ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ НАУКИ
ИНСТИТУТ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ им. Л. Д. ЛАНДАУ
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

На правах рукописи

БУРМИСТРОВ Игорь Сергеевич

Влияние электрон-электронного взаимодействия на транспорт в низкоразмерных электронных системах и наноструктурах

Специальность 01.04.02 — Теоретическая физика

Диссертация на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Черноголовка – 2012

Оглавление

Введение

В настоящее время имеется большой экспериментальный и теоретический интерес к электронному транспорту в низкоразмерных системах (двумерный электронный газ, квантовые проволоки, поверхность трехмерных топологических изоляторов, графен, металлические одноэлектронные транзисторы) и наноструктурах (квантовые точечные контакты, квантовые точки, углеродные нанотрубки, молекулярные одноэлектронные транзисторы). Во всех перечисленных системах электрон-электронное взаимодействие оказывает существенное влияние на электронный транспорт. Межэлектронное взаимодействие ответственно за явление дробного квантового эффекта Холла, определяет температурную зависимость ширины переходов между плато в холловской проводимости для целочисленного квантового эффекта Холла, приводит к переходу металл-изолятор в двумерных неупорядоченных электронных системах и к переходу сверхпроводник-изолятор в тонких неупорядоченных пленках, а также ведёт к появлению на поверхности трёхмерного топологического изолятора критического металлического состояния, в котором проводимость при нуле температур остаётся конечной. Оно же ответственно за нелинейную при малых напряжениях вольт-амперную характеристику в квантовых проволоках и углеродных нанотрубках, кулоновскую блокаду электронного транспорта в одноэлектронных транзисторах и квантовых точках, и явление мезоскопической стоунеровской неустойчивости в квантовых точках из почти ферромагнитных материалов. Существенную роль межэлектронное взаимодействие играет и в неравновесном электронном транспорте, приводя к возможности релаксации неравновесной функции распределения.

Несмотря на то, что влияние электрон-электронного взаимодействия на электронный транспорт в низкоразмерных системах и наноструктурах интенсивно исследуется с 70-х годов прошлого века, существует большой круг задач, нерешённых до настоящего времени. Это связано как со сложностью теоретического учёта влияния электрон-электронного взаимодействия на транспорт, так и с появлением новых объектов для экспериментальных и теоретических исследований.

Настоящая диссертационная работа преследует следующие **цели**: 1) построение теоретического описания влияния спиновых и изоспиновых степеней свободы на переход металл-изолятор в двумерной сильно-коррелированной неупорядоченной электронной системе; 2) исследование влияния электрон-электронного взаимодействия на целочисленный квантовый эффект Холла в двумерной сильно-коррелированной неупорядоченной электронной системе в сильном магнитном поле, полностью поляризующем электронный спин; 3) построение теории макроскопического зарядового квантования в одноэлектронном транзисторе; 4) исследование влияния сильных спиновых корреляций, связанных с явлением мезоскопической стоунеровской неустойчивости, на термодинамические и транспортные свойства электронов в квантовых точках.

При всём разнообразии рассмотренных в диссертационной работе задач, все они связаны между собой тем, что на физику явлений в рассматриваемых электронных системах оказывает сильное влияние электрон-электронное взаимодействие. Именно оно приводит к тем физическим явлениям, которые исследуются в диссертации.

Каждая глава диссертационной работы имеет своё собственное введение, в котором представлен детальный обзор теоретических и экспериментальных результатов, связанных с задачами, решаемыми в данной главе.

Основные результаты диссертации, выносимые на защиту, сводятся к следующему:

1. Построена теория электронного транспорта в двумерной сильно-коррелированной неупорядоченной электронной системе со спиновыми и изоспиновыми степенями свободы, не предполагающая равенство амплитуд взаимодействия между электронами с разными проекциями спина и изоспина. Показано, что рассмотренный ранее случай, когда амплитуды взаимодействия совпадают, является неустойчивым относительно малых нарушений этого условия.

2. Построена теория транспорта в двумерной взаимодействующей двухдолинной неупорядоченной электронной системе в присутствии междолинного и зеемановского расщеплений. Объяснена экспериментально наблюдаемая эволюция температурной зависимости сопротивления от металлического типа к диэлектрическому типу при увеличении параллельного магнитного поля. Предсказана возможность существования двух максимумов в температурной зависимости сопротивления вблизи перехода металл-изолятор.

