Phi(x, y, z)$, но и число σ. Это означает, что гармонические колебания жидкости могут быть только определенного периода (подобно тому, как струна может издавать чистый звук только определенного тона или сто октаву и т. д.). Эти колебания называются свободными гармоническими колебаниями жидкости.

Найдем, из каких уравнений должна определяться функция $\Phi(x, y, z)$. Прежде всего из (2.6) найдем, что $\Phi(x, y, z)$ удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta\Phi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = 0.$$

Далее, из (2.11) следует, что на неподвижных границах $\Phi(x, y, z)$ удовлетворяет условию

$$\frac{\partial\Phi}{\partial n} = 0.$$

Наконец, из (2.19) вследствие того, что $\frac{\partial^2\cos(\sigma t + \varepsilon)}{\partial t^2} = -\sigma^2\cos(\sigma t + \varepsilon)$, следует, что

$$\frac{\partial\Phi}{\partial z} = \frac{\sigma^2}{g}\Phi$$

при $z = 0$

Отметим еще, что решение второй задачи т. е. отыскание свободных гармонических колебаний жидкости может помочь решить и первую задачу, т. е отыскать движение жидкости по начальным условиям, как это будет показано далее на примерах. Поэтому мы по большей части и будем сначала отыскивать свободные гармонические колебания.

Б. ПЛОСКИЕ ВОЛНЫ

§ 4. Введение. Рассмотрим сначала случай, когда движение каждой частицы жидкости происходит параллельно плоскости Oxz, причем скорость v и давление p совершенно не зависят от координаты y, т. е. движение во всех плоскостях, параллельных плоскости Oxz, совершенно одинаково. Мы будем такие движения называть плоскими и соответственно этому будем говорить о плоской задаче.

В этом случае неподвижные границы мы будем предполагать цилиндрическими поверхностями, образующими которых служат прямые, параллельные оси Oy. Кроме того, можно ограничить жидкость еще двумя вертикальными стенками, параллельными плоскости Oxz так что образуется род канала, движение в котором мы и будем рассматривать.

В этом случае уравнения упрощаются, а именно, если положить

$$\varphi(x, z, t) = \cos(\sigma t - \varepsilon)\,\Phi(x, z), \tag{4.1}$$

то для определения $\Phi(x, z)$ получаются уравнения

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = 0, \tag{4.2}$$

на неподвижных границах

$$\frac{\partial\Phi}{\partial n} = 0, \tag{4.3}$$

при $z = 0$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial z} = \frac{\sigma^2}{g}\Phi. \tag{4.4}$$

§ 5. Стоячие волны. Рассмотрим сначала самый простой случай: когда никаких границ нет (кроме вертикальных стенок, параллельных плоскости Oxz, которые все равно никакой роли не играют), так что жидкость простирается как в обе стороны, так и вниз до бесконечности (практически это отвечает случаю очень большой глубины в сравнении с длиной волны).

В этом случае легко найти ряд частных решений системы уравнений (4.2) и (4.4) следующего вида:

$$\Phi(x, z) = P(z)\sin k(x - \xi), \tag{5.1}$$

где k и ξ означают две постоянные величины.

В самом деле, так как

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = P''(z)\sin k(x - \xi), \quad \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} = -P(z)k^2\sin k(x - \xi),$$

то из уравнения (4.2) получаем:

$$P''(z) - k^2P(z) = 0; \tag{5.2}$$

решая это однородное линейное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами, получим, что

$$P(z) = C_1 e^{kz} + C_2 e^{-kz}. \tag{5.3}$$

Произвольную постоянную C_2 нужно считать равной нулю, так как в противном случае при очень больших по абсолютной величине z, т. е. на большой глубине, член $C_2 e^{-kz}$ был бы весьма большим (у нас ось Oz направлена вертикально вверх, так что нам приходится рассматривать только отрицательные значения z), но тогда — как φ, так и производные φ по координатам, т. е. составляющие скорости, возрастали бы до бесконечности при $z \to -\infty$, чего мы допустить не можем. Итак:

$$P(z) = Ce^{kz}, \tag{5.4}$$

и значит,

$$\Phi(x, z) = Ce^{kz} \sin k(x - \xi), \tag{5.5}$$

$$\varphi(x, z, t) = Ce^{kz} \sin k(x - \xi) \cos(\sigma t + \varepsilon). \tag{5.6}$$

Посмотрим теперь, что дает уравнение (4.4). Имеем:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = Cke^{kz} \sin k(x - \xi), \qquad \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)_{z=0} = Ck \sin k(x - \xi),$$

$$\Phi(x, 0) = C \sin k(x - \xi),$$

следовательно, из уравнения (4.4):

$$\sigma^2 = kg. \tag{5.7}$$

Итак, задаваясь произвольным k, вычислим по формуле (5.7) σ; тогда формула (5.6), где C есть произвольная постоянная, определяет потенциал скорости некоторого плоского волнового движения безграничной жидкости. Отметим сейчас же, что вследствие линейности системы основных уравнений (4.2), (4.3) и (4.4) сумма любого числа решений этой системы также будет решением системы. Мы многократно используем это замечание в дальнейшем. А именно, мы исследуем сначала движение, определяемое формулой (5.6), а после этого будем изучать движения, определяемые потенциалом скорости φ, являющимся суммой двух или большего числа выражений вида (5.6).

Итак, рассмотрим движение с потенциалом скорости

$$\varphi(x, z, t) = Ce^{kz} \sin k(x - \xi) \cos(\sigma t + \varepsilon).$$

Мы будем считать для простоты $\xi = 0$ и $\varepsilon = 0$, т. е. будем рассматривать движение с потенциалом скорости

$$\varphi(x, z, t) = Ce^{kz} \sin kx \cos \sigma t. \tag{5.8}$$

Найдем прежде всего вид свободной поверхности. Для этого нужно воспользоваться формулой (2.16)

$$\zeta = -\frac{1}{g} \frac{\partial \varphi(x, 0, t)}{\partial t},$$

которая дает:

$$\zeta = \frac{C_0}{g} \sin kx \sin \sigma t.$$

Обозначим для простоты

$$\frac{C_0}{g} = a; \tag{5.9}$$

тогда будем иметь:

$$\left.\begin{aligned} \varphi(x, z, t) &= \frac{ag}{\sigma} e^{kz} \sin kx \cos \sigma t, \\ \zeta &= a \sin \sigma t \sin kx. \end{aligned}\right\} \tag{5.10}$$

В определенный момент времени сечение поверхности жидкости плоскостью, параллельной плоскости Oxz, представляет таким образом синусоиду (рис. 156)

Обозначим на время $a \sin \sigma t = A$, тогда уравнение синусоиды примет вид

$$\zeta = A \sin kx$$

Эта синусоида пересекает ось Ox в точках с координатами

$$x = \frac{m\pi}{k} \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

Эти точки называются *узлами*. Посредине между двумя соседними узлами лежат *пучности* волны; последним отвечают попеременно *гребни* волн (B', B'', ...) и *подошвы* (C', ...). Расстояние между двумя соседними узлами равно, очевидно π/k, расстояние же между двумя соседними гребнями будет в два раза больше, обозначим его через λ:

$$\lambda = \frac{2\pi}{k},$$

и назовем *длиной* волны. Итак:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

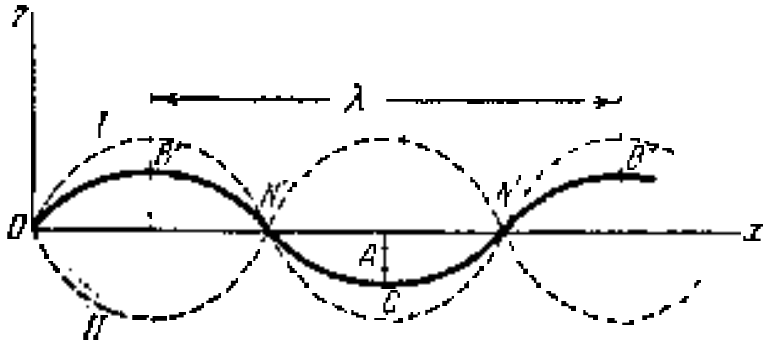

Рис. 156

Расстояние от гребня волны до оси Ox равно численному значению A, т. е. равно $a \sin \sigma t$ и колеблется между 0 и a. Мы назовем a *амплитудой* волны. Профиль волны представляет синусоиду, высота которой меняется по гармоническому закону

$$A = a \sin \sigma t.$$

Таким образом профиль волны колеблется между двумя крайними положениями I и II (рис 156). Период этого колебания очевидно, будет $\tau = 2\pi/\sigma$, мы назовем τ *периодом* волны. Обратное число $1/\tau$ представляет число колебаний в единицу времени, его мы назовем *частотой колебаний*, очевидно,

$$\frac{1}{\tau} = \frac{\sigma}{2\pi}.$$

Между длиной волны λ и периодом τ существует ясная связь, выражаемая формулой (5.7), которая может быть переписана следующим образом

$$\tau = \sqrt{\frac{2\pi\lambda}{g}}, \qquad \lambda = \frac{g\tau^2}{2\pi} \tag{5.11}$$

Перейдем теперь к рассмотрению скоростей и траекторий различных частиц жидкости Определим прежде всего проекции скорости по формулам

$$v_x = \frac{\partial\varphi}{\partial x} = -\frac{a\sigma k}{\sigma} e^{kz} \cos kx \cos\sigma t, \quad v_z = \frac{\partial\varphi}{\partial z} = \frac{agk}{\sigma} e^{kz} \sin kx \cos\sigma t,$$

или так как $gk = \sigma^2$,

$$\left.\begin{aligned} v_x &= -a\sigma e^{kz} \cos kx \cos\sigma t, \\ v_z &= a\sigma e^{kz} \sin kx \cos\sigma t. \end{aligned}\right\} \tag{5.12}$$

Напишем дифференциальное уравнение линий тока

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dz}{v_z} \quad \text{или} \quad \frac{dx}{\cos kx} = -\frac{dz}{\sin kx}.$$

Здесь переменные разделяются:

$$\frac{\sin kx\, dx}{\cos kx} = -dz$$

и уравнение легко интегрируется

$$\ln|\cos kx| = kz - C. \tag{5.13}$$

Тот же результат легко получить путем отыскания функции тока ψ; как мы знаем

$$-\frac{\partial\psi}{\partial x} = -\frac{\partial\varphi}{\partial z} = -a\sigma e^{kz} \sin kx \cos\sigma t, \quad \frac{a\sigma}{\partial z} = \frac{\partial\varphi}{\partial x} = a\sigma e^{kz} \cos kx \cos\sigma t;$$

значит

$$d\psi = \frac{\partial\psi}{\partial x} dx + \frac{\partial\psi}{\partial z} dz = a\sigma \cos\sigma t \left| -e^{kz} \sin kx\, dx + e^{kz} \cos kx\, dz \right| =$$

$$= \frac{a\sigma \cos\sigma t}{k} d(e^{kz} \cos kx);$$

поэтому

$$v = \frac{a\sigma \cos \sigma t}{k} e^{kz} \cos kx, \tag{5.14}$$

и уравнение какой-либо линии тока есть

$$\frac{a\sigma \cos \sigma t}{k} e^{kz} \cos kx = C' \quad \text{или} \quad e^{kz} \cos kx = C'', \tag{5.15}$$

что равносильно (5.13).

Как видно из уравнения (5.13), семейство линий тока получается из определенной линии тока перемещением ее параллельно оси Oz на произвольную величину. Вид этих кривых указан на рис. 157.

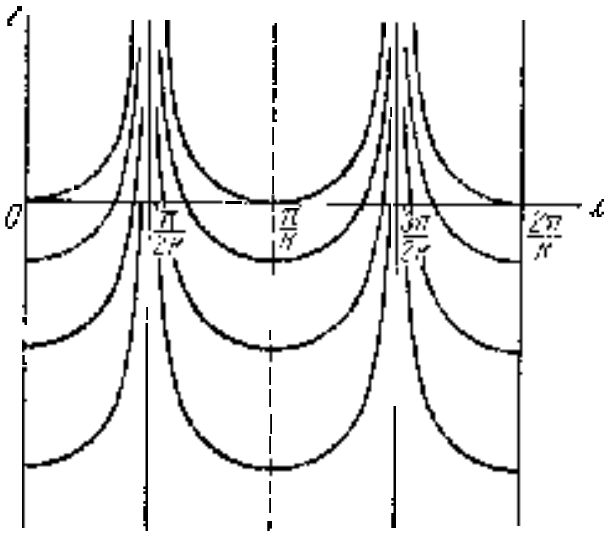

Рис. 157

Так как эти линии тока не меняются с течением времени, то они служат и траекториями частиц жидкости. Однако частицы жидкости совершают по этим траекториям колебательные движения, причем путь, проходимый каждой частицей в одну сторону, настолько мал, что его можно считать прямолинейным путем. Покажем это, исходя непосредственно из уравнений (5.12). В самом деле, вследствие предположения о том, что колебания весьма малы (что сводится к предположению, что амплитуда a весьма мала в сравнении с длиной волны λ), мы можем в формулах (5.12) заменить в правых частях x и z на те значения x_0 и z_0, которые частица имела в равновесном своем положении. Тогда, вспоминая, что

$$v_1 = \frac{dx}{dt}, \qquad v_2 = \frac{dz}{dt},$$

мы найдем

$$\frac{dx}{dt} = a\sigma e^{kz_0} \cos kx_0 \cos \sigma t, \quad \frac{dz}{dt} = a\sigma e^{kz_0} \sin kx_0 \cos \sigma t.$$

Эти уравнения легко интегрируются и дают

$$x = a e^{kz_0} \cos kx_0 \sin \sigma t + c_1,$$
$$z = a e^{kz_0} \sin kx_0 \sin \sigma t + c_2.$$

Эти уравнения представляют колебания частицы около ее среднего положения, координаты которого (c_1, c_2). Принимая, что это среднее положение совпадает как раз с равновесным положением частицы, получим окончательно для координат частицы в момент t:

$$x = x_0 + a e^{kz_0} \cos kx_0 \sin \sigma t, \quad z = z_0 + a e^{kz_0} \sin kx_0 \sin \sigma t \tag{5.16}$$

Траекторией частицы служит прямая $z - z_0 = (x - x_0) \operatorname{tg}(kx_0)$, наклоненная к оси Ox под углом kx_0. Таким образом, в пучностях колебания частиц происходят в вертикальном направлении, в узлах — в горизонтальном (рис. 158). При этом амплитуда колебаний равна ae^{kz}, и, следовательно, тем меньше, чем глубже расположена рассматриваемая частица. Надо отметить, что уменьшение амплитуды колебаний происходит весьма быстро. На глубине, равной длине волны ($z_0 = -2\pi/k$), амплитуда будет $ae^{-2\pi}$, т. е. уменьшится в $e^{2\pi} \approx 535$ раз по сравнению с амплитудой колебаний поверхностных частиц. Это показывает, что явление волн в тех случаях, когда глубина водоема в сравнении с длиной волны, носит ярко выраженный поверхностный характер.

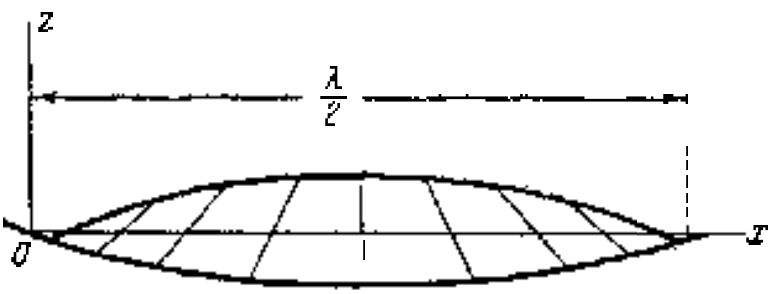

Рис. 158

На этом мы кончаем исследование стоячих волн и переходим к изучению прогрессивных волн.

§ 6. Прогрессивные волны. Наряду с (5.8) рассмотрим движение, определяемое потенциалом скорости:

$$\varphi = Ce^{kz} \sin k\left(x - \frac{\pi}{2k}\right) \cos\left(at + \frac{\pi}{2}\right)$$

или

$$\varphi = Ce^{kz} \cos kx \sin at \qquad (6.1)$$

Это движение представляет собою стоячие волны, отличающиеся от предыдущих, во-первых, тем, что там, где были пучности, теперь будут узлы, и обратно, и, во-вторых, тем, что фазы колебаний в теперешнем и предыдущем движении отличаются на четверть периода, так что когда частицы в предыдущем движении находятся в крайнем своем положении, в теперешнем движении частицы будут в равновесном положении, и обратно.

Сложим теперь оба потенциала (5.8) и (6.1):

$$\varphi = Ce^{kz}(\sin kx \cos at + \cos kx \sin at)$$

или

$$\varphi = Ce^{kz} \sin(kx + at). \qquad (6.2)$$

Этот потенциал определяет некоторое безвихревое волновое движение, ибо сумма двух решений системы (2.6), (2.11) и (2.19) вследствие линейности этих уравнений также будет решением системы.

Поставим опять те же вопросы: каков вид свободной поверхности, каковы скорости и траектории отдельных частиц?

Вид свободной поверхности определяется по формуле (2.16):

$$\zeta = -\frac{1}{g}\frac{\partial \varphi(x, 0, t)}{\partial t} = -\frac{C_0}{g}\cos(kx + \sigma t); \tag{6.3}$$

введем опять обозначение $\frac{C_0}{g} = a$; тогда уравнения (6.2) и (6.3) перепишутся соответственно следующим образом:

$$\zeta = -a\cos(kx + \sigma t), \quad \varphi = \frac{ag}{\sigma} e^{kz}\sin(kx + \sigma t). \tag{6.4}$$

Получаем профиль волны в виде косинусоиды, причем амплитуда волны опять будет $|a|$, длина волны опять будет $\lambda = 2\pi/k$. Однако коренное отличие этого случая от стоячих волн заключается в том, что вид свободной поверхности будет теперь, оставаясь неизменным по форме, перемещаться в определенную сторону.

В самом деле, гребни и подошвы профиля волны (6.4) находятся в тех точках, для которых $kx + \sigma t = n\pi$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$), т. е. в разные моменты времени они будут находиться в различных точках x, а именно:

$$x = -\frac{\sigma t}{k} + \frac{n\pi}{k}.$$

Мы видим, что все гребни волны, а с ними и вся волна, перемещаются в направлении отрицательной оси Ox со скоростью

$$c = \frac{\sigma}{k}. \tag{6.5}$$

Так как

$$\sigma = \sqrt{gk}, \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad \tau = \frac{2\pi}{\sigma} = \sqrt{\frac{2\pi\lambda}{g}}, \quad \lambda = \frac{g\tau^2}{2\pi}, \tag{6.6}$$

то для скорости распространения волн можно дать такие выражения:

$$c = \sqrt{\frac{g}{k}} = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}} = \frac{\lambda}{\tau} = \frac{g\tau}{2\pi}. \tag{6.7}$$

Отметим еще раз, что перемещается только *форма* свободной поверхности, сами же частицы жидкости совершают лишь малые колебания около положений равновесия. Скорости отдельных частиц будут определяться по формулам

$$\left.\begin{aligned} v_x &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} = a\sigma e^{kz}\cos(kx + \sigma t), \\ v_z &= \frac{\partial \varphi}{\partial z} = a\sigma e^{kz}\sin(kx + \sigma t). \end{aligned}\right\} \tag{6.8}$$

Уравнение линий тока проще всего найти, составив функцию тока ψ. Потенциалом (5.3) и (6.1) отвечают функции тока

$$\psi_1 = \frac{a\sigma}{k} e^{kz} \cos kx \cos \sigma t,$$

$$\psi_2 = -\frac{a\sigma}{k} e^{kz} \cos k\left(x - \frac{\pi}{2k}\right) \cos\left(\sigma t - \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{a\sigma}{k} e^{kz} \sin kx \sin \sigma t,$$

поэтому искомая функция тока

$$\psi = \psi_1 + \psi_2 = \frac{a\sigma}{k} e^{kz} \cos(kx - \sigma t),$$

и значит, уравнение линий тока есть:

$$e^{kz} \cos(kx - \sigma t) = \text{const}.$$

Таким образом, линии тока имеют тот же вид, что в случае стоячих волн. Однако в силу наличия в уравнениях линий тока времени t линии тока не будут стационарными и, значит, траектории частиц жидкости не будут совпадать с линиями тока. Чтобы вывести приближенные траектории этих частиц, поступим, как выше, т. е. в формулах (6.8) положим x и z равными тем значениям x_0, z_0, которые эти переменные имеют для равновесного положения частицы. Итак:

$$\frac{dx}{dt} = a\sigma e^{kz_0} \cos(kx_0 - \sigma t); \quad \frac{dz}{dt} = a\sigma e^{kz_0} \sin(kx_0 - \sigma t),$$

после интегрирования этих уравнений получим:

$$x = x_0 + ae^{kz_0} \sin(kx_0 - \sigma t), \quad z = z_0 - ae^{kz_0} \cos(kx_0 - \sigma t). \quad (6.9)$$

Чтобы получить уравнение траектории частицы, исключим время t:

$$(x - x_0)^2 + (z - z_0)^2 = a^2 e^{2kz_0}. \quad (6.10)$$

Итак, приближенными траекториями частиц жидкости являются окружности, радиус которых равен ae^{kz_0} и тем меньше, чем глубже лежит рассматриваемая частица. Для поверхностных частиц жидкости этот радиус равен амплитуде волны: на глубине, равной длине волны, этот радиус будет в 535 раз меньше. Каждая частица описывает окружность в направлении, обратном направлению движения часовой стрелки (рис. 159). В самом деле, если обозначить через ϑ угол, который составляет с отрицательной осью Oz радиус-вектор, соединяющий центр окружности (x_0, z_0) с точкой (x, z), то, очевидно, будет:

$$\left.\begin{aligned} x - x_0 &= ae^{kz_0} \sin\vartheta, \\ z - z_0 &= -ae^{kz_0} \cos\vartheta, \end{aligned}\right\} \quad (6.11)$$

и из сравнения этих формул с (6.9) видно, что

$$\delta = kx_0 + \sigma t;$$

этот угол с течением времени увеличивается, значит, каждая частица вращается около равновесного своего положения против часовой стрелки; при этом угловая скорость вращения равна очевидно, σ, поэтому скорость каждой частицы равна $a\sigma e^{kz_0}$. Рис. 159 показывает положение восьми частиц в два последовательных момента времени, разделенных промежутком $\tau/8$, равным одной восьмой части периода

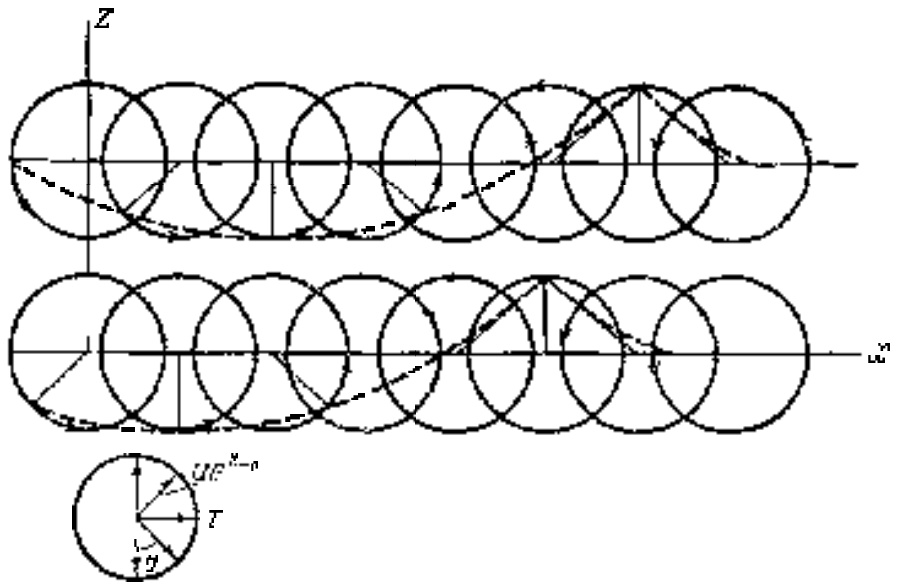

Рис. 159.

Сразу видно, что за промежуток времени $\tau/8$ профиль волны, не изменяя своего вида, переместился на восьмую часть длины волны влево, т. е. на $\lambda/8$. Таким образом профиль волны перемещается влево со скоростью $c = \lambda/\tau$.

Отметим еще, что частицы, лежащие в гребне волны, проходят, очевидно, через верх своей траектории и, значит, двигаются влево, т. е. туда же, куда распространяются волны (но, конечно, с гораздо меньшей скоростью). Во впадинах же направление движения частиц будет противоположно направлению распространения волн.

Вычислим еще давление по формуле (2.12):

$$\frac{p - p_0}{\rho} = -\frac{\partial \varphi}{\partial t} - gz = -age^{kz}\cos(kx + \sigma t) - gz;$$

так как разности $z - z_0$ и $x - x_0$ суть величины бесконечно малые, то, заменяя в первом члене правой части z и x на z_0 и x_0 и пользуясь (6.9), находим:

$$\frac{p - p_0}{\rho} = -gz_0$$

Это обозначает, что те частицы, которые при равновесии лежат в одной горизонтальной плоскости $z = z_0$, во все время движения образуют поверхность, на которой давление будет оставаться постоянным и притом таким же, каково оно было при равновесии. Частицы свободной поверхности жидкости отличаются от других только тем, что для них $z_0 = 0$. Отсюда мы заключаем, что за свободную поверхность жидкости можно принять поверхность, образованную частицами, для коих z_0 одно и то же. Можно, таким образом, снять слой жидкости, не нарушая волнового движения остальной жидкости. Таким образом, каждый слой жидкости колеблется независимо один от другого, а потому мы можем, если хотим, заменить снятый слой жидкости таким же слоем другой жидкости другой плотности.

Совершенно аналогично предыдущему можно рассмотреть движение с потенциалом скорости:

$$\varphi = \frac{ag}{\sigma} e^{kz} \sin(kx - \sigma t); \tag{6.12}$$

для него профиль волны

$$\zeta = a \cos(kx - \sigma t) \tag{6.13}$$

представляет косинусоиду, перемещающуюся в направлении положительной оси Ox с той же самой скоростью c. Траектории частиц будут опять окружностями тех же радиусов ae^{kz_0}, только пробегаться эти окружности будут по часовой стрелке.

Приведем табличку, показывающую, как изменяются скорость распространения прогрессивных волн и их период в зависимости от длины волны для случая очень глубокой в сравнении с этой длиной волны жидкости:

λ м	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140	150
c м/сек	8,83	9,68	10,45	11,19	11,80	12,50	13,11	13,70	14,26	14,80	15,30
τ сек	5,60	6,20	6,70	7,15	7,59	8,00	8,39	8,76	9,12	9,46	9,80

§ 7. Сведение прогрессивных волн к установившемуся движению. Теорию прогрессивных волн можно развить еще другим методом, который мы и изложим.

Пусть прогрессивная волна распространяется вправо, не изменяя своего внешнего вида, со скоростью c. Сообщим всей массе жидкости скорость c, направленную параллельно отрицательной оси Ox. Тогда профиль волны сделается, очевидно, неподвижным в пространстве. Кроме того, в каждой точке пространства величина и направление

скорости не будут уже изменяться с течением времени, а это означает, что течение жидкости сделается установившимся.

На рис. 160 показаны линии тока, являющиеся в то же время траекториями частиц жидкости. По этим траекториям жидкость течет со скоростью, приблизительно равной c. В частности, такой линией тока является и профиль волны C. Динамической же точки зрения ничего не изменится, т. е. давление должно остаться тем же самым, ибо как мы знаем из механики, прямолинейное равномерное движение точек происходит при отсутствии сил и, следовательно, никаких новых сил вводить не надо. Значит, на крайней линии тока C давление p должно быть постоянным (оно должно равняться атмосферному давлению p_0).

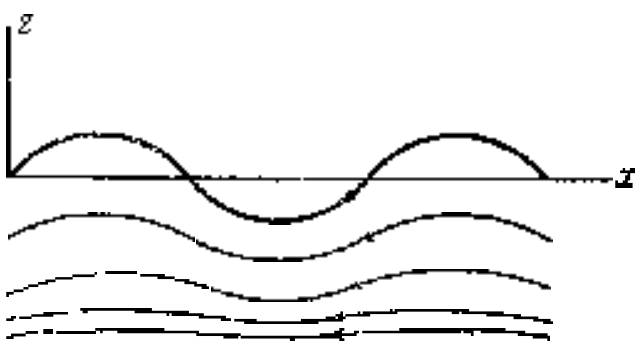

Рис. 160

Итак, задача сводится к следующей: найти установившееся движение жидкости, при котором профиль волны C служит линией тока, на которой давление p равно постоянной величине p_0. Линии тока более глубоких частей жидкости должны все более и более выпрямляться и в пределе становиться прямыми линиями, по которым течение жидкости совершается со скоростью c, направленной влево.

Так как движение безвихревое, то существует потенциал скорости $\varphi(x, z)$, обозначим еще через $\psi(x, z)$ функцию тока. Тогда $\varphi + i\psi$ будет комплексным потенциалом, как мы знаем, $w = \varphi + i\psi$ является аналитической функцией комплексного переменного $x + iz$:

$$w = \varphi + i\psi = f(x + iz).$$

Если бы волны не было и ее свободной границей являлась бы ось Ox, то мы имели бы тело с равномерным течением жидкости вдоль отрицательной оси Ox со скоростью c. Комплексный потенциал такого однородного поступательного потока выражается известной формулой

$$w = -c(x + iz).$$

Рассмотрим теперь движение со следующим потенциалом.

$$w = \varphi + i\psi = -c(x + iz) + i\alpha c e^{-ik(x + iz)} =$$
$$= -c(x + iz) + i\alpha c e^{kz}(\cos kx - i \sin kx),$$

причем мы предположим $k\alpha$ бесконечно малой величиной. Отделяя вещественную и мнимую части, мы найдем:

$$\varphi = -cx + \alpha c e^{kz} \sin kx, \quad \psi = -cz + \alpha c e^{kz} \cos kx.$$

Но профиль волны должен быть линией тока, а на линии тока функция ψ должна быть постоянной, примем, что $\psi = 0$. Тогда уравнение профиля будет $cz = \alpha c e^{kz} \cos kx$ или, так как приближенно $e^{kz} = 1$,

$$z = \alpha \cos kx. \tag{7.1}$$

Давление p вычисляется из интеграла Бернулли — Эйлера:

$$\frac{p}{\rho} = -gz - \frac{1}{2} v^2 + C.$$

У нас

$$v^2 = v_x^2 + v_z^2 = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2 =$$
$$= (-c + \alpha c k e^{kz} \cos kx)^2 + (\alpha c k e^{kz} \sin kx)^2 =$$
$$= c^2 - 2\alpha c^2 k e^{kz} \cos kx + \alpha^2 c^2 k^2 e^{2kz},$$

но последним членом, содержащим квадрат бесконечно малой величины αk, можно пренебречь, поэтому, воспользовавшись еще формулой

$$\alpha c e^{kz} \cos kx = \psi + cz,$$

мы получим:

$$v^2 = c^2 - 2ck(\psi + cz) = c^2 - 2ck\psi - 2k^2 z,$$

и значит,

$$\frac{p}{\rho} = -gz + kc^2 z + kc\psi - \frac{1}{2} c^2 + C$$

или

$$\frac{p}{\rho} = (kc^2 - g) z + kc\psi + \text{const}. \tag{7.2}$$

Для того чтобы на линии тока $\psi = 0$ давление p было постоянным, необходимо и достаточно чтобы коэффициент при z меняющемся на этой линии по уравнению (7.1), был равен нулю. Поэтому

$$c^2 = \frac{g}{k} = \frac{g\lambda}{2\pi},$$

т. е. профилем волны может служить косинусоида (7.1), если длина волны λ связана со скоростью распространения волны соотношением

$$\lambda = \frac{2\pi c^2}{g}.$$

Налагая на полученное установившееся движение равномерный поток вправо со скоростью c, мы остановим движение жидкости на бесконечности, причем профиль волны, имеющий вид косинусоиды (7.1), будет перемещаться вправо с постоянной скоростью c, т. е. мы получаем прогрессивные волны длины λ.

§ 8. Групповая скорость. До сих пор мы рассматривали движение ряда следующих друг за другом волн, вполне тождественных

между собой. Если рассмотреть группу волн с различными длинами волн то явление усложняется. При этом оказывается весьма полезным ввести понятие групповой скорости. Как мы увидим впоследствии в § 18, групповая скорость определяет скорость переноса энергии волнами и является поэтому важной динамической характеристикой волновых процессов. Мы разъясним это понятие на одном простом случае. А именно, сложим два потенциала формы (6.12) с двумя разными k:

$$\varphi = \frac{ag}{\sigma} e^{kz} \sin(kx - \sigma t) + \frac{ag}{\sigma'} e^{k'z} \sin(k'x - \sigma' t), \qquad (8.1)$$

где

$$\sigma' = \sqrt{gk'}.$$

Уравнение, определяющее вид свободной поверхности, в таком случае будет:

$$\zeta = -\frac{1}{g} \frac{\partial \varphi(x, 0, t)}{\partial t} = a[\cos(kx - \sigma t) + \cos(k'x - \sigma' t)] \quad (8.2)$$

Преобразуем это выражение:

$$\zeta = 2a \cos\left[\frac{k + k'}{2} x - \frac{\sigma + \sigma'}{2} t\right] \cos\left[\frac{k - k'}{2} x - \frac{\sigma - \sigma'}{2} t\right] \quad (8.3)$$

Рис. 161 показывает вид профиля волны в одном частном случае. Мы видим, что различные волны будут иметь теперь различную амплитуду. При этом явственно выделяется волновой характер изменения этой амплитуды. Все это можно получить непосредственно из формулы (8.3), если предположить, что k' очень мало отличается от k [а значит, σ' мало отличается от σ, так как σ — непрерывная функция k по формуле (5.7)]. В самом деле, в этом случае последний множитель в (8.3) будет очень мало изменяться на протяжении небольшого числа волн длины $\lambda = \frac{2\pi \cdot 2}{k - k'}$, и значит, на таком участке мы имеем ряд волн с амплитудой

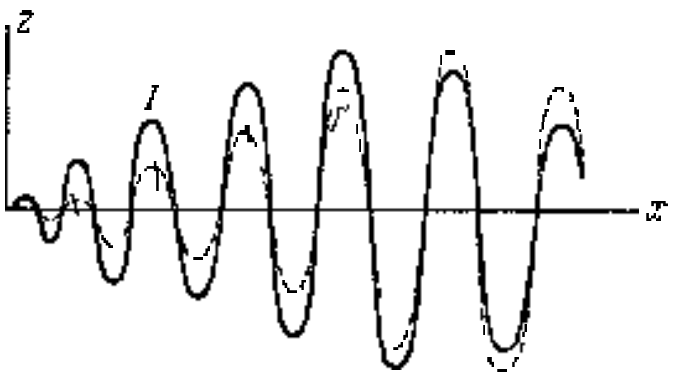

Рис. 161

$$2a \cos\left[\frac{k - k'}{2} x - \frac{\sigma - \sigma'}{2} t\right].$$

Однако в разных местах эта амплитуда будет иметь разные значения и будет изменяться от 0 до $2a$ на протяжении отрезка оси Ox, равного по длине $\frac{\pi}{2} : \frac{k - k'}{2} = \frac{\pi}{k - k'}$. Итак, расстояние по оси Ox

между двумя соседними группами волн с наибольшими амплитудами равно $2\pi/(k - k')$.

Разбираемый случай представляет еще ряд особенностей в сравнении с предыдущими. Прежде всего вид профиля волны все время будет непрерывно изменяться. Это видно, например, из формулы (8.2), так как она показывает, что профиль волны получается сложением двух разных косинусоид, перемещающихся с разной скоростью и, следовательно, смещающихся относительно друг друга.

Теперь мы обратим внимание на одно замечательное явление. Мы знаем, что в волновом движении перемещается только форма поверхности. Возьмем определенную волну I и будем следить за ее перемещением. Амплитуда этой волны будет изменяться, как мы видели, очень медленно, сама же волна будет перемещаться в сторону положительной оси Ox со скоростью

$$c = \frac{\sigma + \sigma'}{k + k'} \approx \frac{\sigma}{k}. \tag{8.4}$$

Рассмотрим теперь целую группу волн с наибольшей амплитудой. Эта наибольшая амплитуда получается для тех точек оси Ox, для которых

$$\left|\cos\left(\frac{k - k}{2}x - \frac{\sigma - \sigma'}{2}t\right)\right| \approx 1,$$

т. е. для которых

$$\frac{k - k'}{2}x - \frac{\sigma - \sigma'}{2}t \approx n\pi \quad (n \text{ — целое число})$$

или

$$x \approx \frac{\sigma - \sigma'}{k - k'}t + \frac{2n\pi}{k - k'}.$$

Отсюда видно, что группа волн с наибольшей амплитудой перемещается в направлении положительной оси Ox со скоростью

$$\frac{\sigma - \sigma'}{k - k'} \approx \frac{d\sigma}{dk} = U. \tag{8.5}$$

С такой же скоростью будут перемещаться группы волн с какой-либо определенной амплитудой. Это означает, что если в момент t в точке x находилась группа волн с амплитудой α, то в момент $t + \tau$ группа волн с амплитудой α будет находиться в точке $x + U\tau$.

Поэтому скорость U называют *групповой скоростью волн*. То обстоятельство, что скорость распространения волн c может быть отлична от групповой скорости U, кажется на первый взгляд несколько странным. Так например, по формуле (8.5)

$$U = \frac{d\sigma}{dk} = \frac{d\sqrt{gk}}{dk} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{k}},$$

в то время как

$$c = \frac{\sigma}{k} = \sqrt{\frac{g}{k}},$$

значит,

$$U = \frac{1}{2} c, \tag{8 6}$$

т. е. групповая скорость распространения волн в два раза меньше скорости распространения отдельных волн. Это показывает, что в то время как определенная волна, например I, распространится на расстояние двух волн и перейдет в положение I', вся группа передвинется только на расстояние одной волны, поэтому амплитуда рассматриваемой волны I увеличится. В дальнейшем будет продолжаться увеличение амплитуды рассматриваемой волны, пока амплитуда не достигнет максимума, после чего амплитуда будет убывать, и т. д. Мы видим, таким образом что при распространении определенной волны эта волна будет в группе волн перемещаться в направлении положительной оси Ox. Отсюда и становится понятно, что истинная скорость распространения волны может отличаться от групповой — разность этих двух скоростей показывает, с какой скоростью волна распространяется *относительно группы волн*.

Обратим внимание на то, что отличие групповой скорости от скорости распространения волн будет только в том случае, когда скорость распространения волн зависит от их длины; в этом случае говорят о *дисперсии* волн.

Групповая скорость волн определяется формулой $U = d\sigma/dk$, но

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad \sigma = kc = \frac{2\pi c}{\lambda},$$

следовательно,

$$U = \frac{d\left(\frac{c}{\lambda}\right)}{d\left(\frac{1}{\lambda}\right)} = \frac{\lambda\, dc - c\, d\lambda}{d\lambda} = c - \lambda \frac{dc}{d\lambda},$$

откуда получаем важное выражение для групповой скорости, указанное Рэлеем:

$$U = c - \lambda \frac{dc}{d\lambda}. \tag{8 7}$$

Можно дать этой формуле простое геометрическое значение а именно — начертим график для c в функции λ и в точке с координатами λ, c проведем касательную; уравнение последней будет:

$$y - c = \frac{dc}{d\lambda}(x - \lambda) \quad \text{или} \quad y = x \frac{dc}{d\lambda} + c - \lambda \frac{dc}{d\lambda},$$

откуда видно, что $U = c - \lambda \frac{dc}{d\lambda}$ есть отрезок, отсекаемый этой касательной на оси c.

Найдем еще вид траекторий частиц в рассматриваемом движении. Так как последнее можно рассматривать как составное из двух движений вида

$$\varphi = \frac{ag}{\sigma} e^{kz} \sin(kx - \sigma t),$$

для которого

$$x = x_0 + ae^{kz_0} \sin(kx_0 - \sigma t),$$
$$z = z_0 - ae^{kz_0} \cos(kx_0 - \sigma t),$$

то мы будем иметь:

$$x = x_0 + a[e^{kz_0} \sin(kx_0 - \sigma t) - e^{k'z_0} \sin(k'x_0 - \sigma' t)],$$
$$z = z_0 - a[e^{kz_0} \cos(kx_0 - \sigma t) + e^{k'z_0} \cos(k'x_0 - \sigma' t)].$$

Движение каждой частицы можно представить следующим образом: пусть точка

$$x_1 = x_0 + ae^{kz_0} \sin(kx_0 - \sigma t),$$
$$z_1 = z_0 - ae^{kz_0} \cos(kx_0 - \sigma t)$$

описывает окружность радиуса ae^{kz_0} около точки (x_0, z_0). Примем эту точку (x_1, z_1) за центр новой окружности радиуса $ae^{k'z_0}$, по этой окружности и будет двигаться наша частица с периодом $2\pi/\sigma'$. Траектория частицы будет служить так называемая удлиненная или укороченная эпициклоида. Частица описывает приблизительно окружность изменяющегося радиуса, при этом мы имеем двоякую периодичность: с одной стороны, имеется период пробега одной окружности, а с другой стороны есть период изменения радиуса окружности. Это отвечает наличию скорости распространения отдельной волны и групповой скорости волн.

При рассмотрении вопроса о групповой скорости мы ограничились для простоты сложением двух волн одинаковой амплитуды, но разной длины волны. При сложении многих волн приблизительно одинаковой длины волны вычисления несколько усложняются, но суть дела остается той же самой.

§ 9. Общий случай плоской задачи. Теперь мы рассмотрим самый общий случай плоских безвихревых волн. В §§ 2 и 3 было выяснено, что в этом случае задача сводится к отысканию решения уравнения Лапласа:

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0 \qquad (9.1)$$

удовлетворяющего на свободной поверхности условию

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} = -\frac{1}{g}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}. \qquad (9.2)$$

при $z = 0$ и начальным условиям

$$\varphi = F(x), \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} = f(x) \tag{9.3}$$

при $z = 0$ и $t = 0$.

При этом $f(x)$ и $F(x)$ имеют следующее физическое значение. Если $z = \zeta(x, t)$ есть уравнение свободной поверхности, то

$$f(x) = -g\zeta(x, 0), \tag{9.4}$$

что же касается $F(x)$, то

$$F(x) = -\frac{1}{\rho}\pi(x, 0), \tag{9.5}$$

где $\pi(x, z)$ обозначает тот импульс сил давлений, который мог бы вызвать начальное распределение скоростей.

Вследствие линейности уравнений (9.1) и (9.2) сумма двух решений φ_1 и φ_2 этих уравнений также будет решением. Функции φ_1 и φ_2 мы будем отыскивать по начальным условиям

$$\varphi_1 = 0, \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} = f(x)$$

при $z = 0$, $t = 0$;

$$\varphi_2 = F(x), \quad \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} = 0$$

при $z = 0$, $t = 0$.

При этом достаточно ограничиться отысканием φ_1. В самом деле, чтобы найти φ_2, мы можем поступить следующим образом. Отыщем решение системы уравнений (9.1) и (9.2), удовлетворяющее начальным условиям

$$\varphi_3 = 0; \quad \frac{\partial \varphi_3}{\partial t} = F(x)$$

при $z = 0$ и $t = 0$.

Рассмотрим функцию $\varphi_2 = \frac{\partial \varphi_3}{\partial t}$; эта функция, конечно, будет удовлетворять уравнениям (9.1) и (9.2). Кроме того, в начальный момент при $z = 0$ и $t = 0$.

$$\varphi_2 = \frac{\partial \varphi_3}{\partial t} = F(x);$$

наконец, в начальный момент при $z = 0$

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial t} = \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial t^2} = -g\frac{\partial \varphi_3}{\partial z};$$

но из того, что в начальный момент $\varphi_3 = 0$ при $z = 0$ и что φ_3 удовлетворяет уравнению Лапласа, следует, что в начальный момент

φ_3 тождественно равно нулю. Поэтому в начальный момент $\partial\varphi_3/\partial z = 0$, и, значит, $\partial\varphi_2/\partial t = 0$. Таким образом функция $\varphi_2 = \partial\varphi_3/\partial t$ является требуемым решением.

Итак, мы будем отыскивать решение уравнений (9.1) и (9.2) по начальным условиям

$$z = 0; \quad \frac{\partial\varphi}{\partial t} = f(x) \tag{9.6}$$

при $z = 0$, $t = 0$.

Обозначим начальные значения φ и $\partial\varphi/\partial t$ соответственно через φ_0 и φ_1:

$$\varphi(x, z, 0) = \varphi_0(x, z),$$

$$\left\{\frac{\partial\varphi(x, z, t)}{\partial t}\right\}_{t=0} = \varphi_1(x, z).$$

Тогда, по сказанному выше, вследствие первого из условий (9.6) будет:

$$\varphi_0(x, z) = 0.$$

Отыщем теперь $\varphi_1(x, z)$. Очевидно, что $\partial\varphi_1/\partial t$ удовлетворяет уравнению Лапласа. $\Delta\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\Delta\varphi = 0$, значит,

$$\Delta\varphi_1 = 0.$$

Но мы уже многократно пользовались следующим решением уравнения Лапласа:

$$\varphi_1 = Ce^{kz}\cos k(x - \xi),$$

где C и ξ были произвольные постоянные.

Вычисляя косинус разности и вводя обозначения $C\cos k\xi = A$, $C\sin k\xi = B$, мы можем этот интеграл переписать в другом виде:

$$\varphi_1 = Ae^{kz}\cos kx + Be^{kz}\sin kx,$$

где A и B — произвольные постоянные.

Вследствие линейности уравнения Лапласа мы можем образовать более общее решение уравнения Лапласа:

$$\varphi_1(x, z) = \sum_{i=1}^{n} e^{k_i z}\{A_i\cos k_i x + B_i\sin k_i x\}. \tag{9.7}$$

Чтобы образовать самое общее решение уравнения Лапласа, нужно взять всевозможные k_i от 0 до ∞, причем величины A_i и B_i

мгут браться для данного k_i совершенно произвольные. Но тогда сумма (9.7) перейдет в определенный интеграл

$$\varphi_1(x, z) = \int_0^\infty e^{kz} [A(k) \cos kx + B(k) \sin kx] dk \qquad (9.8)$$

[сумма (9.7) может быть рассматриваема как приближенное значение этого интеграла, если в ней положить $A_i = A(k_i) dk$, $B_i = B(k_i) dk$].

Чтобы показать, что найденное нами решение есть самое общее, надо показать, что можно подобрать такие функции $A(k)$ и $B(k)$, после подстановки которых в (9.8) функция φ_1 будет удовлетворять граничному условию $\varphi_1(x, 0) = f(x)$. Подставляя в (9.8) $z = 0$, получаем, таким образом, интегральное уравнение для определения $A(k)$ и $B(k)$

$$\int_0^\infty [A(k) \cos kx + B(k) \sin kx] dk = f(x). \qquad (9.9)$$

Для решения этого уравнения воспользуемся справедливой при некоторых условиях интегральной формулой Фурье

$$\int_0^\infty dk \int_{-\infty}^\infty f(\xi) \cos k(x - \xi) d\xi = \pi f(x),$$

которую можно переписать в виде

$$\int_0^\infty \left[\cos kx \int_{-\infty}^\infty f(\xi) \cos k\xi \, d\xi + \sin kx \int_{-\infty}^\infty f(\xi) \sin k\xi \, d\xi \right] dk = \pi f(x).$$

Из сравнения последней формулы с (9.9) видно, что надо взять

$$A(k) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty f(\xi) \cos k\xi \, d\xi; \quad B(k) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty f(\xi) \sin k\xi \, d\xi.$$

Поэтому

$$\varphi_1(x, z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty e^{kz} \left[\cos kx \int_{-\infty}^\infty f(\xi) \cos k\xi \, d\xi + \right.$$

$$\left. + \sin kx \int_{-\infty}^\infty f(\xi) \sin k\xi \, d\xi \right] dk = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty e^{kz} \left[\int_{-\infty}^\infty f(\xi) \cos k(x - \xi) \, d\xi \right] dk,$$

Предположим, что в последнем двукратном интеграле можно переменить порядок интегрирования; тогда

$$\varphi_1(x, z) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \left[\int_0^{\infty} e^{kz} \cos k(x - \xi)\, dk \right] d\xi \qquad (9.10)$$

Но определенный интеграл

$$H = \int_0^{\infty} e^{kz} \cos kx\, dk$$

легко вычисляется интегрированием по частям (помним, что z у нас отрицательно):

$$H = \int_0^{\infty} e^{kz} d \frac{\sin kx}{x} =$$

$$= \left[\frac{e^{kz} \sin kx}{x} \right]_{k=0}^{k=\infty} - \int_0^{\infty} \frac{\sin kx}{x} z e^{kz}\, dk = -\frac{z}{x} \int_0^{\infty} e^{kz} d\left(\frac{\cos kx}{x} \right) =$$

$$= -\left[\frac{z}{x} e^{kz} \frac{\cos kx}{x} \right]_{k=0}^{k=\infty} - \int_0^{\infty} \frac{z^2}{x^2} e^{kz} \cos kx\, dk = -\frac{z}{x^2} - \frac{z^2}{x^2} H,$$

откуда

$$H = -\frac{z}{x^2 + z^2}.$$

Поэтому

$$\int_0^{\infty} e^{kz} \cos k(x - \xi)\, dk = -\frac{z}{z^2 + (x - \xi)^2},$$

и значит

$$\varphi_1(x, z) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{z f(\xi)\, d\xi}{z^2 + (x - \xi)^2}. \qquad (9.11)$$

Эта формула определяет решение уравнения Лапласа в области $z < 0$, обращающееся при $z \to 0$ в заданную функцию $f(x)$.

Перейдем теперь к решению нашей гидродинамической задачи. Мы рассмотрим следующий частный случай начальных условий. Пусть $F(x) = 0$ и пусть $f(x)$ всюду равна нулю, за исключением малого участка оси Ox, окружающего начало координат, причем на этом участке (концы которого пусть имеют координаты $-\varepsilon$

$(x + \varepsilon)$ функцию $f(x)$ предположим столь большой, что интеграл $\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(x)\,dx$ сохраняет конечное значение

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(x)\,dx = -Qg.$$

Выясним значение величины Q, из уравнения (9.4) следует, что

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \zeta(x, 0)\,dx = Q.$$

Таким образом, получаем следующее физическое толкование наших условий. в начальный момент поверхность жидкости всюду горизонтальна, за исключением области вблизи оси Oz; здесь мы имеем в начальный момент сильно поднятую поверхность жидкости, причем объем поднятой жидкости равен Q (если считать толщину жидкости в направлении оси Oy, перпендикулярном к плоскости движения, за единицу). Кроме того, начальные скорости всех частиц жидкости равны нулю [ибо $\Gamma(x) = 0$]. Требуется определить дальнейшее движение жидкости.

Мы будем считать число ε бесконечно малым, а следовательно, функцию $f(x)$ бесконечно большой, это, конечно, физически невозможно, но зато сильно упрощает вычисления. Нужно только иметь в виду сделанное упрощение и при истолковании полученных результатов применять формулы с осторожностью.

При сделанных допущениях формула (9.11) принимает вид

$$\varphi_1(x, z) = -\frac{z}{\pi}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{f(\xi)\,d\xi}{(z^2 + x^2)} = -\frac{Qgz}{\pi(z^2 + x^2)},$$

и нам надо найти решение $\varphi(x, z, t)$ уравнений (9.1) и (9.2), для которого

$$\left.\begin{aligned} \varphi(x, z, 0) &= 0, \\ \left\{\frac{\partial \varphi(x, z, t)}{\partial t}\right\}_{t=0} &= \frac{Qgz}{\pi(z^2 + x^2)}. \end{aligned}\right\} \qquad (9.12)$$

Покажем, что уравнение

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{1}{g}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0,$$

которое по условию должно выполняться только на поверхности $z = 0$, будет выполняться во всякой точке жидкости. В самом деле, функция

$$\Phi = \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{1}{g}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$$

является, конечно, решением уравнения Лапласа, ибо

$$\Delta\Phi = -\frac{\partial \Delta\varphi}{\partial z} + \frac{1}{g}\frac{\partial^2 \Delta\varphi}{\partial t^2} = 0,$$

с другой стороны при $z = 0$ функция $\Phi(x, z, t)$ равна нулю, поэтому $\Phi(x, z, t)$ тождественно равна нулю. Итак:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -g\frac{\partial\varphi}{\partial z}. \tag{9.13}$$

Будем искать теперь функцию $\varphi(x, z, t)$, разложенную в ряд Маклорена по степеням t.

$$\varphi(x, z, t) = \varphi(x, z, 0) - \frac{t}{1!}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)_0 - \frac{t^2}{2!}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\right)_0 + \dots$$

Но из (9.13) мы легко заключим, что

$$\frac{\partial^{2k}\varphi}{\partial t^{2k}} = (-1)^k g^k \frac{\partial^k\varphi}{\partial z^k}, \quad \frac{\partial^{2k+1}\varphi}{\partial t^{2k+1}} = (-1)^k g^k \cdot \frac{\partial^k}{\partial z^k}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right).$$

Воспользовавшись формулами (9.12), мы получим:

$$\left(\frac{\partial^{2k}\varphi}{\partial t^{2k}}\right)_0 = 0, \quad \left(\frac{\partial^{2k+1}\varphi}{\partial t^{2k+1}}\right)_0 = (-1)^k g^k \frac{Qg}{\pi}\frac{\partial^k}{\partial z^k}\left(\frac{x}{x^2 + z^2}\right).$$

Поэтому искомое решение есть

$$\varphi(x, z, t) = \frac{Qgt}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{g^{n}t^{2n}}{(2n+1)!}\frac{\partial^n}{\partial z^n}\left(\frac{x}{x^2 + z^2}\right). \tag{9.14}$$

Найдем, во что обратится $\varphi(x, z, t)$ при $z \to 0$. Так как с одной стороны,

$$\frac{x}{x^2 + z^2} = \frac{x}{x^2\left(1 + \frac{z^2}{x^2}\right)} = \frac{x}{x^2} - \frac{z^2}{x^3} + \frac{z^4}{x^5} - \dots \tag{9.15}$$

и, с другой стороны, мы имеем ряд Маклорена по степеням z:

$$\frac{x}{x^2 + z^2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}\left(\frac{\partial^n}{\partial z^n}\frac{x}{x^2 + z^2}\right)_{z=0}, \tag{9.16}$$

то из сравнения (9.15) и (9.16) получим:

$$\left[\frac{\partial^{2k}}{\partial z^{2k}}\left(\frac{x}{x^2 + z^2}\right)\right]_{z=0} = 0;$$

$$\left[\frac{\partial^{2k+1}}{\partial z^{2k+1}}\left(\frac{x}{x^2 + z^2}\right)\right]_{z=0} = (-1)^k (2k+1)!\,\frac{1}{x^{2k+2}}.$$

Поэтому, полагая в формуле (9.14) $z=0$ и $n=2k+1$, найдем:

$$\varphi(x, 0, t)=-\frac{Qgt}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{g^{2k+1}t^{4k+2}}{(4k+3)!}\frac{(-1)^k(2k+1)!}{x^{2k+\frac{3}{2}}}. \qquad (9.17)$$

§ 10. Профиль волны. Перейдем к исследованию полученного волнового движения. Мы ограничимся рассмотрением профиля волны и тех изменений, которые с ним происходят.

Профиль волны определяется, как мы знаем, из уравнения

$$\zeta=-\frac{1}{g}\frac{\partial\varphi(x, 0, t)}{\partial t},$$

поэтому из уравнения (9.17) мы получим:

$$\zeta(x, t)=\frac{Q}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(2k+1)!}{(4k+2)!}\frac{g^{2k+1}t^{4k+2}}{x^{2k+2}}. \qquad (10.1)$$

Но

$$\frac{(2k+1)!}{(4k+2)!}=\frac{1\cdot 2\cdot 3\ldots 2k(2k+1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots 4k(4k+2)\cdot 1\cdot 3\cdot 5\ldots(4k+1)}=$$

$$=\frac{1}{2^{2k+1}\cdot 3\cdot 5\ldots(4k+1)};$$

поэтому, если ввести обозначение

$$\frac{gt^2}{2x}=\omega \qquad (10.2)$$

то будет

$$\zeta(x, t)=\frac{Q}{\pi x}\left\{\frac{\omega}{1}-\frac{\omega^3}{1\cdot 3\cdot 5}+\frac{\omega^5}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}-\ldots\right\}.$$

Обозначим функцию в скобках через

$$M(\omega)=\omega-\frac{\omega^3}{3!}+\frac{\omega^5}{3!\,5\cdot 7\cdot 9}-\ldots; \qquad (10.3)$$

тогда

$$\zeta(x, t)=\frac{Q}{\pi x}M\left(\frac{gt^2}{2x}\right). \qquad (10.4)$$

Ряд, дающий $M(\omega)$ сходится при всяком ω, однако для численного вычисления этот ряд годится только в том случае, если $\omega=gt^2/2x$ мало (аналогично тому, как это имеет место для рядов $\cos x$ или $\sin x$). Укажем другое выражение для $M(\omega)$, годное при больших ω. Для этого рассмотрим функцию

$$\chi(\omega)=i\omega^{1/2}+i^2\frac{\omega^{3/2}}{3!}+i^3\frac{\omega^{5/2}}{3!\,5}+\ldots;$$

очевидно, что

$$M(\omega)=\operatorname{Im}\left[\sqrt{\omega}\chi(\omega)\right],$$

где знак Im обозначает мнимую часть комплексного числа. Ясно, что

$$\frac{d\chi}{d\omega} = \frac{1}{2}\left\{\frac{i}{\sqrt{\omega}} + i^2\omega^{1/2} + i^3\frac{\omega^{3/2}}{3} + \ldots\right\} = -\frac{i}{2\sqrt{\omega}} + \frac{i}{2}\chi.$$

Интегрируя это линейное дифференциальное уравнение, найдем:

$$\chi = e^{\frac{i\omega}{2}}\left[\int_0^{\omega}\frac{ie^{-\frac{iu}{2}}}{2\sqrt{u}}du + C\right],$$

но $\chi(0) = 0$, следовательно, $C = 0$, и значит:

$$\chi(\omega) = \frac{i}{2}e^{\frac{i\omega}{2}}\int_0^{\omega}\frac{e^{-\frac{iu}{2}}}{\sqrt{u}}du. \tag{10.5}$$

Рассмотрим для простоты только случай очень большого ω, тогда при отыскании приближенного выражения для $\chi(\omega)$ можно в интеграле верхний предел заменить на ∞. Но тогда, произведя замену $u = 2v^2$, получим:

$$\int_0^{\infty}\frac{e^{-\frac{iu}{2}}}{\sqrt{u}}du = \int_0^{\infty}\frac{e^{-iv^2}}{\sqrt{2}v}4v\,dv = 2\sqrt{2}\left\{\int_0^{\infty}\cos v^2\,dv - i\int_0^{\infty}\sin v^2\,dv\right\} =$$

$$= 2\sqrt{2}\left\{\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}} - i\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}\right\} = \sqrt{\pi}(1-i) = \sqrt{2\pi}e^{-i\pi/4};$$

мы воспользовались так называемыми интегралами Френеля

$$\int_0^{\infty}\cos v^2\,dv = \int_0^{\infty}\sin v^2\,dv = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Поэтому

$$\chi(\omega) = \frac{i}{2}\sqrt{2\pi}e^{i\left(\frac{\omega}{2}-\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{i\sqrt{2\pi}}{2}\left\{\cos\left(\frac{\omega}{2}-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\omega}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\right\},$$

и значит,

$$M(\omega) \approx \sqrt{\frac{2\pi\omega}{2}}\cos\left(\frac{\omega}{2}-\frac{\pi}{4}\right) - \sqrt{\frac{\pi\omega}{2}}\sin\left(\frac{\omega}{2}+\frac{\pi}{4}\right). \tag{10.6}$$

Итак, при больших значениях $\frac{gt^2}{2x}$ имеем приближенную формулу

$$\zeta \approx \frac{Q\sqrt{\pi}}{x\sqrt{2\pi}}\sin\left(\frac{\omega}{2}+\frac{\pi}{4}\right) = \frac{Qt}{2x\sqrt{x}}\sqrt{\frac{g}{\pi}}\sin\left(\frac{gt^2}{4x}-\frac{\pi}{4}\right). \tag{10.7}$$

Представим полученные результаты графически. Функцию $\zeta(x, t)$ можно рассматривать либо в данный момент t, либо в данной точке

оси Ox. Рис. 162 представляет вид функции $\zeta(x, t)$ в определенный момент времени. Так как

$$\zeta(x, t) = \frac{Q}{x} M\left(\frac{gt^2}{2x}\right) = \frac{2Q}{\pi g t^2} \omega M(\omega),$$

где

$$\omega = \frac{gt^2}{2x},$$

то при больших x и, следовательно, малых ω надо вычислять $\zeta(x, t)$ по формуле (10.1). Таким образом, чтобы найти точки, в которых профиль волны пересекает ось Ox, надо найти корни уравнения $M(\omega) = 0$, первый из этих корней будет $\omega_1 = 4.595$.