3. Построена теория транспорта для двумерной взаимодействующей неупорядоченной электронной системы в структурах с двойной квантовой ямой и общими рассеивателями. Объяснено наблюдаемое в эксперименте слабое изменение температурной зависимости сопротивления и времени сбоя фазы при сильном уменьшении концентрации электронов в одной из квантовых ям.

4. В двухпетлевом приближении исследован переход металл-изолятор в системе взаимодействующих электронов с полностью поляризованными спинами. Показано, что

в случае размерности пространства $d = 2$ переход металл-изолятор отсутствует.

5. Для случая спин-поляризованных электронов построена теория целочисленного квантового эффекта Холла с учетом электрон-электронного взаимодействия. Проведённые аналитические вычисления подтверждают тот факт, что а) наличие межэлектронного взаимодействия не меняет хорошо известное для модели невзаимодействующих электронов объяснение целочисленного квантования холловской проводимости, б) переход между плато в случае короткодействующего электрон-электронного взаимодействия попадает в тот же класс универсальности, что и модель невзаимодействующих электронов, тогда как в случае кулоновского взаимодействия этот квантовый фазовый переход находится в новом классе универсальности по сравнению с моделью невзаимодействующих электронов.

6. С помощью подхода нелинейной сигма-модели исследована температурная зависимость времени сбоя фазы в критической области перехода между плато в режиме целочисленного квантового эффекта Холла в спин-поляризованной электронной неупорядоченной системе с короткодействующим межэлектронным взаимодействием. Показано, что критический индекс, характеризующий степенную зависимость времени сбоя фазы от температуры в критической области перехода между плато, определяется значением аномальной размерности амплитуды электрон-электронного взаимодействия в критической точке, соответствующей невзаимодействующим электронам.

7. Для двумерной неупорядоченной электронной системы с кулоновским взаимодействием в перпендикулярном магнитном поле, полностью поляризующем спин электрона, построена теория квантовых холловских осцилляций магнетосопротивления и теплоёмкости в магнитном поле, связанных с наличием делокализованных состояний. Показано, что при низких температурах зависимость амплитуды квантовых холловских осцилляций от температуры отличается от температурной зависимости амплитуды осцилляций Шубникова-де Гааза.

8. Для решения проблемы кулоновской блокады в одноэлектронном транзисторе предложена и исследована новая физическая величина, определяющая затворную ёмкость одноэлектронного транзистора, которая отличается от геометрической ёмкости затвора из-за перенормировок, связанных с наличием кулоновского взаимодействия. Показано, что диаграмма двухпараметрического потока (в координатах: перенорми-

рованные кондактанс и затворная ёмкость) имеет топологию аналогичную диаграмме потока (в координатах: продольная и холловская проводимости) для целочисленного квантового эффекта Холла. Предсказано целочисленное квантование заряда, соответствующего (перенормированной) затворной ёмкости, при нулевой температуре.

9. В рамках нульмерного приближения (модель универсального гамильтониана) для квантовой точки с прямым и ферромагнитным обменным взаимодействиями аналитически решена задача об одновременном учете в спиновой восприимчивости и туннельной плотности состояний зарядовых и спиновых корреляций, зеемановского расщепления и флуктуаций одночастичных уровней энергии. Вблизи порога стоунеровской неустойчивости найден широкий интервал температур, в котором явление мезоскопической стоунеровской неустойчивости проявляется в законе Кюри для спиновой восприимчивости с квадратом эффективного спина, логарифмически зависящим от температуры, и в дополнительном немонотонном поведении туннельной плотности состояний как функции энергии.

Все результаты диссертационной работы получены впервые, её выводы обоснованы надежностью применявшихся аналитических методов, согласием с теоретическими результатами, полученными в других работах, и согласием с данными физических и численных экспериментов, выполненных другими авторами.

Развитые в диссертационной работе методы могут быть использованы для описания широкого круга явлений в электронном транспорте в низкоразмерных электронных системах и наноструктурах.

Полученные в диссертационной работе однопетлевые уравнения ренормализационной группы, описывающие зависимость физических величин (проводимости, спиновой восприимчивости, изоспиновой восприимчивости) от размера системы при нулевой температуре в двумерной сильно-коррелированной неупорядоченной электронной системе со спиновыми и изоспиновыми степенями свободы и не предполагающие равенство амплитуд межэлектронного взаимодействия, существенно обогощают теорию переходов металл-изолятор. Применение полученных уравнений ренормализационной группы к конкретным двумерным электронным системам с дополнительными изоспиновыми степенями свободы позволяет объяснить ряд экспериментальных наблюдений в электронном транспорте и сделать предсказание о новом интересном поведении сопротивления при понижении температуры, требующее экспериментальной проверки.