Чтобы найти гребни и подошвы волны, надо найти корни уравнения $\frac{\partial \zeta}{\partial x} = 0$, или, что то же, корни уравнения

$$\frac{d[\omega M(\omega)]}{d\omega} = M + \omega M' = 0,$$

первые из этих корней будут:

$$\omega_1' = 3.0736 \qquad \omega_2' = 8.36.$$

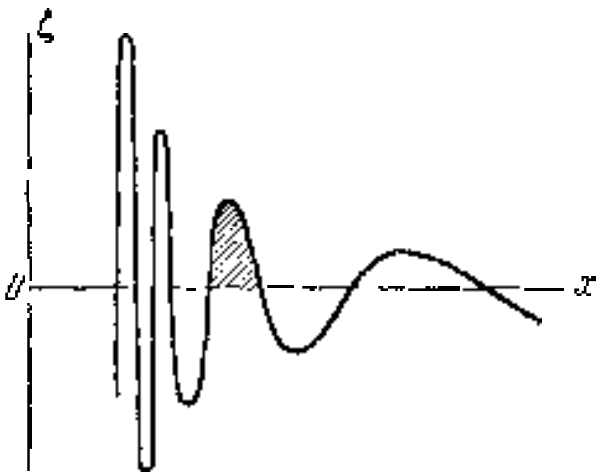

Рис. 162

Для малых x надо пользоваться формулой (10.7), которую можно переписать так

$$\zeta \approx \frac{\sqrt{2}Q}{\sqrt{\pi} gt^2} \omega^{3/2} \sin\left(\frac{\omega}{2} + \frac{\pi}{4}\right);$$

отсюда видно, что при малых x и, следовательно, больших ω получается ряд волн, которые будут тем короче по длине и тем выше, чем ближе рассматриваемая точка к началу координат. В самом деле, точки пересечения профиля с осью Ox определяются теперь из условия

$$\frac{\omega}{2} + \frac{\pi}{4} \approx n\pi \qquad (n \text{ — целое})$$

или

$$\frac{gt^2}{4x} \approx \left(n - \frac{1}{4}\right)\pi,$$

т. е.

$$x_n \approx \frac{gt^2}{(4n-1)\pi},$$

Расстояние между двумя смежными точками будет:

$$x_n - x_{n+1} \approx \frac{gt^2}{\pi}\left(\frac{1}{4n-1} - \frac{1}{4n+3}\right) = \pi \frac{4gt^2}{(4n-1)(4n+3)}$$

и убывает до 0 при возрастании n и ω. Амплитуда же волн растет до ∞ пропорционально полуторной степени ω.

Формула (10.2) дает:

$$x = \frac{gt^2}{2\omega}.$$

Следовательно, при увеличении t определенное значение ω перемещается с ускорением

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{g}{\omega},$$

тем меньшим, чем больше само ω. Значит, при увеличении t профиль волны будет растягиваться пропорционально квадрату времени, причем вертикальные ординаты будут в таком же отношении уменьшаться (так что площадь, ограниченная какой-нибудь волной, будет оставаться без изменения).

Рассмотрим теперь рис. 163, представляющий $\zeta(x, t)$ в данном месте. В этом случае пользуемся формулами

$$\zeta(x, t) = \frac{Q}{\pi x} M(\omega) \approx \frac{Q}{\sqrt{2\pi x}} \sqrt{\omega} \sin\left(\frac{\omega}{2} + \frac{\pi}{4}\right),$$

первой — при малых t, второй — при больших.

Колебания уровня происходят, как видно, все быстрее и быстрее, причем амплитуда колебаний растет пропорционально времени.

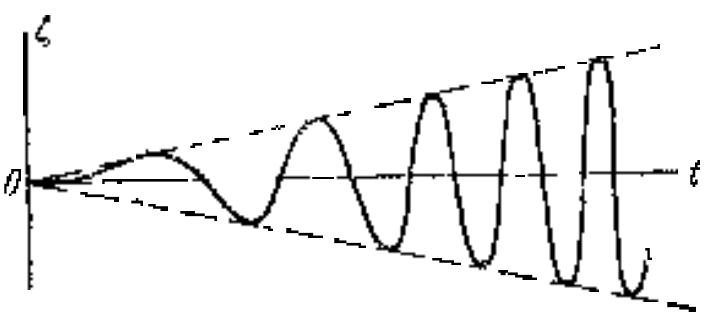

Рис. 163.

Рассмотрим движение в той области значений x и t, где $\zeta(x, t)$ определяется формулой (10.7).

Так как

$$\omega = \frac{gt^2}{2x},$$

то

$$\frac{d\omega}{dx} = -\frac{gt^2}{2x^2}; \quad \frac{d\omega}{dt} = \frac{gt}{x}.$$

Но при изменении x на длину волны λ ω должно измениться на 4π (чтобы мы получили следующую волну), значит:

$$\frac{4\pi}{\lambda} = \frac{gt^2}{2x^2}, \quad \text{т. е.} \quad \lambda = \frac{8\pi x^2}{gt^2}. \tag{10.8}$$

Точно так же при изменении t на период колебаний τ ω должно измениться на 4π, чтобы мы могли получить в данном месте прохождение следующей волны, значит:

$$\frac{4\pi}{\tau} = \frac{gt}{x}, \quad \text{т. е.} \quad \tau = \frac{4\pi x}{gt},$$

Наконец, чтобы определить скорость распространения волны нужно проследить за движением гребня, но гребень отвечает все время одному и тому же значению ω следовательно x и t меняются по формуле $x = gt^2/2\omega$, и значит скорость волны есть

$$c = \frac{dx}{dt} = \frac{gt}{\omega}.$$

Так как

$$c = \frac{gt}{\omega} = \frac{2x}{t} = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}},$$

то получается известная нам формула

$$c = \sqrt{\frac{gT}{2\pi}}.$$

Отсюда видно, что групповая скорость будет равна

$$U = \frac{1}{2}c = \frac{x}{t},$$

что очевидно и из формулы (10.6), так как групповая скорость обозначает скорость, с которой распространяются волны определенной длины, но t будет постоянной для тех x и t, для коих

$$\frac{x}{t} = \sqrt{\frac{g\lambda}{8\pi}} = \frac{1}{2}c.$$

Теперь становится понятной причина того, почему рассматриваемые волны двигаются с постоянным ускорением. Волны, больше продвинувшиеся по оси Ox, имеют большую длину и значит, перемещаются с большей скоростью, поэтому ряд волн всегда будет растягиваться, и следовательно, скорость перемещения этих волн будет становиться все больше и больше и они будут двигаться с постоянным ускорением. Последнее для гребня первой волны равно $g/\omega_1 = 0{,}325g$, для полошвы второй $0{,}120g$ и т. д.

Таким образом получается такая картина: начало координат выпускает из себя в обе стороны бесконечную последовательность волн, которые уходят затем на бесконечность. На самом деле, конечно, нельзя осуществить тот случай, который мы рассматривали, а именно первоначальное поднятие конечной массы жидкости на бесконечно малом участке оси Ox. Если бы та же самая жидкость была поднята на участке оси Ox длины $2l$, то наши рассуждения в некоторой своей части перестали бы быть верными. А именно, наши рассуждения будут справедливы лишь постольку, поскольку длины рассматриваемых волн будут вечики в сравнении с $2l$, т. е. отношение

$$\frac{\lambda}{2l} = \frac{1+x^2}{gt^2l} = \frac{2x}{\omega l}$$

и, кроме того, отношения $x/2l$ должны быть велики в сравнении с единицей, чтобы мы могли применять полученные нами результаты.

§ 11. Волны при конечной глубине жидкости. Предположим теперь что глубина жидкости конечна и равна h. Ограничимся для этого случая выводом формул для стоячих и прогрессивных волн. Опять имеем формулу (5.1)

$$\Phi(x, z) = P(z)\sin k(x - \xi),$$

где [см. (5.3)]

$$P(z) = C_1 e^{kz} + C_2 e^{-kz}$$

Дно жидкости, которое мы предполагаем горизонтальным и уравнение которого $z = -h$, служит неподвижной границей. Поэтому по уравнению (4.3) должно быть

$$\frac{\partial\Phi}{\partial z} = 0 \quad \text{при } z = -h$$

или

$$C_1 k e^{-kh} - C_2 k e^{kh} = 0$$

Поэтому можем принять

$$C_1 = \frac{1}{2} C e^{kh}, \quad C_2 = \frac{1}{2} C e^{-kh},$$

т. е.

$$P(z) = \frac{1}{2} C\left[e^{k(z+h)} + e^{-k(z+h)}\right] = C \operatorname{ch} k(z + h)$$

Итак, мы имеем в данном случае стоячие волны причем потенциал скорости равен

$$\varphi(x, z, t) = C \operatorname{ch} k(z + h)\sin k(x - \xi)\cos(\sigma t + \varepsilon). \qquad (11.1)$$

Остается удовлетворить уравнению (4.4):

$$\frac{\partial\Phi}{\partial z} = \frac{\sigma^2}{g}\Phi \quad \text{при } z = 0,$$

которое дает соотношение

$$k \operatorname{sh} kh = \frac{\sigma^2}{g} \operatorname{ch} kh.$$

Это соотношение определяет величину σ и, следовательно, период колебаний τ.

$$\sigma^2 = gk \operatorname{th} kh, \quad \tau = \frac{2\pi}{\sigma} = \frac{2\pi}{\sqrt{gk \operatorname{th} kh}} = \sqrt{\frac{2\pi\lambda}{g \operatorname{th} \frac{2\pi h}{\lambda}}}. \qquad (11.2)$$

Вид свободной поверхности определится формулой

$$\zeta = -\frac{1}{g}\frac{\partial\varphi(x, 0, t)}{\partial t} = \frac{C\sigma}{g} \operatorname{ch} kh \sin k(x - \xi)\sin(\sigma t + \varepsilon).$$

Введем обозначение

$$\frac{\sigma^2}{g} \operatorname{ch} kh = a; \tag{11.3}$$

тогда получим следующие выражения для потенциала скорости φ и профиля волны ζ (для простоты предполагаем $\xi = \varepsilon = 0$):

$$\varphi = \frac{ag}{\sigma} \frac{\operatorname{ch} k(z+h)}{\operatorname{ch} kh} \sin kx \cos \sigma t, \quad \zeta = a \sin kx \sin \sigma t. \tag{11.4}$$

Проекции скорости частиц на оси координат определяются по формулам

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{agk}{\sigma} \frac{\operatorname{ch} k(z-h)}{\operatorname{ch} kh} \cos kx \cos \sigma t,$$

$$v_z = \frac{dz}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{agk}{\sigma} \frac{\operatorname{sh} k(z-h)}{\operatorname{ch} kh} \sin kx \cos \sigma t,$$

и следовательно, уравнения движения какой-либо частицы будут [после интегрирования заменяем σ^2 по формуле (11.2)]:

$$x = x_0 + a \frac{\operatorname{ch} k(z_0+h)}{\operatorname{sh} kh} \cos kx \sin \sigma t,$$

$$z = z_0 - a \frac{\operatorname{sh} k(z_0+h)}{\operatorname{sh} kh} \sin kx \sin \sigma t.$$

Рассмотрим теперь прогрессивные волны, перемещающиеся, например, в направлении положительной оси Ox. Для этого нужно образовать разность потенциала (11.4) и потенциала

$$\varphi = \frac{ag}{\sigma} \frac{\operatorname{ch} k(z+h)}{\operatorname{ch} kh} \cos kx \sin \sigma t,$$

т. е. рассмотреть движение с потенциалом скорости

$$\varphi = \frac{ag}{\sigma} \frac{\operatorname{ch} k(z+h)}{\operatorname{ch} kh} \sin(kx - \sigma t).$$

Уравнение профиля волны в этом случае будет:

$$\zeta = -\frac{1}{g} \frac{\partial \varphi(x, 0, t)}{\partial t} = a \cos(kx - \sigma t).$$

Таким образом, профиль волны, имеющий вид косинусоиды, перемещается со скоростью

$$c = \frac{\sigma}{k} = \sqrt{\frac{g}{k} \operatorname{th} kh} = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi} \operatorname{th} \frac{2\pi h}{\lambda}}. \tag{11.5}$$

Интересно отметить два граничных случая. Если глубина жидкости h очень велика (вернее если отношение h/λ очень велико), то $\operatorname{th} kh$ можно принять равным 1 и, следовательно:

$$c = \sqrt{\frac{g}{k}} = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}, \tag{11.6}$$

т. е. получается знакомая формула. Другой предельный случай будет тот, когда глубина h весьма мала (вернее отношение h/λ мало). В этом случае $\operatorname{th} kh \approx kh$, и значит

$$c = \sqrt{gh}, \tag{11.7}$$

т. е. в случае малой глубины жидкости скорость распространения волн не зависит от их длины.

Дадим таблицу, позволяющую вычислять скорости распространения и периоды волн различной длины. Эта табличка была вычислена при помощи формул (11.2) и (11.5).

$\frac{\lambda}{h}$	0	0,5	1,0	3,0	5,0	10	30	50	100	∞
$\frac{c}{\sqrt{gh}}$	0,000	0,282	0,399	0,681	0,823	0,941	0,993	0,997	0,999	1,000
$\frac{c}{\sqrt{gl}}$	0,399	0,399	0,399	0,393	0,368	0,298	0,181	0,141	0,100	0,000
$c\sqrt{\frac{g}{h}}$	0,000	1,77	2,51	4,41	6,08	10,6	30,2	50,1	100,1	∞
$\tau\sqrt{\frac{g}{l}}$	2,51	2,51	2,51	2,54	2,72	3,36	5,52	7,09	10,01	∞

Найдем траектории частиц для случая прогрессивных волн, имеем:

$$v_x = \frac{agk}{\sigma}\,\frac{\operatorname{ch} k(z+h)}{\operatorname{ch} kh}\cos(kx-\sigma t),$$

$$v_z = \frac{agk}{\sigma}\,\frac{\operatorname{sh} k(z+h)}{\operatorname{ch} kh}\sin(kx-\sigma t),$$

следовательно:

$$x = x_0 - a\,\frac{\operatorname{ch} k(z_0+h)}{\operatorname{sh} kh}\sin(kx_0-\sigma t),$$

$$z = z_0 + a\,\frac{\operatorname{sh} k(z_0+h)}{\operatorname{sh} kh}\cos(kx_0-\sigma t).$$

Исключая время t, найдем уравнения траекторий частиц:

$$\frac{(x-x_0)^2}{\left[a\dfrac{\operatorname{ch} k(z_0+h)}{\operatorname{sh} kh}\right]^2}+\frac{(z-z_0)^2}{\left[a\dfrac{\operatorname{sh} k(z_0+h)}{\operatorname{sh} kh}\right]^2}=1. \qquad (11.8)$$

Траекториями частиц являются эллипсы с полуосями

$$\frac{a\operatorname{ch} k(z_0+h)}{\operatorname{sh} kh} \text{ и } \frac{a\operatorname{sh} k(z_0+h)}{\operatorname{sh} kh}.$$

При $z_0=-h$ движение будет совершаться только в горизонтальном направлении, ибо малая полуось обращается в нуль и эллипс переходит в отрезок прямой, лежащий на дне. Вращение частиц по эллипсам происходит для волн, распространяющихся в положительную сторону оси Ox, по часовой стрелке.

Интересно рассмотреть вопрос о групповой скорости для случая жидкости конечной глубины. Групповая скорость всегда определяется формулой (8.5)

$$U=\frac{dc}{dk};$$

в данном случае

$$U=\frac{d}{dk}\sqrt{\frac{g}{k}\operatorname{th} kh}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{k\operatorname{th} kh}}\left\{\operatorname{th} kh+\frac{kh}{\operatorname{ch}^2 kh}\right\}=$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{g\operatorname{th} kh}{k}}\left\{1+\frac{2kh}{\operatorname{sh} 2kh}\right\}=\frac{1}{2}c\left(1+\frac{2kh}{\operatorname{sh} 2kh}\right). \qquad (11.9)$$

выражение $x/\operatorname{sh} x$, имеющее при $x\to 0$ предел, равный 1, убывает все время при возрастании x и стремится к нулю при $x\to\infty$. Поэтому групповая скорость всегда не меньше половины скорости распространения отдельной волны и не больше самой этой скорости. В предельном случае очень малой глубины жидкости можно положить $h=0$ и тогда оказывается, что $U=c$, т. е. групповая скорость совпадает со скоростью распространения отдельной волны. Это и понятно, так как в рассматриваемом случае последняя скорость не зависит от длины волны. Это показывает на особую простоту случая малых глубин, который мы подробно рассмотрим в отделе о длинных и приливных волнах.

§ 12. Волны на поверхности раздела двух жидкостей. Рассмотрим в этом параграфе теорию плоских волн, происходящих под действием силы тяжести на поверхности раздела двух жидкостей разной плотности.

Пусть плотность нижней жидкости равна ρ, плотность верхней ρ'. Если бы обе жидкости находились в равновесии, границей раздела являлась бы горизонтальная плоскость. Примем эту плоскость за

плоскость Oxy и направим ось Oz вертикально вверх (рис. 164). Предположим, что глубины обеих жидкостей конечны и равны соответственно h и h', при этом будем считать, что нижняя жидкость ограничена снизу горизонтальной плоскостью уравнением которой, очевидно будет $z = -h$, и что верхняя жидкость ограничена сверху горизонтальной плоскостью $z = h'$. Сверх того предположим еще

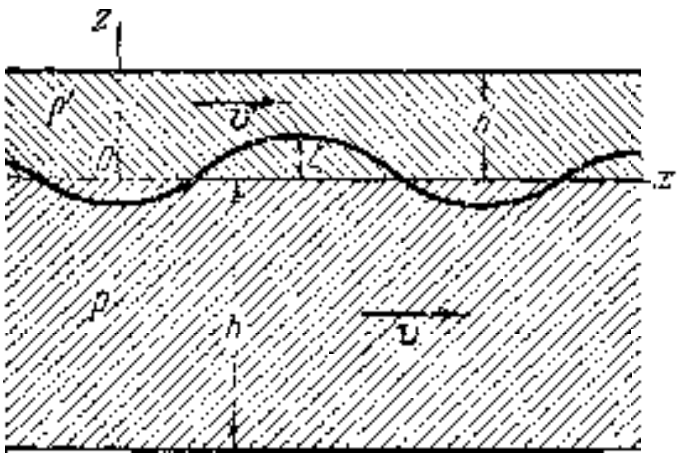

Рис. 164

что при отсутствии волн нижняя жидкость движется поступательно параллельно оси Ox со скоростью U, а верхняя со скоростью U' (при движении вдоль отрицательной оси Ox скорость U или U' считается отрицательной). Поэтому при отсутствии волн потенциалы скорости для нижней и верхней жидкости были бы соответственно: $\varphi = Ux$, $\varphi' = U'x$. При наличии волн на эти потенциалы надо наложить добавочные потенциалы φ_1 и φ_1'. Мы будем рассматривать прогрессивные волны. Тогда для нижней жидкости надо взять по предыдущему параграфу:

$$\varphi_1 = C \operatorname{ch} k(z + h) \sin(kx - \sigma t)$$

Для верхней жидкости надо взять

$$\varphi_1' = C' \operatorname{ch} k(z - h') \sin(kx - \sigma t),$$

чтобы удовлетворить условию

$$\frac{\partial \varphi_1'}{\partial z} = 0$$

при $z = h'$.

Итак,

$$\varphi = Ux + C \operatorname{ch} k(z + h) \sin(kx - \sigma t);$$

$$\varphi' = U'x + C' \operatorname{ch} k(z - h') \sin(kx - \sigma t).$$

Мы будем рассматривать волны определенной длины λ, следовательно, $k = 2\pi/\lambda$. Поэтому у нас остаются пока произвольными три величины C, C' и σ. Их надо определить из следующих трех условий:

1. Возьмем какую-либо частицу нижней жидкости, лежащую около самой поверхности раздела, уравнение которой: $z = \zeta(x, t)$. Так как рассматриваемая частица все время будет примыкать к поверхности раздела, то ее координаты x и z все время будут удовлетворять

только что написанному уравнению. Поэтому проекция скорости рассматриваемой частицы на вертикаль будет равна

$$v_z = \frac{dz}{dt} = \frac{\partial\zeta}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial\zeta}{\partial t},$$

но dx/dt есть горизонтальная скорость частицы v_x, а главная часть последней есть U, поэтому

$$v_z = \frac{\partial\zeta}{\partial x} U + \frac{\partial\zeta}{\partial t},$$

или так как $v_z = \frac{\partial\varphi}{\partial z}$, то и получаем окончательное следующее условие

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} = \frac{\partial\zeta}{\partial x} U + \frac{\partial\zeta}{\partial t}$$

при $z = 0$.

На самом деле это условие должно выполняться при $z = \zeta(x, t)$, но так как мы рассматриваем только бесконечно малые волны, то пренебрегая бесконечно малыми высшего порядка, получим как раз выписанное условие. За уравнение поверхности раздела в данном случае естественнее всего взять (см. предыдущий параграф):

$$\zeta(x, t) = a\cos(kx - \sigma t)$$

Вычисляя $(\partial\varphi/\partial z)_{z=0}$ и подставляя в найденное уравнение, легко получим:

$$Ck \operatorname{sh} kh = a(\sigma - kU).$$

2. Рассматривая какую-либо частицу верхней жидкости, лежащую около самой поверхности разрыва, получим условие

$$\frac{\partial\varphi'}{\partial z} = \frac{\partial\zeta}{\partial x} U' + \frac{\partial\zeta}{\partial t} \quad \text{при} \quad z = 0,$$

которое даст следующее соотношение:

$$-C'k \operatorname{sh} kh' = a(\sigma - kU').$$

3. Обозначим давление верхней жидкости через p', давление нижней через p; так как давление при переходе через поверхность разрыва должно меняться непрерывно, то при $z = \zeta$ должно выполняться условие

$$p = p'.$$

Давление p мы определяем по формуле

$$p = -\rho\frac{\partial\varphi}{\partial t} - \frac{1}{2}\rho w^2 - \rho V + \text{const} = -\rho\frac{\partial\varphi}{\partial t} - \frac{1}{2}\rho w^2 - \rho gz + \text{const},$$

в нашем случае

$$v^2 = v_x^2 + v_z^2 = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2 =$$
$$= [U + Ck \operatorname{ch} k(z+h)\cos(kx - \sigma t)]^2 +$$
$$+ [Ck \operatorname{sh} k(z+h)\sin(kx - \sigma t)]^2 =$$
$$= U^2 + 2UCk \operatorname{ch} k(z+h)\cos(kx - \sigma t) +$$
$$+ C^2k^2[\operatorname{ch}^2 k(z+h)\cos^2(kx - \sigma t) + \operatorname{sh}^2 k(z+h)\sin^2(kx - \sigma t)].$$

Последним членом, содержащим квадрат бесконечно малой величины C мы можем пренебречь; в предпоследнем же члене мы можем при вычислении v^2 для $z = \zeta$ заменить z на 0, так как этот член содержит уже множителем бесконечно малую величину C; такое же обстоятельство будет иметь место при вычислении $\partial\varphi/\partial t$. Поэтому

$$(p)_{z=\zeta} = C\rho\sigma \operatorname{ch} kh \cos(kx - \sigma t) - \frac{1}{2}\rho U^2 -$$
$$- UCk\rho \operatorname{ch} kh \cos(kx - \sigma t) - \rho g a \cos(kx - \sigma t) + \text{const};$$

точно так же вычислим:

$$(p')_{z=\zeta} = C'\rho'\sigma' \operatorname{ch} kh' \cos(kx - \sigma t) - \frac{1}{2}\rho' U'^2 -$$
$$- U'C'k\rho' \operatorname{ch} kh' \cos(kx - \sigma t) - \rho' g a \cos(kx - \sigma t) + \text{const}.$$

Приравнивая эти два выражения, получим третье условие:

$$C\rho(\sigma - kU)\operatorname{ch} kh - \rho g a = C'\rho'(\sigma' - kU')\operatorname{ch} kh' - \rho' g a,$$

к которому мы присоединим два ранее полученных:

$$Ck \operatorname{sh} kh = a(\sigma - kU); \quad -C'k \operatorname{sh} kh' = a(\sigma - kU').$$

Исключая C и C', получим уравнение, определяющее σ

$$\rho(\sigma - kU)^2 \operatorname{cth} kh + \rho'(\sigma - kU')^2 \operatorname{cth} kh' = (\rho - \rho')gk$$

Найдя из этого уравнения σ, из предыдущих уравнений определим C и C' и таким образом полностью решим задачу.

Скорость распространения получившихся волн определяется, как всегда, равенством

$$c = \frac{\sigma}{k};$$

внося поэтому в предыдущее уравнение вместо σ его значение ck, получим уравнение служащее для определения c:

$$\rho(c - U)^2 \operatorname{cth} kh + \rho'(c - U')^2 \operatorname{cth} kh' = \frac{(\rho - \rho')g}{k}.$$

Левая часть всегда положительна, значит, $\rho > \rho'$. Это показывает, что волны рассматриваемого нами типа могут существовать только в том случае, если более легкая жидкость лежит над более тяжелой; в противном случае амплитуда каждого малейшего возмущения будет сильно возрастать, т. е. основное движение обеих жидкостей будет неустойчиво. Но даже при $\rho > \rho'$ для некоторых длин волн будет неустойчивость основного движения. Предположим для простоты, что обе жидкости будут очень глубоки, так что можно принять $\operatorname{cth} kh = 1$ и $\operatorname{cth} kh' = 1$, тогда уравнение для определения c примет вид

$$\rho (c - U)^2 + \rho' (c - U')^2 = \frac{(\rho - \rho') g}{k}$$

и легко может быть решено

$$c = \frac{\rho U + \rho' U'}{\rho + \rho'} \pm \sqrt{\left(\frac{\rho U + \rho' U'}{\rho + \rho'}\right)^2 - \frac{\rho U^2 + \rho' U'^2}{\rho + \rho'} + \frac{(\rho - \rho') g}{k (\rho + \rho')}}$$

или

$$c = \frac{\rho U + \rho' U'}{\rho - \rho'} \pm \sqrt{\frac{g (\rho - \rho')}{k (\rho + \rho')} - \frac{\rho\rho' (U - U')^2}{(\rho + \rho')^2}}.$$

Чтобы c было вещественным, необходимо, чтобы подкоренное выражение было положительным. Это приводит к неравенству

$$(U - U')^2 \leqslant \frac{g (\rho^2 - \rho'^2)}{k\rho\rho'},$$

и если скорости потоков неодинаковы, то найдутся такие большие k, для которых это неравенство не будет выполняться. Но большим k отвечают малые длины волн, следовательно, основное движение будет неустойчиво по отношению к малым длинам волн. На самом деле при малых длинах волн нужно учитывать еще действие капиллярных сил (см. следующий параграф), которые действуют стабилизирующим образом и обеспечивают устойчивость основного движения при не очень больших разностях $U - U'$.

Отметим, что в еще более частном случае $U = U' = 0$, т. е. при отсутствии потоков, скорость распространения волн длины λ будет определяться по формуле

$$c = \sqrt{\frac{g (\rho - \rho')}{k (\rho + \rho')}} = \sqrt{\frac{g\lambda (\rho - \rho')}{2\pi (\rho + \rho')}}.$$

При $\rho' = 0$ мы получим знакомую формулу

$$c = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}.$$

Так как плотность воды в 770 раз больше плотности воздуха, то для системы вода и воздуха

$$\sqrt{\frac{\rho - \rho'}{\rho + \rho'}} \approx 1 - \frac{1}{770},$$

поэтому без большой ошибки можно не учитывать наличие воздуха при вычислении скорости распространения волн на воде.

§ 13. Капиллярные волны. В § 11 мы вывели [см. (11.5)], рассматривая жидкость глубины h, для скорости распространения прогрессивных волн длины λ, происходящих под действием силы тяжести, выражение

$$c = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi} \operatorname{th} \frac{2\pi h}{\lambda}};$$

однако оказывается, что для очень малых длин волн эта формула неверна, ибо для малых длин волн необходимо учитывать еще влияние так называемых капиллярных сил. Последние происходят от взаимодействия молекул жидкости друг на друга и имеют значительную величину только в очень тонком поверхностном слое жидкости. Возьмем какой-нибудь элемент поверхности жидкости, ограниченный кривой C. Действие капиллярных сил на этот элемент таково, как если бы к каждому элементу длины ds кривой C была приложена растягивающая элемент поверхности сила $\alpha\, ds$, перпендикулярная к ds и лежащая в касательной плоскости к поверхности жидкости. Величина α называется поверхностным натяжением жидкости; она зависит от рода жидкости и от ее температуры (вернее, от рода двух смежных жидкостей, так как обычно приходится рассматривать соприкосновение двух жидкостей например воды и воздуха). Для воды и воздуха при температуре 20° C $\alpha = 74$ *дин/см*.

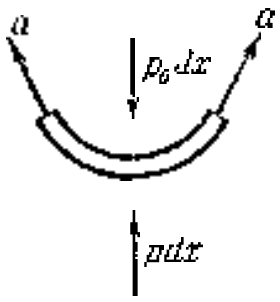

Рис. 165.

Рассмотрим влияние капиллярности на гравитационные волны. Ограничимся случаем плоских безвихревых волн, причем примем глубину жидкости равной h. Потенциал скорости φ должен удовлетворять уравнениям

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0, \\ &\frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0 \text{ при } z = -h, \end{aligned}\right\} \tag{13.1}$$

при этом давление p определяется внутри жидкости по формуле

$$\frac{p - p_0}{\rho} = -\frac{\partial\varphi}{\partial t} - gz.$$

Чтобы найти условие, которое должно выполняться на свободной поверхности, рассмотрим элемент поверхности длиною dx (ширину этого элемента в направлении оси Oy принимаем, как обычно, равной единице). Давление над элементом поверхности обозначим через p_0 (его считаем всюду постоянным), давление под тем весьма тонким слоем, в котором проявляются капиллярные силы, обозначим через p. Тогда четыре силы $p_0\,dx$, $p\,dx$, α и α, указанные на рис. 165,

должны находиться в равновесии, следовательно, сумма проекций этих четырех сил на вертикальную ось должна равняться нулю. Это дает

$$\left(\sigma \frac{d\zeta}{ds}\right)_{x+dx} - \left(\sigma \frac{d\zeta}{ds}\right)_{x} + (p - p_0)\, dx = 0.$$

Считая волны бесконечно малыми, мы можем заменить ds через dx и, следовательно, написать предыдущее равенство в виде

$$\frac{d}{dx}\left(\sigma \frac{d\zeta}{dx}\right) + p - p_0 = 0.$$

Поэтому условие на свободной поверхности напишется в следующей форме (σ, как постоянную выносим за знак производной):

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + g\zeta - \frac{\sigma}{\rho} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} = 0$$

при $z = 0$.

Продифференцируем это уравнение по t и заменим, как в § 2, $\partial\zeta/\partial t$ через $\partial\varphi/\partial z$. Мы получим окончательно для φ следующее условие:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{\sigma}{\rho} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x\, \partial x^2} = 0 \qquad (13.2)$$

при $z = 0$.

Итак, φ должно удовлетворять уравнениям (13.1) и (13.2). Двум первым уравнениям удовлетворяет, как известно из § 11, функция

$$\varphi = C \operatorname{ch} k(z + h) \sin(kx - \sigma t).$$

Подстановка этой функции в уравнение (13.2) дает для определения σ при заданном k уравнение

$$-\sigma^2 \operatorname{ch} kh + gk \operatorname{sh} kh + \frac{\sigma k^3}{\rho} \operatorname{sh} kh = 0$$

или

$$\sigma^2 = gk \operatorname{th} kh + \frac{\sigma k^3}{\rho} \operatorname{th} kh.$$

Для квадрата скорости прогрессивных волн $c^2 = \frac{\sigma^2}{k^2}$ мы получим выражение

$$c^2 = \left(\frac{g}{k} + \frac{\sigma k}{\rho}\right) \operatorname{th} kh \qquad (13.3)$$

Для случая очень глубокой жидкости можно принять $\operatorname{th} kh = 1$ и, следовательно,

$$c^2 = \frac{g}{k} + \frac{\sigma k}{\rho}$$

или, вспоминая, что $k = \frac{2\pi}{\lambda}$:

$$c^2 = \frac{g\lambda}{2\pi} + \frac{2\pi\sigma}{\rho\lambda}. \qquad (13.4)$$

Исследуем последнюю формулу, рис. 166 дает график $c(\lambda)$[1]: как при очень малых, так и при очень больших λ скорость c весьма велика; далее, производная

$$\frac{dc^2}{d\lambda} = \frac{g}{2\pi} - \frac{2\pi\alpha}{\rho\lambda^2}$$

обращается в нуль при

$$\lambda_m = 2\pi\sqrt{\frac{\alpha}{\rho g}}; \qquad (13.5)$$

при $\lambda < \lambda_m$ производная $\frac{dc^2}{d\lambda}$ отрицательна, при $\lambda > \lambda_m$ эта производная положительна. Значит, скорость распространения c при возрастании λ от 0 до ∞ сначала убывает от бесконечности до некоторого минимума c_m, а потом возрастает от c_m до бесконечности. Этот минимум c_m достигается при $\lambda = \lambda_m$ и определяется по формуле

$$c_m^2 = 2\sqrt{\frac{\alpha g}{\rho}}, \qquad (13.6)$$

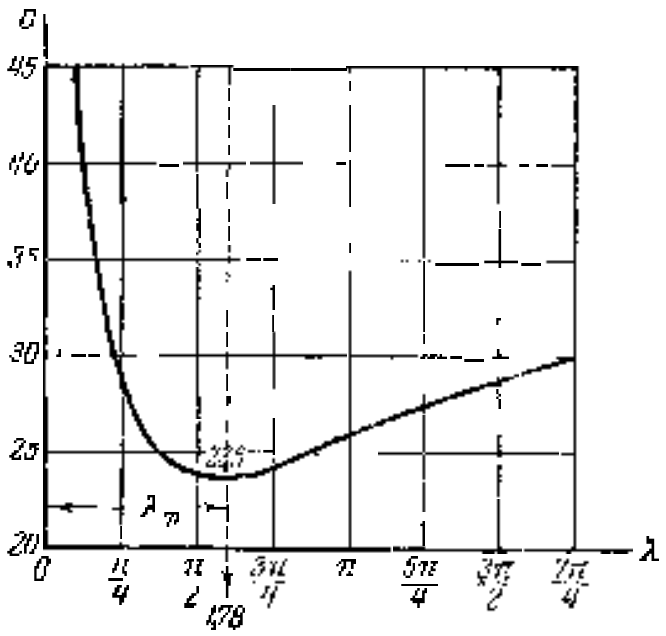

Рис. 166

легко проверить также следующие равенства:

$$c_m^2 = \frac{g\lambda_m}{\pi} = \frac{4\alpha}{\rho\lambda_m}.$$

Принимая их во внимание, можем переписать общую формулу (13.4) короче:

$$\frac{c^2}{c_m^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda}{\lambda_m} + \frac{\lambda_m}{\lambda}\right), \qquad (13.7)$$

причем сравнение с (13.4) показывает, что первый член происходит от гравитационных сил (так как в него не входит поверхностное натяжение α); второй же член происходит от капиллярных сил (в него не входит ускорение силы тяжести g).

Из формулы (13.7) видно, что при λ, больших в сравнении с λ_m, играет роль только первый член, следовательно, действием капиллярных сил в сравнении с действием силы тяжести можем пренебречь; наоборот при λ, малых в сравнении с λ_m, первый член играет очень малую роль и, значит, можно пренебречь действием силы тяжести. Волны с малой длиной волны ($l < \lambda_m$) называют *капиллярными волнами*, или *рябью*.

[1]) Численные значения параметров взяты для случая воды и воздуха (см. ниже).

Итак, скорость распространения гравитационных волн не может быть меньше некоторого минимума c_m.

Отметим еще что с одной и той же скоростью $c > c_m$ могут распространяться волны двух различных длин, ибо если некоторая длина λ удовлетворяет уравнению (13.7), то очевидно, что и длина λ_m^2/λ будет удовлетворять тому же уравнению. При этом одна из этих длин всегда будет больше, а другая меньше λ_m (ибо их произведение равно λ_m^2). Так, например, со скоростью $c = 2c_m$ будут распространяться волны, длины коих удовлетворяют уравнению

$$\left(\frac{\lambda}{\lambda_m}\right)^2 - 8\,\frac{\lambda}{\lambda_m} + 1 = 0,$$

откуда

$$\lambda = (4 \mp \sqrt{15})\,\lambda_m, \quad \lambda_1 = 7{,}873\,\lambda_m, \quad \lambda_2 = 0{,}127\,\lambda_m.$$

Укажем еще численное значение λ_m и c_m для случая воды и воздуха. В этом случае $\alpha = 74$, $\rho = 1$, $g = 981$ (в системе CGS), поэтому $\lambda_m = 1{,}78$ *см*, $c_m = 23{,}5$ *см/сек*.

Рябь обычно образуется впереди тела, перемещающегося в жидкости, если скорость этого перемещения не менее c_m.

§ 14. Волны конечной амплитуды. Во всех рассмотренных нами волновых движениях мы предполагали движения жидкости безвихревыми и колебания частиц бесконечно малыми. Только при этом предположении будут справедливы полученные нами результаты. Так например, мы нашли, что в движении с потенциалом скорости

$$\varphi = Ce^{kz}\sin(kx - \sigma t) \tag{14.1}$$

профиль волны имеет вид синусоиды амплитуда которой бесконечно мала. Эта синусоида перемещается вправо с постоянной скоростью c. Но если рассмотреть движение, в котором в первоначальный момент времени профиль волны имел вид синусоиды конечной амплитуды, то окажется, что такой профиль с течением времени будет изменять свою форму (конечно, мы не можем при изучении конечных колебаний жидкости пользоваться приближенными формулами). Профиль волны, который будет перемещаться без изменения своей формы, будет кривой более сложного типа, чем синусоида, мы ограничиваемся этими указаниями, не имея возможности входить в более подробное обсуждение этого вопроса [1])

---

[1]) В общем случае уравнения (для безвихревого движения) остаются линейными: так же как и в § 7, мы можем искать комплексный потенциал $w = \varphi + i\psi$ — аналитическую функцию от $x + iz$. Трудность здесь заключается в том, что краевое условие будет нелинейным. В качестве краевого условия мы имеем вдоль свободной поверхности на основании интеграла Бернулли — Эйлера (стр. 116) $-gz + \frac{1}{2}v^2 = \text{const}$. В теории струй (гл. VI, § 17) мы не принимали в расчет силы тяжести и нам достаточно было потребовать на струе условие $|v| = \text{const}$. В случае гравитационных волн мы должны,

Точно так же мы видели, что бесконечно малые колебания бесконечно глубокой жидкости, определяемые (14.1), таковы, что частицы жидкости движутся по круговым траекториям, радиус которых быстро убывает по мере того, как рассматриваются все более глубокие частицы. Для конечных колебаний и при отсутствии вихрей в вышеуказанном случае перемещения профиля волны без изменения своего вида траектории частиц будут более сложного характера, чем круги. Это будут незамкнутые кривые. При этом оказывается, что имеет место замечательное явление, а именно: при волновом движении рассматриваемого вида происходит (незначительный, правда) перенос жидкости в сторону перемещения профиля волны. Это обозначает, что если провести плоскость, перпендикулярную к направлению перемещения профиля волны (например, плоскость Oyz), то за большой промежуток времени через эту плоскость пройдет больше жидкости с одной стороны, чем с другой.

§ 15. Трохоидальные волны Герстнера. Случай круговых траекторий отдельных частиц в волновом движении с конечной амплитудой был рассмотрен Герстнером и Ранкином. Из вышесказанного следует, что рассмотренные ими движения не были безвихревыми. Это уменьшает физический интерес полученного ими решения, так как в начале этой главы мы видели, что волновые движения идеальной жидкости, обусловленные силами, имеющими потенциал, непременно должны быть безвихревыми.

Применим для решения рассматриваемой задачи переменные Лагранжа. Направим ось Ox горизонтально, ось Oy вертикально вверх. Лагранжевы координаты какой-либо частицы т. е. параметры, отличающие одну частицу от другой, обозначим через a и b. Формулы (6.9)

дифференцируя вдоль поверхности, написать

$$|v|\frac{\partial|v|}{\partial\varphi} - g\frac{\partial z}{\partial\varphi} = 0 \text{ на линии } \varphi = 0.$$

Но

$$\frac{dx - iz}{dw} = \frac{1}{|v|}e^{i\theta},$$

так что

$$\frac{\partial z}{\partial\varphi} = -\frac{\sin\theta}{|v|}.$$

Поэтому мы получим

$$|v|\frac{\partial|v|}{\partial\varphi} - g\frac{\sin\theta}{|v|} = 0.$$

С другой стороны, если $\lambda = -\ln|v|$, то λ и θ будут гармонически сопряженными функциями, так что $\partial\lambda/\partial\varphi = -\partial\theta/\partial\psi$. Окончательно получим

$$\frac{\partial\theta}{\partial\psi} = ge^{-2\varphi}\sin\theta \quad \text{при} \quad \varphi = 0$$

Это нелинейное условие и принимается обычно в исследованиях волн конечной амплитуды в безвихревом случае

паводят на мысль рассмотреть движение, в котором координаты x и y частицы, обладающей параметрами a и b, будут к моменту t:

$$\left.\begin{aligned} x &= a + Re^{kb}\sin(ka + \sigma t), \\ y &= b - Re^{kb}\cos(ka + \sigma t). \end{aligned}\right\} \tag{15.1}$$

Проверим, выполняются ли основные уравнения движения [глава II, (8.1) и (10.3)]. Затем надо будет удовлетворить еще граничному условию: давление p на свободной поверхности должно равняться постоянной величине p_0 (атмосферному давлению).

Прежде всего уравнение неразрывности (10.3) выполняется, ибо

$$\frac{D(x, y)}{D(a, b)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial a} & \frac{\partial x}{\partial b} \\ \frac{\partial y}{\partial a} & \frac{\partial y}{\partial b} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 + kRe^{kb}\cos(ka + \sigma t) & kRe^{kb}\sin(ka + \sigma t) \\ kRe^{kb}\sin(ka + \sigma t) & 1 - kRe^{kb}\cos(ka + \sigma t) \end{vmatrix} = 1 - k^2R^2e^{2kb};$$

следовательно:

$$\rho\frac{D(x, y)}{D(a, b)} = \rho(1 - k^2R^2e^{2kb}) \tag{15.2}$$

не зависит от времени, а это и выражает уравнение неразрывности в форме Лагранжа.

Проверяем основные уравнения движения:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} - X + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - Y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{15.3}$$

У нас $X = 0$, $Y = -g$, умножая первое уравнение на dx, второе на dy и складывая, получим:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}dx + \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}dy + g\,dy + \frac{1}{\rho}dp = 0. \tag{15.4}$$

Из (15.1) имеем:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = -R\sigma^2e^{kb}\sin(ka + \sigma t) = -\sigma^2(x - a),$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = R\sigma^2e^{kb}\cos(ka + \sigma t) = -\sigma^2(y - b),$$

поэтому

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}dx + \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}dy = -\sigma^2[(x - a)\,dx + (y - b)\,dy] =$$

$$= -\sigma^2[(x - a)\,d(x - a) + (y - b)\,d(y - b) +$$

$$+ (x - a)\,da + (y - b)\,db] =$$

$$= -\frac{\sigma^2}{2}d[(x - a)^2 + (y - b)^2] - \sigma^2[(x - a)\,da + (y - b)\,db].$$

Но

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2e^{2kb}$$

$$(x-a)\,da+(y-b)\,db=$$

$$=Re^{kb}\sin(ka+at)\,da-Re^{kb}\cos(ka+at)\,db=$$

$$=-\frac{R}{k}\,d\left[e^{kb}\cos(ka+at)\right].$$

Итак:

$$\frac{\partial^2x}{\partial t^2}\,dx+\frac{\partial^2y}{\partial t^2}\,dy=-d\left\{\frac{a^2R^2e^{2kb}}{2}-\frac{a^2Re^{kb}}{k}\cos(ka+at)\right\}.$$

Поэтому уравнение (15.4) можно проинтегрировать:

$$\frac{p}{\rho}+gy=\frac{a^2R^2e^{2kb}}{2}+\frac{a^2Re^{kb}}{k}\cos(ka+at)=C;$$

вставляя сюда значение y, получим окончательно.

$$\frac{p}{\rho}=-gb+\left(g-\frac{a^2}{k}\right)Re^{kb}\cos(ka+at)+\frac{a^2R^2e^{2kb}}{2}+C, \quad (15.5)$$

так что уравнения (15.3) удовлетворяются, если в них подставить найденное значение p

На свободной поверхности жидкости давление должно быть все время постоянным т. е. при всяком t должно быть $p=p_0$ значит,

$$\frac{p_0}{\rho}=-gb+\left(g-\frac{a^2}{k}\right)Re^{kb}\cos(ka+at)+\frac{a^2R^2e^{2kb}}{2}+C.$$

Так как время t входит только через косинус, то коэффициент при нем должен быть равен нулю:

$$a^2=gk, \quad (15.6)$$

и тогда

$$\frac{p_0}{\rho}=-gb+\frac{a^2R^2e^{2kb}}{2}+C.$$

Таким образом, для частиц, составляющих свободную поверхность, параметр b должен иметь одно и то же значение. Мы предположим для простоты, что это значение равно нулю, тогда

$$\frac{p_0}{\rho}=\frac{a^2R^2}{2}+C,$$

вычитая это уравнение из (15.5), получим для определения давления p формулу

$$\frac{p-p_0}{\rho}=-gb-\frac{a^2R^2}{2}(1-e^{2kb}). \quad (15.7)$$

Итак, если a определяется формулой

$$a^2=gk,$$

по формулы (15.1) и (15.7) определяют волновое движение, удовлетворяющее как точным дифференциальным уравнениям, так и условию на свободной поверхности.

§ 16. Свойства трохоидальных волн. Покажем, что полученное нами движение есть вихревое. Для этого вычислим вихрь скорости. Для составляющих скорости имеем:

$$\left.\begin{aligned} v_x &= \frac{\partial x}{\partial t} = Rce^{kb}\cos(ka+\sigma t) = -\sigma(y-b),\\ v_y &= \frac{\partial y}{\partial t} = Rce^{kb}\sin(ka+\sigma t) = \sigma(x-a), \end{aligned}\right\} \tag{16.1}$$

поэтому

$$\Omega_z = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} = \sigma\left[1-\frac{\partial a}{\partial x}+1-\frac{\partial b}{\partial y}\right] = \sigma\left(2-\frac{\partial a}{\partial x}-\frac{\partial a}{\partial y}\right).$$

Чтобы вычислить $\partial a/\partial x$, продифференцируем уравнения (15.1) по x, считая правые части сложными функциями от x и y:

$$1 = \frac{\partial x}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial x}+\frac{\partial x}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial x};\qquad 0 = \frac{\partial y}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial x}.$$

Решаем эти уравнения относительно $\partial a/\partial x$:

$$\frac{D(x,y)}{D(a,b)}\frac{\partial a}{\partial x} = \begin{vmatrix} 1 & \frac{\partial x}{\partial b}\\ 0 & \frac{\partial y}{\partial b}\end{vmatrix} = \frac{\partial y}{\partial b};$$

точно так же найдем:

$$\frac{D(x,y)}{D(a,b)}\frac{\partial b}{\partial y} = \frac{\partial x}{\partial a},$$

поэтому

$$\frac{\partial a}{\partial x}+\frac{\partial b}{\partial y} = \frac{\frac{\partial x}{\partial a}+\frac{\partial y}{\partial b}}{\frac{D(x,y)}{D(a,b)}} = \frac{2}{1-k^2R^2e^{2kb}},$$

и, значит,

$$\Omega_z = \sigma\left[2-\frac{2}{1-k^2R^2e^{2kb}}\right] = -\frac{2\sigma k^2R^2e^{2kb}}{1-k^2R^2e^{2kb}}.$$

Вихрь получился отличным от нуля, следовательно, имеем дело с вихревым движением; из формулы видно, что на свободной поверхности вихрь наибольший, при стремлении же b к $-\infty$ (что отвечает удалению в глубь жидкости) вихрь стремится к нулю.

Перейдем к исследованию полученного движения. На свободной поверхности жидкости $b=0$, следовательно:

$$\left.\begin{aligned} x &= a+R\sin(ka+\sigma t),\\ y &= -R\cos(ka+\sigma t). \end{aligned}\right\} \tag{16.2}$$

В § 6 такое движение частицы было исследовано. Мы видели, что каждая частица описывает окружность радиуса R в направлении против часовой стрелки (рис. 159), причем период вращения $\tau = 2\pi/\sigma$, а скорость частицы равна $R\sigma$. Две частицы с разными a будут находиться в одинаковой фазе, если разность углов $ka - \sigma t$ будет равна 2π; эти две частицы отстоят друг от друга на расстоянии $\lambda = 2\pi/k$, которое, очевидно, есть длина волны. Профиль волны (пунктирная кривая рис. 159) в определенный момент времени представляется в параметрической форме уравнениями (16.2), причем параметром является a. Примем для простоты $t = 0$; тогда вводя угол

$$\vartheta = ka \qquad a = \frac{\vartheta}{k},$$

получим:

$$x = \frac{1}{k}\vartheta + R\sin\vartheta, \qquad y = -R\cos\vartheta.$$

Как известно, это суть уравнения *трохоиды*, т. е. кривой вычерчиваемой некоторой точкой круга, катящегося по прямой линии. В самом деле, рассмотрим качение без скольжения круга радиуса $1/k$ по прямой, параллельной оси Ox и отстоящей от нее на расстояние $1/k$ кверху (рис. 167). Если круг повернется на угол ϑ, то центр круга переместится на расстояние $OO' = AB = \overset{\frown}{BA'} = \frac{1}{k}\vartheta$,

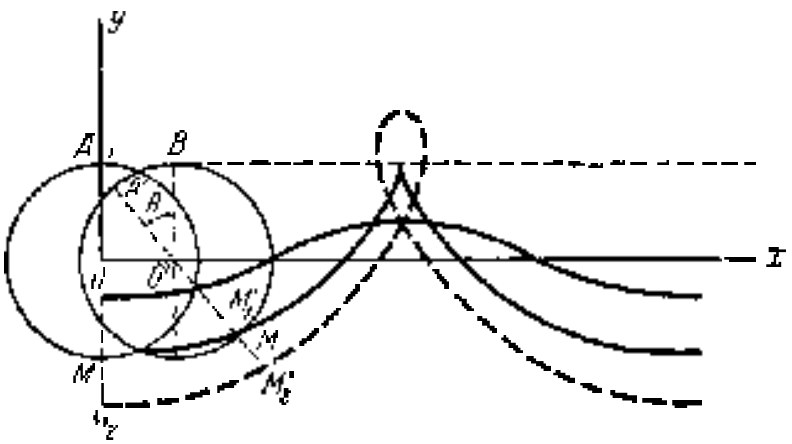

Рис. 167.

и потому координаты точки M', в которую перейдет точка M будут, очевидно, как раз

$$x = \frac{1}{k}\vartheta + R\sin\vartheta,$$

$$y = -R\cos\vartheta.$$

Если $R < 1/k$, то получается трохоида без петель, при $R = 1/k$ получается циклоида (она имеет точку возврата первого рода), наконец, при $R > 1/k$ получается трохоида с петлями. Последний случай очевидно, физически невозможен. Итак, мы должны считать

$$R \leqslant \frac{1}{k}.$$

Очевидно профиль волны перемещается влево со скоростью $c = \lambda/\tau$. Это было иллюстрировано рис. 159 § 6, на котором показан также способ получения профиля волны, очевидный из чертежа.

Сопоставим формулы, определяющие важнейшие элементы волны через длину волны λ:

$$\left.\begin{aligned} k &= \frac{2\pi}{\lambda}, \\ \text{угловая скорость вращения частиц:}\quad \omega &= \sqrt{\frac{2\pi g}{\lambda}}, \\ \text{период волн:}\quad \tau &= \sqrt{\frac{2\pi\lambda}{g}}, \\ \text{скорость распространения волн:}\quad c &= \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}. \end{aligned}\right\} \qquad (16\ 3)$$

Численные значения c и τ в зависимости от λ были даны в § 6.

Возьмем теперь любое значение $b < 0$. Если положить $r = Re^{kb}$, то получается:

$$x = a + r\sin(ka + \omega t),$$

$$y = b - r\cos(ka + \omega t),$$

и следовательно, мы можем повторить все наши рассуждения.

Частицы, у которых b одно и то же, образуют трохоиду, перемещающуюся влево с той же скоростью c. Как мы знаем, давление во всех точках этой трохоиды одно и то же, а именно:

$$p = p_0 - \rho g b - \frac{\rho\omega^2 R^2}{2}(1 - e^{2kb})$$

Так как

$$r = Re^{kb},$$

то радиусы окружностей, описываемых частицами, будут тем меньше, чем глубже лежит рассматриваемая частица.

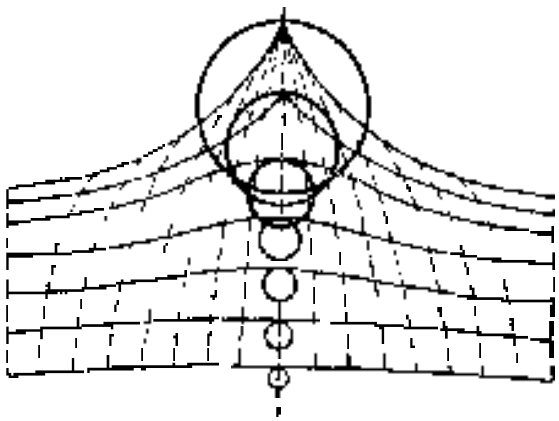

Рис. 168

Вся картина движения представляется рис. 168. Жирные линии представляют трохоиды, отвечающие равноотстоящим значениям b (любая из этих трохоид является поверхностью уровня и с поверхностью равного давления, и может потому служить свободной поверхностью жидкости); радиусы кругов убывают поэтому в геометрической прогрессии, наконец, пунктирные линии представляют линии, на которых лежат частицы, имеющие одинаковые координаты a.

Рассмотрим еще вопрос о том, как расположится жидкость при равновесии, т. е. каковы будут тогда координаты x_0 и y_0 частицы с лагранжевыми координатами a и b.

Напишем уравнения трохоиды, отвечающей постоянному значению параметра b:

$$x = a + Re^{kb} \sin ka,$$

$$y = b - Re^{kb} \cos ka.$$

Интеграл

$$S = \int_0^{\lambda} (y - b)\, dx$$

представляет площадь ограниченную трохоидой и прямой $y = b$ (части площади над этой прямой считаются положительными, под нею — отрицательными). Так как $dx = (1 + kRe^{kb} \cos ka)\, da$, то

$$S = -\int_0^{\lambda} Re^{kb} \cos ka\, (1 + kRe^{kb} \cos ka)\, da =$$

$$= -Re^{kb} \int_0^{\lambda} \cos ka\, da - kR^2 e^{2kb} \int_0^{\lambda} \cos^2 ka\, da.$$

Очевидно,

$$\int_0^{\lambda} \cos ka\, da = \left[\frac{\sin ka}{k}\right]_0^{\lambda} = \frac{\sin k\lambda}{k} - \frac{\sin 2\pi}{k} = 0,$$

$$\int_0^{\lambda} \cos^2 ka\, da = \frac{1}{2} \int_0^{\lambda} (1 + \cos 2ka)\, da = \frac{\lambda}{2},$$

значит,

$$S = -kR^2 e^{2kb} \frac{\lambda}{2} = -\pi R^2 e^{2kb}.$$

Поэтому если жидкость, лежащую под рассматриваемой трохоидой, представить находящейся в состоянии равновесия, то уравнение границы будет, очевидно:

$$y_0 = b - \frac{\pi R^2 e^{2kb}}{\lambda}.$$

В частности, при $b = 0$ получим, что уравнение свободной поверхности жидкости при равновесии будет:

$$y_0 = -\frac{\pi R^2}{\lambda}.$$

Значит, гребни волны лежат выше поверхности спокойной жидкости на величину $R+\frac{\pi R^2}{\lambda}$, подошвы же лежат ниже поверхности спокойной жидкости на величину $R-\frac{\pi R^2}{\lambda}$.

Что же касается зависимости между x_0 и a, то легко видеть, что $dx_0=da$; в самом деле, если рассмотреть в плоскости (a, b) элемент плоскости $da\,db$ то ему будет отвечать площадь в плоскости (x, y) равная

$$\frac{D(x, y)}{D(a, b)}\,da\,db=(1-k^2R^2e^{2kb})\,da\,db, \tag{16.4}$$

и площадь $dx_0\,dy_0$ при равновесном положении жидкости, так как эти площади должны быть равны, то

$$dx_0\,dy_0=(1-k^2R^2e^{2kb})\,da\,db,$$

но

$$dy_0=\left(1-\frac{R^2k^2e^{2kb}}{1}\right)db=(1-R^2k^2e^{2kb})\,db,$$

значит

$$dx_0=da.$$

Отметим еще, что площадь, заключенная между двумя соседними трохоидами и двумя вертикалями, отстоящими друг от друга на расстоянии, равном λ, будет по формуле (16.4) равна

$$db\int_0^{\lambda}\frac{D(x, y)}{D(a, b)}\,da=(1-k^2R^2e^{2kb})\,\lambda\,db. \tag{16.5}$$

Очевидно, что высота рассматриваемых волн равна $2R$. Так как $R\leqslant 1/k=\lambda/2\pi$, то эта высота никогда не может превзойти величины $\lambda/\pi\approx 0{,}32\lambda$.

Укажем еще, что предельным профилем волны у нас является циклоида, имеющая точку возврата первого рода. Теория показывает, что безвихревые волны имеют предельный профиль другого вида, а именно: он должен иметь угловую точку, в которой сходятся симметрично относительно вертикали две дуги, составляющие одна с другой угол в 120°; при этом высота этой предельной волны будет гораздо меньше, чем в случае трохоидальных волн, не достигая даже $0{,}15\lambda$.

§ 17. Энергия волн. В этом параграфе мы рассмотрим вопрос о том, из каких частей слагается энергия волн и как она передается от одной части жидкости к другой. Рассмотрим сначала волны несжимаемой жидкости, происходящие под действием силы тяжести. Тут энергия волн будет слагаться из кинетической энергии движения

отдельных частиц жидкости и из потенциальной энергии, происходящей от того, что центр тяжести жидкости при ее волновом движении лежит выше, чем при равновесии.

Рассмотрим сначала безвихревые периодические волны длины λ на жидкости конечной глубины h (при $h=\infty$ получаем случай бесконечно глубокой жидкости).

В этом случае

$$v_x=\frac{\partial\varphi}{\partial x},\quad v_z=\frac{\partial\varphi}{\partial z},\quad v^2=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2,$$

следовательно, живая сила, приходящаяся на длину λ, будет равна

$$T=\frac{1}{2}\rho\int_S\int\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right]dx\,dz,$$

где S обозначает заштрихованную на чертеже (рис. 169) область (толщину жидкости в направлении, перпендикулярном к плоскости Oxz, т. е. в направлении оси Oy, считаем равной единице). Применяя формулу Грина, получим:

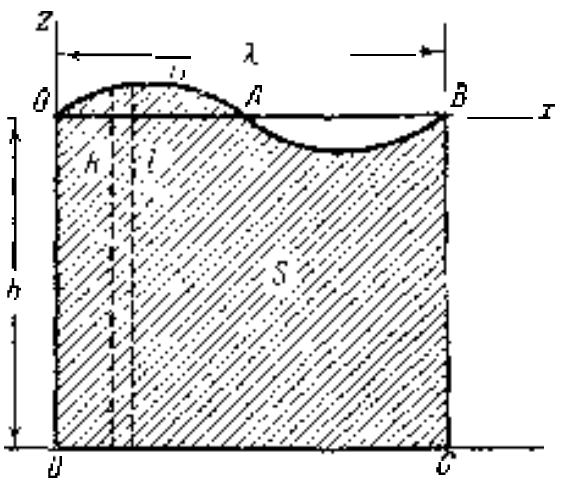

Рис. 169.

$$T=\frac{1}{2}\rho\int_L\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial n}\,ds,$$

где L обозначает контур площади S, n — внешнюю нормаль к L. Но интеграл по CD пропадет вследствие граничного условия $\partial\varphi/\partial n=0$. Значения функции φ в соответствующих точках вертикалей OD и BC будут вследствие периодичности движения одинаковыми, а значения $\partial\varphi/\partial n$ будут отличаться только знаком (так как нормали в соответствующих точках OD и BC направлены противоположно друг другу), значит,

$$\int_{OD+BC}\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial n}\,ds=0;$$

наконец, на OAB за направление внешней нормали можно принять направление оси Oz, а за ds можно принять dx. Итак:

$$T=\frac{1}{2}\rho\int_0^\lambda\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial z}\,dx. \tag{17.1}$$

Потенциальную энергию, приходящуюся на длину λ, мы вычислим следующим образом. Проведем две вертикальные плоскости, перпен-

дикулярные к оси Ox в двух точках k и l, и пусть $\overline{kl} = dx$. Тогда над осью Ox будет находиться объем жидкости $\zeta\, dx$, масса этого объема будет $\rho\zeta\, dx$, центр тяжести будет лежать на высоте $\zeta/2$ следовательно, потенциальная энергия силы тяжести будет равна (по известной формуле $V = mgz$)

$$\rho g \frac{\zeta^2}{2}\, dx,$$

а значит, потенциальная энергия, приходящаяся на длину λ, будет:

$$V = \frac{1}{2}\rho g \int_0^{\lambda} \zeta^2\, dx. \tag{17.2}$$

Так, например, для стоячих волн на жидкости конечной глубины h мы имеем [см. § 11, формулы (11.4)]:

$$\varphi = \frac{ag}{\sigma} \frac{\operatorname{ch} k(z+h)}{\operatorname{ch} kh} \sin kx \cos \sigma t \qquad (\sigma^2 = gk \operatorname{th} kh),$$

$$\zeta = a \sin kx \sin \sigma t,$$

следовательно произволя вычисления, имеем:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{agk \operatorname{sh} k(z+h)}{\sigma \operatorname{ch} kh} \sin kx \cos \sigma t,$$

$$T = \frac{1}{2}\rho \frac{a^2 g^2 k \operatorname{sh} kh}{\sigma^2 \operatorname{ch} kh} \cos^2 \sigma t \int_0^{\lambda} \sin^2 kx\, dx = \frac{1}{2}\rho a^2 g \frac{\lambda}{2} \cos^2 \sigma t,$$

ибо

$$gk \operatorname{th} kh = \sigma^2 \quad \text{и} \quad \int_0^{\lambda} \sin^2 kx\, dx = \frac{\lambda}{2}.$$

Итак:

$$T = \frac{\rho a^2 g \lambda}{4} \cos^2 \sigma t. \tag{17.3}$$

Аналогично вычисляется

$$V = \frac{1}{2}\rho g a^2 \sin^2 \sigma t \int_0^{\lambda} \sin^2 kx\, dx = \frac{\rho a^2 g \lambda}{4} \sin^2 \sigma t. \tag{17.4}$$

Отметим два обстоятельства: во-первых, сумма кинетической и потенциальной энергии постоянна:

$$T + V = \frac{\rho a^2 g \lambda}{4};$$

во-вторых, кинетическая и потенциальная энергии все время переходят друг в друга, причем средние их значения, взятые за промежуток времени, равный одному периоду $\tau = 2\pi/\sigma$, одинаковы, ибо

$$\int_0^\tau \cos^2 \sigma t \, dt = \int_0^\tau \sin^2 \sigma t \, dt = \frac{\tau}{2}.$$

Для прогрессивных волн мы имеем:

$$\varphi = \frac{ag}{\sigma} \frac{\operatorname{ch} k(z+h)}{\operatorname{ch} kh} \sin(kx - \sigma t), \quad \zeta = a\cos(kx - \sigma t);$$

и вычисление, аналогичное только что приведенному, дает:

$$T = V = \frac{\rho g a^2 \lambda}{4}, \tag{17.5}$$

так что здесь остаются постоянными и кинетическая и потенциальная энергии по отдельности.

В случае трохоидальных волн потенциальную энергию можно вычислить таким же образом.

Мы поступим, однако, иначе. А именно, рассмотрим две соседние трохоиды, отвечающие двум значениям b и $b + db$. Площадь заключенная между ними и двумя вертикалями, отстоящими друг от друга на расстоянии λ, равна

$$S = \lambda(1 - k^2 R^2 e^{2kb})\, db.$$

Центр тяжести частиц, составляющих эту площадь лежит, конечно, на прямой $y = b$, так как всякой частице, лежащей над этим уровнем, отвечает такая же частица, лежащая под ним. В равновесном же положении эти частицы лежат на прямой

$$y = b - \frac{\pi R^2 e^{2kb}}{\lambda}.$$

Значит, потенциальная энергия этого слоя частиц равна

$$g\rho\lambda(1 - k^2 R^2 e^{2kb}) \frac{\pi R^2 e^{2kb}}{\lambda} db.$$

а полная потенциальная энергия жидкости рассчитанная на длину волны, будет равна

$$V = g\rho\pi R^2 \int_{-\infty}^{0} (e^{2kb} - k^2 R^2 e^{4kb})\, db = g\rho\pi R^2 \left(\frac{1}{2k} - \frac{k^2 R^2}{4k}\right) =$$

$$= \frac{\lambda g \rho R^2}{4}\left[1 - \frac{2\pi^2 R^2}{\lambda^2}\right]. \tag{17.6}$$

Скорость каждой частицы равна, как мы знаем, $r\sigma = Re^{kb}\sigma$, следовательно, кинетическая энергия, рассчитанная на длину волны, будет:

$$T = \frac{1}{2}\rho R^2\sigma^2\lambda\int_{-\infty}^{0} e^{2kb}(1 - k^2R^2e^{2kb})\,db = \frac{\lambda g\rho R^2}{4}\left[1 - \frac{2\pi^2R^2}{\lambda^2}\right]. \quad (17.7)$$

Опять получается равенство кинетической и потенциальной энергии.

§ 18. Перенос энергии. Возьмем прогрессивную волну, например на бесконечно глубокой жидкости, так что

$$\varphi = \frac{ag}{\sigma}e^{kz}\sin(kx - \sigma t);$$

$$v_x = \frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{agk}{\sigma}e^{kz}\cos(kx - \sigma t) = ake^{kz}\cos(kx - \sigma t);$$

тогда давление определяется по формуле (2.12):

$$\frac{p - p_0}{\rho} = -\frac{\partial\varphi}{\partial t} - gz = age^{kz}\cos(kx - \sigma t) - gz.$$

Возьмем теперь какую-либо плоскость, перпендикулярную оси Ox, например плоскость Oyz, и вычислим, какая энергия переносится волнами через эту плоскость с отрицательной стороны оси Ox на положительную. Вычисление будем вести для полосы этой плоскости, ширина которой в направлении оси Oy равна единице.

Возьмем элемент dz этой полосы и подсчитаем работу сил давления на этот элемент за время dt; так как сила равна $p\,dz$, а проекция скорости на направление силы есть v_x, то проекция элементарного перемещения на то же направление будет $v_x\,dt$, и значит, искомая работа будет равна

$$pv_x\,dz\,dt = [a^2g\sigma\rho e^{2kz}\cos^2(kx - \sigma t) + (p_0 - \rho gz)\,ake^{kz}\cos(kx - \sigma t)]\,dz\,dt.$$

За один период $\tau = 2\pi/\sigma$ работа этих сил давления будет равна

$$a^2g\sigma\rho e^{2kz}\frac{\pi}{\sigma}\,dz = \pi a^2g\rho e^{2kz}\,dz.$$

а на всю рассматриваемую полосу эта работа будет:

$$W = \pi a^2g\rho\int_{-\infty}^{0} e^{2kz}\,dz = \frac{\pi a^2g\rho}{2k} = \frac{\pi a^2g\rho\lambda}{4\pi} = \frac{a^2g\rho\lambda}{4},$$

работа же, производимая в единицу времени, будет равна

$$W_1 = \frac{a^2g\rho}{4}\cdot\frac{\lambda}{\tau} = \frac{a^2g\rho}{4}c.$$

Этой формуле можно дать интересное истолкование. Введем для этого вместо c групповую скорость U по формуле $c = 2U$. Тогда мы получим:

$$W_1 = \frac{1}{2} a^2 g \rho U.$$

Но $\frac{1}{2} a^2 g \rho$ представляет приходящуюся на единицу длины полную энергию волн; мы видим, таким образом, что энергия волн переносится со скоростью, равной групповой скорости волн. Этот результат имеет место и в других случаях волновых движений.

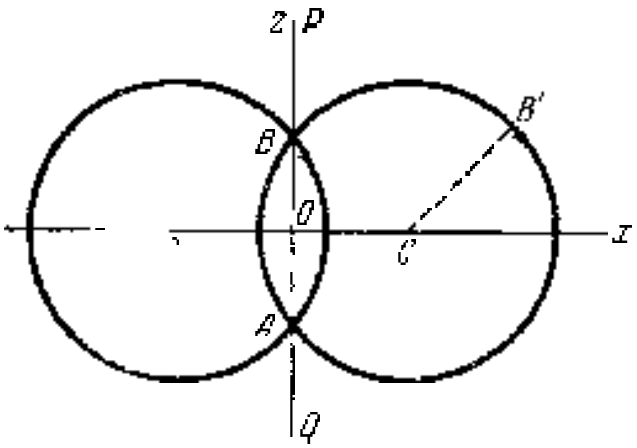

Рис. 170

Механизм переноса энергии легко объяснить для случая тромбидальных волн. Рассмотрим какую-либо вертикальную плоскость PQ (рис. 170), и пусть какая-либо частица пересекает эту плоскость; в течение одного периода эта частица пересечет плоскость дважды, ее кинетическая энергия при этом постоянна, следовательно, через плоскость PQ пройдет столько же кинетической энергии в одну сторону сколько в другую. Далее, давление для одной и той же частицы тоже все время постоянно, следовательно работа сил давления за все время одного периода уничтожится, ибо в точке A будет совершаться такая же отрицательная работа, какая в точке B совершалась положительная. Не так обстоит дело с потенциальной энергией. Как частица B, так и частица B' будут проходить через плоскость PQ слева направо над уровнем CC' а справа налево под уровнем CC' и, следовательно, будут переносить потенциальную энергию. При этом очевидно что потенциальная энергия будет перемещаться одновременно с формой волны, следовательно, со скоростью c. Так как потенциальная энергия равна половине полной энергии, то полная энергия будет перемещаться со скоростью $c/2$, а последняя скорость и есть как раз групповая скорость.

§ 19. Волновое сопротивление. Движение тела под свободной поверхностью. С вопросом о переносе энергии волнами тесно связан вопрос о волновом сопротивлении. Пусть, например, волны образуются позади корабля, перемещающегося со скоростью c, тогда скорость распространения этих волн будет равна c. Если энергию волн, приходящуюся на единицу длины, обозначить через E, то каждую секунду у нас будет образовываться добавочное количество волновой энергии cE (так как за единицу времени корабль будет перемещаться на c единиц длины). Но часть этой энергии была пере-

несет волнами, ранее образовавшимися, а именно эти волны переносят через каждую плоскость в единицу времени количество энергии $L\mathcal{L} = \frac{c}{2}L$. Оставшаяся часть энергии $(c - U)\mathcal{L} = \frac{c}{2}L$ должна быть получиться за счет какого-то другого источника энергии, в данном случае за счет корабля. Итак, каждую единицу времени корабль производит работу $cL/2$, идущую на образование волн. А так как перемещение корабля в единицу времени равно c, то испытываемое им сопротивление R определится по формуле

$$cR = \frac{cL}{2}, \quad \text{и значит,} \quad R = \frac{L}{2}. \tag{19.1}$$

Разберем вопрос о волновом сопротивлении несколько подробнее. Как всюду до сих пор, будем считать жидкость однородной, несжимаемой идеальной и подверженной только действию силы тяжести, а движение жидкости будем считать безвихревым.

В этих предположениях определим вынужденные волны, возникающие при движении тела с постоянной скоростью в горизонтальном направлении под свободной поверхностью жидкости, а также сопротивление, испытываемое телом, которое называется *волновым*, так как в рассматриваемом случае вся затрачиваемая телом энергия идет на образование волн. Мы ограничимся при этом изучением случая плоской задачи и бесконечно глубокой жидкости. В этом случае очень удобно пользоваться комплексными переменными. Поэтому целесообразно несколько изменить предыдущие обозначения. А именно, мы будем обозначать через Ox горизонтальную ось координат, лежащую на свободной поверхности жидкости, находящейся в состоянии равновесия, и через Oy – вертикальную ось, направленную вверх. Введем кроме того, комплексную переменную

$$z = x + iy$$

и комплексный потенциал скорости

$$w = \varphi + i\psi.$$

Рис. 171

Решим прежде всего задачу о вынужденных волнах, возникающих при движении вихря интенсивности Γ, находящегося на глубине h под свободной поверхностью жидкости и движущегося с постоянной скоростью c параллельно положительной оси Ox (рис. 171). Как в § 7, нам удобнее будет рассматривать установившееся движение, получающееся при наложении на предыдущее течение равномерного течения в направлении отрицательной оси Ox со скоростью c. Обозначая потенциал этого установившегося движения через $W = \Phi + i\Psi$, будем иметь,

$$W = w - cz, \quad \Phi = \varphi - cx, \quad \Psi = \psi - cy \tag{19.2}$$

В этом установившемся движении свободная граница жидкости L служит одновременно и линией тока и линией постоянного давления.

По формуле Бернулли мы имеем для давления p выражение

$$p = C - \frac{1}{2}\rho\left(v_x^2 + v_y^2\right) - \rho g y,$$

подставляя сюда выражения

$$v_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} - c, \quad v_y = \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \tag{19.3}$$

легко получим:

$$p = C - \frac{1}{2}\rho c^2 + \rho c \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{1}{2}\rho\left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2\right] - \rho g y \tag{19.4}$$

Мы будем считать образующиеся волны столь малыми, чтобы можно было на линии L пренебречь квадратами составляющих скорости $\partial\varphi/\partial x$ и $\partial\varphi/\partial y$ в предыдущей формуле; тогда она примет вид

$$p = C - \frac{1}{2}\rho c^2 + \rho c \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \rho g y \tag{19.5}$$

Обозначим постоянное на линии L давление через p_0 и будем считать, что впереди перед вихрем, т. е. при $x \to +\infty$, жидкость не взволнована, т. е. что при $x \to +\infty$ величины $\partial\varphi/\partial x$ и $\partial\varphi/\partial y$ стремятся к нулю и что

$$\lim_{x \to +\infty} \delta(x) = 0,$$

где $y = \delta(x)$ есть уравнение свободной границы жидкости L. Тогда из равенства (19.5) ясно, что

$$p_0 = C - \frac{1}{2}\rho c^2,$$

и следовательно, на свободной линии L должно выполняться равенство

$$g\delta(x) = c\frac{\partial \varphi}{\partial x}. \tag{19.6}$$

Ввиду малости величины δ, мы можем считать это равенство выполняющимся на оси Ox. Итак, мы получили граничное условие

$$g\delta(x) = c\frac{\partial \varphi(x, 0)}{\partial x}. \tag{19.7}$$

Второе условие мы получим, выразив, что линия L есть линия тока для установившегося движения, так что на линии L имеет место равенство

$$\Psi = \text{const}$$

ния, вследствие (19.2),

$$c\delta = \psi(x, \delta).$$

Заменяя в правой части этого равенства δ через 0, что можно сделать вследствие малости δ, мы приходим ко второму граничному условию:

$$c\delta = \psi(x, 0). \tag{19.8}$$

Исключая из (19.7) и (19.8) величину δ, приходим к следующему граничному условию для определения функции $w(z)$:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{g}{c^2}\psi \text{ при } y = 0$$

или

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \nu\psi \quad \text{при } y = 0, \tag{19.9}$$

где для краткости введено обозначение

$$\frac{g}{c^2} = \nu. \tag{19.10}$$

Вводя символ $\operatorname{Re} z$ для вещественной части комплексного числа и $\operatorname{Im} z$ для мнимой части этого числа, будем иметь:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \operatorname{Re}\frac{dw}{dz} = \operatorname{Im} i\frac{dw}{dz}; \quad \varphi = \operatorname{Im} w,$$

и следовательно условие (19.9) записывается в комплексной форме так:

$$\operatorname{Im}\left(i\frac{dw}{dz} - \nu w\right) = 0 \text{ при } y = 0. \tag{19.11}$$

Из этого условия вытекает, в частности, следующее:

$$\operatorname{Im}\left(i\frac{d^2w}{dz^2} - \nu\frac{dw}{dz}\right) = 0 \text{ при } y = 0. \tag{19.12}$$

Как было сказано, функция dw/dz должна стремиться по модулю к нулю при $x \to \pm\infty$. Кроме того, надо, очевидно, считать $|dw/dz|$ ограниченным при $|z| \to \infty$.

В том частном случае движения вихря, который мы сейчас рассматриваем, функция dw/dz должна быть голоморфна во всей полуплоскости $y \leqslant 0$ за исключением той точки, где находится вихрь. Пусть это будет точка $z = -ih$ с координатами $x = 0$, $y = -h$. Около этой точки функция $w(z)$ должна иметь вид

$$w(z) = \frac{\Gamma}{2\pi}\ln(z + ih) + g(z), \tag{19.13}$$

где $g(z)$ — голоморфная функция в окрестности точки $z = -ih$. Для функции dw/dz мы получили представление

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\Gamma}{2\pi i}\frac{1}{z+ih} + g'(z).$$

Образуем теперь функцию

$$f(z) = i\frac{d^2w}{dz^2} - \nu\frac{dw}{dz}.$$

Эта функция голоморфна во всей полуплоскости $y < 0$, кроме точки $z = -ih$, в окрестности которой мы имеем

$$f(z) = -\frac{\Gamma}{2\pi}\frac{1}{(z+ih)^2} - \frac{i\nu}{2\pi i}\frac{1}{z+ih} + f_1(z), \qquad (19.14)$$

где $f_1(z)$ — голоморфная функция в окрестности точки $z = -ih$.

Вследствие условия (19.12) функция $f(x)$ принимает вещественные значения на вещественной оси независимого переменного x. Но тогда эта функция, заданная в полуплоскости $y < 0$, может быть аналитически продолжена в верхнюю полуплоскость $y > 0$ по принципу симметрии Шварца. А именно, значения функции $f(z)$ в двух точках, симметричных относительно оси Ox, должны быть комплексно сопряженными, так что надо принять:

$$f(x+iy) = \overline{f(x-iy)}. \qquad (19.15)$$

При этом получится функция, аналитическая уже во всей плоскости комплексного переменного z. Эта функция имеет особенность в точке $z = -ih$, определяемую формулой (19.14); кроме того, она будет иметь особенность в точке $z = ih$, ибо из формул (19.14) и (19.15) вытекает, что в окрестности этой точки мы будем иметь представление

$$f(z) = -\frac{\Gamma}{2\pi}\frac{1}{(z-ih)^2} + \frac{i\nu}{2\pi i}\frac{1}{z-ih} + \overline{f_1(z)},$$

показывающее, что точка $z = ih$ является для функции $f(z)$ полюсом второго порядка. Никаких других особых точек на конечном расстоянии эта функция не имеет. Считая эту функцию голоморфной в окрестности бесконечно удаленной точки и обращающейся в нуль при $z \to \infty$, мы приходим к следующему ее выражению:

$$f(z) = i\frac{d^2w}{dz^2} - \nu\frac{dw}{dz} =$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\frac{1}{(z+ih)^2} - \frac{\Gamma\nu}{2\pi i}\frac{1}{z+ih} - \frac{\Gamma}{2\pi}\frac{1}{(z-ih)^2} + \frac{i\nu}{2\pi i}\frac{1}{z-ih}. \qquad (19.16)$$

Общим решением однородного уравнения

$$i\frac{d^2w}{dz^2} - \nu\frac{dw}{dz} = 0$$

является

$$w(z) = A + Be^{-i\nu z}.$$

Применяя для решения неоднородного уравнения (19.16) обычный метод вариации произвольных постоянных, считаем A и B функциями от z и приходим к следующим уравнениям для их определения:

$$\frac{dA}{dz} + \frac{dB}{dz}e^{-i\nu z} = 0,$$

$$\nu\frac{dB}{dz}e^{-i\nu z} = -\frac{\Gamma}{2\pi}\left\{\frac{1}{(z+ih)^2} - \frac{\nu i}{z+ih} + \frac{1}{(z-ih)^2} + \frac{\nu i}{z-ih}\right\}.$$

Считая функции A и B стремящимися к нулю, когда точка z уходит на бесконечность в направлении положительной вещественной оси, что мы будем кратко обозначать символом $z \to +\infty$, легко получим что

$$A = -\frac{\Gamma}{2\pi\nu}\left\{\frac{1}{z+ih} + \frac{1}{z-ih}\right\} + \frac{\Gamma}{2\pi i}\ln\frac{z+ih}{z-ih},$$

$$B = -\frac{\Gamma}{2\pi\nu}\int_{+\infty}^{z} e^{i\nu t}\left[\frac{1}{(t+ih)^2} + \frac{1}{(t-ih)^2} - \frac{\nu i}{t+ih} + \frac{\nu i}{t-ih}\right]dt.$$

Но интегрирование по частям дает формулы

$$\int_{+\infty}^{z}\frac{e^{i\nu t}}{(t+ih)^2}dt = -\int_{+\infty}^{z} e^{i\nu t}d\frac{1}{t+ih} = -\frac{e^{i\nu z}}{z+ih} + i\nu\int_{+\infty}^{z}\frac{e^{i\nu t}}{t+ih}dt,$$

$$\int_{+\infty}^{z}\frac{e^{i\nu t}}{(t-ih)^2}dt = -\frac{e^{i\nu z}}{z-ih} + i\nu\int_{+\infty}^{z}\frac{e^{i\nu t}}{t-ih}dt,$$

поэтому после очень простых вычислений находим следующую формулу для определения комплексного потенциала:

$$w(z) = \frac{\Gamma}{2\pi i}\ln\frac{z+ih}{z-ih} + \frac{\Gamma}{\pi i}e^{-i\nu z}\int_{+\infty}^{z}\frac{e^{i\nu t}}{t-ih}dt, \qquad (19.17)$$

Легко проверить, что это выражение комплексного потенциала удовлетворяет всем поставленным требованиям. Никакого другого

решения задачи, удовлетворяющего всем поставленным условиям, не существует. В самом деле, предположим, что есть еще другое решение задачи $w_1(z)$. Образуем разность

$$\tilde{w}(z) = w_1(z) - w(z)$$

Функция $w_1(z)$, подобно $w(z)$, должна в окрестности точки $z = -ih$ иметь вид

$$w_1(z) = \frac{T}{2\pi i} \ln(z + ih) + g_1(z),$$

где $g_1(z)$ — голоморфная функция в нижней полуплоскости поэтому функция $\tilde{w}(z)$ должна быть голоморфной в нижней полуплоскости $y < 0$. Она должна, далее, удовлетворять условию

$$\operatorname{Im}\left(i\frac{d\tilde{w}}{dz} - \nu\tilde{w}\right) = 0 \quad \text{при} \quad y \leq 0. \tag{19.18}$$

Поэтому функция

$$F(z) = i\frac{d\tilde{w}}{dz} - \nu\tilde{w}$$

может быть аналитически продолжена в верхнюю полуплоскость по принципу симметрии Шварца. Итак, $F(z)$ голоморфна во всей плоскости z, т. е. является целой функцией от z.

Величина $\left|\frac{d\tilde{w}}{dz}\right|$ ограничена во всей нижней полуплоскости: пусть

$$\left|\frac{d\tilde{w}}{dz}\right| < M,$$

пусть, еще

$$|\tilde{w}(0)| < N;$$

тогда из

$$\tilde{w}(z) = \tilde{w}(0) + \int_0^z \frac{d\tilde{w}}{dz}\,dz$$

следует неравенство

$$|\tilde{w}(z)| < N + M|z|,$$

поэтому мы имеем оценку

$$|F(z)| < M + \nu N + \nu M|z|.$$

Эта оценка доказана только для точек нижней полуплоскости; но так как в симметричных относительно вещественной оси точках функция $F(z)$ принимает комплексно сопряженные значения, то эта

оценка имеет место во всей плоскости. Но тогда из неравенства Коши следует, что $F'(z)$ есть линейная функция от z

$$F(z) = az + b,$$

где a и b — вещественные числа вследствие условия (19.18). Итак,

$$i\frac{d\tilde{w}}{dz} - \nu\tilde{w} = az + b.$$

Интегрируя это равенство, находим:

$$w(z) = Ce^{-i\nu z} - \frac{a}{\nu}z - \frac{b}{\nu} - \frac{ia}{\nu^2}, \qquad \frac{d\tilde{w}}{dz} = -i\nu Ce^{-i\nu z} - \frac{a}{\nu},$$

и так как по условию $\left|\frac{d\tilde{w}}{dz}\right|$ стремится к нулю, когда z стремится к ∞ вдоль положительной вещественной оси, то величины a и C должны равняться нулю, и следовательно,

$$\frac{d\tilde{w}}{dz} = 0,$$

чем и доказывается высказанное выше утверждение.

Определим теперь вид свободной поверхности жидкости. Для этого воспользуемся равенством (19.6)

$$\delta(x) = \frac{c}{g}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_{y=0} = \frac{c}{g}\operatorname{Re} w'(x).$$

Дифференцируя равенство (19.17), найдем:

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\Gamma}{2\pi i}\left\{\frac{1}{z+ih} + \frac{1}{z-ih}\left[-\frac{\Gamma\nu}{\pi}e^{-i\nu z}\int_{+\infty}^{z}\frac{e^{i\nu t}}{t-ih}\,dt\right.\right. \qquad (19.19)$$

Полагая в этой формуле $z = x$ и отделяя вещественную часть, легко находим, что

$$\delta(x) = -\frac{\Gamma}{\pi c}\int_{+\infty}^{x}\frac{t\cos\nu(t-x) - h\sin\nu(t-x)}{t^2+h^2}\,dt. \qquad (19.20)$$

Очевидно, что

$$\lim_{x\to+\infty}\delta(x) = 0,$$

так что на далеких расстояниях перед вихрем свободная поверхность жидкости приближается к горизонтальной, как и должно быть.

Иная картина имеет место далеко позади вихря. Заметим прежде всего, что мы имеем равенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\nu t}}{t-ih}\,dt = 2\pi i e^{-\nu h};$$

в самом деле, стоящий слева интеграл, взятый по всей вещественной оси, может быть дополнен интегралом, взятым по полуокружности бесконечно большого радиуса, расположенной в верхней полуплоскости, ибо значение интеграла по этой полуокружности стремится к нулю, когда радиус полуокружности стремится к бесконечности; но в верхней полуплоскости лежит единственный полюс $t = ih$ функции, стоящей под знаком интеграла; находя вычет функции в этой точке и помножая его на $2\pi i$, мы и получаем значение интеграла. Мы можем написать:

$$\int_{-\infty}^{z} \frac{e^{i\nu t}}{t-ih}\,dt = \int_{-\infty}^{x} \frac{e^{i\nu t}\,dt}{t-ih} + \int_{-\infty}^{z} \frac{e^{i\nu t}\,dt}{t-ih} = -2\pi i e^{-\nu h} + \int_{-\infty}^{z} \frac{e^{i\nu t}\,dt}{t-ih},$$

поэтому мы можем написать также

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\Gamma}{2\pi i}\left\{\frac{1}{z+ih} + \frac{1}{z-ih}\right\} + 2\Gamma i e^{-\nu h} e^{-i\nu z} - \frac{\Gamma i}{\pi} e^{-i\nu z} \int_{-\infty}^{z} \frac{e^{i\nu t}\,dt}{t-ih}.$$

Исходя отсюда, получим для $\delta(x)$ выражение

$$\delta(x) = \frac{2\Gamma}{c} e^{-\nu h} \sin \nu x - \frac{\Gamma}{\pi c} \int_{-\infty}^{x} \frac{t\cos\nu(t-x) - h\sin\nu(t-x)}{t^2+h^2}\,dt. \qquad (19.21)$$

Интеграл в правой части стремится к нулю при $x \to -\infty$, следовательно, при очень больших отрицательных значениях x мы будем иметь приближенное равенство

$$\delta(x) \approx \frac{2\Gamma}{c} e^{-\nu h} \sin \nu x, \qquad (19.22)$$

показывающее, что далеко позади вихря свободная граница жидкости имеет вид синусоиды, амплитуда которой имеет значение

$$a = \frac{2\Gamma}{c} e^{-\nu h} = \frac{2\Gamma}{c} e^{-\frac{gh}{c^2}}. \qquad (19.23)$$

Длина волны определяется формулой

$$\lambda = \frac{2\pi}{\nu} = \frac{2\pi c^2}{g}.$$

Это есть, очевидно, длина тех прогрессивных волн, которые распространяются по поверхности бесконечно глубокой жидкости со скоростью c.

Вычислим еще силу, действующую на вихрь. Если проекции этой силы на оси Ox и Oy обозначить соответственно через X и Y, то по известной формуле Чаплыгина будем иметь:

$$Y - iX = -\frac{\rho}{2}\oint\left(\frac{dW}{dz}\right)^2 dz,$$

где интеграл берется по любому замкнутому контуру, охватывающему вихрь.

Пользуясь формулой (19.2), напишем:

$$\frac{dW}{dz} = \frac{\Gamma}{2\pi i}\frac{1}{z+ih} + \alpha(z),$$

где

$$\alpha(z) = -\nu + \frac{\Gamma}{2\pi i}\frac{1}{z-ih} - \frac{1}{\pi}\nu e^{-\nu z}\int_{-\infty}^{z}\frac{e^{\nu t}\,dt}{t-ih}$$

есть, очевидно, голоморфная функция в нижней полуплоскости. Поэтому вычет функции

$$\left(\frac{dW}{dz}\right)^2 = -\frac{\Gamma^2}{4\pi^2}\frac{1}{(z+ih)^2} + \frac{\Gamma\alpha(z)}{\pi i(z+ih)} + \alpha^2(z)$$

в точке $z = -ih$, в которой расположен вихрь, равняется $\frac{\Gamma\alpha(-ih)}{\pi i}$, и по теореме вычетов мы получаем:

$$\oint\left(\frac{dW}{dz}\right)^2 dz = 2\Gamma\alpha(-ih).$$

Итак,

$$Y + iX = -\rho\Gamma\alpha(-ih) = \rho\Gamma\nu - \frac{\rho\Gamma^2}{4\pi h} + \frac{\rho\Gamma\nu}{\pi}e^{-\nu h}\int_{-\infty}^{-ih}\frac{e^{\nu t}\,dt}{t+ih}.$$

Вводя в последнем интеграле вместо t новую переменную u формулой

$$u = \nu(t - ih),$$

мы можем привести его к виду

$$\int_{+\infty}^{-2\nu h}\frac{e^{\nu t}\,dt}{t-ih} = e^{-\nu h}\int_{-\infty}^{-2\nu h}\frac{e^u}{u}\,du,$$

При этом необходимо подчеркнуть, что в плоскости t путь интегрирования должен был целиком лежать в нижней полуплоскости, в плоскости же u он должен лежать в верхней полуплоскости.

Функция

$$\int_{-\infty}^{x} \frac{e^u}{u}\, du = Ei(x)$$

носит название интегральной показательной функции. Если x положительно и путь интегрирования лежит в верхней полуплоскости, то интеграл можно брать по вещественной оси, обходя точку $u = 0$ сверху по бесконечно малой полуокружности. Так как вычет подынтегральной функции в этой точке равен 1, то значение интеграла по упомянутой бесконечно малой полуокружности равно $-\pi i$. Поэтому мнимая часть $Ei(x)$ равна $-\pi$, введем, далее, обозначение

$$Ei_1(x) = \operatorname{Re} Ei(x);$$

тогда будем иметь равенство

$$Ei(x) = Ei_1(x) - \pi i,$$

предполагая путь интегрирования расположенным в верхней полуплоскости.

Итак, мы получаем равенство

$$Y + iX = \rho\Gamma c - \frac{\rho\Gamma^2}{4\pi h} + \frac{a\Gamma^2\nu}{\pi} e^{-2\nu h} Ei_1(2\nu h) - i\rho\Gamma^2\nu e^{-2\nu h},$$

отделяя в этом равенстве вещественные и мнимые части и подставляя вместо ν его значение g/c^2, получим окончательные формулы:

$$\left.\begin{aligned} X &= -\frac{2\rho\Gamma^2}{c^2} e^{-\frac{2gh}{c^2}}, \\ Y &= \rho c\Gamma - \frac{\rho\Gamma^2}{4\pi h} + \frac{\rho g\Gamma^2}{\pi c^2} e^{-\frac{2gh}{c^2}} Ei_1\left(\frac{2gh}{c^2}\right). \end{aligned}\right\} \tag{19.24}$$

Первая из этих формул определяет волновое сопротивление

$$R = -X = \frac{2\rho\Gamma^2}{c^2} e^{-\frac{2gh}{c^2}}; \tag{19.25}$$

мы могли бы определить его и по общей формуле, приведенной в начале этого параграфа:

$$R = E = \frac{1}{4}\rho g a^2,$$

подставляя вместо амплитуды образующихся волн a ее значение (19.23).

Из этой последней формулы видно, что амплитуда волн, а вместе с тем и волновое сопротивление, уменьшается по показательному

закону с увеличением глубины погружения вихря. Что же касается зависимости волнового сопротивления от скорости движения вихря, то простое исследование показывает, что при очень малых и очень больших скоростях c волновое сопротивление очень мало, оно достигает максимальной величины при $c = \sqrt{2gh}$.

Вторая из формул (19.24) показывает, что подъемная сила вихря слагается из двух частей, подъемной силы Жуковского $\rho c\Gamma$ и добавочной подъемной силы:

$$\frac{\rho\Gamma^2}{4\pi h}\left\{\frac{4gh}{c^2}e^{-\frac{2gh}{c^2}}Ei_1\left(\frac{2gh}{c^2}\right)-1\right\}, \tag{19.26}$$

которая имеет положительный знак при малых скоростях c, отрицательный при больших скоростях и обращается в нуль при $\sqrt{\frac{c}{gh}} \approx 1{,}57$.

Задача о вынужденных волнах, возникающих при движении источника интенсивности Q, решается аналогичным образом. Мы приведем поэтому только окончательные формулы. Комплексный потенциал $w(z)$ имеет в этом случае следующее значение:

$$w(z) = \frac{Q}{2\pi}\ln(z^2+h^2) - \frac{Q}{\pi}e^{-i\nu z}\int_{+\infty}^{z}\frac{e^{i\nu t}}{t-ih}\,dt, \tag{19.27}$$

для комплексной скорости получаем выражение

$$\frac{dw}{dz} = \frac{Q}{2\pi}\left\{\frac{1}{z+ih} - \frac{1}{z-ih}\right\} + \frac{iQ\nu}{\pi}e^{-i\nu z}\int_{+\infty}^{z}\frac{e^{i\nu t}}{t-ih}\,dt, \tag{19.28}$$

профиль волны определяется уравнением

$$\delta(x) = -\frac{Q}{\pi c}\int_{+\infty}^{x}\frac{t\sin\nu(t-x)+h\cos\nu(t-x)}{t^2+h^2}\,dt,$$

причем

$$\lim_{x\to+\infty}\delta(x) = 0$$

и при $x \to -\infty$ мы имеем приближенное равенство

$$\delta(x) \approx \frac{2Q}{c}e^{-\nu h}\cos\nu x, \tag{19.29}$$

так что амплитуда образующихся волн равна

$$a = \frac{2Q}{c}e^{-\nu h}, \tag{19.30}$$

Составляющие силы, действующей на источник, определяются формулами:

$$\left.\begin{aligned} X &= \rho c Q - \rho g \frac{Q^2}{c^2} e^{-\frac{2gh}{c^2}}, \\ Y &= -\frac{\rho Q^2}{4\pi h} + \frac{\rho g Q^2}{\pi c^2} e^{-\frac{2gh}{c^2}} Ei_1\left(\frac{2gh}{c^2}\right). \end{aligned}\right\} \tag{19.31}$$

Первая из этих формул показывает, что на источник действует тянущая сила ρcQ, которая имеет место и в безграничном потоке жидкости, и, кроме того, сила волнового сопротивления, которая опять-таки может быть выражена через амплитуду образующихся волн по общей формуле, приведенной в начале этого параграфа. Подъемная же сила Y совпадает с выражением (19.26) добавочной подъемной силы, получившейся в случае вихря, если только мы заменим в этом выражении Γ на Q.

Заметим теперь следующее. Если мы примем правую часть формулы (19.28), дающую выражение комплексной скорости для случая источника, за выражение нового комплексного потенциала

$$w_1(z) = \frac{Q}{2\pi}\left\{\frac{1}{z+ih} - \frac{1}{z-ih}\right\} + \frac{iQ\nu}{\pi} e^{-i\nu z} \int_{+\infty}^{z} \frac{e^{i\nu t}}{t-ih}\, dt, \tag{19.32}$$

то мы удовлетворим, как легко видеть, всем поставленным выше требованиям. Очевидно, что в точке $z = -ih$ мы имеем диполь с моментом, направленным по оси Ox, следовательно, предыдущая формула определяет волны, возбуждаемые при движении диполя под свободной поверхностью жидкости.

Аналогично мы могли бы определить движение, соответствующее диполю с моментом, направленным по оси Oy или имеющим произвольное направление, а также движения, соответствующие особенностям более высокого порядка.

Комбинируя такие движения, нетрудно получить волны, возбуждаемые при движении параллельно оси Ox круга радиуса b, центр которого находится на глубине h. В самом деле, комплексный потенциал движения безграничной жидкости определяется в этом случае формулой

$$w_0(z) = -\frac{cb^2}{z+ih} + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln(z+ih), \tag{19.33}$$

показывающей, что это движение можно считать наложением двух течений, одного происходящего от диполя с моментом, направленным по оси Ox, и другого, происходящего от вихря интенсивности Γ.

Полагая в формуле (19.32) $Q = -2\pi c b^2$ и складывая получающийся потенциал с потенциалом (19.17) приходим к искомой формуле

$$w(z) = -cb^2\left\{\frac{1}{z+ih} - \frac{1}{z-ih}\right\} + \frac{\Gamma}{2\pi i}\ln\left(\frac{z+ih}{z-ih}\right) + \\ + \frac{\Gamma + 2\pi\nu c b^2}{\pi i} e^{-\nu z}\int_{+\infty}^{z} \frac{e^{\nu t}}{t-ih}\,dt.$$

Амплитуда образующихся далеко позади тела волн дается формулой

$$a = \frac{2}{c} e^{-\nu h}(\Gamma + 2\pi\nu c b^2), \tag{19.34}$$

а для волнового сопротивления и подъемной силы получаются следующие выражения:

$$R = -X = \rho\nu(\Gamma + 2\pi\nu c b^2)^2 e^{-2\nu h},$$

$$Y = \rho c\Gamma - \frac{\rho\Gamma^2}{4\pi h} - \frac{\rho\Gamma c b^2}{2h^2} - \frac{2\cdot\Gamma\nu c b^2}{h} - \frac{\rho\pi c^2 b^4}{2h^3} - \frac{2\pi\nu c^2 b^4}{h^2} - \frac{2\rho\pi\nu^2 b^4\Gamma^2}{h} + \\ + \frac{\rho\nu}{\pi}(\Gamma + 2\pi\nu c b^2)^2 e^{-2\nu h}Ei_1(2\nu h) + \pi\rho g b^2. \tag{19.35}$$

последний член формулы для Y представляет собою подъемную силу Архимеда

Полагая $b = 0$, приходим к формулам (19.24) для случая вихря. Для случая $\Gamma = 0$ получаем, подставляя значение $\nu = g/c^2$:

$$\left.\begin{aligned} R &= \frac{4\pi^2\rho g^3 b^4}{c^4} e^{-\frac{2gh}{c^2}}, \\ Y &= -\frac{\rho\pi c^2 b^4}{2h^3}\left[1 + 2\frac{gh}{c^2} + 4\left(\frac{gh}{c^2}\right)^2 - 8\left(\frac{gh}{c^2}\right)^3 e^{-\frac{2gh}{c^2}}Ei_1\left(\frac{2gh}{c^2}\right) - 2\frac{gh^3}{c^2b^2}\right]. \end{aligned}\right\} \tag{19.36}$$

Волновое сопротивление быстро уменьшается с увеличением глубины h, при заданной глубине h волновое сопротивление R мало при очень малых и очень больших скоростях c и достигает максимального значения при $c = \sqrt{gh}$

Рассмотрим теперь волны, возбуждаемые при движении произвольного контура C параллельно оси Ox с постоянной скоростью c. Сделаем предварительное следующее замечание.

Если мы сложим оба изученных нами выше течения (19.19 и 19.28), то получим волны, возбуждаемые вихреисточником, причем

мы будем считать последний находящимся в точке $\zeta = \xi + i\eta$. Мы будем иметь тогда формулу:

$$\frac{dw}{dz} = \frac{1}{2\pi i}\left\{\frac{\Gamma + iQ}{z-\zeta} + \frac{\Gamma - iQ}{z-\bar{\zeta}}\right\} - \frac{(\Gamma - iQ)\nu}{\pi} e^{-\nu z}\int_{-\infty}^{z}\frac{e^{\nu t}}{t - \bar{z}}\,dt \quad (19.37)$$

Для образующихся далеко позади вихреисточника волн легко находим складывая выражения (19.22) и (19.29), где x надо заменить на $x - \xi$ и h на $-\eta$, выражение

$$\delta(x) \approx \frac{2e^{\nu\eta}}{c}\left[\Gamma \sin\nu(x-\xi) + Q\cos\nu(x-\xi)\right] =$$

$$= \operatorname{Im}\left\{\frac{2(\Gamma - iQ)}{c} e^{i\nu(x-\zeta)}\right\}. \quad (19.38)$$

Обозначим теперь через $w_0(z)$ комплексный потенциал скорости того течения, которое получается при движении контура C в безграничной жидкости. В этом случае dw_0/dz есть голоморфная функция в области, внешней по отношению к контуру C, и по формуле Коши мы имеем равенство

$$\frac{dw_0}{dz} = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{dw_0}{d\zeta}\frac{d\zeta}{z-\zeta} = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{dw_0(\zeta)}{z-\zeta},$$

где ζ есть переменная точка контура C и контур C пробегается в положительном направлении. Мы видим, что движение жидкости можно считать происходящим вследствие наличия на контуре C ряда вихреисточников, причем на элементе $d\zeta$ расположен вихрь $d\varphi_0$ и источник $d\psi_0$.

Но тогда, заменяя в формуле (19.37) $\Gamma + iQ$ на $dw_0(\zeta)$ и производя интегрирование по контуру C, мы получаем волновое движение вызванное только что описанным распределением вихреисточников. Это волновое движение можно считать первым приближением к тому, которое вызывается движением контура C. На самом деле, в силу наличия свободной поверхности, произойдет некоторое изменение величин вихрей и источников, расположенных на контуре C. Это изменение, очевидно, тем меньше, чем глубже находится контур. Таким образом, рассматриваемое приближение тем лучше, чем больше погружение контура C.

Итак, в первом приближении мы находим формулу

$$\frac{dw}{dz} = \frac{1}{2\pi i}\left\{\oint_C \frac{dw_0(\zeta)}{z-\zeta} + \oint_C \frac{\overline{dw_0(\zeta)}}{z-\bar{\zeta}}\right\} - \frac{\nu}{\pi} e^{-\nu z}\oint_C\int_{+\infty}^{z}\frac{e^{\nu t}\,dz}{t-\bar{\zeta}}\,\overline{dw_0(\zeta)}. \quad (19.39)$$

Для профиля волн, образующихся далеко за телом, находим, пользуясь формулой (19.38), выражение

$$\delta(x) \simeq \operatorname{Im}\left[\frac{2}{c} e^{i\nu x} \oint_C e^{-i\nu\zeta} dw_0(\zeta)\right].$$

Введем в рассмотрение функцию

$$H(\nu) = \oint_C e^{-i\nu\zeta} dw_0(\zeta); \tag{19.40}$$

тогда получим:

$$\delta(x) \simeq \operatorname{Im}\left[\frac{2}{c} H(\nu) e^{i\nu x}\right]. \tag{19.41}$$

Следовательно амплитуда образующихся волн имеет выражение

$$a = \frac{2}{c} |H(\nu)|. \tag{19.42}$$

А тогда для волнового сопротивления мы находим, применяя формулу, приведенную в начале этого параграфа,

$$R = \frac{1}{4} g\rho a^2 = \frac{g\rho}{c^2} |H(\nu)|^2 = \frac{g\rho}{c^2} \left| H\left(\frac{g}{c^2}\right)\right|^2. \tag{19.43}$$

Рассмотрим два примера. Пусть контур C есть круг радиуса b центр которого находится на глубине h, и пусть циркуляция скорости вдоль контура C имеет заданное значение Γ. Для движения цилиндра в бесконечном потоке мы имеем формулу (19.33) поэтому, пользуясь формулой (19.40), находим:

$$H(\nu) = \oint_C e^{-i\nu\zeta} \left\{ \frac{cb^2}{(\zeta + ih)^2} + \frac{\Gamma}{2\pi i} \frac{1}{\zeta + ih} \right\} d\zeta.$$

Производя разложение подынтегральной функции в ряд Лорана в окрестности точки $\zeta = -ih$ легко находим:

$$e^{-i\nu\zeta} \left\{ \frac{cb^2}{(\zeta + ih)^2} + \frac{\Gamma}{2\pi i} \frac{1}{\zeta + ih} \right\} =$$

$$= e^{-\nu h} \left\{ \frac{cb^2}{(\zeta + ih)^2} + \left[\frac{\Gamma}{2\pi i} - i\nu cb^2 \right] \frac{1}{\zeta + ih} + \dots \right\},$$

следовательно, по теореме вычетов

$$H(\nu) = e^{-\nu h}(\Gamma + 2\pi i cb^2).$$

Таким образом, амплитуда образующихся волн имеет значение

$$a = \frac{2}{c} e^{-\nu h}(\Gamma + 2\pi i cb^2) = \frac{2}{c}\left(\Gamma + \frac{2\pi g b^2}{c}\right) e^{-\frac{gh}{c^2}},$$

для волнового же сопротивления получаем выражение

$$R = \frac{k\rho}{c^2}\left(\Gamma + \frac{2\pi g h^2}{c}\right)^2 e^{-\frac{2gh}{c^2}};$$

оба эти выражения совпадают с найденными выше выражениями.

В качестве второго примера рассмотрим случай, когда контур C есть эллипс центр которого находится на глубине h и оси которого 2α и 2β направлены параллельно осям координат Ox и Oy. Значение циркуляции Γ примем для простоты равным нулю. В этом случае обтекание контура C потоком безграничной жидкости определяется при помощи вспомогательной переменной u формулами

$$z = -ih - \frac{1}{2}\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}\left(u + \frac{1}{u}\right),$$

$$w = -\frac{c}{2}\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}\left(u - \frac{r^2}{u}\right),$$

где $r = \sqrt{\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}}$ и $|u| = r$ есть уравнение той окружности в плоскости u, которая соответствует контуру эллипса C. Внешности эллипса соответствует внешность этой окружности. Составляем по формуле (19.40) функцию

$$H(\nu) = \oint_C e^{-i\nu z}\,dw =$$

$$= \oint_{|u|=r} e^{-\nu h} e^{-i\frac{\nu}{2}\sqrt{\alpha^2-\beta^2}\left(u+\frac{1}{u}\right)}\left(-\frac{c}{2}\sqrt{\alpha^2-\beta^2}\right)\left(1-\frac{r^2}{u^2}\right)du.$$

Производя подстановку $u = iv$ получим:

$$H(\nu) = -\frac{ic}{2}\sqrt{\alpha^2-\beta^2}\,e^{-\nu h}\oint_{|v|=r} e^{\frac{\nu}{2}\sqrt{\alpha^2-\beta^2}\left(v-\frac{1}{v}\right)}\left(1+\frac{r^2}{v^2}\right)dv.$$

Но из теории функций Бесселя известно, что

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{|v|=r} e^{\frac{z}{2}\left(v-\frac{1}{v}\right)}\frac{dv}{v^{n+1}} = J_n(z);$$

поэтому

$$H(\nu) = -\pi i\sqrt{\alpha^2-\beta^2}\,e^{-\nu h}\left[J_{-1}\left(\nu\sqrt{\alpha^2-\beta^2}\right) + r^2 J_1\left(\nu\sqrt{\alpha^2-\beta^2}\right)\right];$$

воспользовавшись еще формулой

$$J_{-1}(z) = -J_1(z)$$

и вышеуказанным значением r, получим:

$$H(\nu) = 2\pi c\beta \sqrt{\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}}\, e^{-\nu h} J_1\left(\nu \sqrt{\alpha^2-\beta^2}\right) \qquad (19\,44)$$

Таким образом, амплитуда волн возбуждаемых при движении эллипса, имеет значение

$$a = 4\pi\beta \sqrt{\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}}\, e^{-\nu h} J_1\left(\nu \sqrt{\alpha^2-\beta^2}\right), \qquad (19\,45)$$

для волнового же сопротивления получаем формулу

$$R = \rho c H(\nu)^2 = 4\pi^2 \rho g \beta^2 \frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta} e^{-\frac{2gh}{c^2}} J_1^2\left(\frac{g\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}{c^2}\right). \qquad (19\,46)$$

§ 20. Волны в сжимаемой жидкости. Обтекание воздухом горного хребта. В предыдущих параграфах, посвященных волнам, мы ограничивались рассмотрением несжимаемой жидкости. В этом параграфе рассмотрим пример волн, образующихся под действием силы тяжести в бароклинной сжимаемой среде. Ограничимся рассмотрением стационарных волн, возникающих при адиабатическом движении около цилиндрического препятствия. В бесконечной среде, заполненной несжимаемой жидкостью, безотрывное обтекание профиля, обладающего симметрией относительно оси, перпендикулярной к направлению потока на бесконечности, будет симметрично относительно этой оси. Напротив, если обтекаемый профиль расположен под свободной поверхностью, то симметрия потока даже в случае симметричного профиля нарушается благодаря появлению сзади профиля волн. Волны, получающиеся из-за наличия свободной поверхности, всегда имеют одну и ту же длину:

$$\frac{2\pi}{\nu} = \frac{2\pi c^2}{g};$$

за счет бароклинности возникают волны разных длин (одновременно существует конечное число таких волн). Волны эти хорошо известны метеорологам по облакам, возникающим с подветренной стороны хребта. Подробный анализ влияния бароклинности был дан впервые в работах Дородницына[1]). Результаты Дородницына мы здесь и изложим.

Обратимся к общей системе уравнений гидромеханики и выпишем ее для стационарной плоской задачи. Направим ось y вертикально вверх, а ось x — горизонтально.

---

[1]) Дородницын А. А., Возмущения воздушного потока, вызванные неровностями местности. Труды Главной геофизической обсерватории, вып. 23, 1938; Дородницын А. А., Влияние рельефа земной поверхности на воздушные течения. Труды Центрального института прогнозов, вып. 21, 1950.

Мы должны удовлетворить двум уравнениям движения:

$$\rho\left(v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)=-\frac{\partial p}{\partial x}, \tag{20.1}$$

$$\rho\left(v_x\frac{\partial v_y}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_y}{\partial y}\right)=-\frac{\partial p}{\partial y}-g\rho, \tag{20.2}$$

уравнению неразрывности

$$\frac{\partial\rho v_x}{\partial x}+\frac{\partial\rho v_y}{\partial y}=0 \tag{20.3}$$

и уравнению притока энергии (см. гл. II, § 11) — условию адиабатичности движения.

$$v_x\frac{\partial}{\partial x}\frac{p}{\rho^k}+v_y\frac{\partial}{\partial y}\frac{p}{\rho^k}=0 \tag{20.4}$$

Таким образом, мы имеем для определения четырех функций v_x, v_y, p, ρ — четыре уравнения.

Обратимся к краевым условиям. Мы рассмотрим обтекание неровности земной поверхности установившимся воздушным потоком, который вдали от поверхности вверх по течению становится горизонтальным. Скорость этого невозмущенного потока U нам известна как функция от высоты. Распределение плотности по высоте ρ_∞ в невозмущенном движении вдали от неровности вверх по течению есть известная функция от высоты y. Наконец, распределение давления p_∞ в невозмущенном движении также будет известно и связано с ρ_∞ барометрической формулой

$$\frac{dp_\infty}{dy}=-g\rho_\infty. \tag{20.5}$$

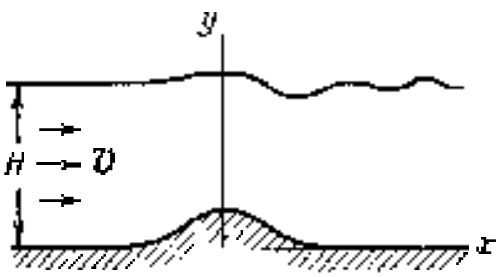

Рис. 172.