Развитый в диссертационной работе метод получения непертурбативных уравнений ренормализационной группы, описывающих для случая взаимодействующих спин-поляризованных электронов зависимость диссипативной и холловской проводимости, а также амплитуды взаимодействия от размера системы и магнитного поля при нулевой температуре, является в настоящее время единственным способом учесть одновременно перенормировку проводимости за счёт электрон-электронного взаимодействия и орбитального влияния магнитного поля. В дальнейшем этот метод может быть применён для изучения вопроса о наблюдаемом экспериментально сосуществовании перехода металл-изолятор в нулевом магнитном поле и целочисленного квантового эффекта Холла. Развитый в диссертационной работе метод вычисления непертурбативных уравнений ренормализационной группы может быть применён и для вычисления непертурбативных поправок к физическим наблюдаемым в неабелевых калибровочных теориях поля.

Построенная в диссертационной работе теория квантовых холловских осцилляций магнетопроводимости и теплоёмкости, учитывающая влияние межэлектронного взаимодействия, будет способствовать постановке экспериментов по изучению всплывания делокализованных состояний над уровнем химического потенциала и квантования холловской проводимости в слабых магнитных полях.

Предсказываемое в диссертационной работе целочисленное квантование в пределе нулевой температуры новой физической величины, соответствующей затворной ёмкости одноэлектронного транзистора с большим числом туннельных каналов, имеет фундаментальное значение и существенно обогащает теорию кулоновской блокады в одноэлектронных устройствах. Полученный результат показывает существование тесной связи между теорией целочисленного квантового эффекта Холла и теорией электронного транспорта в одноэлектронных устройствах.

Полученные в диссертационной работе результаты для температурной зависимости спиновой восприимчивости и туннельной плотности состояний, учитывающие наличие зарядовых и спиновых корреляций, зеемановского расщепления и флуктуаций одночастичных уровней энергии, показывают, что в квантовых точках из почти ферромагнитных материалов явление мезоскопической стоунеровской неустойчивости можно экспериментально исследовать при достаточно высоких температурах.

Основные результаты диссертационной работы опубликованы в 2002 – 2011 годах в 14 научных работах, список которых приводится в конце диссертации.

Диссертация состоит из введения, четырёх глав, заключения, четырёх приложений, списка публикаций и списка литературы.

Во **введении** обрисовано современное состояние физики электронного транспорта в низкоразмерных электронных системах и наноструктурах, обоснована актуальность темы, сформулирована цель работы, обоснованы новизна и практическая ценность полученных результатов. Здесь же раскрыто содержание диссертации по главам.

Первая глава посвящена изучению влияния спиновых и изоспиновых степеней свободы на переход металл-изолятор в двумерной сильно-коррелированной неупорядоченной электронной системе. Во введении (раздел 1.1) делается обзор основных теоретических и экспериментальных результатов о переходе металл-изолятор и электронном транспорте в двумерной неупорядоченной электронной системе и формулируются задачи, решаемые в первой главе. В разделе 1.2 рассматривается нелинейная сигма-модель для взаимодействующей электронной системы со спиновыми и изоспиновыми степенями свободы, и в рамках однопетлевого приближения выводятся уравнения ренормализационной группы, описывающие зависимость физических наблюдаемых (проводимости, спиновой и изоспиновой восприимчивости) от размера системы при нулевой температуре. Полученные уравнения ренормализационной группы обобщают известные в литературе результаты на случай разных параметров взаимодействия между электронами с различными проекциями спина и изоспина. Показывается, что рассматриваемая ранее в литературе ситуация с одинаковыми параметрами взаимодействия оказывается неустойчивой. В разделе 1.3 общие уравнения ренормализационной группы, полученные в разделе 1.2, применяются для описания зависимости сопротивления, спиновой и долинной восприимчивости от температуры в двумерной электронной системе в кремниевых металл-оксид-полупроводник структурах с высокой подвижностью носителей в параллельном магнитном поле. Показывается, что при температурах меньших, чем междолинное или зеемановское расщепление, реализуется ситуация, когда параметры взаимодействия между электронами с разными проекциями спина и изоспина оказываются различными. Это приводит к ряду новых эффектов, например, к существованию режима с двумя максимумами в температурной зависимости сопротивления. Также появление различных параметров взаимодействия позволяет объяснить экспериментальные наблюдения. В разделе 1.4 общие уравнения ренормализационной группы из раздела 1.2 используются для описания зависимости сопротивления от температуры в двумерной электронной системе с двумя почти идентичными квантовыми ямами и с общими рассеивателями в ситуации баланса, когда концентрации и подвижности электронов в обоих квантовых ямах совпадают. Этот случай сравнивается со случаем, когда одна из квантовых ям полностью обеднена электронами. Оказывается, что различие в межэлектронном взаимодействии внутри и между квантовыми ямами приводит к различию в параметрах взаимодействия, которое согласно уравнениям ренормализационной группы усиливается при понижении температуры. Показывается, что построенная теория позволяет объяснить наблюдаемое в эксперименте слабое изменение температурной зависимости сопротивления и времени сбоя фазы при сильном обеднении электронами одной из квантовых ям. В разделе 1.5 изучается переход Андерсона в бесспиновой неупорядоченной электронной системе. В размерности $d = 2$, хорошо известные однопетлевые уравнения ренормализационной группы предсказывают в случае кулоновского взаимодействия температурную зависимость сопротивления диэлектрического типа, что указывает на вероятное отсутствие перехода металл-изолятор. Показывается, что вычисленное в двухпетлевом приближении (следующий порядок малости по безразмерному кондактансу) уравнение ренормализационной группы также приводит к температурной зависимости проводимости диэлектрического типа, подтверждая гипотезу о том, что для взаимодействующих бесспиновых электронов переход металл-изолятор в размерности $d = 2$ отсутствует и электронная система становится локализованной на больших масштабах. Завершается глава заключением (раздел 1.6).