Будем считать, что движение происходит в некоторой полосе (струе), ширина которой H вдали от неровности вверх по течению нам задана (рис. 172). Над этой полосой жидкость покоится. Пусть уравнение неровности имеет вид

$$y=\zeta(x).$$

В качестве одного из краевых условий мы должны потребовать равенства нулю нормальной составляющей скорости на поверхности $y=\zeta$:

$$(v_y)_{y=\zeta}=\frac{d\zeta}{dx}(v_x)_{y=\zeta}. \tag{20.6}$$

Далее, на верхней границе потока мы должны иметь равенство давлений при переходе из области движения в область покоя. Пусть уравнение поверхности струи имеет вид

$$y=H+\eta(x), \tag{20.7}$$

В покоящейся среде мы будем иметь давление $p_в(y)$. Поэтому мы должны написать:

$$(p)_{y=H+\eta} = (p_в)_{y=H+\eta}. \tag{20.8}$$

Вид функции $\eta(x)$ заранее не известен. Чтобы поверхность (20.7) была поверхностью тока, мы должны потребовать равенства

$$(v_y)_{y=H+\eta} = \frac{d\eta}{dx}(v_x)_{y=H+\eta}. \tag{20.9}$$

Представим наши искомые функции в виде

$$\left.\begin{aligned} v_x &= U(y) + v'_x(x, y), \quad v_y = v'_y(x, y); \\ p &= p_0(y) + p'(x, y); \quad \rho = \rho_0(y) + \rho'(x, y). \end{aligned}\right\} \tag{20.10}$$

При отсутствии препятствия $v'_x = v'_y = p' = \rho' = 0$. Будем считать, что неровность $y = \zeta$ и образующиеся возмущения столь малы, что можно пренебречь всюду квадратами величин, снабженных штрихами. Тогда уравнение (20.1) запишется в виде

$$\rho_0 U\frac{\partial v'_x}{\partial x} + \rho_0 v'_y\frac{dU}{dy} = -\frac{\partial p'}{\partial x}. \tag{20.11}$$

Уравнение (20.2), если принять в расчет (20.5), запишется так

$$\rho_0 U\frac{\partial v'_y}{\partial x} = -\frac{\partial p'}{\partial y} - g\rho'. \tag{20.12}$$

Уравнение неразрывности (20.3) даст нам:

$$\frac{\partial \rho_0 v'_x}{\partial x} + \frac{\partial \rho' U}{\partial x} + \frac{\partial \rho_0 v'_y}{\partial y} = 0. \tag{20.13}$$

Так как

$$\frac{p}{\rho^\varkappa} = \frac{p_0 + p'}{(\rho_0+\rho')^\varkappa} = \frac{p_0}{\rho_0^\varkappa}\frac{1+\frac{p'}{p_0}}{\left(1+\frac{\rho'}{\rho_0}\right)^\varkappa} = \frac{p_0}{\rho_0^\varkappa}\left(1+\frac{p'}{p_0} - \varkappa\frac{\rho'}{\rho_0} + \dots\right),$$

то (20.4) заменится уравнением

$$\frac{p_0}{\rho_0^\varkappa}U\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{p'}{p_0} - \varkappa\frac{\rho'}{\rho_0}\right) + v'_y\frac{d}{dy}\frac{p_0}{\rho_0^\varkappa} = 0. \tag{20.14}$$

В краевом условии (20.6) пренебрежем приращением $\frac{d\zeta}{dx}\cdot v'_x$; с точностью до малых второго порядка (20.6) можно записать в виде

$$(v'_y)_{y=0} = (U)_{y=0}\frac{d\zeta}{dx}. \tag{20.15}$$

Далее, так как η считается малым, то

$$(p)_{y=H+\eta} = p_\infty(H+\eta) + (p')_{y=H+\eta} = p_\infty(H) + \left(\frac{dp_\infty}{dy}\right)_{y=H}\eta + (p')_{y=H}$$

и

$$(p_в)_{y=H+\eta} = p_в(H) + \left(\frac{dp_в}{dy}\right)_{y=H}\eta;$$

если использовать (20.5) и аналогичное уравнение, связывающее $p_в(y)$ и плотность $\rho_в(y)$ верхнего слоя, то (20.8) можно записать теперь так:

$$(p')_{y=H} = g(\rho_\infty)_{y=H}\left[1 - \left(\frac{\rho_в}{\rho_\infty}\right)_{y=H}\right]\eta \qquad (20.16)$$

(предполагается, вообще говоря, наличие скачка плотности при переходе из струи в верхнюю среду). Наконец, (20.9) примет вид

$$(v'_y)_{y=H} = (U)_{y=H}\frac{d\eta}{dx}. \qquad (20.17)$$

Исключая η из уравнений (20.16) и (20.17), получим

$$(\rho_\infty v'_y)_{y=H} = \frac{U(H)}{g}\left[1 - \frac{\rho_в(H)}{\rho_\infty(H)}\right]^{-1}\left(\frac{\partial p'}{\partial x}\right)_{y=H}. \qquad (20.18)$$

Итак, задача сводится к определению четырех функций v'_x, v'_y, p', ρ' из четырех уравнений (20.11) — (20.14) при краевых условиях (20.15), (20.18).

Исключим все функции, кроме v'_y. Для этого решим сначала (20.14) относительно $\frac{\partial\rho'}{\partial x}$. Получим:

$$\frac{\partial\rho'}{\partial x} = \frac{\rho_\infty}{\varkappa p_\infty}\frac{\partial p'}{\partial x} + \frac{\rho_\infty v'_y}{U}\frac{d\ln\vartheta}{dy}, \qquad (20.19)$$

где $\vartheta = p_\infty/\rho_\infty$. Подставляя это выражение в (20.13), будем иметь

$$\frac{\rho_\infty}{\varkappa p_\infty}U\frac{\partial p'}{\partial x} + \frac{\partial\rho_\infty v'_x}{\partial x} + \frac{\partial\rho_\infty v'_y}{\partial y} + \rho_\infty v'_y\frac{d\ln\vartheta}{dy} = 0, \qquad (20.20)$$

или, если исключить $\frac{\partial p'}{\partial x}$ при помощи (20.11),

$$\left(1 - \frac{U^2\rho_\infty}{\varkappa p_\infty}\right)\frac{\partial\rho_\infty v'_x}{\partial x} + \frac{\partial\rho_\infty v'_y}{\partial y} + \left(\frac{d\ln\vartheta}{dy} - \frac{\rho_\infty U}{\varkappa p_\infty}\frac{dU}{dy}\right)\rho_\infty v'_y = 0. \qquad (20.21)$$

С другой стороны, дифференцируя (20.12) по x и исключая при помощи (20.19) и (20.11) ρ' и p', получим

$$U^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\rho_\infty v_x')+\frac{g}{U^2}\frac{d\ln\vartheta}{dy}\rho_\infty v_y'-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{dU}{dy}\rho_\infty v_y'\right)-$$

$$-\frac{g\rho_\infty^2}{\varkappa p_\infty}\frac{dU}{dy}v_y'=\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}(U\rho_\infty v_y')+\frac{g\rho_\infty}{\varkappa p_\infty}U\frac{\partial\rho_\infty v_x'}{\partial x}. \quad (20.22)$$

Исключая из (20.21) и (20.22) $\frac{\partial p_\infty v_x'}{\partial x}$, получим одно уравнение для определения $\rho_\infty v_y'$. Обозначая

$$\rho_\infty v_y'=M, \quad (20.23)$$

получим для M уравнение

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 M}{\partial y^2}+A(y)\frac{\partial M}{\partial y}+B(y)M=0, \quad (20.24)$$

где

$$\left.\begin{aligned}A(y)&=\frac{1}{1-U^2/a_\infty^2}\left[-\frac{g}{\varkappa RT_\infty}+\frac{d\ln\vartheta}{dy}-\right.\\&\qquad\left.-\frac{U^2}{a_\infty^2}\frac{d\ln U}{dy}-\frac{d}{dy}\ln\left(1-\frac{U^2}{a_\infty^2}\right)\right],\\B(y)&=\frac{1}{1-U^2/a_\infty^2}\left\{\left[\frac{g^2}{U^2}+\frac{d\ln U}{dy}-\frac{d}{dy}\ln\left(1-\frac{U^2}{a_\infty^2}\right)\right]\times\right.\\&\times\left.\left(\frac{d\ln\vartheta}{dy}-\frac{U^2}{a_\infty^2}\frac{d\ln U}{dy}\right)+\frac{d^2\ln\vartheta}{dy^2}-\frac{d}{dy}\left(\frac{U^2}{a_\infty^2}\frac{d\ln U}{dy}\right)\right\}-\frac{1}{U}\frac{d^2U}{dy^2},\end{aligned}\right\} \quad (20.25)$$

где $a_\infty^2=\varkappa\frac{p_\infty}{\rho_\infty}=\varkappa RT_\infty$ — квадрат скорости звука. Выражения для A и B могут быть значительно упрощены. Заметим сначала, что ϑ может быть выражено через p_∞ и T_∞:

$$\vartheta=p_\infty^{1/\varkappa}\rho_\infty^{-1}=RT_\infty p_\infty^{-\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}.$$

Поэтому

$$\frac{d\ln\vartheta}{dy}=\frac{1}{T_\infty}\frac{dT_\infty}{dy}-\frac{\varkappa-1}{\varkappa p_\infty}\frac{dp_\infty}{dy}.$$

Выражая (20.51) и обозначая $\frac{dT_0}{dy}=-\gamma$, получим:

$$\frac{d\ln\vartheta}{dy}=\left(\frac{\varkappa-1}{\varkappa}\frac{g}{F}-\gamma\right)\frac{1}{T_\infty}.$$

Если температура нагой струи на большом расстоянии вверх по течению T_∞ не зависит от высоты ($\gamma = 0$), и если скорость U тоже постоянна, то A и B будут строго постоянными.

В обычных условиях в атмосфере γ имеет порядок $\gamma \approx 5 \times 10^{-5}$ *град/см*, величина же $\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}\frac{g}{R} \approx \frac{0{,}1}{1{,}4}\frac{9{,}8 \cdot 10^2}{2{,}87 \cdot 10^6} \approx 10^{-4}$ *град·см*$^{-1}$. Так как $T_\infty \approx 250°$, то величина $\frac{d \ln a}{dy}$ имеет порядок $4 \cdot 10^{-7}$ *см*$^{-1}$. С другой стороны, $\frac{d \ln U}{dy}$ имеет порядок 10^{-6} *см*$^{-1}$, ибо величина U увеличивается вообще говоря с высотой вдвое на расстоянии порядка 10 *км*. Обычно в атмосфере U имеет порядок 10^3 *см сек*$^{-1}$; в то же время $a_\infty \approx 3{,}3 \cdot 10^4$ *см сек*$^{-1}$. Поэтому $(U/a_\infty)^2 \approx 10^{-3}$ и мы можем с большой точностью отбросить в A и B все члены, содержащие U^2/a^2 (и производные от них). Ориентируясь еще на порядок величины $\frac{d \ln U}{dy}$, можно записать приближенно

$$A \approx \left(\frac{g}{R} - \gamma\right)\frac{1}{T_\infty}, \tag{20.26}$$

$$B \approx -\frac{g}{U^2 T_\infty}\left(\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}\frac{g}{R} - \gamma\right) + \frac{d}{dy}\left[\frac{1}{T_\infty}\left(\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}\frac{g}{R} - \gamma\right)\right] - \frac{1}{U}\frac{d^2 U}{dy^2}. \tag{20.27}$$

Наибольший интерес представляет случай, когда T_∞ линейно зависит от высоты ($\gamma = \text{const}$) и в то же время T_∞ мало меняется по сравнению со своим средним значением T_1. В этом случае мы можем, после того как дифференцирование по y выполнено, считать T_∞ постоянным, равным T_1. Тогда имеем

$$A = \left(\frac{g}{R} - \gamma\right)\frac{1}{T_1} = \text{const}, \tag{20.28}$$

$$B = -\frac{g}{U^2 T}\left(\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}\frac{g}{R} - \gamma\right)\left(1 + \frac{U^2}{gT}\right) - \frac{1}{U}\frac{d^2 U}{dy^2}. \tag{20.29}$$

Перейдем к безразмерным координатам x_1, y_1:

$$x = x_1 H, \quad y = y_1 H. \tag{20.30}$$

Подстановка

$$m = e^{\frac{1}{2}\left(\frac{g}{R} - \gamma\right)\frac{Hy}{T_1}} \cdot M \tag{20.31}$$

приведет к уравнению

$$\frac{\partial^2 m}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 m}{\partial y_1^2} - \delta^2 m = 0, \tag{20.32}$$

где

$$\delta^2 = \frac{gH^2}{U^2T_1}\left(\frac{\varkappa-1}{\varkappa}\frac{g}{R}-\gamma\right)\left\{1+\frac{U^2}{gT_1}\left[\gamma-\frac{\left(\frac{g}{R}-\gamma\right)^2}{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}\frac{g}{R}-\gamma}\right]\right\}-\frac{1}{U}\frac{d^2U}{dy^2}.$$

Повторяя наши прежние оценки, можно с большой точностью считать фигурную скобку за единицу и тогда

$$\delta^2 = \frac{gH^2}{U^2T_1}\left(\frac{\varkappa-1}{\varkappa}\frac{g}{R}-\gamma\right)-\frac{1}{U}\frac{d^2U}{dy^2}. \qquad (20.33)$$

Если обозначить $\zeta(x) = HZ(x_1)$, то краевое условие (20.15) примет вид

$$(m)_{y_1=0} = U(\rho_m)_{y_1=0}\frac{dZ}{dx_1}. \qquad (20.34)$$

Краевое условие (20.18) после подстановки в него $\partial p'/\partial x$ из (20.11) и замены $\partial p_\infty v_x'/\partial x$ по (20.21) примет в новых переменных вид

$$(m)_{y_1=1} = k\left(\frac{dm}{dy_1}\right)_{y_1=1}, \qquad (20.35)$$

где

$$\frac{1}{k} = -H\left[\frac{g}{U^2}\left(1-\frac{U^2}{a_\infty^2}\right)\left(1-\frac{\rho_в}{\rho_н}\right)\right]_{y_1=1}+$$
$$+\left(\frac{d\ln U}{dy_1}\right)_{y_1=1}+\left(\frac{2-\varkappa}{2}+\frac{\varkappa R\gamma_1}{2g}\right)\frac{gH}{\varkappa RT_1}. \qquad (20.36)$$

Из трех членов правой части (20.36) второй имеет порядок 1, а третий — порядок 10^{-1}, величина первого члена правой части (20.36) существенно зависит от отношения плотностей $(\rho_в/\rho_н)_{y_1=1}$ при переходе от верхней среды к нижней. Так как давление не претерпевает разрыва, то $\rho_в/\rho_н = T_н/T_в$; в обычных условиях это отношение бывает близко к единице. Однако даже при скачке всего лишь в 5°, если принять $T_н = 220°$, имеем

$$1-\frac{\rho_в}{\rho_н} = 1-\frac{220}{225} \approx \frac{1}{15}.$$

Так как

$$\frac{gH}{U^2} \approx \frac{980\cdot 10^6}{10^8} \approx 10^3,$$

то первый член правой части (20.36) будет иметь порядок 20 и, таким образом, $k \approx 5\cdot 10^{-2}$. С большой точностью можно считать

что

$$\frac{1}{k} \approx Hg\left[\frac{1}{U^2}\left(1 - \frac{\rho_0}{\rho_\infty}\right)\right]_{y_1=1} + \left(\frac{d\ln U}{dy_1}\right)_{y_1=1}. \qquad (20.37)$$

Итак, задача сведена к решению однородного уравнения (20.32) с краевыми условиями (20.34) (неоднородное) и (20.35) (однородное). В качестве примера доведем до конца решение для случая, когда

$$U = \text{const}$$

Теперь (20.32) будет уравнением с постоянными коэффициентами и решение его может быть легко получено. Введем вспомогательную функцию $S(x_1, y_1)$ из равенства

$$m(x_1, y_1) = S(x_1, y_1) + U\rho_\infty(0)\left(1 - \frac{y_1}{1-k}\right)\frac{dZ}{dx_1}. \qquad (20.38)$$

Функция S удовлетворяет неоднородному уравнению

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial y_1^2} + \delta^2 S = -U\rho_\infty(0)\left(1 - \frac{y_1}{1-k}\right)\left(\frac{d^3 Z}{dx_1^3} + \delta^2\frac{dZ}{dx_1}\right) \qquad (20.39)$$

и однородным краевым условиям.

$$\text{при} \quad y_1 = 0 \quad S = 0 \qquad (20.40)$$

$$\text{при} \quad y_1 = 1 \quad S = k\frac{\partial S}{\partial y}. \qquad (20.41)$$

Ищем решение для S в виде

$$S(x_1, y) = \sum_{n=1}^{\infty} S_n(x_1)\sin\gamma_n y_1 \qquad (20.42)$$

Одночленное решение удовлетворяет условию (20.40); для того чтобы оно удовлетворяло условию (20.41), необходимо чтобы γ_n определялось из соотношения

$$\operatorname{tg}\gamma_n = k\gamma_n \qquad (20.43)$$

В интервале $0 < y_1 < 1$ мы можем, с другой стороны, представить $U\rho_\infty(0)\left(1 - \frac{y_1}{1-k}\right)$ в виде ряда

$$U\rho_\infty(0)\left(1 - \frac{y_1}{1-k}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\gamma_n y_1, \qquad (20.44)$$

где

$$c_n = \frac{2}{\gamma_n}\,\frac{1 + \frac{k}{1-k}\cos\gamma_n - k\frac{\sin\gamma_n}{\gamma_n}}{1 - \frac{\sin 2\gamma_n}{2\gamma_n}}\,U\rho_\infty(0). \qquad (20.45)$$

Вставляя (20.42) и (20.44) в уравнение (20.39) и сравнивая члены при $\sin \gamma_n y_1$, получим обыкновенные дифференциальные уравнения для $S_n(x_1)$:

$$\frac{d^2 S_n}{dx_1^2} + (\delta^2 - \gamma_n^2) S_n = c_n \left(\frac{d^3 Z}{dx_1^3} - \delta^2 \frac{dZ}{dx_1} \right). \qquad (20.46)$$

В метеорологически интересных случаях величина k будет значительно меньше единицы. Если принять $T_0 = T_\infty = 10^3$, $H = 10^6$ см, то мы получим $k \approx 0{,}02$. Это значит, что корни трансцендентного уравнения (20.43) будут близки к корням уравнения $\operatorname{tg} \gamma_n = 0$ и можно считать

$$\gamma_n \approx n\pi.$$

С другой стороны, величина δ^2 имеет в интересующих нас случаях порядок 10^4. Так например, по (20.33) при $U = 10^3$ см/сек, $H = 10^6$ см, $\gamma = 5 \cdot 10^{-5}$ см/град, $T_0 = 250°$, $\varkappa = 1{,}4$, $g = 980$ см/сек^2 мы получим $\delta^2 \approx 120$. Это значит, что коэффициент $\delta^2 - \gamma_n^2$ для нескольких первых значений n будет положителен, но, начиная с некоторого номера n, становится отрицателен (если $\delta^2 = 120$, то при $n = 1, 2, 3$: $\delta^2 - \gamma_n^2 > 0$, а при $n \geqslant 4$: $\delta^2 - \gamma_n^2 < 0$).

В этом существенное отличие случая сжимаемой барохтропной атмосферы от случая несжимаемой жидкости. Последний мы можем получить, формально полагая $\rho_{00} = \text{const}$, $\varkappa = \infty$, $\gamma_1 = g/R$ [ср. уравнения (20.19) и (20.23)]. Но тогда по (20.33) будет $\delta = 0$, причем γ_n определится по-прежнему из (20.43), где $k = U^2/gH$. Теперь, чтобы γ_n^2 было положительным, γ_n должно быть чисто мнимым: $\gamma_n = i\Gamma_n$. Уравнение (20.43) нам теперь даст $\operatorname{th} \Gamma_n = k\Gamma_n$, и если $k < 1$, это уравнение будет иметь одно и только одно решение для Γ_n.

Решения (20.46) будут существенно различны для $\delta^2 - \gamma_n^2 > 0$ и для $\delta^2 - \gamma_n^2 < 0$. В первом случае нам придется иметь дело с периодическими, во втором — с экспоненциальными функциями. И в том и в другом случае мы должны отбросить решение однородного уравнения (20.46); в первом случае потому, что по смыслу задачи возмущение должно отсутствовать далеко перед препятствием (при $x_1 \to -\infty$), во втором — потому, что решение должно быть ограниченным при $x_1 = \pm\infty$. Таким образом, нам придется иметь

) Отметим попутно, что если бы мы заменили в постановке задачи свободную поверхность струи твердой стенкой, то мы должны были бы остановиться в качестве второго краевого условия вместо (20.18) краевое условие $(v_y')_{y_1 = H} = 0$, т. е. вместо (20.35) условие $(m)_{y_1 = 1} = 0$. При этом равенство $\gamma_n = n\pi$ должно будет выполняться точно, а в (20.44) и (20.45) нам надо положить $k = 0$.

дело лишь с частным решением неоднородного уравнения (20.46), которое легко определяется методом вариации произвольной постоянной. Решение, затухающее при $x_1 = -\infty$, будет иметь вид

$$S_n(x_1) = -\frac{c_n}{\sqrt{\delta^2 - \gamma_n^2}} \int_{-\infty}^{x_1} \sin\left[\sqrt{\delta^2 - \gamma_n^2}(x_1 - \xi)\right]\left[\frac{d^3Z(\xi)}{d\xi^3} + \delta^2\frac{dZ(\xi)}{d\xi}\right] d\xi \tag{20.47}$$

если $\delta^2 > \gamma_n^2$, и

$$S_n(x) = -\frac{c_n}{2\sqrt{\gamma_n^2 - \delta^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\sqrt{\gamma_n^2 - \delta^2}\,|x_1 - \xi|}\left[\frac{d^3Z(\xi)}{d\xi^3} + \delta^2\frac{dZ(\xi)}{d\xi}\right] d\xi \tag{20.48}$$

если $\delta^2 < \gamma_n^2$.

Примем, что $(Z)_{x_1 = -\infty} = (dZ/dx_1)_{x_1 = -\infty} = (d^2Z/dx_1^2)_{x_1 = -\infty} = 0$. Тогда, выполнив интегрирование по частям в (20.47), получим для $\delta^2 > \gamma_n^2$:

$$S_n(x_1) = -c_n\frac{dZ}{dx_1} - c_n\gamma_n^2\int_{-\infty}^{x_1}\cos\left[\sqrt{\delta^2 - \gamma_n^2}(x_1 - \xi)\right] Z(\xi)\,d\xi. \tag{20.49}$$

Аналогичным образом по (20.48) для $\delta^2 < \gamma_n^2$,

$$S_n(x_1) = -c_n\frac{dZ}{dx_1} - c_n\frac{\gamma_n^2}{2}\left[\int_{-\infty}^{x_1} e^{-\sqrt{\gamma_n^2 - \delta^2}(x_1 - \xi)} Z(\xi)\,d\xi - \int_{x_1}^{\infty} e^{\sqrt{\gamma_n^2 - \delta^2}(x_1 - \xi)} Z(\xi)\,d\xi\right]. \tag{20.50}$$

Подставляя S_n в (20.42), а затем и (20.38), принимая в расчет (20.44), (20.31) и (20.24), получим решение нашей задачи.

Если k очень мало, то $\gamma_n = n\pi$, $c_n = (2/n\pi)\,U\rho_\infty(0)$, и мы получим:

$$v_y'(x_1, y_1) = -\tau U\frac{\rho_\infty(0)}{\rho_\infty} e^{-\frac{H}{2T_1}\left(\frac{\kappa}{R} - 1\right)y_1}\sum_{n=1}^{\infty} n\omega_n(x_1)\sin n\pi y_1, \tag{20.51}$$

где для $n < \delta/\pi$

$$\omega_n(x_1) = 2\int_{-\infty}^{x_1}\cos\left[\sqrt{\delta^2 - n^2\pi^2}\,(x_1 - \xi)\right] Z(\xi)\,d\xi, \tag{20.52}$$

а для $n > \delta/\pi$:

$$w_n(x_1) = \int_{-\infty}^{x_1} e^{-\sqrt{n^2\pi^2-\delta^2}\,(x_1-\xi)} Z(\xi)\,d\xi - \int_{x_1}^{\infty} e^{\sqrt{n^2\pi^2-\delta^2}\,(x_1-\xi)} Z(\xi)\,d\xi. \quad (20.53)$$

Найдем еще уравнения линий тока. Пусть речь идет о линии тока расположенной на высоте $y_1 = h$ далеко слева от препятствия. Уравнение такой линии тока будет:

$$y_1 = h + \varepsilon(x_1).$$

Тогда можно написать:

$$\left[v_y'(x_1, y)\right]_{y_1=h+\varepsilon} = \frac{d\varepsilon}{dx_1}\left[v_x'(x, y)\right]_{y_1=h+\varepsilon}.$$

Отсюда, с точностью до малых второго порядка (ε мало), получим:

$$\varepsilon(x_1) = \frac{1}{U}\int_{-\infty}^{x_1} v_y'(x_1, h)\,dx_1.$$

Чтобы лучше представить картину обтекания, рассмотрим простой пример. Пусть препятствие имеет в сечении плоскостью (x_1, y_1) вид прямоугольника, так что

$$\left.\begin{array}{lll} \text{при} & -\infty \leqslant x_1 \leqslant -L & Z = 0, \\ \text{при} & -L \leqslant x_1 \leqslant L & Z(y_1) = Z_1 = \text{const}, \\ \text{при} & L \leqslant x_1 \leqslant \infty & Z = 0. \end{array}\right\} \quad (20.54)$$

Тогда (20.52) даст члены вида

$$\left.\begin{array}{lll} \text{при} & -\infty \leqslant x_1 \leqslant -L & w_n(x_1) = 0, \\ \text{при} & -L \leqslant x_1 \leqslant L & w_n(x_1) = \dfrac{2Z_1}{\delta_n}\sin\delta_n(x+L), \\ \text{при} & L \leqslant x_1 \leqslant \infty & w_n(x_1) = \dfrac{4Z_1}{\delta_n}\sin(\delta_n L)\cos(\delta_n x), \end{array}\right\} \quad (20.55)$$

где $\delta_n = \sqrt{\delta^2 - n^2\pi^2}$.

С другой стороны, члены, отвечающие (20.53), будут иметь вид

$$\left.\begin{array}{lll} \text{при} & -\infty \leqslant x_1 \leqslant -L & w_n(x_1) = -\dfrac{2Z_1}{\Delta_n}\operatorname{sh}(\Delta_n L)\,e^{\Delta_n x}, \\ \text{при} & -L \leqslant x_1 \leqslant L & w_n(x_1) = \dfrac{2Z_1}{\Delta_n}e^{-\Delta_n L}\operatorname{sh}(\Delta_n x), \\ \text{при} & L \leqslant x_1 \leqslant \infty & w_n(x_1) = \dfrac{2Z_1\operatorname{sh}(\Delta_n L)}{\Delta_n}\,e^{-\Delta_n x}, \end{array}\right\} \quad (20.56)$$

где $\Delta_n = \sqrt{n^2\pi^2 - \delta^2}$.

Мы видим, что члены типа (20.56) будут быстро затухать как с наветренной, так и с подветренной стороны препятствия. Как легко видеть, в нашем случае симметричного по отношению к оси Y препятствия эти члены дают симметричный по отношению к оси Y вклад в картину обтекания. Наоборот, члены типа (20.55) (малые номера n) не дают никаких возмущений с наветренной стороны, но порождают незатухающие периодические возмущения с подветренной стороны. Эти возмущения носят название *волн подветренной стороны*. Подобные возмущения приводят в природе часто к образованию позади хребта параллельных гряд облаков (там, где вертикальные токи положительны, возникают дополнительные условия для конденсации влаги и облакообразования; там, где $m<0$, имеем нисходящие токи и уменьшение облачности), которые неподвижно стоят, несмотря на сильный перпендикулярно к ним направленный ветер.

Мы предполагали, что $\frac{\varkappa-1}{\varkappa}\frac{g}{R}-\gamma>0$. Если $\frac{\varkappa-1}{\varkappa}\frac{g}{R}-\gamma<0$[1]) волн типа (20.52) не будет и все решения для $w_n(y_2)$ будут иметь характер (20.53). Волны подветренной стороны пропадают. В общем случае, когда U зависит от высоты, будет иметь значение кривизна профиля скорости. Если $U''<0$ и $\frac{\varkappa-1}{\varkappa}\frac{g}{R}-\gamma>0$ мы будем иметь вновь $\delta^2>0$, наоборот, если $U''>0$ и достаточно велико, то даже при $\frac{\varkappa-1}{\varkappa}\cdot\frac{g}{R}>\gamma$ может оказаться $\delta^2<0$.

§ 21. Упражнения. 1. Найти скорость распространения и период колебаний для океанских волн в 145 *м* длиной.

Ответ. $c=15{,}05$ *м/сек*; $\tau=9{,}64$ *сек*.

2. Океанские волны перемещаются со скоростью 10 *м/сек*. Найти длину этих волн и их период.

Ответ. $\lambda=64{,}05$ *м*, $\tau=6{,}41$ *сек*.

3. Заметили, что поплавок поднимается и опускается на волне пятнадцать раз в минуту. Найти длину волн и скорость их распространения, считая глубину жидкости очень большой.

Ответ. $\lambda=24{,}98$ *м*; $c=6{,}25$ *м/сек*.

4. Вычислить приходящуюся на длину волны кинетическую и потенциальную энергию прогрессивных волн длины λ, происходящих под действием силы тяжести на поверхности раздела двух жидкостей, глубины которых h

---

[1]) Это отвечает случаю так называемого «сверхадиабатического» градиента γ. Заметим, что если бы при решении задачи обтекания учитывалась влажность воздуха и конденсация водяного пара (возникающая при подъеме несущего водяной пар воздуха), нам пришлось бы видоизменить уравнение притока тепла типа (20.4) за счет введения скрытой теплоты конденсации. Можно показать, что соответствующее видоизменение было бы эквивалентно замене $\frac{\varkappa-1}{\varkappa}\frac{g}{R}$ другим значением (зависящим от T и p), меньшим по величине. См., например, Динамическая метеорология, под ред. Извекова Б. И. и Кочина Н. Е., ч. 4, 1937.

и ρ', плотности ρ и ρ', причем нижняя жидкость ограничена снизу, а верхняя сверху горизонтальными плоскостями ($\rho > \rho'$).

Ответ $V = T = \dfrac{(\rho - \rho')\, g\lambda a^2}{4}$.

5. Найти групповую скорость U для капиллярно-гравитационных волн на бесконечно глубокой жидкости. При каком условии групповая скорость больше скорости распространения самих волн c? Решить последний вопрос также графически при помощи графика $c(\lambda)$ (рис. 166) и графического способа отыскания U.

Ответ $c = \sqrt{\dfrac{g\lambda}{2\pi} + \dfrac{2\pi\alpha}{\rho\lambda}}$, $U = \dfrac{1}{c}\left(\dfrac{g\lambda}{4\pi} + \dfrac{3\pi\alpha}{\rho\lambda}\right)$, $U > c$, если $\lambda < \lambda_m$.

6. Найти скорость распространения капиллярно-гравитационных волн на поверхности раздела двух бесконечно глубоких жидкостей разных плотностей ρ и ρ'. Определить, для какой длины волны скорость распространения наименьшая, и найти значение этой минимальной скорости.

Ответ $c^2 = \dfrac{\rho - \rho'}{\rho + \rho'}\,\dfrac{g\lambda}{2\pi} + \dfrac{2\pi\alpha}{(\rho + \rho')\lambda}$; $\lambda_m = 2\pi\sqrt{\dfrac{\alpha}{g(\rho - \rho')}}$;

$$c_m^2 = \frac{2}{\rho + \rho'}\sqrt{\alpha g(\rho - \rho')}.$$

7. Найти скорость распространения капиллярно-гравитационных волн на поверхности раздела двух бесконечно глубоких жидкостей разных плотностей ρ и ρ', если верхняя жидкость меньшей плотности ρ' течет со скоростью U и величина поверхностного натяжения есть α (образование ряби ветром, скорость которого равна U). Могут ли волны распространяться против ветра? При какой скорости U основное движение устойчиво для всех длин волн? Вычислить критическую скорость U_0, при которой основное движение делается неустойчивым для некоторых длин волн, если $\rho'/\rho = 1/770$ (отношение плотностей воздуха и воды) и $\alpha = 74$ *дн/см*.

Ответ. $c = \dfrac{\rho' U}{\rho + \rho'} \pm \sqrt{\dfrac{g\lambda}{2\pi}\,\dfrac{\rho - \rho'}{\rho + \rho'} + \dfrac{2\pi\alpha}{\lambda(\rho + \rho')} - \dfrac{\rho\rho' U^2}{(\rho + \rho')^2}}$;

если

$$0 < U < \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}\,\frac{\rho - \rho'}{\rho'} + \frac{2\pi\alpha}{\lambda\rho'}},$$

то одно из двух значений c будет отрицательным, т. е. волны могут распространяться против ветра. Устойчивость для всех волн будет при $U < \sqrt[4]{\dfrac{4g\alpha(\rho - \rho')(\rho + \rho')^2}{\rho^2\rho'^2}}$, в частности для воды и воздуха при $U < 6{,}46$ *м/сек*.

В. ТРЕХМЕРНЫЕ ВОЛНЫ

§ 22. Общие формулы. Обратимся теперь к изучению общего случая трехмерных безвихревых волн на поверхности бесконечно глубокой жидкости. Потенциал скорости должен удовлетворять уравнению Лапласа

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0, \qquad (22.1)$$

причем на большой глубине ($z \to -\infty$) φ стремится к нулю. На свободной поверхности

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = -\frac{1}{g}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}; \tag{22.2}$$

можно, однако, доказать, что это уравнение справедливо в любой точке жидкости. Наконец, φ должно удовлетворять начальным условиям

$$\varphi = F(x, y), \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} = f(x, y) \tag{22.3}$$

при $z = 0$ и $t = 0$.

Мы примем $f(x, y) = 0$ и будем искать φ в виде ряда Маклорена

$$\varphi(x, y, z, t) = \varphi_0 + \frac{t}{1!}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)_0 + \frac{t^2}{2!}\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}\right)_0 + \ldots \tag{22.4}$$

Но из уравнения (22.2) ясно, что

$$\left(\frac{\partial^{2k}\varphi}{\partial t^{2k}}\right)_0 = (-1)^k g^k \frac{\partial^k \varphi_0}{\partial z^k}, \quad \left(\frac{\partial^{2k+1}\varphi}{\partial t^{2k+1}}\right)_0 = (-1)^k g^k \frac{\partial^k}{\partial z^k}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)_0. \tag{22.5}$$

Остается найти φ_0 и $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)_0$. Вследствие того, что $f(x, y) = 0$ (рассуждаем так же, как в § 9), мы получим:

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)_0 = 0.$$

Отыщем $\varphi_0(x, y, z)$. Аналогично формуле (9.11) § 9 положим:

$$\varphi_0(x, y, z) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{zF(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta}{[z^2 + (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2]^{3/2}} \tag{22.6}$$

и докажем, что $\varphi_0(x, y, z)$ удовлетворяет как уравнению Лапласа, так и условию

$$\lim_{z \to 0} \varphi_0(x, y, z) = F(x, y). \tag{22.7}$$

Как легко проверить, уравнению Лапласа удовлетворяет функция от x, y, z:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{\sqrt{z^2 + (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}},$$

но тогда ему удовлетворяет также и функция

$$\frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{R} = -\frac{z}{[z^2 + (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2]^{3/2}},$$

и значит и весь интеграл (22.6), представляющий сумму таких функций.

Докажем теперь справедливость равенства (22.7). Сначала предположим, что всюду $F(x, y) = 1$, и докажем, что

$$-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{z\,d\xi\,d\eta}{[z^2+(x-\xi)^2+(y-\eta)^2]^{3/2}} = 1. \qquad (22.8)$$

Введем для этого в плоскости $\xi\eta$ полярные координаты ρ и φ, полагая

$$\xi = \rho\cos\varphi, \qquad \eta = \rho\sin\varphi;$$

тогда интеграл (22.8) легко вычисляется:

$$-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{z\,d\xi\,d\eta}{[z^2+(x-\xi)^2+(y-\eta)^2]^{3/2}} = -\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{z\rho\,d\rho\,d\varphi}{(z^2+\rho^2)^{3/2}} =$$

$$= \left[\frac{z}{\sqrt{z^2+\rho^2}}\right]_{\rho=0}^{\rho=\infty} = -\frac{z}{\sqrt{z^2}} = 1,$$

так как вследствие отрицательности z будет $\sqrt{z^2} = -z$. Так как подынтегральная функция в (22.8) всюду одного знака, то такой же интеграл, взятый по любой части S плоскости $\xi\eta$, будет меньше единицы:

$$-\frac{1}{2\pi}\int_{S}\int\frac{z\,d\xi\,d\eta}{[z^2+(x-\xi)^2+(y-\eta)^2]^{3/2}} < 1.$$

Возвратимся теперь к формуле (22.6) и представим ее в виде

$$\varphi_0(x, y, z) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{zF(x, y)\,d\xi\,d\eta}{[z^2+(x-\xi)^2+(y-\eta)^2]^{3/2}} -$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{z|F(\xi, \eta)-F(x, y)|\,d\xi\,d\eta}{[z^2+(x-\xi)^2+(y-\eta)^2]^{3/2}}. \qquad (22.9)$$

Первый из интегралов в правой части равен, по предыдущему, $F(x, y)$, второй же стремится к нулю, когда z стремится к нулю, если предположить функцию $F(x, y)$ ограниченной и в точке (x, y) непрерывной. Для доказательства рассмотрим в плоскости $\xi\eta$ малый кружок S с центром в точке (x, y) и с радиусом ε, остальную часть

плоскости $\xi\eta$ обозначим через S_1, тогда, очевидно,

$$\lim_{z\to 0}\int_{(S_1)}\int \frac{z\,[F(\xi,\eta)-F(x,y)]\,d\xi\,d\eta}{[z^2+(x-\xi)^2+(y-\eta)^2]^{3/2}}=0$$

Что же касается круга S то для точек (ξ,η) лежащих внутри S, будет

$$|F(\xi,\eta)-F(x,y)|<\varepsilon_1,$$

причем ε_1 можно считать стремящимся к нулю когда ε стремится к нулю (в этом состоит условие непрерывности функции $F(x,y)$). Поэтому

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int_S\int \frac{[F(\xi,\eta)-F(x,y)]\,z\,d\xi\,d\eta}{[z^2+(x-\xi)^2+(y-\eta)^2]^{3/2}}\right|<$$

$$<\varepsilon_1\left|\frac{1}{2\pi}\int_S\int \frac{z\,d\xi\,d\eta}{[z^2+(x-\xi)^2+(y-\eta)^2]^{3/2}}\right|<\varepsilon_1$$

Итак, при z, стремящемся к нулю, второй интеграл формулы (22.9) может быть сделан меньше любого числа ε_1, значит предел этого интеграла равен нулю и мы получаем, что

$$\lim_{z\to 0}\varphi_0(x,y,z)=F(x,y),$$

что мы и хотели показать.

Примем теперь, что функция $F(x,y)$ повсюду равна нулю, за исключением малой окрестности S начала координат в которой $F(x,y)$ предположим столь большой, что интеграл

$$\int_S\int F(x,y)\,dx\,dy=-\frac{\Pi}{\rho}$$

остается конечным и равняется $-\frac{1}{\rho}\Pi$, где Π обозначает импульс сил давлений, способный вызвать желаемые нами начальные скорости. При таких условиях, вводя цилиндрические координаты (r,ϑ,z) мы получим

$$\varphi_0(x,y,z)=\frac{\Pi}{2\pi\rho}\frac{z}{(z^2+x^2+y^2)^{3/2}}=\frac{\Pi}{2\pi\rho}\frac{z}{(z^2+r^2)^{3/2}}=-\frac{\Pi}{2\pi\rho}\frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{\sqrt{z^2+r^2}}.$$

Но тогда

$$\left(\frac{\partial^{2k}\varphi}{\partial t^{2k}}\right)_0=\frac{(-1)^{k+1}g^k}{2\pi\rho}\cdot\frac{\partial^{2k-1}}{\partial z^{2k-1}}\frac{1}{\sqrt{z^2+r^2}},\qquad \left(\frac{\partial^{2k+1}\varphi}{\partial t^{2k+1}}\right)_0=0,$$

и значит,

$$\varphi(r, z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\Pi}{2\pi\rho} \frac{g^n t^{2n}}{(2n)!} \frac{\partial^{n-1}}{\partial z^{n-1}} \frac{1}{\sqrt{z^2+r^2}} \qquad (22.10)$$

Чтобы получить уравнение профиля волны, надо найти $\varphi(r, 0, t)$. Но мы имеем:

$$\frac{1}{\sqrt{r^2+z^2}} = \frac{1}{r}\left(1+\frac{z^2}{r^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n n!} \frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{r^{2n+1}} z^{2n}$$

С другой стороны по формуле Маклорена

$$\frac{1}{\sqrt{r^2+z^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}\left(\frac{\partial^n}{\partial z^n}\frac{1}{\sqrt{r^2+z^2}}\right)_{z=0}.$$

Сравнивая эти два разложения найдем.

$$\left(\frac{\partial^{2k+1}}{\partial z^{2k+1}}\frac{1}{\sqrt{r^2+z^2}}\right)_{z=0} = 0,$$

$$\left(\frac{\partial^{2k}}{\partial z^{2k}}\frac{1}{\sqrt{r^2+z^2}}\right)_{z=0} = \frac{(-1)^k[1\cdot 3\cdot 5\ldots(2k-1)]^2}{r^{2k+1}}.$$

Поэтому, полагая в формулу (22.10) $z=0$ и $n=2k+1$ найдем.

$$\varphi(r, 0, t) = \frac{\Pi}{2\pi\rho}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} g^{2k+1} t^{4k+2}}{(4k+2)!} \frac{[1\cdot 3\cdot 5\ldots(2k+1)]^2}{r^{2k+3}}. \qquad (22.11)$$

Для профиля волны по уравнению

$$\zeta(r, t) = -\frac{1}{g}\frac{\partial\varphi(r, 0, t)}{\partial t}$$

найдем следующее выражение

$$\zeta(r, t) = \frac{\Pi t}{2\pi\rho r^3}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{gt^2}{r}\right)^{2k}\frac{[1\cdot 3\cdot 5\ldots(2k+1)]^2}{(4k+1)!} \qquad (22.12)$$

Оно показывает, что форма профиля волны в данном месте зависит, главным образом, от величины gt^2/r, так что теперь возмущения будут распространяться концентрически с постоянным ускорением совершенно аналогично случаю плоских волн.

Ряды (22.11) и (22.12) годятся для вычисления только при малых значениях gt^2/r. Для больших gt^2/r удобнее дать другие формулы, аналогичные формулам (10.7) случая плоских волн. К выводу этих формул мы сейчас и обратимся.

Введем для краткости обозначение

$$\frac{gt^2}{2r} = \omega, \tag{22.13}$$

тогда формулу (22.11) можно переписать следующим образом:

$$\varphi(r, 0, t) = \frac{\Pi}{2\pi g r^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} [1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2k+1)]^2 2^{2k+1} \omega^{2k+1}}{(4k+2)!}. \tag{22.14}$$

Этот ряд можно представить определенным интегралом, причем под знак последнего войдет функция Бесселя нулевого порядка.

$$J_0(x) = 1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2 \cdot 4^2} - \frac{x^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{[2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 2k]^2}$$

и ее производная $J_0'(x)$.

Рассмотрим для этого функцию

$$F(x) = \frac{d}{dx}[xJ_1(x)] = J_0(x) + xJ_0'(x).$$

Разложение в ряд этой функции имеет вид

$$F(x) = \frac{d}{dx}[xJ_0(x)] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (2k+1) x^{2k}}{[2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 2k]^2}.$$

Вычислим теперь следующий интеграл

$$\Phi(\omega) = \int_0^{\pi/2} \cos\varphi F\left(\frac{\omega}{2} \cos^2\varphi\right) d\varphi; \tag{22.15}$$

подставляя сюда данное выше разложение функции $F(x)$, найдем:

$$\Phi(\omega) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (2k+1) \omega^{2k}}{2^{2k} [2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 2k]^2} \int_0^{\pi/2} \cos^{4k+1}\varphi \, d\varphi.$$

Но, как известно,

$$\int_0^{\pi/2} \cos^{4k+1}\varphi \, d\varphi = \frac{2 \cdot 4 \ldots 4k}{3 \cdot 5 \ldots (4k+1)};$$

поэтому коэффициент при ω^{2k} будет:

$$\frac{(-1)^k [2 \cdot 4 \ldots 4k (4k+2)]^2}{2^{2k+1} [2 \cdot 4 \ldots 2k]^2 (4k+2)!} = \frac{(-1)^k 2^{2k+1} [1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2k+1)]^2}{(4k+2)!},$$

и следовательно,

$$\Phi(\omega)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k 2^{2k-1}[1\cdot 3\cdot 5\ldots(2k+1)]^2\,\omega^{2k}}{(4k+2)!}.$$

Сравнение этой формулы с (21.14) показывает, что

$$\varphi(r,\ 0,\ t)=-\frac{1\omega}{2\pi r^2}\,\Phi(\omega). \tag{22.16}$$

По этой формуле можно вычислять $\varphi(r,\ 0,\ t)$ при больших значениях ω. Функция $\Phi(\omega)$ обозначает здесь определенный интеграл (22.15). При больших ω можно дать приближенное выражение для этого интеграла. Воспользуемся известными из теории функций Бесселя неравенствами

$$\left.\begin{aligned}
|J_0(x)| &< \frac{A_0}{\sqrt{x}},\\
\left|J_0(x)-\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right| &< \frac{A_1}{x\sqrt{x}},\\
\left|J'(x)+\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right| &< \frac{A_2}{x\sqrt{x}},
\end{aligned}\right\} \tag{22.17}$$

справедливыми для всех положительных x, здесь A_0, A_1 и A_2 обозначают некоторые определенные числа. Из этих неравенств вытекает следующее:

$$\sqrt{x}\,\frac{d}{dx}[xJ_1(x)]+\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,x\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)<A.$$

С помощью этого неравенства непосредственно следует, что

$$\left|\cos\omega\Gamma\left(\frac{\omega}{2}\cos^2\varphi\right)+\sqrt{\frac{\omega}{\pi}}\cos^2\varphi\sin\left(\frac{\omega}{2}\cos^2\varphi-\frac{\pi}{4}\right)\right|<\frac{A\sqrt{2}}{\sqrt{\omega}},$$

и значит,

$$\left|\Phi(\omega)+\sqrt{\frac{\omega}{\pi}}\int_0^{\pi/2}\cos^2\varphi\sin\left(\frac{\omega}{2}\cos^2\varphi-\frac{\pi}{4}\right)d\varphi\right|<\frac{\pi A}{\sqrt{2\omega}}. \tag{22.18}$$

Вычислим интеграл

$$\Phi_1(\omega)=\int_0^{\pi/2}\cos^2\varphi\sin\left(\frac{\omega}{2}\cos^2\varphi-\frac{\pi}{4}\right)d\varphi.$$

Введем для этого новую переменную интегрирования $\psi = 2\varphi$, тогда

$$\Phi_1(\omega) = \frac{1}{4}\int_0^{\pi}(1+\cos\psi)\sin\left(\frac{\omega}{4}-\frac{\pi}{4}+\frac{\omega}{4}\cos\frac{\psi}{2}\right)d\psi.$$

Воспользуемся теперь формулой

$$\sin\left(\frac{\omega}{4}-\frac{\pi}{4}+\frac{\omega}{4}\cos\psi\right) =$$

$$= \sin\left(\frac{\omega}{4}-\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\omega}{4}\cos\psi\right)+\cos\left(\frac{\omega}{4}-\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{\omega}{4}\cos\psi\right)$$

и отметим, что при помощи функций Бесселя можно взять интегралы

$$\int_0^{\pi}\cos\left(\frac{\omega\cos\psi}{4}\right)d\psi = \pi J_0\left(\frac{\omega}{4}\right), \qquad \int_0^{\pi}\sin\left(\frac{\omega\cos\psi}{4}\right)d\psi = 0,$$

$$\int_0^{\pi}\cos\psi\cos\left(\frac{\omega\cos\psi}{4}\right)d\psi = 0, \qquad \int_0^{\pi}\cos\psi\sin\left(\frac{\omega\cos\psi}{4}\right)d\psi = -\pi J_0'\left(\frac{\omega}{4}\right).$$

Принимая все это во внимание, мы можем установить следующее соотношение.

$$\Phi_1(\omega) = \frac{\pi}{4}\left\{\sin\left(\frac{\omega}{4}-\frac{\pi}{4}\right)J_0\left(\frac{\omega}{4}\right)-\cos\left(\frac{\omega}{4}-\frac{\pi}{4}\right)J_1\left(\frac{\omega}{4}\right)\right\};$$

при помощи неравенств (22.17) мы найдем, что

$$\Phi_1(\omega)-\frac{\pi}{4}\sqrt{\frac{2\cdot 4}{\pi\omega}}\left\{\sin\left(\frac{\omega}{4}-\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\omega}{4}-\frac{\pi}{4}\right)+\right.$$

$$\left.+\cos\left(\frac{\omega}{4}-\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{\omega}{4}-\frac{\pi}{4}\right)\right\}\Bigg| < \frac{2\pi(A_1+A_2)}{\pi\sqrt{\omega}}$$

или

$$\left|\Phi_1(\omega)-\sqrt{\frac{\pi}{2}}\cos\frac{\omega}{2}\right| < \frac{2\pi(A_1+A_2)}{\omega\sqrt{\omega}}.$$

Теперь из (22.18) мы заключим что

$$\left|\Phi(\omega)-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{\omega}{2}\right| < \frac{B}{\sqrt{\omega}},$$

где B — определенное число. Таким образом, имеем приближенное равенство

$$\Phi(\omega)\approx\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{\omega}{2},$$

Г значит

$$\varphi(r, 0, t) \approx -\frac{\Pi\omega\cos\frac{\omega}{2}}{2\sqrt{2\pi\rho r^2}} = -\frac{\Pi g t^2}{4\sqrt{2\pi\rho r^3}}\cos\frac{gt^2}{4r}. \qquad (22.19)$$

Для профиля волны найдем уравнение

$$\zeta(r, t) = -\frac{1}{g}\frac{\partial\varphi(r, 0, t)}{\partial t} \approx \frac{\Pi t}{2\sqrt{2\pi\rho r^3}}\cos\frac{gt^2}{4r} - \frac{\Pi g t^3}{8\sqrt{2\pi\rho r^4}}\sin\frac{gt^2}{4r}$$

или, оставляя только второй член, более важный для больших $gt^2/4r$, получим окончательно следующее приближенное выражение для профиля волн:

$$\zeta \approx -\frac{\Pi g t^3}{8\sqrt{2\pi\rho r^4}}\sin\frac{gt^2}{4r}. \qquad (22.20)$$

Приведем еще выражения функций $\varphi(r, 0, t)$ и $\zeta(r, t)$ через бесселевы функции. Вследствие (22.15), вспоминая определение функции $F(x)$, имеем:

$$\Phi(\omega) = \int_0^{\pi/2}\cos\varphi J_0\left(\frac{\omega}{2}\cos^2\varphi\right)d\varphi - \frac{\omega}{2}\int_0^{\pi/2}\cos^3\varphi J_1\left(\frac{\omega}{2}\cos^2\varphi\right)d\varphi,$$

ибо $J_0'(x) = -J_1(x)$. Произведя в обоих интегралах подстановку

$$\sin\varphi = \sqrt{2}\sin\frac{\theta}{2}, \quad \cos\varphi\, d\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{\theta}{2}d\theta,$$

$$\cos^2\varphi = 1 - 2\sin^2\frac{\theta}{2} = \cos\theta,$$

получим:

$$\int_0^{\pi/2}\cos\varphi J_0\left(\frac{\omega}{2}\cos^2\varphi\right)d\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\pi/2}\cos\frac{\theta}{2}J_0\left(\frac{\omega}{2}\cos\theta\right)d\theta,$$

$$\int_0^{\pi}\cos^3\varphi J_1\left(\frac{\omega}{2}\cos^2\varphi\right)d\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\pi/2}\cos\theta\cos\frac{\theta}{2}J_1\left(\frac{\omega}{2}\cos\theta\right)d\theta =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\int_0^{\pi/2}\left(\cos\frac{3\theta}{2} + \cos\frac{\theta}{2}\right)J_1\left(\frac{\omega}{2}\cos\theta\right)d\theta.$$

Из теории бесселевых функций доказывается формула

$$J_\mu(z)\,J_\nu(z) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} J_{\mu+\nu}(2z\cos\theta)\cos(\mu-\nu)\theta\,d\theta,$$

если $\mu+\nu > -1$. Частными случаями этой формулы являются следующие:

$$J_{\frac{1}{4}}(z)\,J_{-\frac{1}{4}}(z) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} J_0(2z\cos\theta)\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta,$$

$$J_{\frac{3}{4}}(z)\,J_{\frac{1}{4}}(z) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} J_1(2z\cos\theta)\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta,$$

$$J_{\frac{1}{1}}(z)\,J_{-\frac{1}{4}}(z) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} J_1(2z\cos\theta)\cos\frac{3\theta}{2}\,d\theta$$

Так как

$$J_{n-1}(z) + J_{n+1}(z) = \frac{2n}{z}\,J_n(z),$$

то последнюю формулу можно записать еще так:

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} J_1(2z\cos\theta)\cos\frac{3\theta}{2}\,d\theta = J_{-\frac{1}{4}}(z)\left[\frac{1}{2z}\,J_{\frac{1}{1}}(z) - J_{-\frac{3}{4}}(z)\right].$$

В результате легко находим следующее выражение для $\Phi(\omega)$:

$$\Phi(\omega) = \frac{\pi}{4\sqrt{2}}\left[J_{\frac{1}{4}}\left(\frac{\omega}{4}\right)J_{-\frac{1}{4}}\left(\frac{\omega}{4}\right) - \right.$$

$$\left. - \frac{\omega}{8\sqrt{2}}\left[J_{\frac{3}{4}}\left(\frac{\omega}{4}\right)J_{\frac{1}{4}}\left(\frac{\omega}{4}\right) - J_{-\frac{3}{4}}\left(\frac{\omega}{4}\right)J_{-\frac{1}{4}}\left(\frac{\omega}{4}\right)\right]\right. \qquad (22.21)$$

и следовательно,

$$\sigma(r,\,0,\,t) = -\frac{11\omega}{8\sqrt{2}\,gr^2}\left\{J_{\frac{1}{4}}\left(\frac{\omega}{4}\right)J_{-\frac{1}{4}}\left(\frac{\omega}{4}\right) - \right.$$

$$\left. - \frac{\omega}{2}\left[J_{\frac{1}{4}}\left(\frac{\omega}{4}\right)J_{\frac{1}{1}}\left(\frac{\omega}{4}\right) - J_{-\frac{3}{4}}\left(\frac{\omega}{4}\right)J_{-\frac{1}{4}}\left(\frac{\omega}{4}\right)\right]\right\} \qquad (22.22)$$

Зная эти формулы

$$\zeta(r, t) = -\frac{1}{g}\frac{\partial\varphi(r, 0, t)}{\partial t}$$

и пользуясь формулами теории бесселевых функций, легко найдем для профиля волны следующее выражение:

$$\zeta(r, t) = \frac{3V\omega}{32\rho\sqrt{gr^3}}\left\{2J_{\frac{1}{4}}\left(\frac{\omega}{4}\right)J_{-\frac{1}{4}}\left(\frac{\omega}{4}\right) - \right.$$
$$- \omega^2\left[J_{\frac{1}{4}}\left(\frac{\omega}{4}\right)J_{-\frac{1}{4}}\left(\frac{\omega}{4}\right) + J_{\frac{3}{4}}\left(\frac{\omega}{4}\right)J_{-\frac{3}{4}}\left(\frac{\omega}{4}\right)\right] -$$
$$\left. - 3\omega\left[J_{-\frac{3}{4}}\left(\frac{\omega}{4}\right)J_{\frac{1}{4}}\left(\frac{\omega}{4}\right) - J_{-\frac{3}{4}}\left(\frac{\omega}{4}\right)J_{-\frac{1}{4}}\left(\frac{\omega}{4}\right)\right]\right\}. \quad (22.23)$$

Эти формулы дают решение задачи, пригодное при любых значениях ω.

§ 23. Корабельные волны. В предыдущем параграфе мы получили для поверхности жидкости, возмущенной приложением в определенной точке ее некоторого импульса давления, приближенное выражение:

$$\zeta = -\frac{Mgt^2}{8\sqrt{2\pi\rho}r^{\frac{3}{2}}}\sin\frac{gt^2}{4r}. \quad (23.1)$$

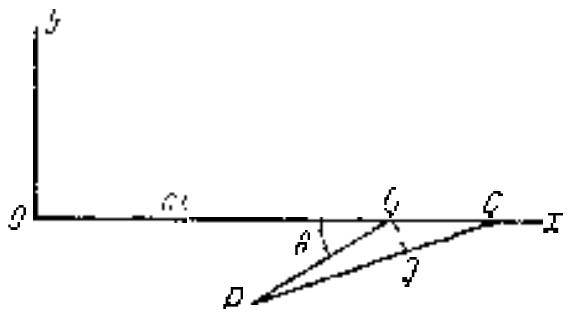

Рис. 173

Мы применим этот результат к нахождению вида корабельных волн, производимых кораблем при движении его на очень глубокой воде с постоянной скоростью c.

При этом волнообразующее действие корабля можно заменить действием двух импульсов давления, производимых его носом и кормою (от носа и кормы образуются самостоятельные волновые системы, которые интерферируют друг с другом). Мы ограничимся, однако, еще более простым случаем и рассмотрим только один возмущающий центр, который примем перемещающимся по оси Ox в отрицательную сторону со скоростью c. Пусть в момент времени $t = 0$ этот центр находится в начале координат. Обозначим через t время, которое потребовалось возмущающему центру, чтобы переместиться из положения Q в положение O (рис. 173); тогда, очевидно

$$OQ = ct$$

Волны, исходившие из возмущающего центра, когда последний находился в положении Q, имеют в разных местах разную длину и разную фазу. Рассмотрим какую-либо точку P. Волны, пришедшие в эту точку и испущенные возмущающим центром в положении Q, будут налагаться на волны, получившиеся в те моменты, когда возмущающий центр занимал другое положение на оси Ox.

Эти волны, созданные возмущающим центром в различные моменты времени, будут иметь в точке P, вообще говоря, самые различные фазы и потому будут взаимно уничтожаться. Может однако случиться, что найдется такое положение Q возмущающего центра, что волны, созданные им в любом, соседнем с Q, положении Q', будут иметь в точке P ту же самую фазу (или почти ту же самую), что и волны, созданные в положении Q. Такие волны взаимно сложатся и дадут в точке P некоторое возмущение. Поэтому для отыскания результирующего возмущения в точке P нужно рассмотреть те положения Q возмущающего центра, при которых фазы волн, созданные в Q и в соседнем положении Q', будут в точке P совпадать.

Из формулы (23.1) видно, что для этого нужно, чтобы в точках Q и Q' аргумент gt^2/r имел бы одинаковое значение.

Так как $r = PQ$ и $t = \frac{OQ}{c}$, то r и t зависят от положения Q. Если в точке Q', соседней с точкой Q, величина gt^2/r должна иметь то же значение, что в точке Q, то дифференциал этой величины в точке Q должен равняться нулю.

$$d\frac{gt^2}{r} = 0.$$

Итак, результирующая амплитуда волны в точке P может произойти только от волн, созданных при положениях возмущающего центра, близких к тем положениям Q, для которых

$$d\frac{t^2}{r} = \frac{2t}{r}\,dt - \frac{t^2}{r^2}\,dr = 0. \tag{23.2}$$

Но очевидно, что

$$QQ' = c\,dt$$

и если ввести угол $OQP = \theta$, то из $\triangle QQ'Q''$ ($QQ'' \perp PQ$)

$$dr = c\cos\theta\,dt.$$

Поэтому уравнение (23.2) дает

$$r = \frac{1}{2}\,ct\cos\theta. \tag{23.3}$$

При помощи этого уравнения нужно определять те точки Q, которые дают главную часть волнения в точке P. Это проще всего сделать геометрически. Для этого отметим (рис. 174) на оси Ox положение Q_1 точки Q, разделим отрезок OQ_1 пополам и середину его обозначим через M_1, тогда в $\triangle M_1PQ_1$ будет $M_1Q_1 = ct/2$, $PQ_1 = r$, но тогда формула (23.3) показывает, что $\angle M_1PQ_1 = 90^\circ$

Соединим точки O и P прямой линией и разделим OP в точке C пополам; прямая CM_1, соединяя середины сторон OP и OQ_1 треугольника OPQ_1, параллельна стороне PQ_1 этого треугольника и значит, перпендикулярна к PM_1. Поэтому угол CM_1P есть прямой. Значит, если на CP как на диаметре мы построим окружность, то последняя пройдет через точку M_1. Так как точка M_1 лежит еще на оси Ox, то мы получаем следующее правило для определения отвечающего точке P положения центра возмущения: надо соединить

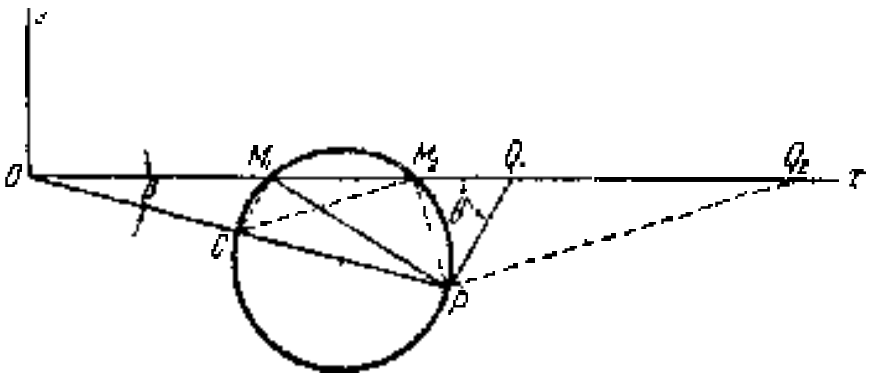

Рис. 174.

точку P с точкой O (настоящим положением центра возмущения), разделить OP пополам в точке C, построить на CP как на диаметре окружность, найти точки пересечения M_1 и M_2 этой окружности с осью Ox (по которой движется центр возмущения), тогда, откладывая отрезки $M_1Q_1 = OM_1$ и $M_2Q_2 = OM_2$, мы и получим искомые

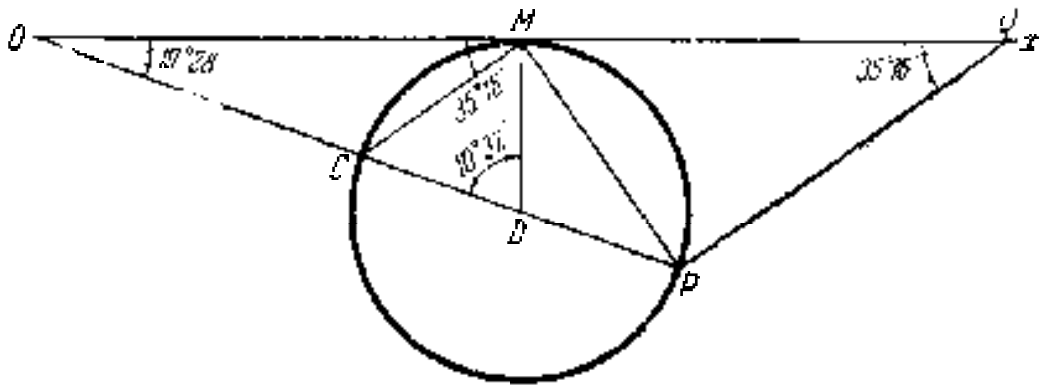

Рис. 175

положения Q_1 и Q_2 центра возмущения. При этом PQ_1 перпендикулярно к PM_1 и PQ_2 перпендикулярно к PM_2.

Точек пересечения M_1 и M_2 может оказаться две, одна или ни одной. Одна точка пересечения будет в том случае, когда ось Ox будет касаться окружности CMP (рис. 175). Из чертежа видно, что это будет лишь в том случае, когда $\sin \angle MOP = \frac{MD}{OD} = \frac{1}{3}$, т. е. если $\angle MOP = 19°28'$. Если $\angle MOP$ превосходит эту величину, то

не будет ни одной точки пересечения окружности с осью Ox. Таким образом волны чувствительной амплитуды образуются только в угле раствором $38^\circ 56'$, биссектрисой которого является ось Ox.

Перейдем теперь к отысканию вида корабельных волн. Для этого мы найдем кривые постоянной фазы, т. е. геометрическое место точек P, для которых фаза будет одна и та же (например, такими кривыми являются гребни волны или впадины). Для такой кривой фаза постоянна, т. е.

$$\frac{gt^2}{4r} = \varkappa = \text{const}, \tag{23.4}$$

где r — расстояние точки P до соответствующего центра возмущения Q_1 (или Q_2) а $t = \frac{OQ_1}{c}$ $\left(\text{или } \frac{OQ_2}{c}\right)$. При этом каждому положению точки P отвечает свое положение точки Q_2 и свое t. Значит, t и r будут функциями от положения точки P, которое мы будем характеризовать горизонтальными координатами x и y.

Проще всего найти кривые постоянной фазы в параметрической форме. Из рис. 174 ясно, что

$$OM_1 = M_1Q_1 = \frac{ct}{2}, \quad M_1P = \frac{ct}{2}\sin\theta, \quad \angle QM_1P = \frac{\pi}{2} - \theta,$$

$$x = OM_1 + M_1P\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{ct}{2}(1 + \sin^2\theta),$$

$$y = -M_1P\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = -\frac{ct}{2}\sin\theta\cos\theta.$$

Но из уравнений (23.3) и (23.4) следует, что для кривых постоянной фазы α,

$$\frac{gt^2}{2ct\cos\theta} = \alpha, \quad \frac{ct}{2} = \frac{c^2\varkappa}{g}\cos\theta, \tag{23.5}$$

значит, уравнения кривых постоянной фазы имеют вид

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{c^2\alpha}{g}\cos\theta(1 + \sin^2\theta) = \frac{c^2\alpha}{4g}(5\cos\theta - \cos 3\theta), \\ y &= -\frac{c^2\alpha}{g}\cos^2\theta\sin\theta = -\frac{c^2\alpha}{4g}(\sin\theta + \sin 3\theta). \end{aligned}\right\} \tag{23.6}$$

Как видно из этих уравнений, все кривые постоянной фазы подобны, причем центром подобия является точка O. Достаточно поэтому построить одну из кривых. Вид этих кривых показан на рис. 176.

Докажем, что часть BA кривой получается при изменении θ от 0° до $35^\circ 16'$, часть AO при изменении θ от $35^\circ 16'$ до 90°. Часть кривой BCO получается при отрицательных значениях θ.

Для доказательства рассмотрим опять рис. 171. Из него видно, что всем точкам P, лежащим на одном и том же радиусе OP, составляющем с осью Ox угол β, отвечают два значения угла θ;

обозначим их через $\theta_1 = \angle OM_1C$ и $\theta_2 = \angle OM_2C$. Если угол β очень мал, то θ_1 близко к 90° и θ_2 близко к нулю. При увеличении угла β угол θ_1 убывает, угол θ_2 возрастает, эти углы θ_1 и θ_2 становятся равными друг другу при $\beta = 19°28'$. Из рис. 175 видно, что в этом случае

$$\theta_1 = \theta_2 = \angle OMC = \frac{1}{2}\angle MDC = \frac{1}{2}(90° - 19°28') = 35°16'.$$

Итак, через взятую точку P (рис. 176) лежащую внутри угла AOC, проходят две кривые $OA'PB'C'$ и $OPABC$ рассматриваемого семейства; величины соответствующих фаз надо вычислять по формуле (23.4).

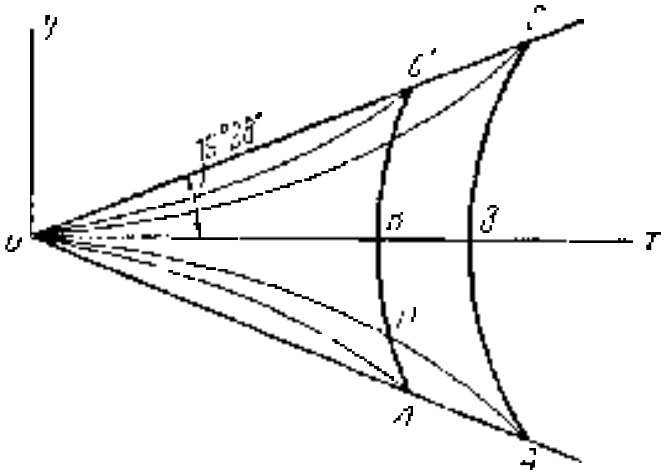

Рис. 176.

Величина α принимает, по определению экстремальные значения в точках Q_1 и Q_2. Очевидно, что при перемещении точки Q от 0 до точки Q_1 α будет возрастать от 0 до α_1, при дальнейшем же перемещении точки Q из положения Q_1 в Q_2 величина α будет убывать от α_1 до α_2. Итак, $\alpha_1 > \alpha_2$. Но очевидно, что меньшее значение фазы α_2 отвечает кривой $OA'B'C'$. Поэтому точке P, рассматриваемой как точка кривой $OA'PB'C'$, отвечает значение θ_2, а той же точке, рассматриваемой как точка кривой $OPABC$, отвечает значение θ_1. Отсюда и вытекает, что при перемещении точки P по части кривой OPA угол θ будет меняться от 90° до 35°16', на части же AB угол θ будет меняться от 35°16' до 0°. Точки O, A и C являются, как можно показать, точками возврата первого рода. Итак при движении корабля образуются две системы волн: диагональные — вида OA и OC и поперечные — вида ABC; первая система происходит от положений возмущающего центра типа Q_1, вторая — от положений типа Q_2; обе эти системы накладываются друг на друга и образуют в совокупности корабельные волны.

Отметим еще, что при $\theta = 0$ будет $x = OB$, следовательно, по формуле (23.6)

$$OB = \frac{c^2\alpha}{g}.$$

Отсюда следует, что расстояние между двумя соседними гребнями поперечных волн будет равно $2\pi c^2/g$, так как двум таким гребням отвечают значения фаз, различающиеся на 2π. Поэтому длина волны для этих поперечных волн будет:

$$\lambda = \frac{2\pi c^2}{g}.$$

а скорость их распространения будет $\sqrt{g\lambda/2\pi} = c$, т. е. скорость распространения образующихся при движении корабля поперечных волн совпадает со скоростью корабля. Этого, конечно, и надо было ожидать.

Отметим в заключение, что примененный нами метод дает только приближенную теорию, воспроизводящую лишь главные черты явления, на более детальном исследовании мы не останавливаемся.

§ 24. Стоячие колебания тяжелой жидкости в сосуде. До сих пор мы предполагали, что жидкость простирается в горизонтальном направлении во все стороны до бесконечности. Теперь мы рассмотрим движение жидкости в какой-нибудь ограниченной области, происходящее под действием силы тяжести. Примером таких движений являются так называемые сейши в озерах, состоящие в периодических колебаниях уровня озера, распространяющихся на все озеро.

В настоящем параграфе мы рассмотрим стоячие колебания жидкости глубины h, находящейся в цилиндрическом бассейне (в частности, при $h = \infty$ получаем жидкость бесконечно большой глубины). Таким образом, направляя ось Oz вертикально вверх и беря начало координат на поверхности уровня в равновесном положении, мы будем иметь следующее уравнение дна жидкости:

$$z = -h.$$

Мы будем рассматривать безвихревые движения; потенциал скорости обозначим через $\varphi(x, y, z, t)$.

Этот потенциал скорости удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0. \tag{24.1}$$

На свободной поверхности должно выполняться уравнение

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} + g\frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0 \quad \text{при} \quad z = 0. \tag{24.2}$$

Наконец, на дне и на боковых стенках сосуда должно выполняться условие

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0. \tag{24.3}$$

Чтобы получить стоячие колебания жидкости, мы рассмотрим потенциал скорости φ вида

$$\varphi(x, y, z, t) = \Phi(x, y, z)\cos\sigma t.$$

Формула (11.1) § 11 наводит на мысль взять следующую зависимость φ от z:

$$\varphi(x, y, z, t) = \operatorname{ch} k(z + h)\Phi(x, y)\cos\sigma t. \tag{24.4}$$

тогда уравнение (24.1) обращается в следующее:

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}+k^2\Phi=0 \tag{24.5}$$

Уравнение (24.2) дает уравнение, связывающее σ и k:

$$-\sigma^2\operatorname{ch}kh+gk\operatorname{sh}kh=0 \quad \text{или} \quad \sigma^2=gk\operatorname{th}kh \tag{24.6}$$

Период колебаний τ определяется через σ при помощи простой формулы

$$\tau=\frac{2\pi}{\sigma}.$$

Наконец, уравнение (24.3) на дне выполняется само собой, ибо на дне направление нормали совпадает с направлением оси Oz, но

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z}=k\operatorname{sh}k(z+h)\Phi(x,\ y)\cos\sigma t, \quad \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)_{z=-h}=0$$

Остается выполнить еще условие на боковых стенках цилиндра, ограничивающего жидкость:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial n}=0. \tag{24.7}$$

Исследуем полученное движение сначала в общем виде. Скорости частиц жидкости определяются формулой

$$v=\cos\sigma t\ \operatorname{grad}\Phi. \tag{24.8}$$

Интегрируя почленно уравнения

$$\frac{dx}{dt}=v_x=\frac{\partial\Phi}{\partial x}\cos\sigma t, \quad \frac{dy}{dt}=\frac{\partial\Phi}{\partial y}\cos\sigma t, \quad \frac{dz}{dt}=\frac{\partial\Phi}{\partial z}\cos\sigma t,$$

мы получим, обозначая средние положения частиц через x_0, y_0, z_0 и подставляя в $\Phi(x, y, z)$ вместо x, y, z это среднее положение x_0, y_0, z_0 (вследствие малости колебаний x мало отличается от x_0 и т. д.):

$$\left.\begin{aligned} x&=x_0+\frac{1}{\sigma}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)_0\sin\sigma t,\\ y&=y_0+\frac{1}{\sigma}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)_0\sin\sigma t,\\ z&=z_0+\frac{1}{\sigma}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)_0\sin\sigma t \end{aligned}\right\} \tag{24.9}$$

Следовательно, каждая частица колеблется прямолинейно по гармоническому закону около среднего своего положения, причем все частицы одновременно проходят как через свои средние, так и через

крайние положения. Обратим внимание на вертикальную составляющую скорости и вертикальную амплитуду:

$$\left.\begin{aligned} v_z &= \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)_0 \cos \sigma t = k \operatorname{sh} k (z_0 + h)\, \Psi(x, y) \cos \sigma t \\ z - z_0 &= \frac{k}{\sigma} \operatorname{sh} k (z_0 + h)\, \Psi(x, y) \sin \sigma t. \end{aligned}\right\} \tag{24.10}$$

На дне сосуда $v_z = 0$; кроме того, v_z обращается в нуль во всех точках вертикального цилиндра $\Psi(x, y) = 0$. Найдем вид свободной поверхности жидкости:

$$\zeta = -\frac{1}{g}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)_{z=0} = \frac{\sigma}{g} \operatorname{ch} kh\, \Psi(x, y) \sin \sigma t. \tag{24.11}$$

Поверхность уровня совершает, таким образом, гармонические колебания. С точностью до некоторого множителя эта поверхность имеет всегда следующий вид:

$$z = \Phi(x, y). \tag{24.12}$$

Кривые, лежащие в плоскости $z = 0$, уравнение которых есть

$$\Phi(x, y) = \text{const}, \tag{24.13}$$

суть линии уровня поверхности (24.12). Их можно назвать линиями равной вертикальной амплитуды, так как вертикальное перемещение всех частиц такой линии по формуле (24.10) одинаково. В частности, кривые $\Psi(x, y) = 0$ являются узловыми линиями для вертикального движения, так как на них вертикальное перемещение частиц равно нулю. Найдем еще линии тока на плоскости Oxy, которые определяются из уравнения

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} \quad \text{или} \quad \frac{dx}{\Phi'_x} = \frac{dy}{\Phi'_y}.$$

Как известно, это есть уравнение кривых, ортогональных к линиям уровня (24.13), а такие кривые называются линиями наибольшего ската. Итак, линии тока на плоскости Oxy являются линиями наибольшего ската на поверхности (24.12). Условие (24.7) выражает то обстоятельство, что цилиндр, ограничивающий жидкость, проходит через линию тока на плоскости Oxy. Действительно, скорость частицы, прикасающейся к цилиндру, лежит в плоскости касательной к цилиндру, следовательно, контур поперечного сечения цилиндра плоскостью $z = 0$ в каждой своей точке касается проекции скорости на плоскость Oxy, т. е. является линией тока на плоскости Oxy.

§ 25. Колебания жидкости в прямоугольном сосуде и в круговом цилиндре. Обратимся к частным случаям движения.

Из формулы (11.1) § 11 при $k\zeta = \pi/2$, $\varepsilon = 0$ получаем следующий потенциал скорости:

$$\varphi(x, y, z, t) = \operatorname{ch} k(z - h) \cos kx \cos \sigma t,$$

таким образом,

$$\Phi(x, y) = \cos kx.$$

Уравнение линий тока

$$\frac{dx}{\sin kx} = \frac{dy}{0}$$

выполняется в двух случаях: во-первых, может быть

$$dy = 0, \quad y = \text{const},$$

во-вторых может быть

$$\sin kx = 0, \quad kx = p\pi \quad x = p\pi/k,$$

где p — любое целое число.

Итак, мы можем рассмотреть движение жидкости, заключенной в прямоугольном сосуде произвольной ширины b (границы $y = 0$ и $y = b$), длина же этого сосуда должна равняться кратному от π/k (границы $x = 0$ и $x = p\pi/k$).

Пусть нам дан прямоугольный сосуд длины a и ширины b. Тогда из условия

$$p\pi/k = a$$

мы определим k. Полагая $p = 1$, мы получим:

$$k_1 = \pi/a$$

полагая $p = 2, 3, 4, \ldots$, получим соответственно:

$$k_2 = 2\pi/a, \quad k_3 = 3\pi/a, \quad k_4 = 4\pi/a, \quad \ldots$$

По формуле (21.6) мы получим соответствующие функции частоты и периоды:

$$\left.\begin{aligned} \Phi_p(x, y) &= \cos \frac{p\pi x}{a}, \\ \sigma_p &= \sqrt{g k_p \operatorname{th} k_p h} = \sqrt{\frac{gp\pi}{a} \operatorname{th} \frac{p\pi h}{a}} \\ \tau_p &= \frac{2\pi}{\sigma_p} = \sqrt{\frac{4a\tau}{gp} \operatorname{cth} \frac{p\pi h}{a}}. \end{aligned}\right\} \qquad (25.1)$$

Если жидкость бесконечно глубокая, то $\operatorname{th}\frac{p\pi h}{a}=\operatorname{cth}\frac{p\pi h}{a}=1$, и мы получим

$$\sigma_p=\sqrt{\frac{gp\pi}{a}},\quad \tau_p=\sqrt{\frac{4\pi a}{gp}}. \tag{25.2}$$

Наоборот, если глубина жидкости мала в сравнении с длиной a, то $\operatorname{th}\frac{p\pi h}{a}=\frac{p\pi h}{a}$, и мы имеем

$$\sigma_p=\frac{p}{a}\sqrt{gh},\quad \tau_p=\frac{2a}{p}\sqrt{\frac{1}{gh}}. \tag{25.3}$$

Уравнение (25.1) показывает, что свободная поверхность есть косинусоида, имеющая p потуволн.

На рис. 177, построенном для случая $p=3$, показаны узловые линии вертикального движения. Последние определяются по формуле

$$\Phi(x, y)=0.$$

В нашем случае это уравнение принимает вид

$$\cos\frac{p\pi x}{a}=0$$

и имеет следующие решения:

$$x=\frac{a}{2p},\quad \frac{3a}{2p},\quad \ldots\quad \frac{(2p-1)a}{2p}.$$

Таким образом, имеем p узлов. Итак, в бассейне прямоугольной формы возможны колебания различных периодов. Однако последние определяются совершенно определенным образом. Это будет иметь место и в других случаях. Чтобы получить более общий случай колебаний, возьмем

$$\Phi_1(x, y)=\cos[k(x\cos\alpha+y\sin\alpha)];$$

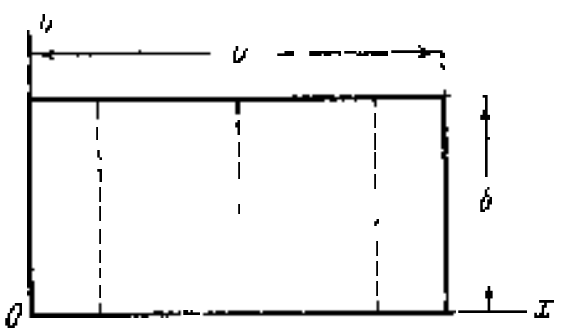

Рис. 177

это сводится к тому, что теперь к гребням волн будет перпендикулярна не ось Ox, а прямая, составляющая с осью Ox угол α. Движение, симметричное относительно оси Ox, будет определяться функцией

$$\Phi_2(x, y)=\cos[k(x\cos\alpha-y\sin\alpha)].$$

Вследствие линейности основного уравнения (24.5) мы можем образовать следующее его решение:

$$\Phi=\frac{1}{2}(\Phi_1+\Phi_2)=\cos(kx\cos\alpha)\cos(ky\sin\alpha)$$

и m, обозначая для краткости $k\cos\alpha = m$, $k\sin\alpha = n$, $k = \sqrt{m^2 + n^2}$, будем иметь:

$$\Phi(x, y) = \cos mx \cos ny$$

Уравнением линий зоны является

$$\frac{dx}{m\sin mx\cos ny} = \frac{dy}{n\cos mx\sin ny} \quad \text{или} \quad \frac{dx}{m\operatorname{tg} mx} = -\frac{dy}{n\operatorname{tg} ny}.$$

Оно легко интегрируется. Мы отметим только следующие частные решения

$$x = \frac{p\pi}{m} \tag{25.4}$$

и

$$y = \frac{q\pi}{n}. \tag{25.5}$$

Поэтому, не нарушая движения жидкости мы можем поставить стенки уравнения которых даются формулами (25.4) и (25.5).

Пусть нам дан прямоугольный сосуд длины a (границы $x = 0$ и $x = a$) и ширины b (границы $y = 0$ и $y = b$) (рис. 177). Тогда для определения m и n мы имеем условия

$$\frac{p\pi}{m} = a, \quad \frac{q\pi}{n} = b,$$

откуда

$$m = \frac{p\pi}{a},$$

$$n = \frac{q\pi}{b} \qquad k = \pi\sqrt{\frac{p^2}{a^2} + \frac{q^2}{b^2}}.$$

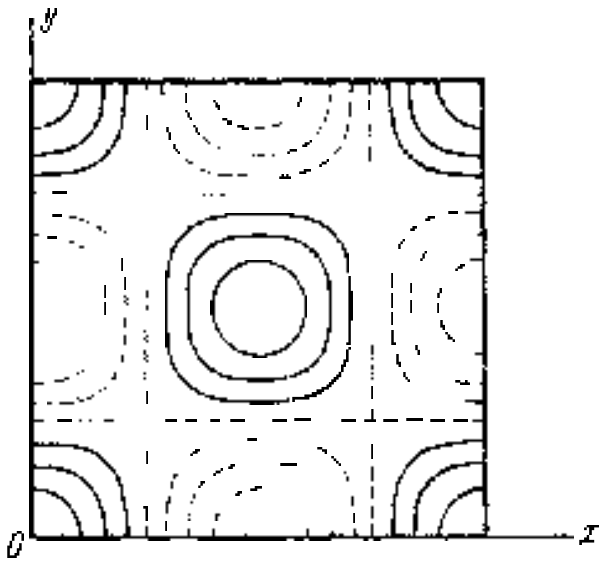

Рис. 177.

Предполагая для простоты жидкость бесконечно глубокой, получим для определения частот и периодов возможных колебаний формулы (p и q — произвольные целые неотрицательные числа):

$$\sigma_{pq} = \sqrt{g\pi}\sqrt[4]{\frac{p^2}{a^2} + \frac{q^2}{b^2}},$$

$$\tau_{pq} = 2\sqrt{\frac{\pi}{g}}\left(\frac{p^2}{a^2} + \frac{q^2}{b^2}\right)^{-\frac{1}{4}} \tag{25.6}$$

Если глубина жидкости мала, то

$$\tau_{pq} = \frac{2}{\sqrt{gh}}\left(\frac{p^2}{a^2} + \frac{q^2}{b^2}\right)^{-\frac{1}{2}}. \tag{25.7}$$

На рис. 178 показаны линии уровня поверхности

$$\Phi(x, y) = \cos\frac{p\pi x}{a}\cos\frac{q\pi y}{b}.$$

для случая $p=2$, $q=2$. Узловыми линиями являются указанные на чертеже прямые, параллельные осям координат.

Чтобы разобрать случай кругового цилиндра, введем вместо x и y полярные координаты r и θ:

$$x=r\cos\theta, \quad y=r\sin\theta.$$

Основное уравнение (21.5) примет вид

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\theta^2}+k^2\Phi=0.$$

Мы ограничимся отысканием решения этого уравнения, не зависящего от θ; если ввести новую переменную $\omega=kr$, то для определения $\Phi(r)$ получается уравнение Бесселя

$$\frac{d^2\Phi}{d\omega^2}+\frac{1}{\omega}\frac{d\Phi}{d\omega}+\Phi=0$$

и значит, если $J_n(z)$ есть функция Бесселя нулевого порядка, то

$$\Phi(r)=J_0(kr), \quad \varphi(x, y, z, t)=\cos\sigma t\operatorname{ch}k(z+h)J_0(kr).$$

Проекции скорости в полярных координатах равны

$$v_r=\frac{\partial\varphi}{\partial r}=k\cos\sigma t\operatorname{ch}k(z+h)J_0'(kr), \quad v_\theta=\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}=0.$$

Отыскиваем линии тока из уравнений

$$\frac{dr}{v_r}=\frac{r\,d\theta}{v_\theta} \quad \text{или} \quad \frac{dr}{J_0'(kr)}=\frac{d\theta}{0}.$$

Таким образом, линиями тока являются радиусы, исходящие из начала координат $\theta=\text{const}$, и концентрические окружности $r=r_p$, где r_p есть корень уравнения $J_0'(kr)=0$.

Пусть нам дан цилиндрический сосуд радиуса a. Тогда из условия $a=r_p$ мы определим k.

Уравнение $J_0'(x)=0$ имеет бесконечное количество корней, первые из которых суть: $x_1=3{,}8317$, $x_2=7{,}0156$, $x_3=10{,}1735$. Поэтому k будет определяться из уравнений

$$k_1=\frac{x_1}{a}, \quad k_2=\frac{x_2}{a}, \quad k_3=\frac{x_3}{a}, \quad \ldots$$

а соответственные периоды колебаний будут для бесконечно глубокой жидкости:

$$\tau_p=\sqrt{\frac{2\pi}{gk_p}}=2\pi\sqrt{\frac{a}{gx_p}}. \tag{25.8}$$

Для жидкости малой глубины

$$\tau_p = \frac{2\pi a}{\varkappa_p \sqrt{gh}}.$$

Узловые линии вертикального движения определяются из уравнения

$$\Phi(r) = J_0(k_p r) = J_0\left(\frac{\varkappa_p r}{a}\right) = 0$$

и так как первыми корнями уравнения $J_0(x) = 0$ являются $x_1 = 2{,}405$, $x_2' = 5{,}5201$, $x_3' = 8{,}6537$, то радиусы этих узловых линий будут например для $p = 3$

$$r = \frac{x_1'}{\varkappa_3} a = 0{,}236a; \quad r_2 = 0{,}543a; \quad r_2 = 0{,}851a$$

§ 26. Упражнения. 1. Рассмотреть стоячие колебания однородной жидкости постоянной глубины h, происходящие под действием силы тяжести, для которых потенциал скорости φ имеет вид

$$\varphi = C \cos mx \cos my \cos \sigma t \operatorname{ch} k(z+h)$$

(ср. § 25). Найти уравнение линий тока на плоскости Oxy и показать что за вертикальные стенки, ограничивающие жидкость, можно взять, помимо указанных в § 25, еще такие, уравнением которых являются $x \pm y = n\pi/m$ (n — целое число). Вывести отсюда период τ самых медленных колебаний в цилиндрическом сосуде, поперечным сечением которого является равнобедренный треугольник с затетами, равными a, считая жидкость бесконечно глубокой.

Ответ. Уравнение линии тока $\sin mx = C \sin my$. $\tau = 2\sqrt{a/g}$.

2. Рассмотреть стоячие колебания однородной жидкости постоянной глубины h, происходящие под действием силы тяжести, предполагая, что потенциал скорости φ имеет вид

$$\varphi = C \cos 0\Phi(r) \cos \sigma t \operatorname{ch} \kappa(z+h),$$

где r, Φ, z — цилиндрические координаты точек (начало координат взято на свободной поверхности жидкости при равновесии последней, ось Oz направлена вертикально вверх). Найти $\Phi(r)$ и σ. Какими вертикальными стенками можно ограничить жидкость, чтобы она могла производить указанные колебания? Рассмотреть случай колебаний в цилиндрическом сосуде, поперечным сечением которого является полукруг радиуса a, и определить периоды τ_1 и τ_2 одноузловых и двуузловых колебаний в таком цилиндре для случая жидкости малой глубины.

Указание. Первые два корня уравнения $J_1'(x) = 0$ равны $x_1 = 1{,}841$, $x_2 = 5{,}332$ [$J_1(x)$ — функция Бесселя первого порядка].

Ответ. $\Phi(r) = J_1(kr)$, $\sigma = \sqrt{gk \operatorname{tg} kh}$; можно ограничить жидкость цилиндром $r = a$ или цилиндром $r = a$ и плоскостью $\theta = 0$ и $\theta = \pi$. $\tau_1 = 3{,}41a/\sqrt{gh}$, $\tau_2 = 1{,}18a/\sqrt{gh}$.

3. Проверить, что движение с потенциалом скорости

$$\varphi = C\sqrt{\frac{2}{\pi kr}}\sin kr\cos\frac{b}{2}\cos\sigma t\operatorname{ch}k(z+h),$$

где r, θ z — цилиндрические координаты, при $\sigma = \sqrt{gk\operatorname{th}kh}$ представляет происходящие под действием силы тяжести стоячие колебания однородной жидкости постоянной глубины h если в этой жидкости поставлена вертикальная стенка, уравнение которой $\theta = 0$. Показать, что можно ограничить жидкость еще вертикальной стенкой $r = a$ и найти для данного a период самого медленного колебания для случаев бесконечно глубокой и очень мелкой жидкости.

Ответ. Для глубокой жидкости $\tau = \frac{2\pi}{\sqrt{\alpha}}\sqrt{\frac{a}{g}} = 5{,}82\sqrt{\frac{a}{g}}$ для мелкой $\tau = \frac{2\pi}{\alpha}\sqrt{\frac{a}{gh}} = 5{,}39\frac{a}{\sqrt{gh}}$, где α есть наименьший положительный корень уравнения $\operatorname{tg}\alpha = 2\alpha$ и равен 1,1656.

Г. ДЛИННЫЕ ВОЛНЫ

§ 27. Основные уравнения. В § 11 при рассмотрении волн, распространяющихся на жидкости конечной глубины, была выведена формула (11.7) для скорости распространения волн c в том случае, когда длина волны λ весьма велика в сравнении с h:

$$c = \sqrt{gh},$$

причем эта скорость оказывается не зависящей от длины волны. Такие волны называются *длинными*. Практическая важность отдельного изучения длинных волн кроется в двух обстоятельствах: во-первых, в силу независимости скорости распространения волн от длины волны длинные волны могут быть изучены гораздо подробнее, чем в общем случае, во-вторых, длинными волнами являются некоторые важные типы волн, например приливные волны, возникающие под действием притяжения Луны и Солнца.

Рассмотрим сначала плоскую задачу, т. е. предположим движение происходящим в плоскости Oxz, причем направим ось Oz вертикально вверх, ось Ox по горизонтали, а начало координат возьмем на свободной поверхности жидкости в ее положении равновесия.

Напишем основные уравнения движения в форме Эйлера для случая плоского движения несжимаемой жидкости:

$$\left.\begin{aligned}\frac{dv_x}{dt} &= X - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x},\\ \frac{dv_z}{dt} &= Z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z},\\ \frac{\partial v_x}{\partial x} &+ \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0,\end{aligned}\right\} \qquad (27.1)$$

Сделаем следующие допущения.

1) Вертикальным ускорением частиц можно пренебречь, т. е. во второй формуле можно принять $dv_z/dt = 0$. Это означает, что вертикальная скорость частиц меняется очень медленно.

2. Вертикальными силами можно пренебречь, за исключением силы тяжести, т. е. во второй формуле можно принять $Y = -g$.

3. Амплитуда колебаний частиц жидкости очень мала в сравнении с глубиной жидкости.

Глубину жидкости в равновесном положении мы обозначим через h (рис. 179). В разных местах она может быть разной, так как дно жидкости может быть не прямолинейным. Обозначим, как обычно, через ζ ординату профиля волны, т. е. возвышение свободной поверхности жидкости над ее равновесным положением. Очевидно, что ζ является функцией x и t.

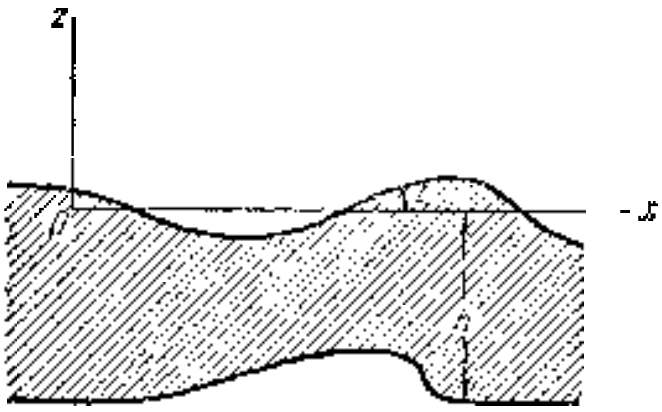

Рис. 179

Второе уравнение (27.1) примет в силу сделанных допущений, вид

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$$

и легко проинтегрируется:

$$p = -\rho g z + C(x, t),$$

но на свободной поверхности, т. е. при $z = \zeta$, давление p должно равняться постоянной p_0 (давлению атмосферы). Поэтому

$$p_0 = -\rho g \zeta + C(x, t).$$

Исключая C, окончательно получим:

$$p - p_0 = \rho g (\zeta - z), \quad \frac{\partial p}{\partial x} = \rho g \frac{\partial \zeta}{\partial x}. \tag{27.2}$$

Подставляем найденное значение p в первое уравнение системы (27.1):

$$\frac{dv_x}{dt} = X - g \frac{\partial \zeta}{\partial x}. \tag{27.3}$$

Мы будем считать горизонтальную силу X не зависящей от z, т. е. функцией только x и t, тогда горизонтальное ускорение dv_x/dt будет одинаково для всех частиц, лежащих в одной вертикальной плоскости (т. е. имеющих одинаковые x), а следовательно, если скорости этих частиц в начальный момент времени были одинаковы, то они во все время движения будут одинаковы. Таким образом, v_x

является функцией только x и t; поэтому

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x},$$

но последним членом можно пренебречь вследствие условия 3) и значит:

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{\partial v_x}{\partial t}.$$

Поэтому уравнение (27.3) принимает окончательно вид

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = -g\frac{\partial \zeta}{\partial x} + X. \tag{27.4}$$

Обратимся к последнему уравнению (27.1). Это есть уравнение неразрывности. Мы выведем другое уравнение, заменяющее это уравнение, причем воспользуемся методом, похожим на метод, примененный для вывода уравнения неразрывности. А именно рассмотрим объем жидкости, заключенный между двумя *неподвижными* в пространстве вертикальными плоскостями AB и $A'B'$, перпендикулярными к оси Ox и отстоящими на расстоянии dx (толщину жидкости в направлении оси Oy, перпендикулярной к осям Ox и Oz, считаем равной единице). За время dt через плоскость AB войдет, очевидно, количество жидкости равное

$$[\rho v_x (h + \zeta)]_x \, dt,$$

где значок x обозначает абсциссу точек плоскости AB, через плоскость $A'B'$ за то же время выйдет количество жидкости

$$[\rho v_x (h + \zeta)]_{x+dx} dt$$

($x + dx$ — абсцисса точек плоскости $A'B'$).

Поэтому количество жидкости между плоскостями AB и $A'B'$ уменьшится на

$$\frac{\partial [\rho v_x (h + \zeta)]}{\partial x} dx\, dt. \tag{27.5}$$

Но это уменьшение, вследствие несжимаемости жидкости, может произойти только за счет понижения уровня жидкости между AB и $A'B'$. Но за время dt уровень повышается на $\frac{\partial \zeta}{\partial t} dt$; значит, мы имеем приращение количества жидкости между AB и $A'B'$, равное

$$\rho \frac{\partial \zeta}{\partial t} dx\, dt. \tag{27.6}$$

Приравнивая два выражения (27.5) и (27.6) одного и того же количества только взятые с разными знаками, получим:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -\frac{\partial [(h + \zeta) v_x]}{\partial x} = -\frac{\partial (h v_x)}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial x} \zeta - v_x \frac{\partial \zeta}{\partial x}. \tag{27.7}$$

Но последними двумя членами, представляющими произведение двух малых величин, можно пренебречь, и значит, получаем окончательное равенство

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -\frac{\partial (h v_x)}{\partial x}.$$

Итак уравнения движения длинных волн для случая плоского движения имеют следующий вид:

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = -g\frac{\partial \zeta}{\partial x} + X, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial t} = -\frac{\partial (h v_x)}{\partial x}. \tag{27.8}$$

где X — горизонтальная сила, действующая на единицу массы, h — глубина жидкости, ζ — высота жидкости над ее равновесным положением. Введем в рассмотрение горизонтальное смещение $\xi(x, t)$ какой-либо частицы от ее равновесного положения (оно одинаково для всех частиц, лежавших в начальный момент на одной вертикали).

Очевидно, что

$$v_x = \frac{\partial \xi}{\partial t}. \tag{27.9}$$

Из второго уравнения (27.8) мы выведем, что

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -\frac{\partial^2 (h\xi)}{\partial x\, \partial t}$$

и интегрируя это уравнение по t, получим:

$$\zeta = -\frac{\partial (h\xi)}{\partial x} + C(x).$$

Но произвольная функция $C(x)$ должна равняться нулю, ибо если нет горизонтальных смещений, то нет и вертикальных, т. е. если $\xi = 0$, то и $\zeta = 0$, значит, $C(x) = 0$. Поэтому

$$\zeta = -\frac{\partial (h\xi)}{\partial x}. \tag{27.10}$$

Интегрирование уравнений (27.4), (27.9) и (27.10) и определяет горизонтальное смещение частиц жидкости.

§ 28. Длинные волны в каналах постоянной глубины. Рассмотрим сначала свободные колебания жидкости, происходящие при отсутствии внешних сил, т. е. положим $X = 0$. Примем сначала глубину h постоянной. Тогда уравнения примут вид

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial t} &= -g\frac{\partial \zeta}{\partial x}, \\ \frac{\partial \zeta}{\partial t} &= -h\frac{\partial v_x}{\partial x}. \end{aligned}\right\} \tag{28.1}$$

Исключим одну из неизвестных функций, например v_x, для чего продифференцируем первое уравнение по x, второе по t и вычтем первое уравнение, умноженное на h, из второго:

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} - gh \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} = 0. \tag{28.2}$$

Для v_x получается такое же уравнение. Положим

$$c = \sqrt{gh}. \tag{28.3}$$

Чтобы решить уравнения (28.1), введем новые независимые переменные x_1 и x_2 по формулам

$$x_1 = x - ct \qquad x_2 = x + ct,$$

тогда, рассматривая v_x и ζ как функции от x_1 и x_2, получим по правилу дифференцирования сложных функций:

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = \frac{\partial v_x}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t} + \frac{\partial v_x}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t} = c\left(\frac{\partial v_x}{\partial x_2} - \frac{\partial v_x}{\partial x_1}\right), \quad \frac{\partial v_x}{\partial x} = \frac{\partial v_x}{\partial x_2} + \frac{\partial v_x}{\partial x_1}$$

и аналогичные формулы для ζ.

Вставляя эти выражения в уравнения (28.1), получим:

$$c\frac{\partial v_x}{\partial x_2} - c\frac{\partial v_x}{\partial x} + g\frac{\partial \zeta}{\partial x_2} + g\frac{\partial \zeta}{\partial x_1} = 0, \quad c\frac{\partial \zeta}{\partial x_2} - c\frac{\partial \zeta}{\partial x} + h\frac{\partial v_x}{\partial x_2} + h\frac{\partial v_x}{\partial x_1} = 0.$$

Образуем сумму и разность этих уравнений, предварительно помноженных первое на h, второе на c.

$$h\frac{\partial v_x}{\partial x_2} + c\frac{\partial \zeta}{\partial x_2} = 0; \qquad h\frac{\partial v_x}{\partial x_1} - c\frac{\partial \zeta}{\partial x_1} = 0.$$

Из этих уравнений видно, что $\frac{v_x}{c} + \frac{\zeta}{h}$ есть произвольная функция одного x_1, точно так же $\frac{v_x}{c} - \frac{\zeta}{h}$ есть произвольная функция одного x_2:

$$\frac{v_x}{c} + \frac{\zeta}{h} = 2F(x_1) = 2F(x - ct),$$

$$\frac{v_x}{c} - \frac{\zeta}{h} = 2f(x_2) = 2f(x + ct).$$

Решая эти уравнения относительно v_x и ζ, окончательно находим:

$$\left.\begin{aligned} v_x &= c\{F(x - ct) + f(x + ct)\}, \\ \zeta &= h\{F(x - ct) - f(x + ct)\}, \end{aligned}\right\} \tag{28.4}$$

как самое общее решение системы (28.1).

Рассмотрим частный случай движения, когда $f = 0$ и, следовательно:

$$v_x = cF(x - ct), \quad \zeta = hF(x - ct). \tag{28.5}$$

Легко выяснить физическое значение формулы (28.5); в геометрической точке, координата которой к моменту t есть $x = x_0 + ct$, будет

$$v_x = cF(x_0), \quad \zeta = hF(x_0),$$

т. е. v_x имеет одно и то же значение в геометрической точке, передвигающейся параллельно оси Ox вправо со скоростью c. То же имеет место и для ζ. Итак, определенные значения v_x и ζ распространяются параллельно оси Ox вправо со скоростью c. Важно подчеркнуть, что частицы жидкости совершают очень малые колебания, а потому сами частицы перемещаются в ту или другую сторону на очень малые расстояния. Это смещение какой либо частицы легко вычислить; оно, очевидно, равно за промежуток времени $t_2 - t_1$:

$$\xi_2 - \xi_1 = \int_{t_1}^{t_2} v_x\,dt = \int_{t_1}^{t_2} cF(x - ct)\,dt = -\int_{t_1}^{t_2} F(x - ct)\,d(x - ct) =$$

$$= \int_{x-ct_2}^{x-ct_1} F(x)\,dx = \frac{1}{h}\int_{x-ct_2}^{x-ct_1} \zeta\,dx.$$

Последний интеграл представляет, очевидно, объем жидкости ограниченный осью Ox и той частью волны, которая пройдет над рассматриваемым местом за промежуток времени (t_1, t_2). Таким образом, после прохождения волны каждая частица окажется смещенной вправо или влево. Если, наоборот, $F = 0$, то

$$v_x = cf(x + ct), \quad \zeta = -hf(x + ct);$$

эти уравнения представляют распространение возмущений параллельно оси Ox влево с той же самой скоростью c. В общем случае формулы (28.4) представляют наложение друг на друга обеих систем волн, из которых одна система волн перемещается вправо, а другая влево с одинаковой скоростью c.

Следующая таблица показывает зависимость скорости распространения длинных волн от глубины:

h, м	1	10	100	1000	10 000
см/сек	3,13	9,90	31,32	99,05	313,2

Как было показано в § 17, потенциальная энергия волн равна

$$\frac{1}{2} g \rho \int \zeta^2 dx,$$

в то время как кинетическая энергия волн выражается, очевидно, интегралом

$$\frac{1}{2} \rho \int h v_x^2 dx$$

(вертикальная скорость гораздо меньше горизонтальной и потому членом v_z^2 можно пренебречь в сравнении с v_x^2). Для волн, распространяющихся в одном направлении, например направо, будет по формулам (28.5)

$$v_x = \frac{c\zeta}{h},$$

следовательно,

$$h v_x^2 = h \frac{c^2 \zeta^2}{h^2} = \frac{c^2}{h} \zeta^2 = g \zeta^2,$$

а это показывает, что кинетическая и потенциальная энергии длинных волн, распространяющихся в одну сторону, равны между собой.

§ 29. Стоячие колебания в каналах переменной глубины. В § 24 была рассмотрена теория стоячих волн на жидкости постоянной глубины. Мы покажем на примере, ограничиваясь случаем длинных волн, как определяются стоячие колебания жидкости, заключенной в сосуде, дно которого не горизонтально. Этот последний случай имеет место, например для сейш, происходящих в озерах и представляющих свободные колебания всей жидкости, находящейся в озере.

Уравнения свободных колебаний жидкости получаются из (27.8), если в последних уравнениях положить $X = 0$:

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = -g \frac{\partial \zeta}{\partial x}, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial t} = -\frac{\partial (h v_x)}{\partial x}.$$

Исключая сначала v_x, потом ζ, найдем что ζ и $h v_x$ удовлетворяют уравнениям

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} &= g \frac{\partial}{\partial x} \left(h \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right), \\ \frac{\partial^2 (h v_x)}{\partial t^2} &= g h \frac{\partial^2 (h v_x)}{\partial x^2}. \end{aligned}\right\} \tag{29.1}$$

Рассмотрим теперь плоское движение в канале, дно которого имеет параболический вид, так что глубина h представляется уравнением

$$h = h_0 \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right),$$

где h_0, очевидно есть наибольшая глубина озера, $2a$ — его длина (ширина его в направлении оси Oy не играет для рассматриваемых движений никакой роли и может быть принята за единицу).

Чтобы рассмотреть стоячие колебания жидкости, положим

$$hv_x = \sin \sigma t \cdot P(x) \tag{29.2}$$

тогда для определения $P(x)$ из последнего уравнения (29.1) получается уравнение

$$gh_0\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)\frac{d^2P}{dx^2} + \sigma^2 P(x) = 0. \tag{29.3}$$

Введем для простоты новую переменную $u = x/a$ и обозначим:

$$P(x) = P(au) = Q(u), \quad \mu = \frac{\sigma^2 a^2}{gh_0}, \tag{29.4}$$

тогда для определения $Q(u)$ будем иметь:

$$(1 - u^2)\frac{d^2Q}{du^2} + \mu Q = 0. \tag{29.5}$$

При $x = \pm a$ левая часть уравнения (29.2) обращается в нуль, следовательно, и правая часть т. е. $P(\pm a) = 0$ или, что то же, $Q(\pm 1) = 0$.

Вид уравнения (29.5) показывает, что мы можем искать решение этого уравнения в виде полинома n-й степени (ибо d^2Q/du^2 будет тогда полиномом степени $(n-2)$-й и по умножении на $1 - u^2$ даст полином n-й степени, который сократится с μQ). В силу условия $Q(\pm 1) = 0$ этот полином $Q(u)$ делится на $u^2 - 1$.

Будем последовательно испытывать полиномы второй степени, третьей и т. д.

1. Если $Q(u)$ — полином второй степени, то можно взять

$$Q(u) = u^2 - 1, \tag{29.6}$$

ибо $Q(u)$ может отличаться от $u^2 - 1$ только постоянным множителем который, вследствие линейности уравнения (29.5), никакой роли не играет. Но тогда

$$\frac{d^2Q}{du^2} = 2,$$

и чтобы уравнение (29.5) выполнилось, надо взять $\mu = 2$. Это уравнение определяет период колебания:

$$\sigma_1 = \frac{\sqrt{2gh_0}}{a}, \quad \tau_1 = \frac{2\pi a}{\sqrt{2gh_0}}. \tag{29.7}$$

Найдем вид профиля волны, из

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -\frac{\partial (hv_x)}{\partial x} = -\sin \sigma t \cdot \frac{dP}{dx} \tag{29.8}$$

следует

$$\zeta(x, t) = \frac{1}{a}\cos\sigma t\,\frac{dP}{dx} = \frac{1}{\sigma a}\cos\sigma t\,\frac{dQ}{du},$$

значит,

$$\zeta(x, t) = \frac{2}{\sigma a}\cos\sigma t \quad u = \frac{2x}{\sigma a^2}\cos\sigma t \tag{29.9}$$

Отсюда видно, что свободная поверхность жидкости все время остается плоскостью причем ось Oy ($x = 0$) является линией узлов;

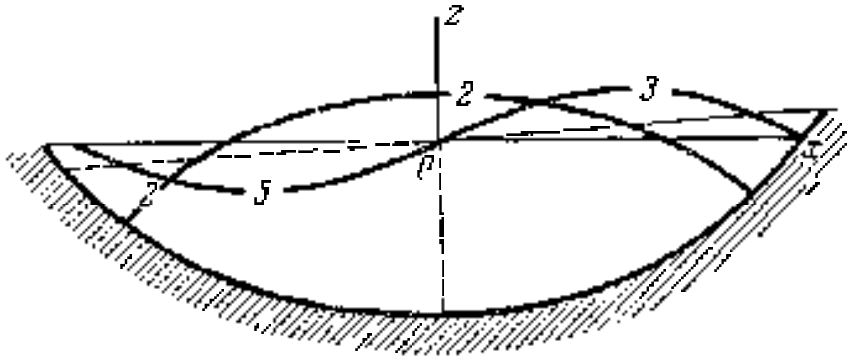

Рис. 180

мы имеем дело с самым медленным одноузловым колебанием (рис. 180). Горизонтальная скорость определится по уравнению (29.2)

$$v_x = -\frac{1}{h_0}\sin\sigma t,$$

горизонтальное смещение ξ будет поэтому определяться интегрированием уравнений (27.9) и (27.10); оно оказывается равным

$$\xi = \frac{1}{h_0\sigma}\cos\sigma t.$$

Таким образом, вся масса жидкости колеблется вправо и влево, совершая гармонические колебания с амплитудой $1/h_0\sigma$.

2) Если $Q(u)$ — полином третьей степени то, вследствие его делимости на $u^2 - 1$, можно принять:

$$Q(u) = (u^2 - 1)(u + \alpha),$$
$$(u^2 - 1)Q''(u) = (u^2 - 1)(2 \cdot 3u + 2\alpha),$$
$$\mu Q(u) = (u^2 - 1)(\mu u + \mu\alpha),$$

следовательно, надо взять

$$\mu = 2 \cdot 3, \quad \alpha = 0 \qquad Q(u) = u(u^2 - 1). \tag{29.10}$$

Период колебания будет:

$$\tau_2 = \frac{2\pi a}{\sqrt{2 \cdot 3gh_0}} \tag{29.11}$$

Профилем волны будет служить

$$\zeta(x, t) = \frac{\cos \sigma t}{2a}(3a^2 - 1) = \frac{\cos \sigma t}{a^3}(3x^2 - a^2), \qquad (29.12)$$

т. е. парабола второй степени (рис. 180). Узловых линий будет две симметрично:

$$x = \pm \frac{a}{\sqrt{3}} = \pm 0{,}5774a$$

Точно так же отыскиваются колебания трехузловые, четырехузловые и т. д. Периоды этих колебаний будут становиться все короче и короче, причем закон их изменения следующий:

$$\tau_1 : \tau_2 : \tau_3 : \ldots = \frac{1}{\sqrt{1 \cdot 2}} : \frac{1}{\sqrt{2 \cdot 3}} : \frac{1}{\sqrt{3 \cdot 4}} : \ldots =$$
$$= 1{,}000 : 0{,}577 : 0{,}408 : \ldots$$

Укажем примерный период сейш Леманского озера имеет ширину около 10 км и глубину около 200 м, при этом наблюдаются поперечные сейши с периодом в 10 минут. По формуле же (24.8) § 24 должно быть

$$\tau_1 = \frac{2a}{\sqrt{gh}} = 450 \text{ сек} = 7{,}5 \text{ мин}$$

Сейши наибольшего периода (около 23 часов) наблюдались в Аральском море, которое при большой длине (около 400 км) имеет малую глубину.

§ 30. Стоячие колебания в цилиндрическом сосуде малой глубины. Основные уравнения в общем случае наличия длинных волн имеют следующий вид:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial t} &= -g\frac{\partial \zeta}{\partial x} + X, \\ \frac{\partial v_y}{\partial t} &= -g\frac{\partial \zeta}{\partial y} + Y, \\ \frac{\partial \zeta}{\partial t} &= -\frac{\partial (hv_x)}{\partial x} - \frac{\partial (hv_y)}{\partial y}. \end{aligned}\right\} \qquad (30.1)$$

Так как вывод их совершенно аналогичен выводу § 27, то на нем мы не останавливаемся.

Для случая свободных колебаний $X = Y = 0$. Примем еще глубину жидкости постоянной. Тогда, исключая v_x и v_y, легко найдем:

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = -h\frac{\partial^2 v_x}{\partial x\, \partial t} - h\frac{\partial^2 v_y}{\partial y\, \partial t} = gh\left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2}\right).$$

И, вводя опять скорость распространения длинных волн $c = \sqrt{gh}$, найдем:

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = c^2\left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2}\right). \qquad (30.2)$$

Чтобы отыскать стоячие колебания жидкости, надо положить

$$\zeta = \Phi(x, y)\cos \sigma t, \tag{30.3}$$

но тогда для определения $\Phi(x, y)$ получится уравнение

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + k^2 \Phi = 0, \tag{30.4}$$

где введено обозначение

$$k = \frac{\sigma}{c}. \tag{30.5}$$

На боковых стенках сосуда нормальная составляющая скорости равна нулю:

$$v_n = 0,$$

но из уравнений

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = -g\frac{\partial \zeta}{\partial x}, \quad \frac{\partial v_y}{\partial t} = -g\frac{\partial \zeta}{\partial y}$$

следует, что

$$\frac{\partial v_n}{\partial t} = -g\frac{\partial \zeta}{\partial n},$$

следовательно, на цилиндрической стенке

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0 \tag{30.6}$$

и таким образом, для $\Phi(x, y)$ получаются те же уравнения, что в § 24 (что конечно, и надо было ожидать, ибо изученный там общий случай включает, как частный, случай малой глубины).

§ 31. Вынужденные колебания в каналах постоянной глубины. Пусть теперь на жидкость действует внешняя возмущающая горизонтальная сила X; тогда жидкость будет совершать под действием этой силы *вынужденные* колебания. Таково именно происхождение приливов и отливов, причем в этом случае возмущающей силой является сила притяжения частиц воды к Луне и Солнцу. Уравнения движения для случая канала постоянной глубины h принимают вид

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = -g\frac{\partial \zeta}{\partial x} - X, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial t} = -h\frac{\partial v_x}{\partial x}. \tag{31.1}$$

Если ξ обозначает смещение частицы из равновесного ее положения, то

$$v_x = \frac{\partial \xi}{\partial t}, \tag{31.2}$$

поэтому последнее уравнение дает

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -h\frac{\partial^2 \xi}{\partial t\, \partial x},$$

и после интегрирования получаем [см. формулу (27.10)]

$$\zeta = -h\frac{\partial \xi}{\partial x}. \tag{31.3}$$

Подставляя найденные значения v_x и ζ в первое уравнение (31.1), найдем:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + X\left(c = \sqrt{gh}\right). \tag{31.4}$$

Примем для простоты, что сила изменяется периодически по формуле

$$X = f\sin(\sigma t - kx), \tag{31.5}$$

тогда соответствующее вынужденное колебание имеет вид

$$\xi = a\sin(\sigma t - kx), \tag{31.6}$$

где a определяется из уравнения (31.4) в виде

$$a = \frac{f}{k^2c^2 - \sigma^2}.$$

Поэтому

$$\xi = \frac{f}{k^2c^2 - \sigma^2}\sin(\sigma t - kx) \tag{31.7}$$

и из уравнения (31.3)

$$\zeta = \frac{fhk}{k^2c^2 - \sigma^2}\cos(\sigma t - kx). \tag{31.8}$$

Сравнивая уравнения (31.5) и (31.7) мы увидим, что период возмущенного движения совпадает с периодом возмущающей силы. Из уравнения (31.7) видно далее, что горизонтальное смещение имеет ту же самую фазу, что и возмущающая сила, если $k^2c^2 - \sigma^2 > 0$. Выясним физическое значение этого условия. Свободные колебания, для которых длина волны определяется по формуле $\lambda = 2\pi/k$, т. е. совпадает с длиной волны рассматриваемых вынужденных колебаний, распространяются со скоростью c, следовательно, период этих свободных колебаний равен

$$\tau = \frac{\lambda}{c} = \frac{2\pi}{kc},$$

период же возмущающей силы равен

$$\tau_1 = \frac{2\pi}{\sigma}.$$

Поэтому

$$k^2c^2 - \sigma^2 = 4\pi^2\left(\frac{1}{\tau^2} - \frac{1}{\tau_1^2}\right) = \frac{4\pi^2\left(\tau_1^2 - \tau^2\right)}{\tau^2\tau_1^2};$$

таким образом если период возмущающей силы больше периода свободных колебаний имеющих ту же длину волны, что и рассматриваемые вынужденные колебания, то последние совпадают в фазе с возмущающей силой, в противном случае эти фазы будут различаться на π. При $\tau = \tau_1$ будет иметь место резонанс, так как формула (31.7) показывает, что в этом случае вынужденные колебания будут бесконечно велики. На самом деле это решение перестает быть верным и должно быть заменено следующим:

$$\xi = -\frac{ft}{2\sigma}\cos(\sigma t - kx), \tag{31.9}$$

показывающим, что амплитуда вынужденного колебания будет расти пропорционально времени t.

Рассмотрим еще вынужденные колебания в канале конечной длины l, ограниченном стенками $x = \pm l/2$, на которых должно поэтому выполняться условие

$$\xi = 0 \text{ при } x = \pm l/2 \tag{31.10}$$

(так как на этих концах движение воды может происходить только в вертикальном направлении, то горизонтальное смещение ξ должно обращаться в нуль). Найденное выше решение

$$\xi = \frac{f}{k^2c^2 - \sigma^2}\sin(\sigma t - kx) \tag{31.11}$$

уравнения

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} = f\sin(\sigma t - kx)$$

не удовлетворяет ограничивающим условиям (31.10). Решение однородного уравнения

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} = 0,$$

имеющее тот же период $\tau = \frac{2\pi}{\sigma}$, что и возмущающая сила, имеет вид

$$\xi = A\sin\sigma t\cos\left(\frac{\sigma x}{c} + \alpha\right) + B\cos\sigma t\sin\left(\frac{\sigma x}{c} + \beta\right),$$

где A, B, α и β — произвольные постоянные. Поэтому мы можем написать следующее решение неоднородного уравнения (31.11):

$$\xi = \frac{f}{k^2c^2 - \sigma^2}\sin(\sigma t - kx) + A\sin\sigma t\cos\left(\frac{\sigma x}{c} + \alpha\right) + B\cos\sigma t\sin\left(\frac{\sigma x}{c} + \beta\right).$$

Для определения A, B, α и β используем пограничные условия (31.10), которые дадут четыре уравнения (на каждом конце получаем два уравнения так как члены содержащие $\sin \sigma t$, и члены, содержащие $\cos \sigma t$ должны обратиться в нуль по отдельности):

$$\frac{f}{k^2c^2 - \sigma^2} \cos \frac{kl}{2} + A \cos\left(\frac{\sigma t}{2c} + \alpha\right) = 0,$$

$$- \frac{f}{k^2c^2 - \sigma^2} \sin \frac{kl}{2} + B \sin\left(\frac{\sigma t}{2c} + \beta\right) = 0,$$

$$\frac{f}{k^2c^2 - \sigma^2} \cos \frac{kl}{2} + A \cos\left(-\frac{\sigma l}{2} + \alpha\right) = 0$$

$$- \frac{f}{k^2c^2 - \sigma^2} \sin \frac{kl}{2} + B \sin\left(-\frac{\sigma l}{2c} + \beta\right) = 0.$$

Очевидно, мы удовлетворим этим уравнениям, если примем:

$$\alpha = \beta = 0, \quad A = -\frac{f}{k^2c^2 - \sigma^2} \frac{\cos \frac{kl}{2}}{\cos \frac{\sigma l}{2c}}, \quad B = \frac{f}{k^2c^2 - \sigma^2} \frac{\sin \frac{kl}{2}}{\sin \frac{\sigma l}{2c}}.$$

Но тогда выражение для ξ можем написать в виде

$$\xi = \frac{f}{k^2c^2 - \sigma^2} \left\{ \sin(\sigma t - kx) - \frac{\cos \frac{kl}{2} \sin \sigma t \cos \frac{\sigma x}{c}}{\cos \frac{\sigma l}{2c}} - \right.$$

$$\left. + \frac{\sin \frac{kl}{2} \cos \sigma t \sin \frac{\sigma x}{c}}{\sin \frac{\sigma l}{2c}} \right\} \quad (31.12)$$

По формуле (31.3) мы определим:

$$\zeta = \frac{fkh}{k^2c^2 - \sigma^2} \left\{ \cos(\sigma t - kx) - \frac{\sigma}{kc} \frac{\cos \frac{kl}{2} \sin \sigma t \sin \frac{\sigma x}{c}}{\cos \frac{\sigma l}{2c}} - \right.$$

$$\left. - \frac{\sigma}{kc} \frac{\sin \frac{kl}{2} \cos \sigma t \cos \frac{\sigma x}{c}}{\sin \frac{\sigma l}{2c}} \right\}. \quad (31.13)$$

Мы отметим только одну особенность этих выражений. Если $\sin \frac{\sigma l}{2c} = 0$ или $\cos \frac{\sigma l}{2c} = 0$, то величины ξ и ζ обращаются в бесконечность. Это показывает что при некоторых определенных размерах канала будет происходить явление резонанса и вынужденные колебания будут очень большими. Для наличия этого явления должно быть

$$\frac{\sigma l}{2c} = n \frac{\pi}{2},$$

где n — целое число. Решая это уравнение относительно l, найдем:

$$l = \frac{n\pi c}{\sigma}. \tag{31.14}$$

Это условие можно представить в другом виде. Период возмущающей силы равен $\tau = 2\pi/\sigma$, далее, основной период собственных колебаний жидкости в канале глубины l был вычислен нами в § 25 формула (25.3):

$$\tau_1 = 2l/c,$$

поэтому, выражая σ через τ и c через τ_1, получим:

$$\tau_1 = n\tau \tag{31.15}$$

Поэтому явление резонанса будет происходить для всех тех длин канала, для которых основной период собственных колебаний в целое число раз превышает период возмущающей силы. Это обстоятельство является частным случаем общего закона, резонанс происходит, если один из периодов собственных колебаний жидкости в данном сосуде в целое число раз превосходит период возмущающей силы (в нашем случае все периоды собственных колебаний являются целыми частями основного периода, поэтому если какой-либо период собственных колебаний является целым кратным периода возмущающей силы, то и основной период будет его целым кратным).

§ 32. Статическая теория приливов. Применим предыдущие рассуждения к теории приливов. Предварительно мы изложим так называемую *статическую теорию приливов*, основателями которой являются Ньютон и Даниил Бернулли. Эта теория носит гидростатический характер и дает картину явления приливов только в общих чертах.

В основе статической теории приливов лежит допущение, что в каждый данный момент океан, покрывающий твердую землю, находится в равновесии под действием силы тяжести и возмущающих сил, происходящих от Луны и Солнца. Поэтому свободная поверхность воды примет форму поверхности уровня:

$$V(x, y, z) = \text{const},$$

где V — потенциал всех сил, действующих на жидкость.

Мы будем рассматривать только одно возмущающее тело, например Луну. Влияние Солнца учитывается совершенно аналогично, и общее воздействие Луны и Солнца получится как сумма воздействий, оказываемых ими по отдельности.

Допустим сначала, что возмущающего тела нет совсем. Обозначим потенциал силы тяжести (в которую включена и центробежная сила вращения Земли) через $V_1(r, \varphi, \psi)$. Здесь через r, φ и ψ обозначены сферические координаты точки, а именно, через r — расстояние до центра Земли, через φ — широта точки, через ψ — западная долгота.

Пусть уравнение поверхности океана при отсутствии возмущающего тела есть

$$r = r_0(\varphi, \psi),$$

тогда, так как поверхность океана должна быть поверхностью уровня, мы должны иметь

$$V_1(r_0, \varphi, \psi) = \text{const} \qquad (32.1)$$

Обозначим еще через $V_2(r, \varphi, \psi)$ потенциал приливообразующей силы Луны. При наличии Луны уравнение поверхности океана будет уже

$$r = r_0(\varphi, \psi) + h(\varphi, \psi)$$

и так как потенциал действующих на океан сил теперь равен $V_1 + V_2$, то должно быть:

$$V_1(r_0 + h, \varphi, \psi) + V_2(r_0 + h, \varphi, \psi) = \text{const}. \qquad (32.2)$$

На самом деле потенциал силы тяжести V_1 изменится вследствие перемещения масс воды, составляющих океан; но этим изменением V_1 мы будем пренебрегать. Вычитая из этого уравнения уравнение (32.1), мы получим:

$$V_1(r_0 + h, \varphi, \psi) - V_1(r_0, \varphi, \psi) + V_2(r_0 + h, \varphi, \psi) = \text{const}.$$

Вследствие малости высоты прилива h в сравнении с r_0 можно в функции V_2 заменить $r_0 + h$ просто на средний радиус земли a, далее

$$V_1(r_0 + h, \varphi, \psi) - V_1(r_0, \varphi, \psi) = h\frac{\partial V_1}{\partial r},$$

но $-\partial V_1/\partial r$ есть составляющая по радиусу Земли силы, действующей на единицу массы, значит,

$$-\frac{\partial V_1}{\partial r} = -g,$$

поэтому получаем окончательно следующее основное уравнение статической теории приливов:

$$gh + V_2 = C \qquad (32.3)$$

из которого и может быть вычислена высота приливов.

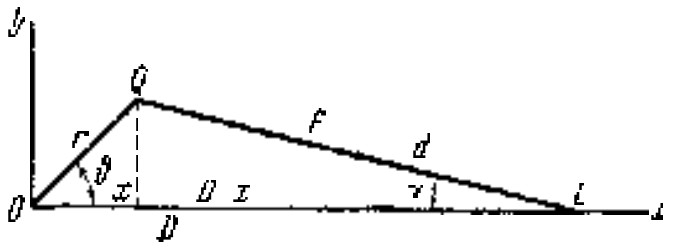

Рис. 181.

Остается вычислить приливообразующую силу. Обозначим: расстояние от центра Земли O до Луны L через $D = OL$ (рис. 181), угол, образуемый OL и радиусом-вектором $OQ = r$ проведенным в некоторую точку жидкости Q, через ϑ; расстояние от Луны до рассматриваемой

точки Q через $d = LQ$, массу Луны через m, массу Земли через M, радиус Земли через a. Тогда действующая на единицу массы, находящуюся в Q, сила притяжения к Луне F определится из следующей пропорции:

$$\frac{F}{g} = \frac{ma^2}{Md^2},$$

ибо сила притяжения прямо пропорциональна массам притягивающихся тел и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними. Поэтому

$$F = \frac{ma^2 g}{Md^2}.$$

Возьмем на время оси координат Oxy, проведя их, как показано на рис. 181. Тогда проекции силы F на оси координат очевидно, будут:

$$F_x = F\cos\sigma = \frac{ma^2 g}{Md^2}\,\frac{D-x}{d}, \quad F_y = F\sin\sigma = -\frac{ma^2 g}{Md^2}\,\frac{y}{d}.$$

Так как мы рассчитываем силы, приходящиеся на единицу массы то таковы же будут и проекции ускорения жидкой частицы, вызываемого лунным притяжением. Но последнее действует на всю Землю, и если мы предположим, что при вычислении действия Луны на твердую Землю можно считать Землю состоящей из сферических однородных слоев, то ускорение F_0 сообщаемое Луной всей Земле целиком, будет определяться по формулам

$$F_{0x} = \frac{ma^2 g}{MD^2}, \quad F_{0y} = 0.$$

Так как рассматриваются только смещения частиц жидкости *относительно* земного шара, то приливообразующей силой будет являться очевидно только разность $F - F_0$:

$$F_x - F_{0x} = \frac{ma^2 g}{M}\left(\frac{D-x}{d^3} - \frac{1}{D^2}\right); \quad F_y - F_{0y} = -\frac{ma^2 g}{M}\,\frac{y}{d^3}.$$

Достаточно рассмотреть первое приближение: так как r очень мало в сравнении с D, то угол α очень мал, поэтому $D - x$ приблизительно равно d, но тогда:

$$\frac{D-x}{d^3} - \frac{1}{D^2} \approx \frac{1}{d^2} - \frac{1}{D^2} = \frac{D^2-d^2}{d^2D^2} = \frac{(D-d)(D+d)}{d^2D^2} \approx \frac{2(D-d)}{D^3} \approx \frac{2x}{D^3},$$

поэтому приливообразующий потенциал V_2 надо определять из уравнений:

$$\frac{\partial V_2}{\partial x} = -\frac{2x}{D^3}\,\frac{ma^2 g}{M}, \quad \frac{\partial V_2}{\partial y} = -\frac{x}{D^3}\,\frac{ma^2 g}{M},$$

которые дают:

$$V_2 = -\frac{ma^2g}{2MD^3}(2x^2 - y^2)$$

Заменив, наконец, x и y по формулам $x = r\cos\vartheta$, $y = r\sin\vartheta$ и заметив, что $2x^2 - y^2 = r^2(2\cos^2\vartheta - \sin^2\vartheta) = r^2(3\cos^2\vartheta - 1)$, получим окончательно:

$$V = -\frac{mga^2r^2}{2MD^3}(3\cos^2\vartheta - 1). \qquad (32.4)$$

Обратим внимание на то, что приливообразующая сила пропорциональна массе возмущающего тела и обратно пропорциональна третьей степени расстояния до последнего, поэтому приливообразующая сила Луны оказывается большей, чем приливообразующая сила Солнца.

Применив теперь основное уравнение статической теории приливов (32.3), получим для высоты прилива следующее выражение:

$$h = \frac{ma^2(3\cos^2\vartheta - 1)}{2MD^3}\frac{r^2}{g} + C \qquad (32.5)$$

Мы заменили при этом в (32.4) радиус Земли r его средним значением a. Введем для краткости обозначение

$$H = \frac{\sigma ma^4}{2MD^3}, \qquad (32.6)$$

тогда выражение для потенциала V_2 примет вид

$$V_2 = -gH\left(\cos^2\vartheta - \frac{1}{3}\right), \qquad (32.7)$$

а уравнение (32.5) может быть написано в форме

$$h = H\left(\cos^2\vartheta - \frac{1}{3}\right) + C. \qquad (32.8)$$

Остается определить постоянную C из того условия, что объем жидкости остался после деформации, произведенной возмущающим телом, неизменным; это условие выражается, очевидно, равенством

$$\int\int h\,dS = 0, \qquad (32.9)$$

распространенным по всей поверхности Земли (мы предполагаем для простоты всю Землю покрытой океаном). Разобьем всю поверхность Земли на полосы, каждая из которых заключена между двумя малыми кругами, отвечающими двум соседним значениям ϑ и $\vartheta + d\vartheta$. Эти круги являются, очевидно, пересечениями Земли с плоскостями перпендикулярными к линии OL. Площадь такой полосы равна

очевидно, $2\pi a \sin\vartheta a\, d\vartheta = 2\pi a^2 \sin\vartheta\, d\vartheta$. Поэтому равенство (32.9) приводится к такому:

$$\int_S 2\pi a^2 \sin\vartheta H\left(\cos^2\vartheta - \frac{1}{3}\right) d\vartheta + 4\pi a^2 C = 0,$$

откуда после элементарных вычислений имеем $C = 0$ и таким образом, имеем окончательно, что

$$h = H\left(\cos^2\vartheta - \frac{1}{3}\right). \tag{32.10}$$

§ 33. Выводы статической теории приливов. Уравнение (32.10) показывает, что свободная поверхность жидкости имеет форму сфероида вращения, осью которого является прямая линия, соединяющая центры Земли и Луны. При этом в точке пересечения этой линии с поверхностью Земли (этим точкам отвечают значения $\vartheta = 0$ и $\vartheta = \pi$) высота прилива будет наибольшей и равна $h = \frac{2}{3} H$, так как для этих точек $\cos^2\vartheta = 1$, для этих точек Земли Луна находится в зените или надире. Наибольший отлив будет, очевидно, в тех точках Земли, для которых $\cos\vartheta = 0$, т. е. в точках пересечения поверхности Земли с плоскостью, проходящей через центр Земли и перпендикулярной к линии OL, соединяющей центры Земли и Луны. Для этих точек Луна находится на горизонте и $h = -\frac{1}{3} H$. При перемещении Луны относительно Земли поверхность жидкого сфероида будет все время деформироваться, причем оно из двух мест наибольшего прилива будет все время смотреть на Луну. Высота приливов определяется величиной H. Дадим ее численное значение. Для Луны имеем:

$$\frac{m}{M} = \frac{1}{81}, \quad \frac{a}{D} = \frac{1}{60{,}3}, \quad a = 6370 \text{ км},$$

поэтому $H = 54$ см. Для Солнца имеем такие значения:

$$\frac{m}{M} = 333\,000, \quad \frac{a}{D} = \frac{1}{23\,400}, \quad H = 25 \text{ см}.$$

Мы видим, таким образом, что приливообразующее действие Луны в два раза сильнее такого же действия Солнца.

Рассмотрим теперь определенное место поверхности Земли. Формула (32.10) показывает, что высота прилива зависит от зенитного расстояния Луны. Последнее меняется периодически в течение лунных суток (равных 24 часам 50 минутам), правда не точно периодически, ибо в силу того что вращение Луны около Земли происходит не в плоскости экватора Земли, зенитное расстояние Луны будет изменяться периодически в течение лунного месяца (равного $29\frac{1}{2}$ суткам). Поэтому приливы, происходящие от Луны, тоже будут

обладать еще месячной периодичностью. Чтобы ближе рассмотреть этот вопрос, введем координаты Луны, а именно ее склонение δ (рис. 182) и часовой угол α отсчитываемый к западу от меридиана PQ проходящего через рассматриваемое место Земли Q и через полюс Земли P. Тогда по известной формуле сферической тригонометрии будем иметь:

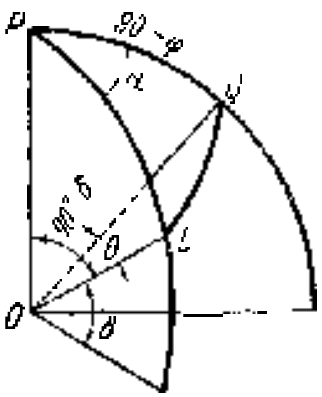

Рис. 182

$$\cos^2\vartheta = (\sin\varphi\sin\delta + \cos\varphi\cos\delta\cos\alpha)^2 =$$
$$= \sin^2\varphi\sin^2\delta + 2\sin\varphi\cos\varphi\sin\delta\cos\delta\cos\alpha +$$
$$+ \cos^2\varphi\cos^2\delta\cos^2\alpha =$$
$$= \sin^2\varphi\sin^2\delta + \frac{1}{2}\sin 2\varphi\sin 2\delta\cos\alpha +$$
$$+ \frac{1}{2}(1 - \sin^2\varphi)(1 - \sin^2\delta)(1 + \cos 2\alpha)$$

Производя легкие преобразования получим следующие выражения для высоты приливов и приливообразующей силы:

$$h = \frac{1}{2}H\left[\left(1 - \frac{3}{2}\sin^2\delta\right)\left(1 - \frac{3}{2}\sin^2\varphi\right) + \sin 2\delta\sin 2\varphi\cos\alpha + \cos^2\varphi\cos^2\delta\cos 2\alpha\right];$$
$$V_2 = -gh, \tag{33.1}$$

первую формулу можно представить в следующем виде,

$$h = h_1 + h_2 + h_3, \tag{33.2}$$

где

$$\left.\begin{aligned} h_1 &= \frac{1}{6}H(1 - 3\sin^2\delta)(1 - 3\sin^2\varphi), \\ h_2 &= \frac{1}{2}H\sin 2\delta\sin 2\varphi\cos\alpha \\ h_3 &= \frac{1}{2}H\cos^2\varphi\cos^2\delta\cos 2\alpha \end{aligned}\right\} \tag{33.3}$$

и следовательно, прилив в данном месте можно считать слагающимся из трех частей. Рассмотрим каждую из этих частей по отдельности.

Прежде всего отметим, что h_1 зависит только от широты места наблюдения φ и от склонения Луны δ и не зависит от часового угла Луны α (изменения величины H, происходящие от изменения расстояния Луны от Земли D при движении Луны по ее орбите, мы рассматривать не будем). При этом имеет значение только абсолютная величина δ, ибо в h_1 входит только $\sin^2\delta$. Но δ изменяется периодически, причем продолжительность периода равняется времени обращения Луны около Земли, т. е. лунному месяцу, период же изменения числового значения δ будет, очевидно в два раза меньше

Поэтому h_1 представляет высоту полумесячного прилива. Если возмущающим телом является Солнце, то получаются приливы полугодового периода. Эти приливы длинного периода обращаются в нуль на широте $\varphi = 35°16'$, для которой $\sin\varphi = 1/\sqrt{3}$, и имеют наибольшее значение на полюсе.

Выражение для h_2 содержит множителем $\cos\alpha$, но α изменяется на 360° в течение лунных суток, в то время как δ за этот промежуток времени изменяется мало. Поэтому h_2 представляет высоту суточного прилива. Если $\varphi > 0$ и $\delta > 0$ (т. е. рассматриваемое место Земли и Луна находятся в северном полушарии), то наибольшая высота суточного прилива будет при $\cos\alpha = 1$, т. е. при прохождении Луны через меридиан рассматриваемого места Земли, наименьшая высота прилива будет при $\cos\alpha = -1$, т. е. при прохождении Луны через меридиан антипода рассматриваемого места Земли. Если $\delta < 0$, т. е. Луна находится в южном полушарии, то соотношения будут обратные.

Суточный прилив имеет наибольшую величину на широте $\varphi = 45°$ и обращается в нуль на экваторе ($\varphi = 0$) и на полюсе ($\varphi = 90°$). Наконец h_3 представляет высоту прилива полусуточного периода, ибо h_3 содержит множителем $\cos 2\alpha$ периодом изменения которого является половина лунных суток. Наибольшая высота полусуточного прилива, обычно наиболее заметного, будет при $\cos 2\alpha = 1$, т. е. при $\alpha = 0°$ или $\alpha = 180°$. Эти значения угла α отвечают, очевидно, прохождению Луны через меридиан рассматриваемого места Земли Q над горизонтом или под ним. Наименьшая высота полусуточного прилива будет при $\cos 2\alpha = -1$, т. е. при $\alpha = 90°$ или $\alpha = 270°$.

Явление полусуточного прилива интенсивнее всего протекает на экваторе (где $\varphi = 0$), а также в те дни, когда Луна проходит через экватор ($\delta = 0$). На полюсе ($\varphi = 90°$) полусуточный прилив отсутствует.

Аналогичные выводы можно сделать и для Солнца, получаются приливы суточные (с периодом в 24 часа) и полусуточные (с периодом в 12 часов). Все эти приливы будут налагаться друг на друга, так что в общем высота приливов h окажется очень сложной функцией.

Очевидно, что при новолунии и полнолунии действия Солнца и Луны будут взаимно усиливаться, так что получатся приливы значительной величины; наоборот, когда Луна будет находиться в первой или последней четверти, действие Солнца будет парализовать действие Луны и приливы будут незначительными.

Все эти выводы статической теории приливов подтверждаются наблюдениями только в самых общих чертах. Так например, высота приливов в среднем гораздо больше найденного нами выше значения в 0,5 *м*. Наибольшие приливы наступают не в момент прохождения Луны через меридиан, а на несколько часов позднее и т. д.

На самом деле приливы нужно рассматривать как явление динамическое, а именно — как вынужденные колебания масс океана, происходящие под действием приливообразующей силы. Как мы видели в § 31, величины вынужденных колебаний зависит от свойств свободных колебаний, происходящих в данном бассейне, поэтому величина и характер приливов должны сильно зависеть от того в каких условиях находится рассматриваемое место Земли это и подтверждается опытом, показывающим, что на одних берегах океана приливы велики, на других — малы, причем в одних местах преобладают полусуточные приливы, в других — суточные и т. д.

Чтобы учесть влияние местных условий, Лаплас предложил пользоваться формулой более общей, нежели найденная нами выше формула (33.1). А именно, каждый член этой формулы надо умножить на численный множитель, причем значения этих численных множителей для каждой гавани надо подбирать на основании опытных данных, кроме того в члены, зависящие от часового угла Луны, надо ввести еще фазы, тоже определяемый на основании опытных данных. Таким образом формула (33.1) заменится теперь на

$$h = H\,[C_1(1 - 3\sin^2\delta) + C_2 \sin 2\delta \cos(\alpha - \alpha_1) + C_3 \cos^2\delta \cos 2(\alpha - \alpha_2)] \qquad (33.4)$$

такая же формула получится для солнечных приливов. Имея кривую приливов мы можем постараться представить ее формулой типа (33.4) (к которой прибавлены еще члены происходящие от Солнца). Более удобным практически является, однако, так называемый гармонический анализ приливов, которым поэтому и пользуются при предсказании приливов.

Этот способ состоит в дальнейшем упрощении вида членов формулы (33.4) за счет увеличения числа этих членов. Если угловую скорость вращения Земли обозначить через ω, среднюю угловую скорость вращения Луны около Земли через n и угловую скорость вращения перигея Луны около Земли через p, то каждый член формулы (33.4) будет функцией от ωt, $n_1 t$ и pt, не меняющейся при увеличении какого-либо из этих чисел на 2π. Зависимость от pt получается в силу того, что H зависит от расстояния Луны от Земли D, а это расстояние, очевидно, является периодической функцией t с периодом $2\pi/p$. Поэтому каждый член рассматриваемой формулы может быть разложен в кратный ряд Фурье вида (α, β, γ — целые неотрицательные числа).

$$\sum A_{\alpha\beta\gamma} \cos(\alpha\omega t + A) \cos(\beta n_1 t + B) \cos(\gamma p t - C)$$

Воспользовавшись известными формулами тригонометрии, позволяющими заменить произведение двух косинусов суммой двух косинусов,

мы можем привести формулу для h к следующему виду:

$$h = \sum A_{\alpha\beta\gamma\delta} \cos\left(\alpha\omega t + \beta n_1 t + \gamma p t + \delta n' t + \varepsilon\right),$$

где α, β и γ — целые (положительные равные нулю или отрицательные) числа. Обозначим еще через n' среднюю угловую скорость вращения Земли около Солнца тогда для солнечного прилива получится аналогичное выражение. Кроме того, так как движение около Солнца влияет на движение Луны около Земли, в слагаемых, дающих лунный прилив, появятся еще слагаемые от $n't$, и окончательно мы получим, что

$$h = \sum A_{\alpha\beta\gamma\delta} \cos\left[\left(\alpha\omega + \beta n_1 + \gamma p - \delta n'\right) t + \varepsilon\right] \qquad (33.5)$$

Итак, прилив в любом месте Земли может быть представлен как наложение друг на друга ряда частных приливов причем периоды этих частных приливов определяются из астрономических данных, ибо ω, n_1, p и n' даются астрономическими наблюдениями а α, β, γ, δ являются целыми числами

Для практических целей наиболее важными являются около двадцати пяти определенным образом выбранных членов разложения (33.5) Поэтому можно написать окончательную формулу в следующем виде

$$h = A_1 + \sum A_k \cos\left(\omega_k t + \varepsilon_k\right); \qquad (33.6)$$

здесь ω_k являются определенными числами, величины же A_k и ε_k должны быть для каждой гавани определены на основании многолетних наблюдений приливов в этой гавани.

Вычисление величин A_k и ε_k составляет задачу гармонического анализа приливов и производится при помощи особых приборов или по особым вычислительным схемам Найдя A_k и ε_k, мы можем по той же формуле (33 6) вычислить высоту прилива в любой момент времени, т е можем предсказывать приливы. Существуют особые вычислительные машины для предсказания приливов. Результаты вычислений публикуются в таблицах приливов.

§ 34. Каналовая теория приливов. Как было упомянуто выше, приливы следует рассматривать как явление динамическое т е следует принимать во внимание движение частиц воды, вызываемое приливообразующими силами. Лаплас первый дал динамическую теорию приливов; он рассматривал приливы океана, целиком покрывающего Землю.

Однако в силу сложности явления приливов, происходящей от того, что колебания разного типа накладываются друг на друга не удается получить удовлетворительного согласия между данными опыта и результатами выводимыми из динамической теории приливов Мы ограничимся поэтому наложением двух простых случаев так назы-

ваемой каналовой теории прилива, подробно разработанной Эри. На этих примерах мы выясним, в чем состоит основная идея динамической теории приливов.

Рассмотрим сначала происходящее под действием приливообразующей силы Луны движение воды в очень узком канале, совпадающем с земной параллелью, находящейся под широтой φ. Как всегда, внутренним трением мы будем пренебрегать и воду будем считать идеальной жидкостью. Глубину жидкости мы предположим постоянной и обозначим через h. Мы будем рассматривать только приливы суточные и полусуточные, поэтому мы сможем пренебречь изменением склонения Луны, т. е. мы будем считать δ постоянным. Точно так же мы будем считать постоянным расстояние D от Луны до Земли.

Будем отсчитывать западную долготу точки ψ от некоторого определенного меридиана. Обозначим горизонтальное смещение какой-нибудь частицы жидкости через ξ, высоту прилива через ζ.

В § 31 нами было выведено уравнение вынужденных колебаний жидкости в прямолинейном канале постоянной глубины h:

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + X, \tag{34.1}$$

где $c^2 = gh$, а X есть внешняя возмущающая горизонтальная сила. В нашем случае ось канала представляет окружность большого радиуса $a\cos\varphi$. Так как глубина жидкости h очень мала в сравнении с этим радиусом, то в каждом месте канала можно считать его прямолинейным и можно применять уравнение (34.1), при этом очевидно, что приращению долготы $d\psi$ отвечает

$$dx = a\cos\varphi\, d\psi,$$

так что

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} = \frac{1}{a^2\cos^2\varphi}\frac{\partial^2 \zeta}{\partial \psi^2}.$$

Перейдем к определению силы X. Так как Земля вращается и так как рассматривается движение жидкости относительно Земли, то нужно учитывать, по общей теории относительного движения добавочные силы, отвечающие переносному ускорению и ускорению Кориолиса. Аналогично тому, как мы это делали в § 9 главы пятой, соединим силу, отвечающую переносному ускорению, вместе с силой притяжения к центру Земли в одну вертикальную силу тяжести. Сила же Кориолиса перпендикулярна к скорости частицы жидкости, следовательно, перпендикулярна к оси Ox. Поэтому составляющие силы тяжести и силы Кориолиса по оси Ox обратятся в нуль, и останется, таким образом, только горизонтальная составляющая приливообразующей силы Луны, для потенциала этой силы мы имеем

выражение (33.1)

$$V_2 = -gH\left(\cos^2\theta - \frac{1}{3}\right) = -\frac{gH}{2}\left[\frac{(1-3\sin^2\delta)(1-3\sin^2\varphi)}{3} + \right.$$

$$\left. + \sin 2\delta \sin 2\varphi \cos\alpha + \cos^2\varphi \cos^2\delta \cos 2\alpha\right], \quad (34.2)$$

поэтому

$$X = -\frac{\partial V_2}{\partial x} = -\frac{1}{a\cos\varphi}\frac{\partial V_2}{\partial\psi}. \quad (34.3)$$

Итак

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} - \frac{c^2}{a^2\cos^2\varphi}\frac{\partial^2\xi}{\partial\psi^2} = -\frac{1}{a\cos\varphi}\frac{\partial V_2}{\partial\psi}. \quad (34.4)$$

Найдя ξ, мы определим ζ по формуле (31.3):

$$\zeta = -h\frac{\partial\xi}{\partial x} = -\frac{h}{a\cos\varphi}\frac{\partial\xi}{\partial\psi}. \quad (34.5)$$

Обозначим через n среднюю угловую скорость вращения Луны относительно Земли; тогда можно принять (рис. 183) $\alpha = nt - \psi$, поэтому

$$\frac{\partial V_2}{\partial\psi} = -\frac{\partial V_2}{\partial x},$$

и значит,

$$X = \frac{gH}{a}[\sin 2\delta \sin\varphi \sin(nt-\psi) + \cos^2\delta\cos\varphi\sin 2(nt-\psi)].$$

Поэтому уравнение принимает вид

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} - \frac{c^2}{a^2\cos^2\varphi}\frac{\partial^2\xi}{\partial\zeta^2} = \frac{gH}{a}[\sin 2\delta\sin\varphi\sin(nt-\psi) +$$

$$+ \cos^2\delta\cos\varphi\sin 2(nt-\psi)], \quad (34.6)$$

и легко интегрируется по методу § 31, формула (31.7):

$$\xi = \frac{agH\sin 2\delta\sin\varphi\cos^2\varphi}{c^2 - a^2n^2\cos^2\varphi}\sin(nt-\psi) + \frac{agH\cos^2\delta\cos^2\varphi}{4(c^2-a^2n^2\cos^2\varphi)}\sin 2(nt-\psi).$$

Для высоты приливов получим по формуле (31.5):

$$\zeta = \frac{c^2H\sin 2\delta\sin 2\varphi}{2(c^2-a^2n^2\cos^2\varphi)}\cos(nt-\psi) + \frac{c^2H\cos^2\delta\cos^2\varphi}{2(c^2-a^2n^2\cos^2\varphi)}\cos 2(nt-\psi).$$

Первый член представляет очевидно, суточный прилив, период которого равен $2\pi/n$, т. е. лунным суткам. Так как период этого члена, рассматриваемого как функция от ψ, равен 2π, то длина этой приливной волны равна длине рассматриваемой параллели. Этот член пропадает для экваториального канала ($\varphi = 0$) или при прохождении Луны через экватор ($\delta = 0$). Второй член представляет полусуточный прилив, ибо период этого члена равен π/n, т. е. лун-

ным полусуткам. Как функция от ψ, эта приливная волна имеет период π, следовательно длина ее равна половине длины рассматриваемой параллели. Когда Луна будет проходить через меридиан данного места, то nt будет равняться ψ (рис. 183) и, следовательно будет прилив или отлив, смотря по тому будет $c^2 - a^2n^2\cos^2\varphi$ положительным числом или отрицательным. Так как $c^2 = gh$, то прилив будет если

$$h > \frac{a^2n^2}{g}\cos^2\varphi,$$

Рис. 183

но можно принять $a = 6{,}37 \cdot 10^6$ м $n = \frac{2\pi}{1490 \cdot 60} = 7{,}03 \cdot 10^{-5}\frac{1}{сек}$, поэтому $\frac{a^2n^2}{g} = 20{,}4$ км и значит, чтобы при прохождении Луны через меридиан был полусуточный прилив, необходимо выполнение неравенства $h > 20{,}4\cos^2\varphi$ км.

Так как средняя глубина океанов равна приблизительно 3,5 км то «прямой» прилив может иметь место только в очень высоких широтах (примерно выше 65°), в низких широтах будет «обращенный» прилив, т. е. при прохождении Луны через меридиан какого-либо места в этом месте будет отлив. Почему это происходит так, было объяснено в § 31. А именно, собственные колебания в канале распространяются со скоростью c, и чтобы обежать половину Земли (длина рассматриваемых вынужденных колебаний равна половине длины параллели), им надо затратить время

$$\tau = \frac{\pi a\cos\varphi}{c},$$

равное, например, 30 часам для экваториального канала ($\varphi = 0$) глубины $h = 3{,}5$ км в то время как период возмущающей силы равен только 12 часам 25 минутам. В силу малости периода возмущающей силы в сравнении с периодом собственных колебаний того же вида, что и вынужденные колебания, и будет разность фаз в 180° между возмущающей силой и вынужденными колебаниями.

Предположим теперь, что канал направлен по меридиану, который мы возьмем за начальный меридиан. В этом случае $\psi = 0$, $\alpha = nt$, переменной величиной будет служить широта φ, и в уравнении (34.1) надо будет положить $dx = a\,d\varphi$, $X = -\frac{1}{a}\frac{\partial V}{\partial\varphi}$, поэтому это уравнение примет вид

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} - \frac{c^2}{a^2}\frac{\partial^2\xi}{\partial\varphi^2} = \frac{gH}{2a}\left[(3\sin^2\delta - 1)\sin 2\varphi + 2\sin 2\delta\cos nt\cos 2\varphi - \right.$$
$$\left. - \sin 2\varphi\cos^2\delta\cos 2nt\right] \qquad (34.7)$$

Это уравнение имеет следующее частное решение

$$\xi = \frac{gHa}{8c^2}(3\sin^2\delta - 1)\sin 2f + \frac{gHa}{4c^2 - n^2a^2}\sin 2\delta\cos nt\sin 2\varphi -$$

$$- \frac{gHa}{8(c^2 - a^2n^2)}\cos^2\delta\cos 2nt\sin 2\varphi \qquad (34.8)$$

откуда по формуле

$$\zeta = -h\frac{\partial x}{\partial x} = -\frac{h}{a}\frac{\partial\xi}{\partial\varphi}$$

вытекает следующее выражение для высоты прилива:

$$\zeta = \frac{H}{4}(1 - 3\sin^2\delta)\cos 2\varphi - \frac{2Hc^2}{4c^2 - n^2a^2}\sin 2\delta\cos nt\sin 2\varphi +$$

$$+ \frac{Hc^2}{4(c^2 - a^2n^2)}\cos^2\delta\cos 2nt\cos 2\varphi. \qquad (34.9)$$

Первый член представляет изменение уровня воды в канале меняющееся лишь очень медленно вместе с δ (полумесячный период)

Второй член представляет стоячие колебания суточного периода; при $\varphi = 0$ и $\varphi = 90°$, т. е. на полюсах и экваторе, будут находиться узлы этих колебаний Наконец, третий член представляет стоячие колебания полусуточного периода с узлами в точках $\varphi = \pm 45°$.

Представляется интересным рассмотреть еще приливы в каналах конечной длины.

Пусть имеется канал, расположенный по параллели, широта которой φ. Пусть канал этот ограничен на своих концах вертикальными стенками, лежащими в плоскостях меридианов $\psi = \pm\psi_0$ Таким образом, длина этого канала будет

$$l = 2a\psi_0\cos\varphi.$$

Склонение Луны δ примем для простоты равным нулю, тогда из формулы (34.6) получим:

$$\frac{\partial^2\xi}{dt^2} - \frac{c^2}{a^2\cos^2\varphi}\frac{\partial^2\xi}{\partial\psi^2} = \frac{gH}{a}\cos\varphi\sin 2(nt - \psi), \qquad (34.10)$$

причем надо отыскать решение этого уравнения, удовлетворяющее граничным условиям: $\xi = 0$ при $\psi = \pm\psi_0$. Но как раз такая задача была рассмотрена в § 31. Действительно, уравнение (31.11) § 31 перейдет в наше уравнение (34.10), если мы положим:

$$x = a\cos\varphi\cdot\psi, \qquad f = \frac{gH\cos\varphi}{a}, \qquad \sigma = 2n, \qquad k = \frac{2}{a\cos\varphi},$$

поэтому формулы (31.12), (31.13) § 31 дают решение нашей задачи

По § 31 резонанс будет происходить при тех длинах канала, при которых основной период собственных колебаний $\tau_1 = 2l/c$

будет в целое число раз превышать период возмущающей силы, в данном случае 12 час 25 мин. = 745 минут. Так например для канала глубиной $h = 3{,}5$ км, для которого $c = \sqrt{gh} = 185{,}3$ м/сек, наименьшая критическая длина канала, при которой будет происходить резонанс, будет равна

$$l = \frac{c\tau_1}{2} = \frac{185{,}3 \cdot 745 \cdot 60}{2} = 4140 \text{ км}$$

Следующие критические длины будут в два, три и т. д. раз превосходить эту величину.

Так как $c = \sqrt{gh}$, а $l = c\tau/2$, то при уменьшении глубины канала уменьшается и критическая длина канала. Эти соображения показывают, что амплитуда и характер приливов в различных водоемах Земли будут разные, так как они зависят от размеров и глубины водоема; опыт подтверждает этот вывод.

§ 35. Волны во вращающейся атмосферной оболочке. Рассмотрим еще длинные волны, которые образуются в земной атмосфере. Последняя захватывается вращением Земли. Кроме того в земной атмосфере существует, вообще говоря, всегда, начиная с некоторой высоты, западно-восточное движение [1]) (атмосфера как бы перегоняет землю в ее западно-восточном вращении).

Возьмем сферическую систему координат, связанную с вращающейся Землей. Обозначим через θ дополнение до широты φ: $\theta = \frac{\pi}{2} - \varphi$, через λ — долготу, отсчитываемую от некоторого меридиана к востоку, через r — расстояние от центра Земли. Пусть v_θ — составляющая скорости по меридиану (положительная когда скорость направлена к югу), v_λ — составляющая скорости по кругу широты (положительная когда скорость направлена к востоку). Запишем уравнения движения в форме Ламба

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - \mathbf{v} \times \operatorname{rot} \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - \nabla \left(\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{2} + W \right) + 2\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}. \quad (35.1)$$

Здесь W, как и прежде, — потенциал силы тяжести, включающий в себя ньютоновское притяжение и центробежную силу вращения Земли, а последний член справа представляет силу Кориолиса (глава пятая, § 9).

Напишем составляющие этого уравнения по осям θ и λ, причем в согласии с методом длинных волн пренебрежем членами с

---

[1]) Существование холодных полюсов и теплого экватора приводит к тому, что при почти постоянном давлении на уровне моря, на высотах получается низкое давление над полюсами, более высокое в умеренных зонах и еще более высокое в экваториальной зоне (см. барометрическую формулу § 3 главы третьей). Наличие силы Кориолиса создает затем циклоническое вращение вокруг полюсов т. е. западно-восточные ветры.

составляющими скорости по оси r. Получим.

$$\frac{\partial v_\theta}{\partial t} - v_\lambda(\zeta + 2\omega\cos\theta) = -\frac{1}{r\rho}\frac{\partial p}{\partial\theta} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{v\cdot v}{2} + W\right), \quad (35.2)$$

$$\frac{\partial v_\lambda}{\partial t} + v_\theta(\zeta + 2\omega\cos\theta) = -\frac{1}{r\rho\sin\theta}\frac{\partial p}{\partial\lambda} - \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\frac{v\cdot v}{2} + W\right), \quad (35.3)$$

где

$$\zeta = (\mathrm{rot}\, v)_r = \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial \sin\theta v_\lambda}{\partial\theta} - \frac{\partial v_\theta}{\partial\lambda}\right), \quad (35.4)$$

Уравнение неразрывности

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial\rho r^2 v_r}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial\rho v_\theta\sin\theta}{\partial\theta} + \frac{\partial\rho v_\lambda}{\partial\lambda}\right) = 0 \quad (35.5)$$

можно значительно упростить применительно к атмосферным движениям. Именно, в таких движениях, в отличие от задач нелинейной акустики и газовой динамики, изменения плотности ρ со временем и при перемещении по горизонтали малы по сравнению с самой плотностью, так как к тому же толщина действующей части атмосферы (величина порядка 20 *км*) мала по сравнению с радиусом Земли, мы можем вместо (35.5) написать с большой точностью:

$$\frac{\partial\rho v_r}{\partial r} + \frac{\rho}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial v_\theta\sin\theta}{\partial\theta} + \frac{\partial v_\lambda}{\partial\lambda}\right) = 0 \quad (35.6)$$

Умножим обе части (35.3) на $\sin\theta$, продифференцируем полученное выражение по θ и вычтем из него продифференцированное по λ уравнение (35.2). Получим, принимая во внимание (35.4) и (35.6):

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial\zeta}{\partial\theta} - 2\omega\cos\theta\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta} - \frac{v_\lambda}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\lambda}(\zeta + 2\omega\cos\theta) =$$

$$= -\frac{1}{r^2\sin^2\theta\rho^2}\left(\frac{\partial\rho}{\partial\theta}\frac{\partial p}{\partial t} - \frac{\partial\rho}{\partial\lambda}\frac{\partial p}{\partial\theta}\right) + \frac{\zeta + 2\omega\cos\theta}{\rho}\frac{\partial\rho v_r}{\partial r}. \quad (35.7)$$

Пусть Земля есть сфера радиуса a_0. Тогда при $r = a_0$ мы должны положить $v_r = 0$. Кроме того, при $r \to \infty$ надо считать $(\rho v_r) \to 0$ (атмосфера не теряет и не приобретает массу извне). Но тогда существует такая высота, для которой ρv_r достигает максимума [1]), т. е. где

$$\frac{\partial\rho v_r}{\partial r} = 0.$$

Постулируем, что по крайней мере один такой уровень существует для всей земной атмосферы. Назовем его «средним уровнем». Практически можно говорить в этом смысле об уровне 3—5 *км*.

[1]) Другая возможность отвечает случаю отсутствия вертикальных скоростей $v_r = 0$.

Для среднего уровня (35.6) запишется в виде

$$\frac{\partial v_\theta \sin\theta}{\partial\theta} - \frac{\partial v_\lambda}{\partial\lambda} = 0; \tag{35.8}$$

так что существует функция тока $\psi(\theta, \lambda, r)$ такая, что

$$v_\theta = -\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}, \quad v_\lambda = \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}. \tag{35.9}$$

Далее, выражение $\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial\rho}{\partial\theta}\frac{\partial p}{\partial\lambda} - \frac{\partial\rho}{\partial\lambda}\frac{\partial p}{\partial\theta}\right)$ точно равно нулю для баротропной жидкости. В атмосфере можно по уравнению Клапейрона ($\rho = p/RT$) заменить этот двучлен на выражение $\frac{1}{T}\left(\frac{\partial T}{\partial\lambda}\frac{\partial p}{\partial\theta} - \frac{\partial T}{\partial\theta}\frac{\partial p}{\partial\lambda}\right)$. В задачах теории климата (в стационарных или квазистационарных задачах) близи поверхности Земли, где горизонтальные контрасты температур велики (они порождаются хотя бы наличием материков и океанов), приведенный здесь двучлен оказывается существенным. На среднем уровне, где горизонтальные контрасты температур сглаживаются, этот двучлен несуществен в задаче о бегущих волнах. Поэтому мы окончательно можем написать уравнение (35.5) на среднем уровне:

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial(\zeta + 2\omega\cos\theta)}{\partial\theta} + \frac{v_\lambda}{r\sin\theta}\frac{\partial(\zeta + 2\omega\cos\theta)}{\partial\lambda} = 0\ ^1), \tag{35.10}$$

Нам остается только заменить ζ по формуле (35.4) и v_θ, v_λ — по формуле (35.9) и мы получим одно уравнение для определения функции ψ. Так как вследствие (35.4) и (35.9)

$$\zeta = \frac{1}{r^2}\Delta\psi, \tag{35.11}$$

где

$$\Delta\psi = \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\lambda^2}, \tag{35.12}$$

то мы получим окончательно:

$$\frac{\partial\Delta\psi}{\partial t} + \frac{1}{r^2\sin\theta}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\frac{\partial\Delta\psi}{\partial\lambda} - \frac{\partial\psi}{\partial\lambda}\frac{\partial\Delta\psi}{\partial\theta}\right) + 2\omega\frac{\partial\psi}{\partial\lambda} = 0. \tag{35.13}$$

---

[1]) Строго говоря, так как при $r = a_0$ $v_r = 0$, можно написать:

$$\rho v_r = \int_a^r \left(\frac{\partial\zeta}{\partial t} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial\zeta + 2\omega\cos\theta}{\partial\theta} + \frac{v_\lambda}{r\sin\theta}\frac{\partial\zeta + 2\omega\cos\theta}{\partial\lambda}\right)\overline{\zeta + 2\omega\cos\theta};$$

так как еще при $r \to \infty$ $\rho v_r \to 0$, то получится

$$\int_{a_0}^{\infty}\left(\frac{\partial\zeta}{\partial t} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial\zeta + 2\omega\cos\theta}{\partial\theta} + \frac{v_\lambda}{r\sin\theta}\frac{\partial\zeta + 2\omega\cos\theta}{\partial\lambda}\right)\frac{\rho\,dr}{\zeta + 2\omega\cos\theta} = 0,$$

таким образом, уравнение (35.10) выполняется лишь в среднем по высоте.

Представим теперь, в согласии с тем, что мы говорили в начале этого параграфа, что наше движение на среднем уровне состоит из основного, стационарного, чисто зонального, западно-восточного потока, на который накладываются малые, вихревые возмущения так что

$$v_1 = \bar{v}_1 + v_1'(\theta, \lambda, t), \quad v_2 = \bar{v}_2(\theta) + v_2'(\theta, \lambda, t), \quad p = \bar{p}(\theta) + p'(\theta, \lambda, t) \quad (35.14)$$

где v_1', v_2', p' малы, а $\bar{v}_1$ и $\bar{p}$ зависят лишь от θ.

Примем, далее, что

$$\bar{v}_1 = ar \sin\theta, \quad (35.15)$$

где a — постоянная величина. Тогда, если

$$\psi = \bar{\psi}(\theta) + \psi'(\theta, \lambda, t), \quad (35.16)$$

то вследствие (35.9) и (35.15) получим:

$$\bar{\omega}(\theta) = -ar^2 \cos\theta \quad (35.17)$$

и

$$v_\theta' = -\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\psi'}{\partial\lambda}, \quad v_\lambda' = \frac{1}{r}\frac{\partial\psi'}{\partial\theta}. \quad (35.18)$$

Вставляя (35.16) в уравнение (35.13), принимая в расчет (35.17) и отбрасывая члены, содержащие квадраты ψ', получим для определения ψ' уравнение

$$\frac{\partial\Delta\psi'}{\partial t} + a\frac{\partial\Delta\psi'}{\partial\lambda} + 2(a+\omega)\frac{\partial\psi'}{\partial\lambda} = 0. \quad (35.19)$$

Решение этого линейного уравнения можно искать в виде

$$\psi' = f(\theta)\cos(m\lambda + \sigma t), \quad (35.20)$$

где m — целое число, σ — неизвестная постоянная и $f(\theta)$ — неизвестная функция от θ. Для такого решения

$$\Delta\psi' = \left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{df}{d\theta}\right) - \frac{m^2}{\sin^2\theta}f\right]\cos(m\lambda + \sigma t),$$

так что (35.19) даст следующее уравнение для определения f:

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{df}{d\theta}\right) + \left[-\frac{m^2}{\sin^2\theta} + \frac{2(a+\omega)m}{\sigma + am}\right]f = 0. \quad (35.21)$$

Мы получим уравнение для присоединенных полиномов Лежандра и вместе с тем единственную возможность для всюду ограниченного решения, если положим второй член, стоящий в квадратной скобке, равным $n(n+1)$, где n — целое число. Мы придем, таким образом, к соотношению

$$\sigma = \sigma_n^m = -am + \frac{2(a+\omega)m}{n(n+1)}, \quad (35.22)$$

причем (35.20) примет вид

$$\psi' = DP_n^m(\cos\theta)\cos(m\lambda + \sigma_n^m t), \quad (35.23)$$

где D — произвольная постоянная. Давление определится теперь квадратурой.

Действительно, обращаясь к уравнению (35.3), мы получим после его линеаризации (оставляем лишь основную плотность ρ среднего уровня, которая считается постоянной)

$$\frac{\partial v'_\lambda}{\partial t} + v'_\vartheta(\xi + 2\omega\cos\vartheta) = -\frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(v_\lambda v'_\lambda + \frac{p'}{\rho}\right),$$

где

$$\xi = \frac{1}{r^2}\Delta\bar{\psi}.$$

Используя (35.15), (35.17) и (35.18), получим:

$$\sin\vartheta\frac{\partial^2\psi'}{\partial t\,\partial\vartheta} - 2(\alpha+\omega)\cos\vartheta\frac{\partial\psi'}{\partial\lambda} = -\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\alpha\sin\vartheta\frac{\partial\psi'}{\partial\vartheta} + \frac{p'}{\rho}\right).$$

С другой стороны, по (35.23)

$$\frac{\partial\psi'}{\partial t} = \frac{a_n^m}{m}\frac{\partial\psi'}{\partial\lambda}.$$

Теперь мы можем выполнить квадратуры по λ и написать:

$$\frac{p'}{\rho} + \alpha\sin\vartheta\frac{\partial\psi'}{\partial\vartheta} = 2(\alpha+\omega)\cos\vartheta\psi' - \frac{a_n^m}{m}\sin\vartheta\frac{\partial\psi'}{\partial t}.$$

Используем еще (35.22) и (35.23) и придем к равенству

$$p' = 2(\alpha+\omega)\rho D\left[\cos\vartheta P_n^m(\cos\vartheta) - \frac{\sin\vartheta}{n(n+1)}\frac{dP_n^m}{d\vartheta}\right]\cos(m\lambda + a_n^m t) \tag{35.24}$$

Заметим еще, что, приняв (35.15), мы получим на основании (35.2), что

$$\frac{\bar{p}}{\rho} - W = C + \alpha\omega\left(1 + \frac{\alpha}{2\omega}\right)r\sin^2\vartheta,$$

где C — не зависящая от ϑ и λ величина.

Величину α (угловая скорость вращения основного потока) называют индексом циркуляции. Как правило, она положительна и колеблется от сезона к сезону: зимой $\alpha \approx 0{,}04\omega$, летом $\alpha \approx 0{,}20\omega$. Формула (35.22) имеет многочисленные метеорологические приложения. Она показывает, в частности, что волна, наложенная на основной поток, будет двигаться с определенной скоростью, зависящей от индекса циркуляции и от размеров волны (от чисел m и n, характеризующих размеры волны). Согласно (35.21) волны, отвечающие небольшим возмущениям (большие n), будут двигаться с запада на восток ($a_n^m < 0$), как бы уносясь основным потоком напротив, крупные волны будут двигаться против зонального потока.

Мы получили одночленное частное решение вида (35.20). Это решение Гаурвица. Общее решение, которое позволяет следить за судьбой начального возмущения произвольного вида, наложенного

на наш основной поток (35.15), было получено Е. Н. Блиновой [1]). Чтобы получить общее решение, Блинова рассуждает следующим образом. Пусть начальное поле возмущения давления $(p')_{t=0}$ может быть представлено в виде ряда по шаровым функциям (на среднем уровне):

$$(p')_{t=0} = \sum_{n=m}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left(A_n^m \cos m\lambda + A_n'^m \sin m\lambda\right) P_n^m(\cos\theta) \qquad (35.25)$$

С другой стороны, используя известные соотношения, представляющие $\cos\theta P_n^m$ и $\sin\theta \frac{dP_n^m}{d\theta}$ в виде линейных комбинаций P_{n-1}^m и P_{n-1}^m:

$$\cos\theta P_n^m(\cos\theta) = \frac{n-m+1}{2n+1} P_{n-1}^m(\cos\theta) + \frac{n+m}{2n+1} P_{n-1}^m(\cos\theta), \qquad (35.26)$$

$$\sin\theta \frac{dP_n^m(\cos\theta)}{d\theta} = \frac{n(n-m+1)}{2n+1} P_{n+1}^m(\cos\theta) - \frac{(n+1)(n+m)}{2n+1} P_{n-1}^m(\cos\theta), \qquad (35.27)$$

мы можем записать (35.24) в виде

$$p' = 2(\alpha + \omega)\rho D H_n^m(\cos\theta)\cos\left(m\lambda + \sigma_n^m t\right),$$

где

$$H_n^m(\cos\theta) = \frac{n(n-m+1)}{(n+1)(2n+1)} P_{n+1}^m(\cos\theta) + \frac{(n+1)(n+m)}{n(2n+1)} P_{n-1}^m(\cos\theta) \qquad (35.28)$$

Далее, выражение

$$p' = 2(\alpha+\omega)\rho \sum_{n=m}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left[D_n^m \cos\left(m\lambda + \sigma_n^m t\right) + D_n'^m \sin\left(m\lambda + \sigma_n^m t\right)\right] H_n^m(\cos\theta), \qquad (35.29)$$

где D_n^m и $D_n'^m$ — произвольные числа, будет также решением нашей системы уравнений. Можно выразить теперь D_n^m и $D_n'^m$ через посредство A_n^m и $A_n'^m$. Для этого положим в (35.29) $t = 0$ и перенумеруем членов так, чтобы получить ряд по $P_n^m(\cos\theta)$. Будем иметь, очевидно:

$$(p')_{t=0} = 2(\alpha+\omega)\rho \sum_{n=m}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left\{\left[D_{n-1}^m \frac{(n-1)(n-m)}{n(2n-1)} + D_{n+1}^m \frac{(n+2)(n+m+1)}{(n+1)(2n+3)}\right]\cos m\lambda + \left[D_{n-1}'^m \frac{(n-1)(n-m)}{n(2n-1)} + D_{n-1}'^m \frac{(n+2)(n+m+1)}{(n+1)(2n+3)}\right]\sin m\lambda\right\} P_n^m(\cos\theta) \qquad (35.30)$$

[1]) Блинова Е. Н., Гидродинамическая теория волн давления, температурных волн и центров действия атмосферы, ДАН СССР, т. XXXIX, № 7, 1943.

Сравнивая почленно ряд (35.25), в котором коэффициенты заданы, и ряд (35.30), в котором коэффициенты неизвестны, придем к системе уравнений

$$\left.\begin{aligned} 2(\sigma+\omega)\rho\left[D_n^m\,{}_{-1}\frac{(n-1)(n-m)}{(2n-1)n}+D_n^m\,{}_{+1}\frac{(n+2)(n+m+1)}{(2n+3)(n+1)}\right]&=A_n^m,\\ 2(\sigma+\omega)\rho\left[D_{n-1}^{\prime m}\frac{(n-1)(n-m)}{(2n-1)n}+D_{n+1}^{\prime m}\frac{(n+2)(n-m+1)}{(2n+3)(n+1)}\right]&=A_n^m \end{aligned}\right\} \tag{35.31}$$

Из этой системы уравнений определяются последовательно начиная с младших номеров n, коэффициенты D через коэффициенты A. Возмущения ψ' функции тока для нашего движения представятся по (35.23) в виде

$$\psi'=\sum_{n=m}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\left[D_n^m\cos(m\lambda+\sigma_n^m t)+D_n^{\prime m}\sin(m\lambda+\sigma_n^m t)\right]P_n^m(\cos\theta)$$

где D_n^m и $D_n^{\prime m}$ — величины, уже определенные выше.

На практике расчеты упрощаются тем, что, как показывает сравнение выражений (35.26) и (35.28), для больших n справедливо соотношение

$$H_n^m(\cos\theta)\approx\cos\theta P_n^m(\cos\theta).$$

Мы остановились подробно на анализе уравнения (35.19), последнее было нами получено в результате линеаризации уравнения (35.13).

В 1945 г. Эртель указал на возможность получения ряда частных решений нелинейного нестационарного уравнения (35.13).

Эртель ищет решение для ζ в виде

$$\zeta(\theta,\lambda,t)=-r^2\varkappa\cos\theta+Y_n(\theta,\lambda-\Omega_n t), \tag{35.32}$$

где $Y_n(\theta,\lambda)$ есть сферическая функция порядка n:

$$Y_n(\theta,\lambda)=A_0P_n(\cos\theta)+\sum_{m=1}^{n}A_n^mP_n^m(\cos\theta)\cos(m\lambda-B_n^m), \tag{35.33}$$

причем $\varkappa$, Ω_n, A_0, A_n^m, B_n^m — постоянные. Так как $\Delta Y_n=-n(n+1)Y_n$,

---

[1]) Аналогичное, но более частное решение было получено Крэйгом (Craig R., A solution of nonlinear vorticity equation for atmospheric motion, The Journal of Meteorology, 2 (1945), № 3). Однако при метеорологической интерпретации своего решения Крэйг сделал неправильный вывод. Вывод Крэйга был исправлен в работах Блиновой (Блинова Е. Н. Об определении скорости движения ложбин из нелинейного уравнения для вихря ПММ, т. X, вып. 5—6, 1946) и Нимтэна (Neamtan S., The motion of harmonic waves in the atmosphere, The Journal of Meteorology, 3 (1946), № 2).

то по (35.30)

$$\Delta\psi = 2r^2\alpha\cos\theta - n(n+1)Y_n;$$

$$\frac{\partial\Delta\psi}{\partial t} = -n(n+1)\frac{\partial Y_n}{\partial t} = n(n+1)\Omega_n\frac{\partial Y_n}{\partial\lambda},$$

$$\frac{\partial\Delta\psi}{\partial\lambda} = -n(n+1)\frac{\partial Y_n}{\partial\lambda}, \quad \frac{\partial\Delta\psi}{\partial\theta} = -2r^2\alpha\sin\theta - n(n+1)\frac{\partial Y_n}{\partial\theta}.$$

Кроме того, $\frac{\partial\omega}{\partial\theta} = r^2\alpha\sin\theta + \frac{\partial Y_n}{\partial\theta}$, $\frac{\partial\psi}{\partial\lambda} = \frac{\partial Y_n}{\partial\lambda}$. Вставляя эти производные в (35.13), придем к соотношению

$$n(n+1)\Omega_n\frac{\partial Y_n}{\partial\lambda} + \frac{1}{r^2\sin\theta}\left\{-\left(r^2\alpha\sin\theta + \frac{\partial Y_n}{\partial\theta}\right)n(n+1)\frac{\partial Y_n}{\partial\lambda} - \right.$$
$$\left. - \frac{\partial Y_n}{\partial\lambda}\left[-2r^2\alpha\sin\theta - n(n+1)\frac{\partial Y_n}{\partial\theta}\right]\right\} + 2\omega\frac{\partial Y_n}{\partial\lambda} = 0,$$

что после приведения и сокращения членов дает:

$$n(n-1)\Omega_n - \alpha n(n+1) + 2(\alpha+\omega) = 0$$

Таким образом, (35.30) удовлетворяет при произвольных A_0, A_n^m, B_n^m и уравнению (35.13), если только

$$\Omega_n = \alpha - \frac{2(\alpha+\omega)}{n(n+1)}. \tag{35.34}$$

Решение (35.32) представляет (как и аналогичное решение в линейном случае) волны, наложенные на западно-восточный перенос угловая скорость которого есть α. Угловые скорости Ω_n движения волн будут представляться по формуле (35.34). Но угловые скорости волн в линейном случае будут σ_n^m/m, это по формуле (35.22) будет в точности совпадать с выражением Ω_n полученным для соответствующего нелинейного случая.

§ 36. Центры действия атмосферы. В предыдущем параграфе мы рассмотрели бегущие возмущения, наложенные на западно-восточный перенос. Для метеорологии представляют большой интерес неподвижные (стационарные) возмущения чисто зональной циркуляции. Примерами таких возмущений могут служить так называемые центры действия атмосферы (исландский минимум, азорский максимум, сибирский антициклон и др.). Возникновение этих возмущений западно-восточного переноса, сохраняющихся в течение промежутка времени порядка сезона, можно объяснить, привлекая бароклинность атмосферы. Пересечение изобар и изотерм будет иметь место уже потому, что материки и океаны, как правило, нагреты по-разному: зимой материк будет холоднее, океан — теплее, летом — наоборот. На принципиальную возможность построения стационарных решений типа

центров действия указывал еще Россби (Rossby). Гидродинамическая теория явления была дана Е. Н. Блиновой [1])

Изложим здесь в общих чертах теорию Блиновой.

В нашей задаче мы будем считать процесс стационарным, а температуру атмосферы заданной функцией $T = T(\vartheta, \lambda, r)$. Будем искать все остальные гидродинамические элементы: три составляющие скорости и давление (плотность найдется через p и T по уравнению Клапейрона).

Эти функции связаны уравнениями движения и уравнением неразрывности. Все уравнения должны быть преобразованы применительно к специфике атмосферных движений планетарного масштаба.

Так как основная масса атмосферы содержится в тонком по сравнению с радиусом Земли a_0 слое (порядка 20 км), то в коэффициентах наших уравнений мы можем всюду заменить r на a_0, а производную $\partial/\partial r$ — на производную $\partial/\partial z$, где $z = r - a_0$ — расстояние от поверхности Земли. С большой точностью можно считать, что $\frac{\partial W}{\partial x} = \frac{\partial W}{\partial y} = 0$ и что

$$\frac{\partial W}{\partial z} = -g,$$

где ускорение силы тяжести g — постоянная в пределах атмосферы величина. Поэтому в согласии с методом длинных волн третье уравнение движения может быть записано в виде

$$0 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} - g. \tag{36.1}$$

Далее, одним из наиболее важных свойств атмосферы является всегда существующая заметная зависимость давления и плотности от расстояния от поверхности Земли: зависит от высоты, как правило, и температура. Вид этой зависимости в основных чертах сохраняется всегда. Можно ввести понятие стандартной атмосферы и рассматривать p, ρ и T на каждом уровне как величины, близкие к их стандартным значениям $\tilde{p}$, $\tilde{\rho}$, $\tilde{T}$ данного уровня. Пусть

$$\left.\begin{aligned} p &= \tilde{p}(z) + p_1(\vartheta, \lambda, z), \quad \rho = \tilde{\rho}(z) + \rho_1(\vartheta, \lambda, z), \\ T &= \tilde{T}(z) + T_1(\vartheta, \lambda, z) \end{aligned}\right\} \tag{36.2}$$

Функции $\tilde{p}$, $\tilde{\rho}$, $\tilde{T}$ будут в дальнейшем считаться известными. Они связаны барометрической формулой (уравнение статики)

$$0 = -\frac{1}{\tilde{\rho}}\frac{d\tilde{p}}{dz} - g \tag{36.3}$$

и уравнением Клапейрона $\tilde{p} = R\tilde{\rho}\tilde{T}$.

---

[1]) См. сноску на стр. 544 и далее: Блинова Е. Н., К вопросу об определении давления на уровне моря, ДАН СССР, т. XIII, № 3, 1953.

Выражая в барометрической формуле $\tilde{p}$ через $\tilde{\rho}$ и $\tilde{T}$, получим:

$$\frac{1}{\tilde{p}}\frac{d\tilde{p}}{dz} = -\frac{g}{R\tilde{T}},$$

откуда

$$\tilde{p}(z) = \tilde{p}(0)\, e^{-\frac{g}{R}\int_0^z \frac{dz}{\tilde{T}(z)}}.$$

Так как абсолютная температура $\tilde{T}$ всегда положительна, $\tilde{p}$ будет падать с высотой.

Величина $p_1/\tilde{p}$ будет всегда мала по сравнению с единицей. Так, например, за стандартное давление на уровне моря можно принять $(\tilde{p})_{z=0} = 1013$ *мб* (1 *мб* $= 10^3$ *г/см сек*^{2}); величина $(p)_{z=0}$ будет колебаться в пределах от 960 *мб* (глубокий циклон) до 1050 *мб* (высокий антициклон). В первом случае $p_1 = -53$; во втором $p_1 = 37$. В обоих случаях $|p_1|/\tilde{p} \approx 0{,}01$. На высоте в 5 км p будет иметь порядок 500 *мб* величины же p_1 будут, как правило, колебаться в пределах от 460 до 540 *мб* и т. д. Имея это в виду, преобразуем выражение $\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial \theta}$ $\left(\text{или } \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}\right)$.

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial \theta} = -\frac{RT}{p}\frac{\partial p}{\partial \theta} = RT\frac{\partial \ln(\tilde{p}+p_1)}{\partial \theta} = RT\frac{\partial}{\partial \theta}\left[\ln\tilde{p} + \ln\left(1+\frac{p_1}{\tilde{p}}\right)\right].$$

Так как, далее, $\tilde{p}$ не зависит от θ, разлагая $\ln\left(1+\frac{p_1}{\tilde{p}}\right)$ в ряд $\ln\left(1+\frac{p_1}{\tilde{p}}\right) = \frac{p_1}{\tilde{p}} - \frac{1}{2}\left(\frac{p_1}{\tilde{p}}\right)^2 + \ldots$ и ограничиваясь первым членом, мы получим:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial \theta} \approx RT\frac{\partial}{\partial \theta}\frac{p_1}{\tilde{p}}.$$

Аналогичным образом

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial \lambda} \approx RT\frac{\partial}{\partial \lambda}\frac{p_1}{\tilde{p}}.$$

С другой стороны

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} = RT\frac{d}{dz}\ln\tilde{p} + RT\frac{\partial}{\partial z}\frac{p_1}{\tilde{p}}$$

или по (36.3)

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} = RT\frac{\partial}{\partial z}\frac{p_1}{\tilde{p}} - g\frac{T}{\tilde{T}}. \qquad (36.4)$$

Мы можем теперь написать уравнения движения предыдущего параграфа (35.2) (35.3) для нашей стационарной задачи в виде

$$-v_\lambda(\zeta+2\omega\cos\theta)=-\frac{RT}{a_0}\frac{\partial}{\partial\theta}\frac{p_1}{\tilde{p}}-\frac{1}{a_0}\frac{\partial}{\partial\theta}\frac{v\cdot v}{2}, \tag{36.5}$$

$$v_\theta(\zeta+2\omega\cos\theta)=-\frac{RT}{a_0\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\lambda}\frac{p_1}{\tilde{p}}-\frac{1}{a_0\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\lambda}\frac{v\cdot v}{2}. \tag{36.6}$$

Уравнение же (36.1) примет на основании (36.4) и (36.2) вид

$$0=-RT\frac{\partial}{\partial z}\frac{p_1}{\tilde{p}}+g\frac{T_1}{\tilde{T}} \tag{36.7}$$

Уравнение неразрывности предыдущего параграфа (35.6) с большой точностью можно записать в виде

$$\frac{1}{\tilde{\rho}}\frac{\partial\tilde{\rho}v_r}{\partial z}+\frac{1}{a_0\sin\theta}\left(\frac{\partial v_\theta\sin\theta}{\partial\theta}+\frac{\partial v_\lambda}{\partial\lambda}\right)=0 \tag{36.8}$$

Уравнения нашей задачи содержат два дифференцирования по z. Значит мы должны прибавить два краевых условия. Это будут:

$$\text{при } z=0 \qquad v_r=0, \tag{36.9}$$

$$\text{при } z=\infty \qquad \tilde{\rho}v_r\to 0. \tag{36.10}$$

Умножим (36.6) на $\sin\theta$, продифференцируем полученное уравнение по θ и вычтем продифференцированное по λ уравнение (36.5). Получим, принимая во внимание (36.8):

$$\frac{v_\theta}{a_0}\frac{\partial\zeta+2\omega\cos\theta}{\partial\theta}+\frac{v_\lambda}{a_0\sin\theta}\frac{\partial\zeta+2\omega\cos\theta}{\partial\lambda}=$$

$$=\frac{R}{a_0\sin\theta}\left[\frac{\partial T_1}{\partial\lambda}\frac{\partial}{a\theta}\left(\frac{p_1}{\tilde{p}}\right)-\frac{\partial T_1}{\partial\theta}\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\frac{p_1}{\tilde{p}}\right)\right]+\frac{\zeta+2\omega\cos\theta}{\tilde{\rho}}\frac{\partial\tilde{\rho}v_r}{\partial z}. \tag{36.11}$$

Это соотношение заменит нам в дальнейшем одно из уравнений движения.

Обратимся теперь к уравнению неразрывности. В нашей задаче характерные горизонтальные размеры явлений будут иметь порядок 10^3 *км* $=10^8$ *см*. Горизонтальные скорости имеют, как всегда в метеорологии, порядок 10 *м/сек* $=10^3$ *см/сек*; значит, характерные значения $\frac{1}{a_0}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta}$ или $\frac{1}{a_0\sin\theta}\frac{\partial v_\lambda}{\partial\lambda}$ будут: $\frac{10^3}{10^8}=10^{-5}\frac{1}{\text{сек}}$. С другой стороны, вертикальные скорости в метеорологических процессах большого масштаба как правило, ничтожно малы — их порядок не превышает величины 10^{-2} *м/сек*. В то же время характерными высотами будут 10 *км* $=10^3$ *м* («толщина» тропосферы). Тогда $\partial v_r/\partial z$

имеет порядок $\frac{10^{-2}}{10^4} = 10^{-6}\,\frac{1}{сек}$. Мы видим, что в уравнении (36.8) каждый из членов, содержащих горизонтальные скорости v_θ и v_λ, будет на порядок выше третьего члена, содержащего вертикальную скорость. В метеорологических случаях считают поэтому, что для *всех уровней* атмосферы может быть написано приближенное соотношение

$$\frac{\partial v_\theta \sin\theta}{\partial\theta} + \frac{\partial v_\lambda}{\partial\lambda} \approx 0. \tag{36.12}$$

Отсюда, конечно, не следует, что $v_r = 0$. Величина v_r определится из уравнения (36.11), в котором *все* члены имеют один и тот же порядок малости.

Приближенное соотношение (36.12) позволяет вывести функцию тока ψ из равенств

$$v_\theta = -\frac{1}{a_0 \sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}, \qquad v_\lambda = \frac{1}{a_0}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}. \tag{36.13}$$

Чтобы довести решение задачи до конца, примем, как и в предыдущем параграфе, что движение состоит из основного, чисто зонального западно-восточного перепоса и наложенных на него малых возмущений, так что

$$\left.\begin{aligned} v_\theta &= v'_\theta(\theta, \lambda, z), \quad v_\lambda = \bar{v}_\lambda(\theta, z) + v'_\lambda(\theta, \lambda, z), \quad v_r = v'_r(\theta, \lambda, z), \\ p_1 &= \bar{p}_1(\theta, z) + p'(\theta, \lambda, z) \end{aligned}\right\} \tag{36.14}$$

где v'_θ, v'_λ, v'_r, p' малы и $\bar{v}_\lambda$ и p_1 зависят лишь от θ и z и нам заданы. Нам заданы также и температуры

$$T_1 = \bar{T}_1(\theta, z) + T'(\theta, \lambda, z), \tag{36.15}$$

причем $\bar{T}_1(\theta, z)$ характеризует перепад температуры между экватором и полюсами (различный на разных высотах), а T' описывает незональные влияния материков и океанов.

Примем далее, что

$$\bar{\tau}_r = \alpha(z)\, v_1 \sin\theta. \tag{36.16}$$

Тогда если

$$\psi = \bar{\psi}(\theta, z) + \psi'(\theta, \lambda, z),$$

то по (36.16)

$$\bar{v}_\lambda(\theta, z) = -\alpha(z)\, a^2 \cos\theta \tag{36.17}$$

и

$$v_\theta = -\frac{1}{a_0 \sin\theta}\frac{\partial\psi'}{\partial\lambda}, \qquad v'_\lambda = \frac{1}{a_0}\frac{\partial\psi'}{\partial\theta}. \tag{36.18}$$

Величина $\alpha(z)$ растет с высотой и достигает максимума в нижней стратосфере, отношение α/ω всегда мало ($\alpha/\omega < 0{,}06$). Заметим

еще, что $\bar{T}_1$, $\bar{v}_\lambda$, $\bar{p}_1$ будут связаны между собой двумя уравнениями — (36.5), (36.7), записанными для основного движения. Заменяя в коэффициентах этих уравнений T на $\tilde{T}$, полагая, что $1+\frac{\alpha}{2\omega}\approx 1$, получим по (36.6).

$$2\omega a_0^2 \cos\theta \sin\theta = R\tilde{T}\frac{\partial}{\partial\theta}\frac{\bar{p}_1}{\tilde{p}}. \tag{36.19}$$

Заменяя в (36.7) T на $\tilde{T}$, получим

$$\frac{\partial}{\partial z}\frac{\bar{p}_1}{\tilde{p}} = \frac{g T_1}{R\tilde{T}^2}. \tag{36.20}$$

Интегрируя (36.19) по θ, получим.

$$\frac{p_1}{\tilde{p}} = c(z) + \frac{\omega a_0^2}{R\tilde{T}}\sin^2\theta, \tag{36.21}$$

где $c(z)$ — функция одного z. Отсюда по (36.20) имеем:

$$T_1(\theta, z) = C(z) + M(z)\sin^2\theta, \tag{36.22}$$

где

$$C(z) = \frac{R\tilde{T}^2}{g}\frac{dc}{dz}, \quad M = -\frac{\omega a_0^2}{g}\tilde{T}^2\frac{d}{dz}\frac{\alpha}{T}$$

Перейдем теперь к составлению уравнений для возмущенного движения

Из уравнения (36.6) получим вследствие (36.14), (36.17), (36.18), если отбросить члены, содержащие квадраты малых величин и заменить $\alpha+\omega$ на ω, выражение

$$2\omega\cos\theta\frac{\partial\psi'}{\partial\lambda} = -R\tilde{T}\frac{\partial}{\partial\theta}\frac{p'}{\tilde{p}} + \alpha\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\frac{\sigma'}{d\theta}. \tag{36.23}$$

Уравнение (36.11) таким же образом, если принять в расчет (36.19) и (36.22);

$$\alpha\frac{\partial\Delta\psi'}{\partial\theta} + 2\omega\frac{\partial\psi'}{\partial\lambda} =$$

$$= 2a^2\frac{\alpha\omega\cos\theta}{\tilde{T}}\frac{\partial T'}{\partial\lambda} - 2RM\frac{a}{\partial\theta}\frac{p'}{\tilde{p}}\cos\theta + \frac{2\omega\cos\theta}{\tilde{\gamma}}a_0^2\frac{\partial\tilde{v}_\lambda'}{\partial r}. \tag{36.24}$$

Наконец, уравнение (36.7) можно записать в виде

$$\frac{\partial}{\partial z}\frac{p'}{\tilde{p}} = -\frac{g}{R\tilde{T}^2}T' \tag{36.25}$$

Итак, нам надлежит найти три функции σ', p', $\tilde{v}_\lambda'$ из трех уравнений (36.23), (36.24) (36.25) при краевых условиях (36.9) и (36.10).

Проинтегрируем уравнение (36.25) по z от 0 до z. Получим:

$$\frac{p'(\theta, \lambda, z)}{\tilde{p}(z)} - \frac{P(\theta, \lambda)}{\tilde{p}(0)} = \frac{g}{R}\int_0^z \frac{T(\theta, \lambda, z)}{\tilde{T}^2(z)}\,dz \qquad (36.26)$$

где $P(\theta, \lambda)$ — неизвестное возмущение давления на уровне моря: $P(\theta, \lambda) = p'(\theta, \lambda, 0)$.

Дальнейший ход решения по Блиновой заключается в следующем. Интегрируя уравнение (36.23) по λ и используя (36.26), выразим ψ' через P и T', уравнение (36.24) при условии (36.9) позволит путем квадратуры определить v'_r через ψ', p', T', т. е. так как ψ' уже найдено через P и T', определить v'_r через P и T'. Нам остается написать замыкающее условие (36.10), и мы получим связь между P и проинтегрированными по z от 0 до ∞ комбинациями из T'. Эта связь будет иметь вид дифференциального уравнения в частных производных по θ и λ, последнее должно быть решено на сфере при одном лишь условии ограниченности решения. Определив P, найдем и все остальные функции.

Остановимся на приближенном решении. В уравнении (36.23) второй член справа будет мал по сравнению с членом, стоящим налево (из-за малости $\alpha/2\omega$). Поэтому можно (36.23) заменить приближенным равенством

$$\psi' = \frac{R\tilde{T}}{2\omega\cos\theta}\frac{p'}{\tilde{p}} \qquad (36.27)$$

или по (36.26)

$$\psi' = \frac{R\tilde{T}}{2\omega}\left(\varphi + \frac{g}{R}\int_0^z \tau_2\,dz\right), \qquad (36.28)$$

где

$$\varphi = \frac{P(\theta, \lambda)}{\cos\theta\,\tilde{p}(0)}, \quad \tau_2 = \frac{T'(\theta, \lambda, z)}{\tilde{T}^2(z)\cos\theta}. \qquad (36.29)$$

Далее, так как $M/\tilde{T} \ll 1$ (M — перепад температуры по горизонтали, $\tilde{T}$ — температура), то второй член справа в (36.24) может быть откинут по сравнению со вторым членом слева. Тогда по (36.9)

$$\tilde{\rho}v'_r = \frac{1}{2\omega a^2\cos\theta}\int_0^z \left(\alpha\frac{\partial\Delta\psi'}{\partial\lambda} + 2\omega\frac{\partial\psi'}{\partial\lambda} - 2\omega a_1^2\alpha\frac{\cos\theta}{\tilde{T}}\frac{\partial T'}{\partial\lambda}\right)\tilde{\rho}\,dz \qquad (36.30)$$

Таким образом, условие (36.10) приведет нас к равенству

$$\int_0^\infty (\alpha\Delta\psi' + 2\omega\psi')\tilde{\rho}\,dz = 2\omega a_1^2\int_0^\infty \varkappa_1 T\tilde{\rho}\,dz, \qquad (36.31)$$

где

$$\tau_1 = \cos\theta \frac{T'(\theta, \lambda, z)}{\tilde{T}^2(z)} \tag{36.32}$$

Заменяя ψ' по (36.28) получим окончательно для определения φ уравнение

$$a_1 \Delta\varphi + 2\omega\varphi = F(\theta, \lambda), \tag{36.33}$$

где

$$a_1 = \int_0^\infty a\tilde{T}\tilde{\rho}\,dz : \int_0^\infty \tilde{T}\tilde{\rho}\,dz,$$

$$F(\theta, \lambda) = -\frac{g}{R}\int_0^\infty \left(a\int_0^z \Delta\tau_2\,dz + 2\omega\int_0^z \tau_2\,dz - \frac{4a_1^2\omega^2}{g}\tau_1\right)\tilde{T}\tilde{\rho}\,dz \cdot \int_0^\infty \tilde{T}\tilde{\rho}\,dz. \tag{36.34}$$

Если F разлагается в ряд по шаровым функциям:

$$F = \sum_n \sum_m \left(F_n^m \cos m\lambda + F_n'^m \sin m\lambda\right) P_n^m(\cos\theta)$$

(F_n^m, $F_n'^m$ — известные постоянные), то φ найдется по (36.33) в виде ряда

$$\varphi = \sum_n \sum_m \left(\varphi_n^m \cos m\lambda + \varphi_n'^m \sin m\lambda\right) P_n^m(\cos\theta),$$

причем

$$\varphi_n^m = \frac{F_n^m}{2\omega - n(n+1)a_1}, \quad \varphi_n'^m = \frac{F_n'^m}{2\omega - n(n+1)a_1}.$$

В выражении для F (36.34) член, содержащий τ_1 описывает эффект пересечения изобар и изотерм, проведенных в горизонтальных плоскостях, член с τ_2 появляется за счет пересечения изобар и изотерм, проведенных в плоскостях вертикальных.

§ 37. Длинные волны конечной амплитуды. Волны на мелкой воде. Разрушение плотины. При выводе в § 27 основных уравнений для длинных волн мы сделали три допущения: допущение о возможности пренебречь вертикальными ускорениями, допущение о возможности пренебречь вертикальными силами, кроме силы тяжести и допущение о малости амплитуд колебаний частиц жидкости. В этом параграфе мы снимем третье допущение и рассмотрим длинные волны конечной амплитуды. Примерами задач, сюда относящимися, будут разрушение плотины, разрушение волны, обтекание берега или препятствия в случае мелкой воды и т. п. В этих задачах допущение о малости амплитуд будет приводить к неточности, в то время как остальные допущения теории длинных волн оправданы.

В случае плоских движений несжимаемой жидкости (§ 27) мы вновь имеем здесь уравнение (27.3). Однако мы теперь не будем

заменять dv_x/dt на $\partial v_x/\partial t$, а напишем вместо (27.4)

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} = -g\frac{\partial \zeta}{\partial x} + X. \tag{37.1}$$

При получении из уравнения (27.7) уравнения (27.8) мы пренебрегали нелинейными членами. Теперь мы этого делать не будем и возьмем второе основное уравнение для длинных волн в виде

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}[(h+\zeta)v_x]. \tag{37.2}$$

Для пространственных движений, когда имеются две скорости, v_x, v_y, и две координаты x, y имеем по аналогии

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_x}{\partial y} = -g\frac{\partial \zeta}{\partial x} + X, \tag{37.3}$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_y}{\partial y} = -g\frac{\partial \zeta}{\partial y} + Y, \tag{37.4}$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}[(h+\zeta)v_x] + \frac{\partial}{\partial y}[(h+\zeta)v_y] = 0. \tag{37.5}$$

Если $h = \text{const}$ (дно горизонтально) и $X = Y = 0$, то уравнения (37.3) — (37.5) совпадают с уравнением плоской нестационарной задачи о движении сжимаемой жидкости, обладающей специальным видом зависимости плотности от давления:

$$\rho = \varphi(p), \quad \text{где} \quad \varphi(p) = \sqrt{\frac{2}{g}p}$$

(политропный процесс с показателем политропы $n = 2$. См. гл. II, § 11). Движения сжимаемой жидкости рассматриваются подробно во второй части этого курса, в главе по газовой динамике. Методы, излагаемые в главе по газовой динамике, могут быть перенесены на рассмотрение соответствующих задач о длинных волнах на поверхности воды. Мы не будем сейчас останавливаться на общих решениях, а ограничимся рассмотрением одного характерного примера приложения уравнений (37.3) — (37.5).

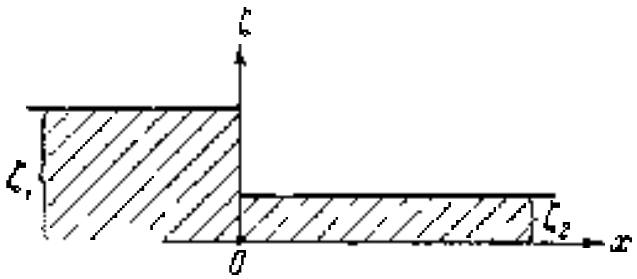

Рис. 184.

В качестве этого примера рассмотрим задачу о разрушении плотины.

Пусть в начальный момент вертикальная перегородка удерживает в равновесии прилегающие к ней слева и справа покоящиеся слои воды (рис. 184) толщины ζ_1 и ζ_2 соответственно; пусть для конкретности $\zeta_1 > \zeta_2$. Перегородка внезапно убирается. Требуется найти движение.

В качестве дифференциальных уравнений задачи будут служить уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = -g\frac{\partial \zeta}{\partial x}, \tag{37.6}$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial \zeta u}{\partial x} = 0 \tag{37.7}$$

($v_x = u$), из которых нам надлежит определить две функции: u и ζ (скорость и высота свободной поверхности соответственно). Движение наше, начавшееся с разрыва в искомой функции ζ, будет и дальше сопровождаться наличием разрыва. Нам предстоит сначала вывести условия на разрыве которым (во время движения) должны удовлетворять искомые функции. Чтобы вывести эти условия обратимся к законам сохранения количества движения и массы.

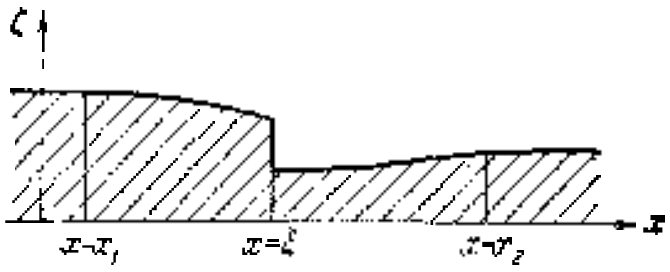

Рис 185

Пусть мы имеем движение, происходящее при наличии разрыва (рис. 185). Рассмотрим вертикальную плоскость, состоящую из жидких частиц которая находится слева от поверхности разрыва; пусть закон ее движения $x = x_1(t)$. Рассмотрим еще плоскость, лежащую справа от поверхности разрыва, пусть ее закон движения $x = x_2(t)$. Закон движения поверхности разрыва пусть будет $x = \xi(t)$. Рассмотрим массу воды, заключенную между двумя вертикальными плоскостями, движущимися вместе с водой:

$$x = x_1(t), \quad x = x_2(t) \quad (x_2 > x_1).$$

Количество движения этого жидкого объема будет

$$\int_{x_1(t)}^{x(t)} \rho u\, dx,$$

где ρ — постоянная плотность жидкости. На объем этот действуют силы давления

$$\int_0^{\zeta_1} (p)_{x=x_1}\, dz - \int_0^{\zeta_2} (p)_{x=x_2}\, dz, \tag{37.8}$$

где ζ_1 и ζ_2 — высоты свободной поверхности слева и справа от разрыва соответственно. При этом в согласии с формулой (27.2) имеем

$$p = g\rho(\zeta - z). \tag{37.9}$$

Приравняем приращение количества движения импульсу сил

$$\frac{d}{dt}\int_{x_1(t)}^{x_2(t)} \rho u\, dx = \int_0^{\zeta_1} (p)_{x=x_1}\, dz - \int_0^{\zeta_2} (p)_{x=x_2}\, dz \qquad (37.10)$$

или по (37.9),

$$\frac{d}{dt}\int_{x_1(t)}^{x_2(t)} \rho u\, dx = \frac{g\rho}{2}\left(\zeta_1^2 - \zeta_2^2\right) \qquad (37.11)$$

По закону сохранения массы

$$\frac{d}{dt}\int_{x_1(t)}^{x_2(t)} \rho\, dx = 0 \qquad (37.12)$$

В левых частях уравнений (37.11), (37.12) входят интегралы вида

$$I = \int_{x_1(t)}^{x_2(t)} a(x, t)\, dx,$$

где a — функция, претерпевающая разрыв в пределах интервала интегрирования в точке $x = \xi(t)$. Обозначим значения a, получающиеся на плоскости $x = \xi(t)$, если приближаться к этой плоскости, оставаясь слева через a^-, а значение a, получающееся если приближаться к плоскости $x = \xi$ справа, обозначим через a^+. Разность $a^+ - a^-$ назовем «разрывом a» и будем обозначать так:

$$a^+ - a^- = [a].$$

Мы можем написать

$$I = \int_{x_1(t)}^{\xi(t)} a(x, t)\, dx + \int_{\xi(t)}^{x_2(t)} a(x, t)\, dx,$$

так что

$$\frac{dI}{dt} = \int_{x_1}^{x} \frac{\partial a}{\partial t}\, dx + \frac{d\xi}{dt}\, a^- - \frac{dx_1}{dt}\, a(x_1(t), t) + \frac{dx_2}{dt}\, a(x_2(t), t) - \frac{d\xi}{dt}\, a^-. \qquad (37.13)$$

Заметим при этом, что

$$\frac{dx_1}{dt} = u(x_1, t); \quad \frac{dx_2}{dt} = u(x_2, t)$$

(наши плоскости $x = x_1$, $x = x_2$ — жидкие плоскости). Будем теперь рассматривать случай, когда толщина нашего жидкого объема стре-

мится к нулю но разрыв остается внутри (так что $x_2 \to \xi$, $x_1 \to \xi$). Тогда интеграл в правой части (37.13) устремится к нулю и мы получим, очевидно,

$$\lim_{x_2 \to x_1} \frac{dI}{dt} = \left(\frac{d\xi}{dt} - u^-\right) a^- - \left(\frac{d\xi}{dt} - u^+\right) a^+$$

Мы получим таким образом два условия на скачке. Первое - следствие (37.10),

$$\zeta^- u^- (N - u^-) - \zeta^+ u^+ (N - u^+) = \frac{g}{2} [(\zeta^-)^2 - (\zeta^+)^2]; \quad (37.14)$$

второе следствие (37.12):

$$\zeta^- (N - u^-) - \zeta^+ (N - u^+) = 0 \quad (37.15)$$

Здесь $N = \frac{d\xi}{dt}$ — скорость перемещения поверхности разрыва.

Вернемся теперь к нашей задаче о разрушении плотины. Будем рассматривать в воде четыре различные области (рис. 186). Прежде всего это области I и IV (крайняя слева и крайняя справа), где вода находится в состоянии покоя и уровни имеют начальные значения ζ_1 (в области I) и ζ_2 (в области IV). Область I сопрягается с областью II вдоль плоскости AA. В области II жидкость движется и это движение сопрягается непрерывным образом с покоем области I. Положение плоскости AA и движение в области II могут быть для любого момента времени определены (см. ниже). Далее, область I сопрягается по плоскости BB с областью III. Скорости и высота поверхности переходят опять непрерывно от значений в области I к значениям в области III, после чего (в области III) u и ζ сохраняют постоянные значения. Эти последние значения сопрягаются покоем в области IV вдоль поверхности CC, причем здесь u и ζ терпят скачок.

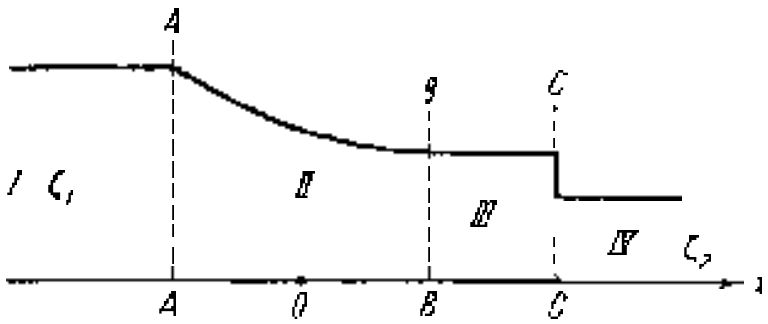

Рис. 186.

Покажем теперь как найти скорости движения поверхности AA и поверхности разрыва CC, а также движение жидкости в областях III и II.

В области II имеем автомодельное решение системы (37.6), (37.7) (мы поместим начало координат оси x в точке, у которой в начальный момент располагалась плотина). Ищем решение в виде

$$u = U\left(\frac{x}{t}\right), \quad \zeta = Z\left(\frac{x}{t}\right)$$

Тогда для U и Z получаем систему уравнений

$$(U - X)\frac{dU}{dX} + g\frac{dZ}{dX} = 0,$$

$$(U - X)\frac{dZ}{dX} + Z\frac{dU}{dX} = 0,$$

где $X = \frac{x}{t}$. Решение этой системы получается в виде

$$U = \frac{2}{3}(c - x), \quad Z = \frac{1}{9g}(2c - x)^2, \tag{37.16}$$

где c — произвольная постоянная.

Там, где сопрягаются области I и II, мы должны иметь $U = 0$, т. е. $X = -c$ или $x = -ct$; таким образом c есть скорость перемещения плоскости AA. Второе соотношение (37.16) позволит найти величину скорости c, ибо должно быть $\zeta_1 = \frac{1}{9g}(2c + c)^2$, откуда $c = \sqrt{g\zeta_1}$. Это скорость распространения волны на поверхности при глубине ζ_1 (ср., например, (28.3)). Итак, движение в области II плоскости определено:

$$u = \frac{2}{3}\left(\frac{x}{t} + \sqrt{g\zeta_1}\right), \quad \zeta = \frac{1}{9g}\left(2\sqrt{g\zeta_1} - \frac{x}{t}\right)^2. \tag{37.17}$$

Область III характеризуется некоторой постоянной скоростью u' и постоянным уровнем ζ'. Эти две неизвестные величины должны быть связаны в силу (37.17) соотношением

$$2\sqrt{g\zeta'} + u' = 2\sqrt{g\zeta_1}. \tag{37.18}$$

Далее, сопряжение движений в областях III и IV происходит вдоль плоскости разрыва CC. В области IV всюду $u = 0$, $\zeta = \zeta_2$. Принимая в формулах (37.14), (37.15) $u^+ = 0$, $\zeta^+ = \zeta_2$, мы должны записать два условия сопряжения движений в III и IV:

$$\zeta' u' (N - u') = \frac{g}{2}(\zeta'^2 - \zeta_2^2), \tag{37.19}$$

$$\zeta'(N - u') - \zeta_2 N = 0. \tag{37.20}$$

При этом наряду с двумя неизвестными u', ζ' появляется еще третья неизвестная величина, N — скорость перемещения плоскости CC. Три уравнения (37.18) — (37.20) послужат для определения u', ζ', N. Удобно преобразовать (37.19), заменяя в нем $\zeta' u'$ по (37.20), к виду

$$N(N - u') = \frac{g}{2}(\zeta' + \zeta_2). \tag{37.21}$$

Введем скорости

$$c' = \sqrt{g\zeta'}, \qquad c_1 = \sqrt{g\zeta_1}, \qquad c_2 = \sqrt{g\zeta_2} \tag{37.22}$$

и безразмерные величины

$$\bar{c} = c' : c_1, \qquad \bar{u} = u' : c_1, \qquad \bar{N} = N : c_1,$$

а также отношение

$$b = \sqrt{\frac{\zeta_2}{\zeta_1}} \quad (b < 1).$$

Из уравнений (37.20) и (37.21) легко получим выражения для $\bar{u}$, $\bar{c}$ через $\bar{N}$.

$$\bar{u} = \bar{N} - \frac{b^4}{4\bar{N}}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{8\bar{N}^2}{b^2}}\right), \tag{37.23}$$

$$\bar{c} = 2\bar{N}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{8\bar{N}^2}{b^2}}\right)^{-2}. \tag{37.24}$$

Уравнение (37.18) в безразмерных величинах примет вид

$$2\bar{c} + \bar{u} = 2, \tag{37.25}$$

таким образом, мы можем, зная b (т. е. отношение ζ_2/ζ_1), определить $\bar{N}$ из уравнения

$$4\bar{N}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{8\bar{N}^2}{b^2}}\right)^{-2} + \bar{N} - \frac{b^2}{4\bar{N}}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{8\bar{N}^2}{b^2}}\right) = 2. \tag{37.26}$$

На рис. 187 представлены значения $N/\sqrt{g\zeta_1}$, $u'/\sqrt{g\zeta_1}$, $(\zeta' - \zeta_2)/\zeta_1$, $c_1/\sqrt{g\zeta_1}$ в функциях от отношения ζ_2/ζ_1 первоначальных высот воды. Заметим, что подъем воды при ее движении после разрушения плотины имеет максимум (около точки $\zeta_1 \approx 0{,}18\zeta_2$) и этот максимум составляет примерно одну треть от первоначальной высоты воды слева от плотины (см. рис. 187).

В предельном случае движения воды по сухому руслу, когда $\zeta_2 = 0$, мы получим $\zeta' = 0$, $N = u = 2\sqrt{g\zeta_1}$. Результат этот получается непосредственно из анализа формул (37.20), (37.21). Этот случай схематически изображен на рис. 188.

Представляет еще интерес исследование в функциях от времени, движения в том месте, где первоначально находилась плотина. Здесь может оказаться два случая: случай, изображенный на рис. 186, когда плоскость BB лежит справа от начального положения O плотины и случай, когда BB находится слева от O. В первом случае точка O находится в области II и движение в этой точке целиком

определяется формулами (37.17), в которых надо только положить $\frac{\lambda}{l} = 0$. Таким образом, в этом случае

$$u_0 = \frac{2}{3}\sqrt{g\zeta_1}, \quad \zeta_0 = \frac{4}{9}\zeta_1,$$

т. е. скорость и высота не зависят от времени и высоты ζ_2, а целиком определяются через ζ_1. Во втором случае точка O попадает в область III и здесь будет

$$u_0 = u', \quad \zeta_0 = \zeta'.$$

Здесь скорость и высота вновь не зависят от времени, но теперь их значения зависят уже и от ζ_1, и от ζ_2, ибо отношения $u'/\sqrt{g\zeta_1}$ и ζ'/ζ_1 зависят от ζ_2/ζ_1.

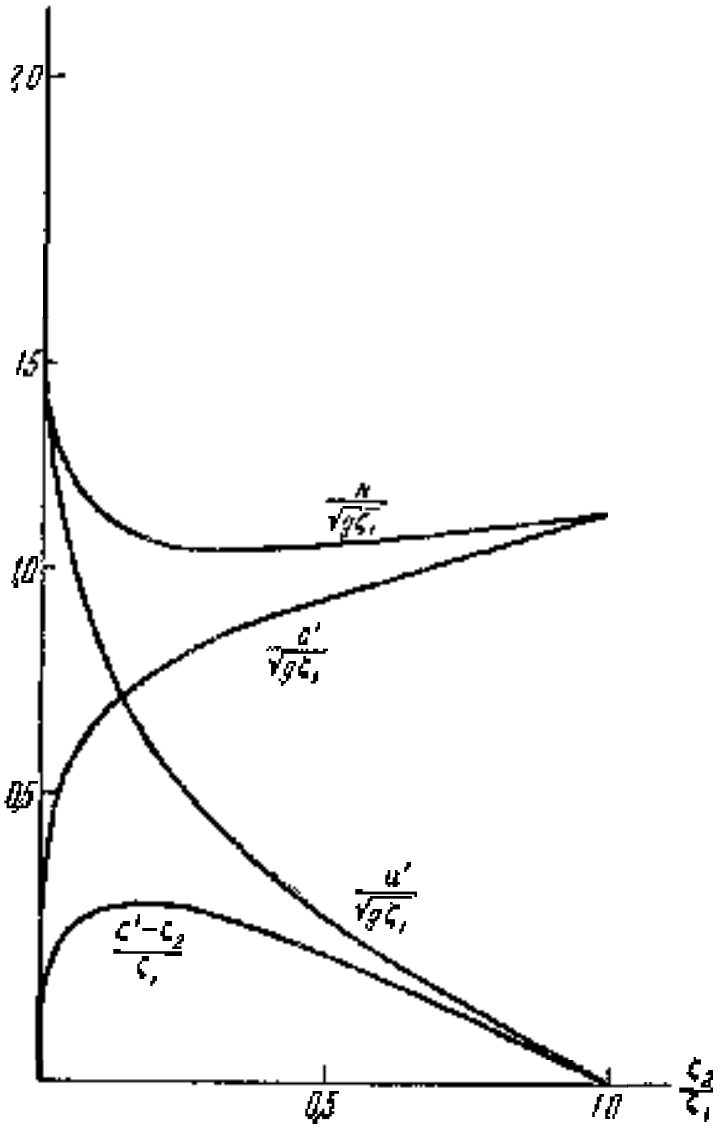

Рис. 187.

Нельзя ли заранее указать, какой из двух случаев будет реализоваться? Уравнение плоскости BB по второму уравнению из (37.7) будет

$$x = t\left(3\sqrt{g\zeta'} - 2\sqrt{g\zeta_1}\right), \tag{37.27}$$

поэтому если $\zeta' > \frac{4}{9}\zeta_1$, то плоскость BB окажется справа от O (первый случай), если $\zeta' < \frac{4}{9}\zeta_1$, плоскость BB окажется слева (второй случай). Если $\zeta' = \frac{4}{9}\zeta_1$, то плоскость BB будет всегда проходить через O. Но тогда $\bar{c} = 2/3$ и по (37.25) $\bar{u} = 2 - \frac{4}{3} = \frac{2}{3} = \bar{c}$. Это так называемая критическая скорость. Она отвечает совершенно определенным значениям $b = b^*$ и $N = N^*$, последние могут быть определены из уравнений (37.23), (37.24), левые части которых заменены на 2/3. Численный расчет дает для критических отношений ζ_2/ζ_1 (т. е. для b^*) выражение $\zeta_2/\zeta_1 \approx 0{,}1384$. На рис. 187 эта точка отвечает пересечению линий $u'/\sqrt{g\zeta_1}$ и $c'/\sqrt{g\zeta_1}$ (с общей ордина-

той равной 2/3). Если $\zeta_2/\zeta_1 < b^{*2}$, то $\sqrt{\zeta_2} < \frac{2}{3}\sqrt{\zeta_1}$. x по формуле (37.27) будет отрицательно и точка O окажется в области III. Если $\zeta_2/\zeta_1 > b^{*2}$, точка O окажется в области II. Таким образом, до тех пор пока ζ_2/ζ_1 будет меньше, чем b^{*2}, мы будем иметь в точке разрушения плотины меняющееся значение $u'/\sqrt{g\zeta_1}$ (с увеличением ζ_2/ζ_1 от нуля до 0,4384 $u'/\sqrt{g\zeta_1}$ увеличивается от нуля до 2/3), но как только мы перейдем через значение $\zeta_2/\zeta_1 = b^{*2}$ и будем увеличивать ζ_2/ζ_1 далее мы всегда будем иметь $u'/\sqrt{g\zeta_1} = 2/3$.

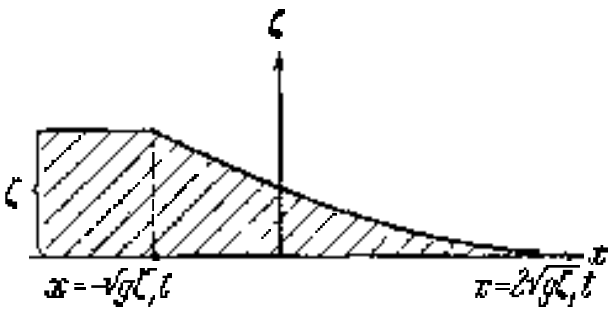

Рис. 189

§ 38. Обтекание препятствия тяжелой сжимаемой жидкостью. Длинные волны. Бора. Вернемся к задаче обтекания, рассмотренной в § 20. Не будем на этот раз линеаризировать уравнения но упростим их так как это делается в теории конвекции

Отправными уравнениями будут, как и в § 20,

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}, \tag{38.1}$$

$$v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} - g, \tag{38.2}$$

$$\frac{\partial \rho v_x}{\partial x} + \frac{\partial \rho v_z}{\partial z} = 0, \tag{38.3}$$

$$v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} - \frac{\varkappa - 1}{\varkappa}\frac{T}{p}\left(v_x \frac{\partial p}{\partial x} + v_z \frac{\partial p}{\partial z}\right) = 0. \tag{38.4}$$

Сделаем упрощения конвекции, аналогично тому как мы поступали в § 36. Будем считать, что

$$p = \tilde{p}(z) + p'(x, z), \quad T = \tilde{T}(z) + T'(x, z), \quad \rho = \tilde{\rho}(z) + \rho'(x, z),$$

где

$$|p'| \ll \tilde{p} \qquad |T'| \ll \tilde{T}, \qquad |\rho'| \ll \tilde{\rho}. \tag{38.5}$$

$\tilde{p}$, $\tilde{\rho}$ $\tilde{T}$ — положительные «стандартные» значения p, T, ρ соответственно — известные функции от высоты z; p', T', ρ' — возмущения, вызванные препятствием. При этом

$$0 = -\frac{1}{\tilde{\rho}}\frac{d\tilde{p}}{dz} - g, \tag{38.6}$$

$$\tilde{p} = R\tilde{\rho}\tilde{T}. \tag{38.7}$$

Упрощения, о которых мы упомянули, позволяют написать (ср. стр. 518)

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} \approx \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \qquad \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + g \approx \frac{\partial \Phi}{\partial z} - \frac{g}{T_1}T',$$

где T_1 — средняя температура атмосферы

$$\Phi = RT_1\frac{p'}{\tilde{p}}.$$

Аналогично этому,

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} \approx \frac{\partial}{\partial x}\frac{p'}{\tilde{\rho}}, \qquad \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} \approx \frac{1}{\tilde{\rho}}\frac{d\tilde{p}}{dz} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{p'}{\tilde{\rho}};$$

$$\frac{1}{T}\frac{\partial T}{\partial x} \approx \frac{\partial}{\partial x}\frac{T'}{\tilde{T}}, \qquad \frac{1}{T}\frac{\partial T}{\partial z} \approx \frac{1}{\tilde{T}}\frac{d\tilde{T}}{dz} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{T'}{\tilde{T}}.$$

Теперь уравнения (38.1) — (38.4) запишутся приближенно в виде (если учесть неравенства (38.5) и заменить еще T, там где T входит в коэффициенты, через T_1):

$$v_x\frac{\partial v_x}{\partial x} + v_z\frac{\partial v_x}{\partial z} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \tag{38.8}$$

$$v_x\frac{\partial v_z}{\partial x} + v_z\frac{\partial v_z}{\partial z} = -\frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{g}{T_1}T', \tag{38.9}$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial z} + v_z\frac{\partial}{\partial x}\frac{\rho'}{\tilde{\rho}} + v_z\left(\frac{\partial}{\partial z}\frac{p'}{\tilde{p}} + \frac{1}{\tilde{\rho}}\frac{d\tilde{p}}{dz}\right) = 0, \tag{38.10}$$

$$v_x\frac{\partial}{\partial x}\frac{T'}{\tilde{T}} + v_z\frac{\partial}{\partial z}\frac{T'}{T} + \frac{v_z}{T_1}\frac{dT}{dz} -$$

$$- \frac{\varkappa - 1}{\varkappa}\left[v_x\frac{\partial}{\partial x}\frac{p'}{\tilde{p}} + v_z\left(\frac{\partial}{\partial z}\frac{p'}{\tilde{p}} + \frac{1}{\tilde{p}}\frac{d\tilde{p}}{dz}\right)\right] = 0 \tag{38.11}$$

Заметим, что по (36.6) и (38.7) $\frac{1}{\tilde{\rho}}\frac{d\tilde{p}}{dz} = -\frac{g}{R\tilde{T}} \approx -\frac{g}{RT_1}$, $\frac{1}{\tilde{\rho}}\frac{d\tilde{\rho}}{dz} = \frac{1}{\tilde{p}}\frac{d\tilde{p}}{dz} - \frac{1}{\tilde{T}}\frac{d\tilde{T}}{dz} \approx -\frac{g}{RT_1} + \frac{\gamma}{T_1}$, где $\gamma = -\frac{d\tilde{T}}{dz}$. Стандартное изменение температуры с высотой составляет 5° на км поэтому с большой точностью можно считать $\frac{1}{\tilde{\rho}}\frac{d\tilde{\rho}}{dz} \approx -\frac{g}{RT_1} = \text{const}$ $\left(\frac{g}{RT_1} \approx \frac{9{,}8}{287\cdot 250}\frac{1}{\text{м}} \approx 1{,}4\cdot 10^{-4}\frac{1}{\text{м}}\right)$. Члены, содержащие $\rho'/\tilde{\rho}$ в уравнении неразрывности пренебрежимо малы по сравнению с остальными (см. 38.5), и мы можем написать (38.10) в виде

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial z} - \frac{g}{RT_1}v_z = 0.$$

В атмосферных условиях третий член в этом уравнении составляет незначительную долю от первых двух. Мы окончательно остановимся на следующей форме уравнения неразрывности:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0. \tag{38.12}$$

Аналогичные упрощения применимы к уравнению притока тепла (38.11) (пренебрежение членами, содержащими $p'/\tilde{p}$ и т. п.). Примем окончательно вместо (38.11):

$$v_x \frac{\partial T'}{\partial x} + v_z \frac{\partial T'}{\partial z} + (\gamma_a - \gamma) v_z = 0, \tag{38.13}$$

где $\gamma_a = \frac{\varkappa - 1}{\varkappa} \frac{g}{R}$, а γ считается постоянной.

Задача сводится к определению из уравнений (38.8), (38.9), (38.12), (38.13) четырех функций: v_x, v_z, Φ, T'.

Эти четыре уравнения обладают тремя интегралами. По (38.12) можем ввести функцию тока ψ из равенств

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad v_z = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \tag{38.14}$$

Теперь уравнение (38.13) может быть записано в виде

$$\frac{\partial \psi}{\partial z}\frac{\partial T'}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial z} T' + \gamma_a - \gamma\right) = 0$$

или (при постоянном $\gamma_a - \gamma$)

$$\frac{\partial \psi}{\partial z}\frac{\partial}{\partial x}[T' + (\gamma_a - \gamma) z] - \frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial z}[T' + (\gamma_a - \gamma) z] = 0,$$

и мы получаем первый интеграл:

$$T' + (\gamma_a - \gamma) z = f_1(\psi), \tag{38.15}$$

где $f_1(\psi)$ — произвольная функция от ψ. Исключим теперь из уравнений (38.8) и (38.9) функцию Φ, для чего продифференцируем (38.8) по z, (38.9) — по x и вычтем друг из друга. Получим:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial \Delta \psi}{\partial z} - \frac{\partial \psi}{\partial z}\frac{\partial \Delta \psi}{\partial x} = -\frac{g}{T_1}\frac{\partial T'}{\partial x},$$

где $\Delta \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}$. Используя интеграл (38.15) и замечая, что $\frac{\partial T'}{\partial x} = \frac{df_1}{d\psi}\frac{\partial \psi}{\partial x}$, получим:

$$\frac{\partial \psi}{\partial z}\frac{\partial \Delta \psi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x}\left(\frac{\partial \Delta \psi}{\partial z} - \frac{g}{T_1}\frac{df_1}{d\psi}\right) = 0.$$

Это уравнение, как легко видеть, эквивалентно следующему:

$$\frac{\partial \psi}{\partial z}\frac{\partial}{\partial x}\left(\Delta\psi - \frac{g}{T_1} z \frac{df_1}{d\psi}\right) - \frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial z}\left(\Delta\psi - \frac{g}{T_1} z \frac{df_1}{d\psi}\right) = 0.$$

Отсюда мы заключаем, что

$$\Delta\psi = \frac{g}{T_1} z \frac{df_1}{d\psi} + f_2(\psi), \tag{38.16}$$

где f_2 — новая произвольная функция от ψ.

Функции f_1 и f_2 могут быть определены из условий при $x \to -\infty$. Так например, если при $x = -\infty$, мы имеем поток постоянной скорости $v_x = U = \text{const}$, $l' = 0$, то функция тока при $x = -\infty$ (назовем ее Ψ) будет связана с U по (38.14) соотношением $\Psi = \frac{U}{2}z^2$. С другой стороны, по (38.15) имеем $(\gamma_a - \gamma) z = f_1(\Psi)$; таким образом, $f_1(\Psi) = \frac{\gamma_a - \gamma}{U}\Psi$. Это соотношение должно быть справедливо для всех ψ. Итак,

$$f_1(\psi) = \frac{\gamma_a - \gamma}{U}\psi. \tag{38.17}$$

Далее по (38.16) имеем

$$0 = \frac{g}{T_1}\frac{\Psi}{U}\frac{df_1(\Psi)}{d\Psi} + f_2(\Psi) = f_2(\Psi) + \frac{(\gamma_a - \gamma) g}{T_1 U^2}\Psi$$

поэтому

$$f_2(\psi) = -\frac{(\gamma_a - \gamma) g}{T_1 U^2} c \tag{38.18}$$

Таким образом для случая $(v_x)_{x=-\infty} = U$, $(l')_{x=-\infty} = 0$ мы должны будем решать уравнение

$$\Delta\psi + \frac{g(\gamma_a - \gamma)}{T_1 U^2}(c - Uz) = 0 \tag{38.19}$$

После того как ψ уже известно, T определится из (38.15); останется найти только Φ. Чтобы найти Φ, умножим (38.8) на v_x, (38.9) на v_z и сложим. Получим без труда, используя (38.14), что

$$v_x \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{v_x^2 + v_z^2}{2} + \Phi + \frac{g}{T_1}(\gamma_a - \gamma)\frac{z^2}{2} - z f_1(\psi)\right] +$$
$$+ v_z \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{v_x^2 + v_z^2}{2} + \Phi + \frac{g}{T}(\gamma_a - \gamma)\frac{z^2}{2} - z f_1(\psi)\right] = 0.$$

Отсюда получается третий интеграл:

$$\frac{v_x^2 + v_z^2}{2} + \Phi + \frac{g}{T_1}(\gamma_a - \gamma)\frac{z^2}{2} - \frac{g}{T_1} z f_1(\psi) = f_3(\psi), \tag{38.20}$$

где f_3 — третья произвольная функция от ψ. Вид функции f_3 определится из условия $(\Phi)_{x=-\infty} = 0$. В рассмотренном выше примере

$$f_3(\psi) = \frac{U^2}{2} - \frac{g}{2T_1}(\gamma_a - \gamma)\frac{\psi^2}{U^2}. \tag{38.21}$$

Скажем теперь о краевых условиях задачи. Пусть уравнение профиля обтекаемого препятствия имеет вид

$$z = \zeta(x). \tag{38.22}$$

Тогда одним из краевых условий будет

$$v_z = v_x \frac{d\zeta}{dx} \quad \text{при} \quad z = \zeta(x),$$

или по (38.14),

$$\psi(x, z) = 0 \quad \text{при} \quad z = \zeta(x)$$

[ψ определено с точностью до постоянной слагаемой и мы можем считать, что $\psi(-\infty, 0) = 0$].

В качестве краевых условий сверху можем принять наличие горизонтальной стенки $z = H$, и тогда будет

$$v_z = 0 \quad \text{при} \quad z = H$$

или

$$\psi(x, H) = \text{const} \tag{38.23}$$

Так, в разобранном нами частном случае постоянной скорости U на бесконечности будем иметь $\psi(x, H) = UH$.

Другим типовым условием будет условие наличия сверху свободной поверхности. Форма этой поверхности определяется вместе с решением всей задачи. Для записи этого условия следует привлечь (38.20).

Обратимся теперь к подробному рассмотрению случая длинных волн. Для длинных волн в уравнении (38.9) мы отбрасываем левую часть. Это означает в конечном счете, что вместо уравнения (38.16) мы получим теперь

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = \frac{g}{T_1} z \frac{df_1}{d\psi} + f_2(\psi). \tag{38.24}$$

Вместо (38.20) мы получим теперь

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \psi}{\partial z}\right)^2 + \Phi + \frac{g}{T_1}(\gamma_a - \gamma)\frac{z^2}{2} - \frac{g}{T_1} z f_1(\psi) = f_3(\psi). \tag{38.25}$$

Уравнение (38.15) перепишем без изменения

$$I' = f_1(\psi) - (\gamma_a - \gamma) z. \tag{38.26}$$

В качестве конкретного примера рассмотрим задачу о переваливании холодной воздушной массы через хребет [1]. Пусть уравнение сечения хребта будет

$$z = \zeta(x)$$

---

[1]) Мы излагаем здесь работу Франкля Ф. И. и Гутмана Л. Н. Термогидродинамическая модель боры, ДАН СССР 133 (1960), № 3.

Будем считать, что выше холодного потока располагается воздух, который мы можем принять за неподвижный (рис. 189). Пусть уравнение поверхности отделяющей теплую массу от холодной, будет

$$z = \eta(x).$$

Вид функции η заранее не известен. При $x = -\infty$ примем $v_x = \text{const} = U$, $T' = 0$, $\eta = H$. Тогда f_1 и f_2 из уравнения (38.24) удовлетворяют соотношениям (38.17), (38.18), так что (38.24) запишется в виде

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} + \frac{g(\gamma_a - \gamma)}{T_1 U^2}(\psi - Uz) = 0. \tag{38.27}$$

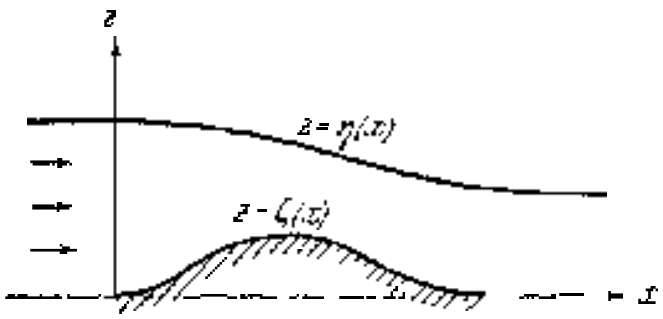

Рис. 189.

Уравнение это мы должны решать при краевых условиях

$$\psi = 0 \quad \text{при} \quad z = \zeta(x),$$
$$\psi = UH \quad \text{при} \quad z = \eta(x).$$

Рассматриваем (38.27) как обыкновенное дифференциальное уравнение (x входит параметрически); получим решение, удовлетворяющее поставленным краевым условиям:

$$\psi = U\left\{z + \frac{1}{\sin\sigma(\eta - \zeta)}[(H - \eta)\sin\sigma(z - \zeta) - \zeta\sin\sigma(\eta - z)]\right\}, \tag{38.28}$$

где

$$\sigma^2 = \frac{g(\gamma_a - \gamma)}{T_1 U^2}.$$

В этой формуле не известно еще $\eta(x)$. Чтобы найти $\eta(x)$, воспользуемся краевым условием для давления (38.26). Потребуем непрерывности давления при переходе через поверхность $z = \eta(x)$. Вспомним, что давление p в движущемся воздухе имеет вид

$$p = \tilde{p}(z) + p', \tag{38.29}$$

причем

$$\frac{d\tilde{p}}{dz} = -\frac{g}{R}\frac{\tilde{p}}{\tilde{T}}. \tag{38.30}$$

Обозначим давление в верхней среде через $p_в(z)$. Так как эта среда неподвижна, то

$$\frac{dp_в}{dz} = -\frac{g}{R}\frac{p_в}{T_в}, \tag{38.31}$$

где $T_в$ — температура верхней среды. Давление $\tilde{p}$ на уровне H

будет $\tilde{p}(H)$. Мы можем тогда, интегрируя (38.30), написать

$$\tilde{p}(\eta) = \tilde{p}(H)\, e^{-\frac{g}{R}\int_H^{\eta}\frac{dz}{\tilde{T}}}. \tag{38.32}$$

На основании (38.31), благодаря непрерывности давления имеем

$$p_{\text{в}}(\eta) = \tilde{p}(H)\, e^{\frac{g}{R}\int_H^{\eta}\frac{dz}{T_{\text{в}}}}. \tag{38.33}$$

Потребуем теперь равенства давлений на поверхности $z = \eta(x)$:

$$\tilde{p}(\eta) + p'(x, \eta) = \tilde{p}(H)\, e^{-\frac{g}{R}\int_H^{\eta}\frac{dz}{T_{\text{в}}}},$$

откуда по (38.32)

$$\left(\frac{p'}{\tilde{p}}\right)_{z=\eta} = e^{-\frac{g}{R}\int_H^{\eta}\left(\frac{1}{T_{\text{в}}}-\frac{1}{\tilde{T}}\right)dz} - 1.$$

Пусть теперь $\tilde{T} = T_0 - \gamma z$, $T_{\text{в}} = T_{\text{в}}(H) - \gamma_{\text{в}}(z - H)$. Выполняя интегрирование, получим:

$$\left[\frac{p'}{\tilde{p}(z)}\right]_{z=\eta} = \left[1 - \frac{\gamma_{\text{в}}(\eta - H)}{T_{\text{в}}(H)}\right]^{g/R\gamma_{\text{в}}} \left[1 - \frac{\gamma(\eta - H)}{\tilde{T}(H)}\right]^{-g/R\gamma} \approx$$

$$\approx \frac{g}{R}\,\frac{T_{\text{в}}(H) - \tilde{T}(H)}{\tilde{T}(H)\, T_{\text{в}}(H)}\,(\eta - H)$$

(мы ограничиваемся первыми степенями разложения в ряд).

Итак, мы должны положить

$$(\Phi)_{z=\eta} = -\frac{gT_1\,[T_{\text{в}}(H) - \tilde{T}(H)]}{\tilde{T}(H)\, T_{\text{в}}(H)}\,(H - \eta). \tag{38.34}$$

Запишем теперь уравнение (38.25), заменив в нем f_1 по (38.17), f_3 — по (38.21). Получим:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)^2 + \Phi + \frac{g}{T_1}(\gamma_a - \gamma)\frac{z^2}{2} - \frac{g}{T_1}\frac{\gamma_a - \gamma}{U}z\psi = \frac{U^2}{2} - \frac{g}{2T_1}(\gamma_a - \gamma)\frac{U^2}{U^2}.$$

Это соотношение должно быть справедливо повсюду. Полагая в нем $z = \eta(x)$ (или, что то же самое, $\psi = UH$) и заменяя Φ по (38.34),

получим уравнение, из которого мы сможем определить η:

$$\left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)^2\right]_{z=\eta} = 2\frac{gT_1[T_B(H)-\tilde{T}(H)]}{T_B(H)\tilde{T}(H)}(H-\eta)+\sigma^2U^2(H-\eta)^2 = U^2,$$

откуда

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)_{z=\eta} = U\sqrt{1+2\tau\sigma(H-\eta)-\sigma^2(H-\eta)^2}.$$

Здесь введен безразмерный параметр τ

$$\tau = \frac{\sqrt{g}}{U}\frac{T_1}{\tilde{T}(H)}\left[1-\frac{\tilde{T}(H)}{T_B(H)}\right]\sqrt{\frac{T_1}{\gamma a-\gamma}}.$$

Заметим теперь что по (38.28)

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)_{z=\eta} = U\left\{1+\frac{\sigma}{\sin\sigma(\eta-\zeta)}[\zeta+(H-\eta)\cos\sigma(\eta-\zeta)]\right\},$$

и мы придем к следующему трансцендентному уравнению для определения η:

$$\zeta = \left[\sqrt{1+2\tau\sigma(H-\eta)-\sigma^2(H-\eta)^2}-1\right]\frac{\sin\sigma(\eta-\zeta)}{\sigma} - (H-\eta)\cos\sigma(\eta-\zeta). \quad (38.35)$$

Для анализа его удобно ввести безразмерные величины

$$\zeta\sigma = \bar{\zeta},\quad \eta\sigma = \bar{\eta},\quad H\sigma = D;$$

при этом

$$D = \sqrt{\frac{g(\gamma a-\gamma)}{T_1}}\frac{H}{U}. \quad (38.36)$$

Известная величина $\bar{\zeta}$ и неизвестная величина $\bar{\eta}$ будут связаны уравнением, содержащим два безразмерных (заданных) параметра τ и D:

$$\bar{\zeta} = \left[\sqrt{1+2\tau(D-\bar{\eta})-(D-\bar{\eta})^2}-1\right]\sin(\bar{\eta}-\bar{\zeta}) - (D-\bar{\eta})\cos(\bar{\eta}-\bar{\zeta}).$$

Параметр τ описывает скачок, претерпеваемый температурой при переходе от холодной массы к теплой, параметр D характеризует «толщину» (H) холодной массы. Закрепляя τ и D мы можем представить (38.37) в виде кривой на плоскости ($\bar{\zeta}$, $\bar{\eta}$); по заданному значению $\bar{\zeta}$ можем затем получить $\bar{\eta}$ и решить задачу. На рис. 190 [1]) изображено семейство кривых (38.37) при $\tau = 3{,}2$ для пяти различных значений D ($D = 1{,}0$; $1{,}5$; $2{,}0$, $2{,}5$, $3{,}0$). Здесь по оси ординат отложено $D-\bar{\eta}$, по оси абсцисс $\bar{\zeta}$. Все кривые проходят через начало

[1]) Рисунок взят из упомянутой выше работы Франкля и Гутмана.

координат (при $x = -\infty$ $\bar{\zeta} = 0$, $\gamma_1 = H$ при любом D). Замечательно то, что каждая из этих кривых имеет максимум $\bar{\zeta} = \bar{\zeta}_{max}(\tau, D)$. Отсюда возможность существования трех принципиально различных режимов обтекания. Рассмотрим движение с конкретными значениями τ и D. Если высота хребта нигде не достигает $\bar{\zeta}_{max}$, отвечающего данным значениям τ и D, то мы по мере продвижения вдоль хребта (начиная от значения $\bar{\zeta} = 0$), будем всегда находиться на восходящей ветви кривой (38.37); перевалив через хребет, мы вынуждены будем затем спуститься по той же ветви до значений $\bar{\zeta} = 0$. Если профиль хребта симметричен относительно вертикальной оси профиля, то движение

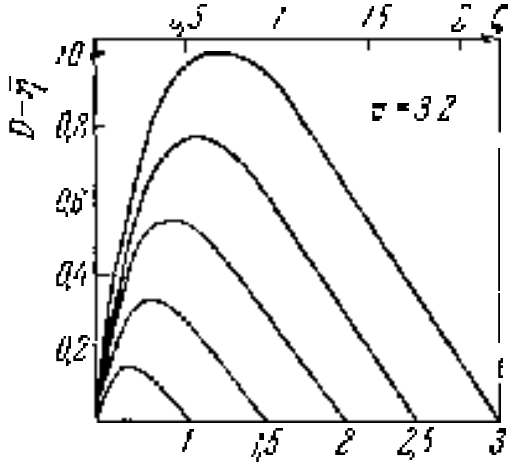

Рис. 190.

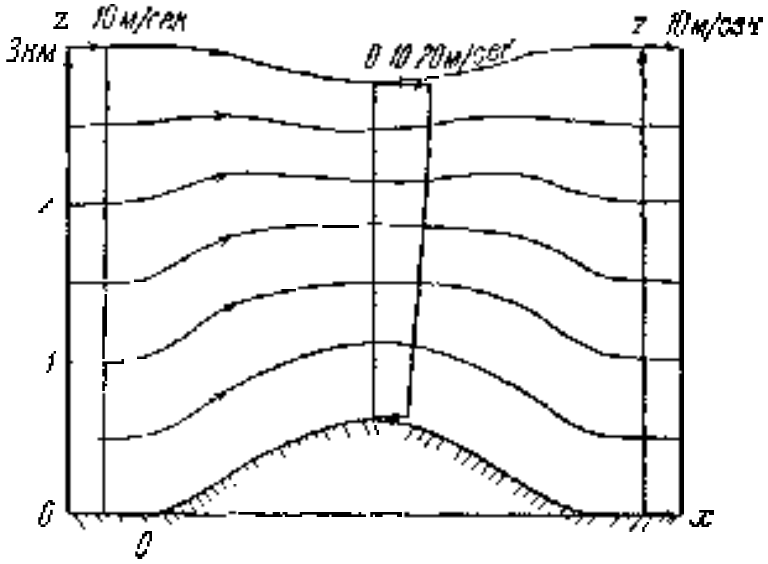

Рис. 191.

будет также симметричным. Этот случай представлен на рис. 191. Здесь, в качестве постоянных взяты $H = 3$ км, $\tilde{T}(H) = 270°$, $T_в(H) = 280°$, $U = 10$ м/сек, $\frac{g}{T_1} = \frac{1}{27}$ м/сек² град, $\gamma_a - \gamma = 3 \cdot 10^{-3}$ град/м. При этом $D \approx 3$, $\tau \approx 3{,}2$.

Второй режим может возникнуть при тех же значениях D и τ, когда обтекаемый хребет будет иметь максимальную высоту, в точности равную $\bar{\zeta}_{max}(\tau, D)$. В этом случае, перемещаясь вдоль хребта от $\bar{\zeta} = 0$ до $\bar{\zeta}_{max}$, мы будем подниматься вдоль кривой (38.37), пока не дойдем до точки $\bar{\zeta} = \bar{\zeta}_{max}$, после же перевалывания через хребет мы можем использовать два решения. Одно из них будет отвечать возвращению по восходящей ветви кривой до точки $\bar{\zeta} = 0$; это решение по своему характеру одинаково с решением, отвечающим первому режиму.

Другое решение отвечает спуску по нисходящей ветви кривой (38.37); здесь симметрия (даже для симметричного профиля) нарушается, при спуске мы получим здесь возрастание скорости, т. е.

ту картину, которая наблюдается при так называемой боре. На рис. 192 представлен такой случай. Реализуется ли этот второй режим или нет — зависит от распределения давления при $x = +\infty$. Наконец, если высота горы ζ больше чем ζ_{max}, решение построить не удастся. Здесь следует ожидать картину нестационарного скачка движущегося против течения.

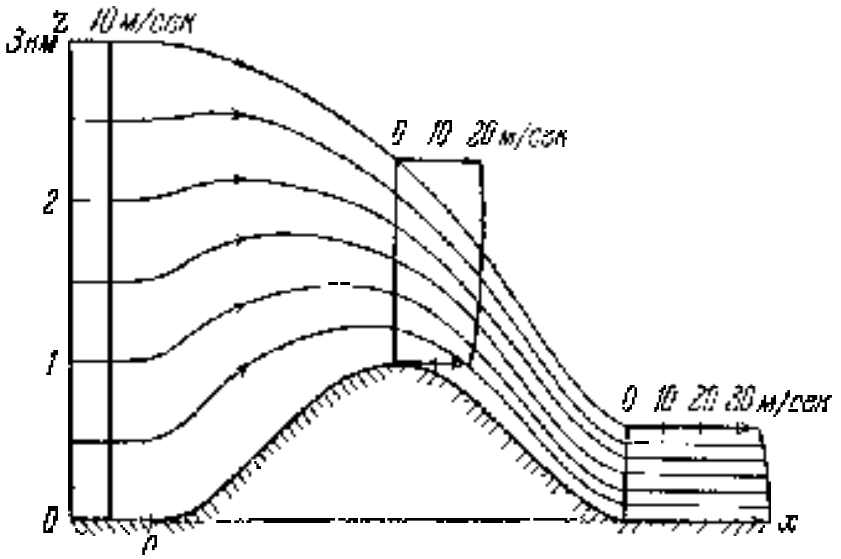

Рис. 192.

§ 39. Упражнения.

1. Найти скорость распространения длинных волн в канале, у которого сечение по всей длине одинаково и имеет площадь S, причем ширина сечения у самой поверхности воды равна b.

Ответ $c = \sqrt{\frac{gS}{b}}$.

2. Найти скорость распространения длинных волн в канале глубиною 20 *см*, сечением которого является трапеция, если ширина канала на дне равна 40 *см* а у поверхности воды — 60 *см*.

Ответ $c = 128$ *см/сек*.

3. Найти скорость распространения длинных волн в канале полукруглого сечения радиус которого $r = 1$ *м*.

Ответ $c = \frac{1}{2}\sqrt{g\pi r} = 2{,}78$ *м/сек*.

4. Объяснить почему волны, набегающие на берег, идут всегда параллельно берегу или под очень малым углом к нему.

Указание. Использовать зависимость скорости распространения длинных волн от глубины жидкости.

5. Найти скорость распространения длинных волн на поверхности раздела двух жидкостей глубины коих h и h', плотности ρ и ρ', причем нижняя жидкость ограничена снизу, а верхняя сверху — горизонтальными плоскостями (ρ и h относятся к нижней жидкости, причем $\rho > \rho'$).

Ответ. $c = \sqrt{\frac{g(\rho - \rho')\,h h'}{\rho h' + \rho' h}}$.

6. Найти скорость распространения длинных волн на поверхности раздела двух жидкостей, глубины коих h и h', плотности ρ и ρ', причем нижняя жидкость ограничена снизу горизонтальной плоскостью, верхняя же жидкость имеет свободную поверхность, на которой давление постоянно (ρ и h относятся к нижней жидкости, причем $\rho > \rho'$)

Ответ. $c^2 = \frac{1}{2} g(h + h) = \frac{1}{2} g \sqrt{(h - h')^2 + \frac{4 h h' \rho'}{\rho}}$.

ЛИТЕРАТУРА

К главе I

1. Жуковский Н. Е., Собрание сочинений, т. II, Гостехиздат, Москва, 1948.
2. Ламб Г., Гидродинамика, перев. с англ., Гостехиздат, Москва, 1947.
3. Ландау Л. Д. и Лифшиц Е. М., Механика сплошных сред, Гостехиздат, Москва, 1954.
4. Лойцянский Л. Г., Механика жидкости и газа, Гостехиздат, Москва, 1950.
5. Планк М., Введение в механику деформируемых тел, Москва, 1929.
6. Прандтль Л., Гидроаэромеханика, перев. с нем., ИЛ, Москва, 1951.
7. Современное состояние гидродинамики вязкой жидкости, под ред. С. Гольдштейна, т. I и II, перев. с англ., ИЛ, Москва, 1948.
8. Прандтль Л. — Титьенс О., Гидро- и аэромеханика, т. I и II, перев. с нем., ОНТИ, Москва, 1933 и 1935.
9. Фридман А. А., Опыт гидромеханики сжимаемой жидкости, ОНТИ, Москва, 1934.
10. Appel P., Traite de mécanique rationnelle, т. III, Paris, 1921.
11. Kirchhoff, Vorlesungen über mathematische Physik, т. I, 1877.
12. Ramsey and Besant, Hydromechanics, т. II, 1913.
13. Müller W., Mathematische Strömungslehre, Berlin, 1928.

К главе II

1. Ламб Г., Гидродинамика, перев. с англ., Гостехиздат, Москва, 1947.
2. Фридман А., Опыт гидромеханики сжимаемой жидкости, ОНТИ, Москва, 1934.
3. Appel P., Traité de mécanique rationnelle, т. III, Paris, 1921.
4. Müller W., Mathematische Strömungslehre, Berlin, 1928.
5. Ramsey and Besant, Hydromechanics, т. II.
6. Wien W., Lehrbuch der Hydrodynamik, Leipzig, 1900.

К главе III

1. Прандтль Л. — Титьенс О., Гидро- и аэромеханика, т. I, перев. с нем., ОНТИ, Москва, 1933.
2. Appel P., Traité de mécanique rationnelle, т. III, Paris, 1921.
3. Ramsey and Besant, Hydromechanics, т. II.

К главе IV

1. Ламб Г., Гидродинамика, перев. с англ., Гостехиздат, Москва, 1947.
2. Appel P., Traité de mécanique rationnelle, т. III, Paris, 1921.
3. Ramsey and Besant, Hydromechanics, т. II.

К главе V

1. Вилья Г., Теория вихрей, перев. с франц. ОНТИ, Москва, 1936.
2. Жуковский Н. Е., Теоретические основы воздухоплавания. Собрание сочинений, т. VI. Гостехиздат, Москва, 1948.
3. Кочин Н. Е. О неустойчивости вихревых цепочек Кармана, Доклады Академии наук СССР, т. XXIV, № 1 (1939), 18—22.
4. Ламб Г., Гидродинамика, перев. с англ., Гостехиздат, Москва, 1947.
5. Прандтль Л. — Титьенс О., Гидро- и аэромеханика, т. I и II, перев. с немецк., ОНТИ, Москва, 1933 и 1935.
6. Фридман А., Опыт гидромеханики сжимаемой жидкости, ОНТИ, Москва, 1934.
7. Appel H., Traite de mécanique rationnelle, t. III, Paris, 1921.
8. Auerbach F., Wirbelbewegung, Handbuch der physikalischen und technischen Mechanik, t. V, Leipzig, 1927.
9. Bjerknes V., Das dynamische Prinzip der Cirkulationsbewegungen in der Atmosphäre, Meteorologische Zeitschrift (1900), 97.
10. Bjerknes V., Cirkulation relativ zu der Erde, Meteorologische Zeitschrift (1902), 97.
11. Helmholtz H., Ueber Integrale der hydrodynamischen Gleichungen, welche den Wirbelbewegungen entsprechen, Journal für die reine und angewandte Mathematik, t. 55 (1858), 25; Wissenschaftliche Abhandlungen, t. I, Leipzig (1882), 101.
12. Kármán Th. und Rubach H., Ueber den Mechanismus des Flüssigkeits- und Luftwiderstandes, Physikalische Zeitschrift, t. 13 (1912), 48.
13. Kirchhoff G., Vorlesungen über theoretische Physik, t. I, Leipzig, 1897.
14. Müller W., Mathematische Stromungslehre, Berlin, 1928.
15. Poincaré H., Théorie des tourbillons, Paris, 1893.
16. Thomson W., On Vortex Motion, Transactions of the Royal Society of Edinbourgh, t. XXV (1869), 217; Mathematical and physical papers, t. IV, Cambridge (1910), 13.

К главе VI

Общие курсы и трактаты

1. Дюренд В. Ф., Аэродинамика, т. II, перев. с англ., Оборонгиз, Москва, 1936.
2. Жуковский Н. Е., Теоретические основы воздухоплавания. Собрание сочинений, т. VI, 1948.
3. Кочин Н. Е., Гидродинамическая теория решеток, Гостехиздат, Москва, 1949.
4. Лагалли М., Идеальные жидкости, гл. V в книге Ф. Франк и Р. Мизес, Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики, часть II, перев. с немецк., ОНТИ, Москва, 1937.
5. Ламб Г., Гидродинамика, перев. с англ., Гостехиздат, Москва, 1947.
6. Лойцянский Л. Г., Механика жидкости и газа, Гостехиздат, Москва, 1950.
7. Седов Л. И., Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики, изд. 2, Гостехиздат, Москва, 1950.
8. Villat H., Aperçus théoriques sur la resistance des fluides, Scientia, № 38 (1920).

9 Besant W. and Ramsey A., Hydromechanics, т. II, London, 1931.
10 Cisotti U. Idromeccanica piana, т. I и II, Milano, 1921 и 1922
11. Kirchhoff G., Vorlesungen über theoretische Physik, т. I, Leipzig, 1897.
2. Müller W., Mathematische Stromungslehre, Berlin, 1928.

Специальные вопросы

Общие формулы для расчета реакций

1. Жуковский Н. Е., О присоединенных вихрях, Собрание сочинений, т. IV, Гостехиздат, Москва, 1948
2. Некрасов А. И., Теория крыла в нестационарном потоке Над во АН СССР, Москва, 1947
3 Седов Л. И., К теории неустановившихся движений крыла в жидкости, Труды ЦАГИ вып. 229 (1935)
4. Чаплыгин С. А., О давлении плоскопараллельного потока на преграждающие тела, Собрание сочинений, т. II, Гостехиздат, Москва, 1948
5. Blasius H., Funktionen-theoretische Methoden in der Hydrodynamik, Zeitschrift für Mathematik und Physik т. 58 (1910)
6 Kutta W., Auftriebskräfte in strömenden Flüssigkeiten, Illustrierte aeronautische Mitteilungen, т. 6 (1902).
7. Liebmann H., Die Lagallysche Formel für den Flüssigkeitsdruck Sitzungsberichte der Bayerischen Akademie d. Wissenschaften (1922).

Обтекание профилей Жуковского

1 Голубев В., Теория крыла аэроплана в плоскопараллельном потоке, ОНТИ, Москва, 1936
2. Чаплыгин С., О давлении плоскопараллельного потока на преграждающие тела, Собрание сочинений, т. II, Гостехиздат, Москва, 1948, К общей теории крыла моноплана Там же
3. Mises R., Zur Theorie des Tragflächenauftriebs, Zeitschrift für Flugtechnik, 1917, там же, 1920.

Обтекание со срывом струи

1. Гуревич М. И. Теория струй идеальной жидкости, Физматгиз, Москва, 1961
2 Гуревич М. И., Некоторые замечания о стационарных схемах кавитационного обтекания пластинки, Изв. АН СССР, Отд. техн. наук, № 2 (1947).
3. Жуковский Н. Е., Видоизменение метода Кирхгоффа и т. д. Сочинения, т. II, Москва, 1948
4 Föppl L., Wirbelbewegung hinter einem Kreiszylinder Sitzungsberichte der Bayerischen Akademie der Wissenschaften (1913).
5 Helmholtz H., Ueber die diskontinuierlichen Flüssigkeitsbewegungen, Philosoph. Magazine (1868).
6 Kirchhoff G., Zur Theorie freier Flussigkeitstrahlen, Crelle's Journal für reine und angewandte Mathematik, т. 70 (1869)
7. Leathem, On two-dimensional fluid motion with free streamlines past an obstacle of curved outline Proceedings of the Royal Irish Academy, т. XXXIV (1918)
8. Levi-Civita T., Scie e leggi di resistenza, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, т. XVIII (1907).

9. Levy, Discontinuous fluid motion past a curved boundary, Proceedings of the Royal Society, т. 92 (1916).
10. Michell, On the theory of free streamlines, Philosophical Transactions, сер. A, т. 181 (1890).
11. Planck M., Zur Theorie der Flüssigkeitstrahlen, Wiedemann's Annalen, т. 21 (1884).
12. Rayleigh On the Resistance of fluids, Philosoph. Magazine, т. 2 (1876).
13. Serrin J. B., Existense theorems for some hydrodynamical free boundary problems, Journal of Rational Mechanics and Analysis, т. 1, № 1 (1952).

К главе VII

1. Дюранд В. Ф., Аэродинамика, т. I, перев. с англ., Оборонгиз, Москва 1936.
2. Жуковский Н. Е., Лекции по гидродинамике (Сочинения, т. II), 1935.
3. Ламб Г., Гидродинамика, перев. с англ., Гостехиздат, Москва, 1947.
4. Седов Л., О неустановившемся движении жидкости внутри тела вращения, Труды ЦАГИ, вып. 515 (1940).
5. Фабрикант Н. Я., Аэродинамика, т. I, 1949.
6. Kármán Th. Berechnung der Druckverteilung an Luftschiffkörpern, Abhandlungen aus dem Aerodynamischen Institut der technischen Hochschule Aachen, т. 7, Berlin, 1927.
7. Rankine W., On the mathematical theory of streamlines, Philosophical Transactions (1871).
8. Stokes G., On the steady motion of incompressible fluids, Transactions of the Cambridge Philosophical Society, т. VII (1842).

Парадокс Эйлера—Даламбера

1. Lichtenstein L., Grundlagen der Hydromechanik, Berlin, 1929.
2. Roy M., Note sur le paradoxe de d'Alambert Journal de l'École Polytechnique, т. II, сер. 26, 1927.
3. Painlévé P., Les résistances d'un liquide au mouvement d'un solide, там же.
4. Ламб Г., Гидродинамика, перев. с англ., Гостехиздат, Москва 1947.

К главе VIII

1. Рэлей, Теория звука, т. I и II, перев. с англ., Гостехиздат, Москва, 1955.
2. Сретенский Л. Н., Теория волновых движений жидкости, ОНТИ, Москва, 1936.
3. Стокер Дж. Дж., Волны на воде, пер. с англ., ИЛ, Москва, 1959.
4. Теория поверхностных волн. Сборник переводов, ИЛ, Москва, 1959.
5. Труды конференции по теории волнового сопротивления. ЦАГИ, Москва 1937.
6. Airy G. B., Tides and waves, Encyclopedia Metropolitana, т. V (1845).
7. Auerbach F. Wellenbewegung der Flüssigkeiten, Handbuch der physikalischen und technischen Mechanik, т. V, Leipzig (1927), 300.
8. Bouasse H., Houle, Rides, Seiches et Marées, Paris, 1924.
9. Chrystal G., Some Results in the Mathematical Theory of Seiches, Transactions of the Royal Society Edinbourgh, т. 41 (1905), 599.
10. Darwin G. H. und Hough S. S., Bewegung der Hydrosphare, Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften, т. VI, ч. 2, Leipzig (1908).

11. Defant A., Gezeitenprobleme des Meeres in Landnähe, Hamburg, 1925.
12 Hogner E., Ueber die Theorie der von einem Schiff erzeugten Wellen und des Wellenwiderstandes, Proceedings of the I International Congress for Applied Mechanics, Delft (1925) 146.
13 Kotchine N., Détermination rigoureuse des ondes permanentes d'ampleur finie à la surface de séparation de deux liquides de profondeur finie, Mathemat. Annalen т. 98 (1927)
14 Levi-Civita T. Fragen der klassischen und relativischen Mechanik, Berlin, 1824.
15 Levi-Civita T., Détermination rigoureuse des ondes permanentes d'ampleur finie, Mathematische Annalen, т. 93 (1925), 264.
16. Rossby C. G., Relation between variations in the intensity of zonal circulation of the atmosphere and the displacements of the semi-permanent centers of action, Journal of Marine Research, т. II, № 1 (1939)
17. Vergne H., Ondes liquides de gravité, Mémorial des Sciences Mathématiques т. XXXV, Paris (1928).
18. Wedderburn, Seiches Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society, т. 48 (1922), 211.
19 Wien W., Lehrbuch der Hydrodynamik, Leipzig, 1900
20 Wigley W. C. S., Ship wave resistance Verh d 3 Internat Kongr. Techn. Mech, т. I., Stockholm (1931), 58.

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

Авербах 572, 574
Апиель 571, 572
Архимед 91

Бабиле 87
Бенар 207
Бернулли Д. 70, 526
Бесант 571, 573
Блазиус 253, 573
Блинова Е. Н. 544, 545, 547
Бьеркнес В. 163, 572

Вигнер 341
Веддербурн 575
Верль 575
Вилла 572
Вин 571, 575

Гельмгольц 117, 152, 16, 321, 572, 573
Герстнер 148
Голубев В. Н. 573
Гольдштейн 571
Гуревич М. И. 338, 345, 355, 358, 391, 573
Гутман Л. Н. 565, 568

Дарвин 574
Дефант 575
Дородницын А. А. 477
Дюрэнд 572, 574

Жуковский Н. Е. 96, 259, 285, 329, 571, 572, 573, 574

Извеков Б. И. 488

Калинин П. О. 341
Карман 207, 225, 229, 245, 572, 574
Кирхгофф 321, 324, 571, 572, 573
Кочин Н. Е. 49, 488, 572, 575
Кристел 574
Крэйг 545

Кузнецов Е. С. 63
Кутта 573

Лагалли 572
Лагранж 16, 17
Ламб Г. 32, 571, 572, 574
Ландау Л. Д. 571
Лаплас 533, 534
Леви 574
Леви-Чивита 343, 346, 573, 575
Либмана 573
Литем 573
Лифшиц Е. М. 571
Лихтенштейн 574
Лойцянский Л. Г. 571, 572

Макаров С. О. 168
Мизес Р. 572, 573
Митчел 329
Михель 574
Мюллер 571, 572, 573

Нехрасов А. И. 573
Нимтэн 545
Ньютон 526

Пенлеве 574
Планк 571, 574
Прандтль Л. 70, 571, 572
Пуанкаре 572

Рамсей 29, 76, 571
Ранкин 340, 448, 571
Риман И. С. 391
Рой 574
Россби 547, 575
Рубах 207, 235, 572
Рэлей 423, 574

Седов Л. И. 305, 315, 343, 572, 573, 574
Серебрийский Я. М. 298
Серрен 574

Симонов Л. А. 298
Сретенский Л. Н. 298
Стокер 574
Стокс 147, 199, 367, 574

Титьенс О. 571, 572
Томсон В. (лорд Кельвин) 122, 147, 572
Трефтц 287

Уиглн 575

Фабрикант Н. Я. 574
Фёппль 573
Франк Ф. 572
Франкль Ф. И. 565, 568
Фридман А. А. 62, 155, 161, 571, 572

Хогнер 575
Хуг 574

Чаплыгин С. А. 253, 285, 343, 353, 573
Чизотти 573

Эйлер 18, 19
Эри 535, 574
Эртель 172, 545
Эфрос Д. А. 355

Ямпольский А. Р. 343

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Амплитуда волны 411
Анализ приливов гармонический 533
Антипассат 167, 171
Антициклон 145
Архимеда закон 91
Атмосфера вихрей 166, 206

Бабине формула 87
Бароклинность 60
Баротропность 60
Бернулли интеграл 70, 111
Бернулли - Эйлера интеграл 111
Бис — Синьора закон 189
Блазиуса - Чаплыгина формулы 253, 254
Бойля - Мариотта закон 80
Бьеркнеса теорема 165

Взрыв бомбы внутри несжимаемой жидкости 127
— мины под водой 77
— подводный 126
Вихреисточник 140
Вихрь абсолютный 172
— в криволинейных ортогональных координатах 42
— скорости 22, 151, 176
— точечный 192
Возникновение вихрей в жидкости 162, 205
Волны 36
— в сжимаемой жидкости 477
— во вращающейся атмосферной оболочке 539
— вынужденные 471
— Герстнера трохоидальные 448
— гравитационные 401
— длинные 512, 515, 565
— — в каналах постоянной глубины 515
— капиллярные 444, 446
— конечной амплитуды 447
— — — длинные 553
Волны корабельные 401, 499
— мелкие 401, 446
— морские 401
— на поверхности раздела двух жидкостей 439
— плоские 409
при конечной глубине жидкости 436
— приливные 401
— прогрессивные 414, 415, 437
с подветренной стороны 488
стоячие 409
— трехмерные 489
— трохоидальные Герстнера 448
— упругие 401
Вынос решетки 291
Высота геометрическая 111
— прилива 529
— пьезометрическая 112
— скоростная 112
Вычет комплексной скорости 111
Вязкость 63

Гаусса теорема 22, 177
Гей-Люссака закон 166
Гельмгольца теоремы 152, 153, 161
— уравнение 161
Гельмгольциан вектора полный 159
Гидростатика 83
Гипотеза Жуковского 260
Градиент сверхадиабатический 488
Граница раздела 87
Гребень волны 411
Группа волн 423

Давление взрывное 77
— гидродинамическое 252
— — в идеальной жидкости 46
— гидростатическое 83
— мгновенное 119
— на замкнутую поверхность погруженного в жидкость твердого тела 91

Давление на криволинейную стенку 92
— — плоскую стенку 90
— — твердое тело 89
— нормальное 45, 46
— при обтекании со срывом струй 352
— — — с циркуляцией 352
— тяжелой несжимаемой жидкости 88
Движение — см. также *Обтекание и течение*
— в жидкости плоского контура не установившееся 309
— — — по инерции 398
— — — тела 237, 359, 375
— — — цилиндра 225, 243, 251
— — — шара 388
— — — эллипсоида 389
— вихревой пяти между двумя параллельными стенками 236
— вихревых цепочек неустойчивое 211
— — — устойчивое 212
— внутри прямого угла 135
— газа по прямолинейной трубке постоянного сечения 79
— жидкости адиабатическое 63, 112
— — безвихревое 31, 114, 144, 406
— — в многосвязном объеме 37
— — — односвязном объеме 33, 35
— — — элементарной трубки тока 66
— — — эллиптическом цилиндре 242
— — вихревое 31, 38, 145
— — волновое 401
— — идеальной 110, 114
— — изотермическое 60, 112
— — изэнтропическое 112
— — плоское 129, 409
— — под действием сил тяжести 501
— — по прямолинейной трубке постоянного сечения 80
— — с потенциалом скорости 114
— — стационарное устачовавшееся 21, 110
— — установившееся 116
— системы вихрей 193
— тела под свободной поверхностью 460
— — по инерции 396
— цилиндра в бесконечном потоке 475
— шара поступательное 360
Действие мгновенных сил 119
Деформация жидкой частицы 9
— однородная 16
— чистая 12
Диафрагма 37
Дирихле задача 240
Дисперсия волн 423
Диссипативность объема 73
Длина волны 411
— глиссирующей пластинки 338
Дублет 138

Жидкость бароклинная 61
— баротропная 60, 111, 114, 150
— идеальная 151
— неразрывная 21
— несжимаемая 59
— сжимаемая 60
Жуковского гипотеза 260
— парадокс 96
— профиль 286
— руль 290
Жуковского — Митчелла метод 329

Задача Дирихле 240
— Неймана 241
Закон Архимеда 91
— Био — Савара 189
— Бойля — Мариотта 80, 166
— Гей-Люссака 166
— живой силы 72, 110
— количества движения 65, 226
— моментов количества движения 65
— Паскаля 83

Излучение 63
Импульс давления 402
Индекс циркуляции 543
Интеграл Бернулли 70
— Бернулли — Эйлера 117
— Коши 110, 114
— Пуассона 347
Интегралы движения центра инерции 191
Интенсивность некоторой трубки 154, 157
— вихревой нити 187
— — точки 139
— — трубки 39, 147, 153
— вихря 39, 193, 204, 226
Истечение газа из сосуда через отверстие 118
— — — — тонкой конической трубки 124
— жидкости из сосуда 330
Источник 136

Каверна 354
Кавитация 354
Капиллярность 411
Кинематика жидкой среды 9

Кирхгоффа метод 322
Клапейрона уравнение 62, 80
Клепсидра 125
Колебания жидкости в круговом цилиндре 507
— — в прямоугольном сосуде 507
— — вынужденные 522
— — свободные гармонические 108
— — состояние 504, 518, 521
Координаты общие криволинейные 28, 51
— сферические 28, 50
— цилиндрические 27, 48
Коши — Гельмгольца формула 9
Коши интеграл 110, 111
Коши — Римана условие 133
Коэффициент приведенных масс 316
— температурного расширения воздуха 85
Кривизна линий тока 129
Крыло тонкое 297
Кутта Жуковского формула 251, 256, 263

Лагранжа переменные 17
— теорема 151
Лапласа уравнение 33
Леви-Чивита метод 343
Линия вихревая 39, 146, 152
— наибольшего ската 506
— равной вертикальной амплитуды 506
— тока 20, 35, 70, 129, 202

Масса жидкости 23
— тела присоединенная 385
Метацентр большой 104
— малый 104
Метод Жуковского — Митчелла 329
— источников и стоков 370
— Кирхгоффа 322
— конформного отображения 257
— Леви-Чивита 343, 350
— Симонова — Серебрийского 298
Момент дублета 138
Мощность источника 136
Муссон 167

Напряжение вихревой точки 139
— косое 45
Натяжение жидкости поверхностное 444
Нить вихревая 187
— — круговая 197
— — прямолинейная 192
Обильность источника 136
Образование вихрей 162, 171, 225
Обтекание — см. также *Движение*
— воздухом горного хребта 477
— жидкостью неподвижного твердого тела 67
— круга поступательным потоком бесциркуляционное 246, 326
— неподвижного кругового цилиндра 246
— осесимметричных тел поперечное 374
— пластины косое 350
— — прямое 355
— плоской пластины 272
— препятствия тяжелой сжимаемой жидкостью 561
— произвольного горного профиля 298
— профилей Жуковского 280
— решетки 291
— — бесциркуляционное 293
— с кавитацией 354
— с образованием поверхностей разрыва 321
— с отрывом струи 321
— тел вращения 374
— тела безграничным потоком 324
— цилиндров различной формы 274
— эллипсоида 362
— эллиптического цилиндра 267
Объем жидкий 16
— жидкости многосвязный 37
— — односвязный 35, 57
— — связный 36
— удельный 164
Оператор Лапласа в криволинейных координатах 43
Ось деформации главная 13
— дублета 138
— контура критическая 264
— — нулевой подъемной силы 264
— — профиля критическая 289
Отлив морской 401
Отображение конформное 257

Пара вихрей 193, 205
— импульсивная 383, 397
Парабола метацентров (парабола устойчивости) 266
Парадокс Жуковского 96
— Эйлера — Даламбера 362
Параметры Ламэ 29, 41, 359
Паскаля закон 83
Пассат 167, 171

Переваливание воздушной массы через хребет 565
Переменные Лагранжа 17, 18, 19
— Эйлера 18
Перенос энергии 459
Период волны 412
— решетки 291
Пластинка гасящая 338
Плоскость плавания 97
Плотность жидкости 151
— слоя вихревая 203
— тепловой мощности притока тепла 61
Площадь плавания 97
Поверхность изобарическая 163
изотермическая 163
— контрольная 68
— равного удельного объема 163
— раздела 87
— разрыва 171, 202
— свободная 83
— сечений 97, 107
— уровня 83
— центров 98
— — для однородного эллипсоида 107
— — для прямого однородного цилиндра 109
Подошва волны 411
Показатель политропы 60
Поле вихревое 38
скоростей 19
— — соленоидальное (трубчатое) 22
Порядок вихрей симметричный 211
— — шахматный 211
Постоянная газовая 62, 85
Постоянные циклические 38
Потенциал векторный 183
комплексный 133
— Ньютона 179, 362
— скорости 32, 34, 131, 144, 152, 359
Поток — см. также *Движение жидкости*
однородный поступательный 134
— скорости 21, 26, 141, 142
— установившийся циркуляционный 247
Прилив морской 401
«обращенный» 537
— «прямой» 537
Принцип симметрии Римана — Шварца 317
— — Шварца 464
Производная по нормали к поверхности 33
— полная (индивидуальная) 19
Профиль волны 431, 437
— Жуковского 286
крыла аэроплана 286
— тонкий 298
Процесс изэнтропический 63
— политропический 60, 63
Пуассона уравнение 177
Пучность 411

Равновесие жидкости изотермическое 88
— плавающих тел 96
— тяжелой несжимаемой жидкости 88
Радиус кривизны главных нормальных сечений поверхности центров 99
Разрушение вихрей 162
— волны 553
— плотины 554, 557
Расположение вихрей симметричное 211
— — шахматное 211
Растяжение нормальное 45
Расхождение вектора в криволинейных ортогональных координатах 41
— скорости 22, 176
Расширение жидкости кубическое 15, 71
Реакция при движении тела гидравлическая 380
Резонанс 524
Руль Жуковского 290
Рябь 401, 446

Свойство сохраняемости вихревых линий 153
Седло (особая точка) 21
Сейши 401, 504
Сила живая несжимаемой жидкости 122
— Жуковского 315
— импульсивная 383, 397
— капиллярная 444
— массовая 44
— мгновенная 119
— объемная 45
— поверхностная 45, 69
— подсасывающая 274, 304
— подъемная Архимеда 473
— трения 45
Симонова — Серебрийского метод 298
Система вихрей 193, 203
Скорость волн групповая 422
— комплексная 133

Скорость критическая 560
— кубического расширения жидкости 22
— чистой деформации 12
Слой вихревой 203
— — цилиндрический 203
Смерч 145
Сопротивление вихревое 145
— волновое 460, 461
— лобовое 226, 232
— — по Карману 229
Сохраняемость векторных линий 154
Среда бароклинная 61
— баротропная 60
Сток 136
Стокса теорема 22, 40
— формула 147
Стрела прогиба 286

Тело плавающее 96
Тензор упругих напряжений 17
Теорема Бьеркнеса 165
— Гаусса 22, 177
— Гельмгольца 161
— — о постоянстве интенсивности вихревой трубки 147
— — — сохранении вихревых линий 152
— — — — интенсивности вихревых трубок 153
— Лагранжа 151
— о постоянстве циркуляции 147
— Стокса 22, 40
— Томсона 122, 147
— — основная 151
— Фридмана 155
— Чаплыгина 263, 286
— Эйлера 67
Теория вихревых дорожек Кармана 322
— приливов канальная 535
— статическая 526
Течение — см. также *Движение*
— жидкости пространственное 359
— — морское 167
— — осесимметричное 366
Точка вихревая 139
— критическая 20, 248
— особая 20
Трахоида 452
Трубка вихревая 39, 153, 187
— изобаро-изостерическая единичная 163
— тока 26, 112
— — единичная 26

Угол атаки 264, 286
Удар струи в пластинку 70, 334
Удлинение главное 15
Узел (особая точка) 21, 411
Уравнение абсолютного движения жидкости в подвижной системе координат 57
— Гельмгольца 161
— движения идеальной жидкости общее 45
— Клапейрона 62, 85
— Лапласа 33, 120
— неразрывности 16, 23, 25
— — в криволинейных координатах 350
— — — общих криволинейных ортогональных координатах 28
— — — переменных Лагранжа 24
— — — — Эйлера 24
— — — сферических координатах 28
— — — цилиндрических координатах 27
— притока энергии (притока тепла) 62
— Пуассона 177
— состояния 83, 85
— статической теории приливов 527
— Фридмана 160
— энергии 72, 74
Уравнения гидродинамические идеальной жидкости 44
— движения в векторной форме 53
— — — форме Лагранжа 51, 58
— — — — Ламба 54
— — — — Эйлера 48
— — длинных волн 515
— — идеальной жидкости 17
— Ламба гидродинамические 54
— равновесия 83
— Эйлера гидродинамические 48
Уровень поверхности 83
— приведенный 89
Ускорение Кориолиса 56
Условие Коши — Римана 133
— равновесия плавающего тела 96
— устойчивости движения вихревых цепочек Кармана 218
Условия граничные 64, 239
— начальные 64, 407
Устойчивость вихревых цепочек Кармана 211
— равновесия 102

Фокус (особая точка) 21
— контура 265

Формула Бабинэ 87
барометрическая 85
Блазиуса — Чаплыгина вторая 254
Блазиуса — Чаплыгина первая 253
давления на твердую поверхность 88
— Коши — Гельмгольца 9
Кутта — Жуковского 251, 256, 263, 285
— Чаплыгина — Коши 339
Леви-Чивита 350
Стокса 147
Торричелли 118
Шварца — Кристоффеля 329, 332
Эртеля 173
Фридмана теорема 155
— уравнение 160
Функции сопряженные 131
Функция тока 130, 199, 367
— для осесимметричного течения 366

Характеристика вихревого движения кинематическая 31

Центр (особая точка) 21
— давления 71, 91, 266
действия атмосферы 316
Центр инерции вихрей 191
кривизны главных сечений поверхности центров 104
Цепочка вихревая 208
— — Кармана 207, 211
Циклон 145, 171
Циркуляция скорости 22, 32, 33, 40, 142, 151, 193

Чаплыгина теорема 267, 286
Частота колебаний 412
Число кавитации 358

Шаг решетки 291
Шварца — Кристоффеля формула 331

Эйлера — Даламбера парадокс 362
— переменные 18, 24, 25, 64
— теоремы 67
Эллипсоид вращения 11
Энергия волн 155
— кинетическая 73
— — безвихревого течения 121
— потенциальная 72, 73
Энтропия 63, 173
Эпициклоида удлиненная 424
— укороченная 424
Эртеля формула 173

Н. Е. КОЧИН, И. А. КИБЕЛЬ и Н. В. РОЗЕ

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ГИДРОМЕХАНИКА

ПОД РЕДАКЦИЕЙ
И. А. КИБЕЛЯ

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

ИЗДАНИЕ ШЕСТОЕ
ИСПРАВЛЕННОЕ
И ДОПОЛНЕННОЕ

Допущено Министерством
высшего и среднего специального образования РСФСР
в качестве учебника для университетов

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1963

Кочин Николай Евграфович,
Кибель Илья Афанасьевич,
Розе Николай Владимирович

Теоретическая гидромеханика, ч. I

М., Физматгиз, 1963 г., 584 стр. с илл.

Редактор *Н. Н. Розальская*
Техн. редактор *Э. Н. Михлин*
Корректор *Е. А. Белицкая*

Сдано в набор 22/II 1963 г. Подписано к печати 12/V 1963 г. Бумага $60\times90^1/_{16}$. Физ. печ. л. 36,5. Условн. печ. л. 36,5. Уч.-изд. л. 34,41. Тираж 12 000 экз. Т-04997. Цена книги 1 р. 13 к. Заказ № 1290.

Государственное издательство
физико-математической литературы
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

Типография № 2 им. Евг. Соколовой
УПВ и ПП Ленсовнархоза
Ленинград, Измайловский пр., 29

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие к шестому изданию 8

Глава первая **Кинематика жидкой среды (*Н. Е. Розе*)** 9

А. Деформация жидкой частицы

§ 1 Формулы Коши — Гельмгольца 9
§ 2 Чистая деформация 12
§ 3 Эллипсоид деформации 13
§ 4. Кубическое расширение 15
§ 5. Упражнения 16

Б. Уравнение неразрывности

§ 6 Переменные Лагранжа 16
§ 7 Переменные Эйлера 18
§ 8 Переход от переменных Лагранжа к переменным Эйлера и обратно 18
§ 9 Поле скоростей 19
§ 10. Уравнение неразрывности в переменных Лагранжа 22
§ 11. Уравнение неразрывности в переменных Эйлера 24
§ 12 Другой метод вывода уравнения неразрывности 25
§ 13 Уравнение неразрывности в цилиндрических, сферических и криволинейных координатах 26
§ 14 Упражнения 29

В. Кинематическая характеристика безвихревого и вихревого движений

§ 15. Введение 31
§ 16. Потенциал скорости 31
§ 17. Свойства безвихревого движения в односвязном объеме 33
§ 18. Безвихревое движение в многосвязном объеме 36
§ 19. Вихревое поле и его свойства 38
§ 20. Упражнения 40

Глава вторая **Основные уравнения динамики идеальной жидкости (*Н. Е. Розе*)** 44

§ 1 Силы массовые и поверхностные 44
§ 2 Общее уравнение движения 45
§ 3. Гидродинамическое давление в идеальной жидкости 46
§ 4 Общие уравнения движения идеальной жидкости 47
§ 5 Уравнения движения в форме Эйлера 48
§ 6. Векторные формы уравнений движения 53
§ 7. Уравнения движения в форме Ламба 54
§ 8 Уравнения движения в форме Лагранжа 57
§ 9 Общая постановка задач гидродинамики 58

§ 10 Случай несжимаемой жидкости 59
§ 11 Случай сжимаемой жидкости. Баротропность и бароклинность. Уравнение притока энергии 60
§ 12 Начальные и граничные условия 64
§ 13 Применение закона количеств движения и закона моментов количеств движения 65
§ 14 Уравнение энергии 72
§ 15 Упражнения 75

Глава третья. Гидростатика (*Н. Е. Розе*) 83

А. Гидростатическое давление

§ 1. Уравнения равновесия 83
§ 2 Условие для сил 84
§ 3. Барометрическая формула 85
§ 4. Условия на поверхности раздела 87
§ 5 Общие формулы для определения давления на твердую поверхность 88
§ 6 Давление тяжелой несжимаемой жидкости . . 88
§ 7. Давление на плоскую стенку 90
§ 8. Закон Архимеда 91
§ 9. Давление на криволинейную стенку 92
§ 10. Упражнения 94

Б. Равновесие плавающего тела

§ 11. Условия равновесия плавающего тела 96
§ 12. Поверхность сечений 97
§ 13. Поверхность центров 98
§ 14. Радиусы кривизны главных нормальных сечений поверхности центров 99
§ 15. Устойчивость равновесия 102
§ 16 Упражнения 104

Глава четвертая. Простейшие случаи движения идеальной жидкости (*Н. Е. Розе*) 110

А. Интегралы Бернулли и Коши

§ 1 Установившееся движение 110
§ 2. Безвихревое движение 113
§ 3. Установившееся безвихревое движение 116
§ 4 Ограничения, налагаемые на скорости 117
§ 5. Формула Торичелли 118
§ 6 Истечение газов 118
§ 7 Действие мгновенных сил 119
§ 8 Кинетическая энергия безвихревого движения 121
§ 9 Теорема В Томсона 122
§ 10 Упражнения 124

Б. Плоское безвихревое движение

§ 11. Введение 129
§ 12. Функция тока 130
§ 13. Связь функции тока с потенциалом скорости 131
§ 14. Комплексная скорость и комплексный потенциал 133
§ 15 Связь плоской гидродинамической задачи с теорией функций комплексного переменного 134
§ 16. Примеры комплексного потенциала 134
§ 17. Источники и стоки 136
§ 18 Дублеты 138

§ 19. Вихревые точки 139
§ 20. Вихрестечники 140
§ 21. Вычеты комплексной скорости, циркуляция и поток скорости 141
§ 22. Упражнения 142

Глава пятая. **Вихревые движения идеальной жидкости (*Н. Е. Кочин*)** 144

А. Основные уравнения теории вихрей и теоремы Гельмгольца о сохранении вихрей

§ 1. Введение 144
§ 2. Теорема Томсона 147
§ 3. Теорема Лагранжа 151
§ 4. Теоремы Гельмгольца 152
§ 5. Сохраняемость векторных линий 154
§ 6. Уравнения Фридмана. Уравнения Гельмгольца . . . 159
§ 7. Теоремы Гельмгольца 161
§ 8. Образование вихрей. Теорема В. Бьеркнеса 162
§ 9. Примеры образования вихрей 166
§ 10. Упражнения 174

Б. Определение полей скоростей по заданному полю вихрей и полю расхождения скорости

§ 11. Вычисление вектора скорости по вихрю и расхождению скорости для бесконечного пространства 176
§ 12. Случай одной вихревой нити 187
§ 13. Прямолинейная вихревая нить 192
§ 14. Две прямолинейные вихревые нити. Движение системы вихрей 193
§ 15. Круговая вихревая нить 197
§ 16. Вихревой слой 202
§ 17. Упражнения 205

В. Вихревые цепочки Кармана

§ 18. Введение 207
§ 19. Одна вихревая цепочка 208
§ 20. Две вихревые цепочки 209
§ 21. Об устойчивости вихревых цепочек Кармана . . . 211
§ 22. Схема Кармана движения тела в жидкости с образованием вихрей 225
§ 23. Вычисление лобового сопротивления по Карману 229
§ 24. Упражнения 236

Глава шестая. **Плоская задача о движении тела в идеальной жидкости (*Н. В. Розе*)** 237

§ 1. Предварительные замечания 237
§ 2. Граничные условия. Задачи Дирихле и Неймана . . . 238
§ 3. Движение кругового цилиндра 243
§ 4. Нестационарное течение, вызываемое движущимся круговым цилиндром 251
§ 5. Общие выражения для гидродинамических реакций при установившемся течении. Формула Блазиуса — Чаплыгина . . . 252
§ 6. Эффективное вычисление гидродинамических реакций при установившемся течении. Формулы Кутта — Жуковского . 254
§ 7. Применение метода конформного отображения 257
§ 8. Реакции на контур 262
§ 9. Парабола устойчивости 265
§ 10. Обтекание эллиптического цилиндра 267

§ 11 Обтекание плоской пластинки 272
§ 12 Обтекание некоторых форм профилей цилиндров 274
§ 13. Обтекание профилей Жуковского 280
§ 14. Обтекание решетки 291
§ 15 Тонкое крыло 297
§ 16 Неустановившееся движение плоского контура . . . 309
§ 17 Обтекание со срывом струй. Метод Кирхгоффа 321
§ 18 Метод Жуковского — Митчеля. Истечение из отверстия. Удар струи в пластинку. Плоская пластинка . . . 329
§ 19 Метод Ломи-Чивита 343
§ 20 Давление при обтекании со срывом струй и при обтекании с циркуляцией 352
§ 21 Обтекание с кавитацией 354

Глава седьмая **Пространственная задача о движении тела в идеальной жидкости (*Н. В. Розе*)** 359

§ 1 Безвихревое движение. Движение шара 359
§ 2 Обтекание эллипсоида 362
§ 3 Функция тока для осесимметричного течения 366
§ 4 Метод источников и стоков 370
§ 5 Поперечное обтекание осесимметричных тел . . . 374
§ 6 Движение твердого тела в безграничной жидкости . . 375
§ 7 Расчет гидродинамических реакций при движении тела . 380
§ 8 Примеры 387
§ 9 Движение тела с вихрями 396

Глава восьмая **Волновые движения идеальной жидкости (*Н. Е. Кочин*)** 401

А. Основные уравнения теории волн

§ 1 Различные типы волн 401
§ 2 Основные уравнения 402
§ 3 Начальные условия 407

Б. Плоские волны

§ 4. Введение 409
§ 5 Стоячие волны 409
§ 6 Прогрессивные волны 414
§ 7 Сведение прогрессивных волн к установившемуся движению . 418
§ 8 Групповая скорость 420
§ 9 Общий случай плоской задачи 424
§ 10 Профиль волны 431
§ 11 Волны при конечной глубине жидкости 436
§ 12 Волны на поверхности раздела двух жидкостей . . . 439
§ 13 Капиллярные волны 444
§ 14 Волны конечной амплитуды 447
§ 15 Трохоидальные волны Герстнера 448
§ 16 Свойства трохоидальных волн 451
§ 17 Энергия волн 455
§ 18 Перенос энергии 459
§ 19 Волновое сопротивление. Движение тела под свободной поверхностью 469
§ 20 Волны в сжимаемой жидкости. Обтекание воздухом горного хребта 477
§ 21. Упражнения 488

В. Трехмерные волны

§ 22. Общие формулы 489
§ 23. Корабельные волны 499
§ 24. Стоячие колебания тяжелой жидкости в сосуде 504
§ 25. Колебания жидкости в прямоугольном сосуде и в круговом цилиндре 507
§ 26. Упражнения 511

Г. Длинные волны

§ 27. Основные уравнения 512
§ 28. Длинные волны в каналах постоянной глубины 515
§ 29. Стоячие колебания в каналах переменной глубины 518
§ 30. Стоячие колебания в цилиндрическом сосуде малой глубины . . 521
§ 31. Вынужденные колебания в каналах постоянной глубины . . . 522
§ 32. Статическая теория приливов 526
§ 33. Выводы статической теории приливов 530
§ 34. Каналовая теория приливов 534
§ 35. Волны во вращающейся атмосферной оболочке 539
§ 36. Центры действия атмосферы 546
§ 37. Длинные волны конечной амплитуды. Волны на мелкой воде. Разрушение плотины 553
§ 38. Обтекание препятствия тяжелой сжимаемой жидкостью. Длинные волны Бора 561
§ 39. Упражнения 570

Литература 571

Именной указатель 575

Предметный указатель 578