Во **второй главе** исследуется влияние электрон-электронного взаимодействия на целочисленный квантовый эффект Холла. Во введении (раздел 2.1) делается обзор основных теоретических и экспериментальных результатов для электронного транспорта в режиме целочисленного квантового эффекта Холла и ставятся задачи, решаемые во второй главе. В разделе 2.2 рассматривается нелинейная сигма-модель с топологическим членом, которая описывает двумерную взаимодействующую электронную систему в сильном, поляризующем спин, перпендикулярном магнитном поле. С учётом наличия межэлектронного взаимодействия вычисляются непертурбативные (инстантонные) вклады в зависимость диссипативной и холловской проводимости от размера системы при нулевой температуре. Показывается, что механизм появления зависимости физических наблюдаемых от θ-угла (холловской проводимости) в нелинейной сигма-модели с топологическим членом не зависит от наличия межэлектронного взаимодействия, несмотря на то, что взаимодействие меняет поведение наблюдаемых при увеличении размера системы. В разделе 2.3 результаты инстантонного анализа предыдущего раздела применяются для изучения влияния электрон-электронного взаимодействия на ширину критической области (при конечном размере системы или ненулевой температуре) при переходе между плато в режиме целочисленного квантового эффекта Холла. Для этого, результаты, полученные в разделе 2.2, интерпретируются как уравнения ренормализационной группы для физических наблюдаемых. Тогда ширина квантовой критической области (перехода между плато) определяется критическими индексами, которые вычисляются стандартным образом по значениям ренормгрупповых бета-функций и их производных в критической точке. Показывается, что для электронов, с полностью поляризованными спинами, взаимодействие не меняет топологию диаграммы потока. В разделе 2.4 изучается температурная зависимость времени сбоя фазы на переходе между плато в случае короткодействующего межэлектронного взаимодействия. Вычисление в духе золотого правила Ферми показывает, что температурное поведение времени сбоя фазы зависит от двух индексов μ_2 и α, определяющих скейлинговое поведение усреднённых по беспорядку корреляционных функций с четырьмя и восьмью волновыми функциями, соответственно. В подходе нелинейной сигма-модели эти корреляционные функции представляются в виде средних от линейной комбинации собственных относительно ренормализационной группы операторов, являющихся полиномами четвёртой степени от матричного поля нелинейной сигма-модели. Показывается, что индекс α определяется аномальной размерностью одного из этих собственных операторов. Известные в литературе пертурбативные вычисления для соответствующей аномальной размерности дают нулевое значение α. Инстантонный анализ, аналогичный вычислениям раздела 2.2, показывает, что непертурбативный вклад в α так же равен нулю. Полученный результат о нулевом значении индекса $\alpha = 0$ подтверждается результатами численных экспериментов. В разделе 2.5 изучается зависимость физических наблюдаемых (диссипативной и холловской проводимости, а также теплоёмкости) от температуры и магнитного поля в области, где диссипативная проводимость велика по сравнению с квантовым значением e^2/h. Согласно предсказанию Д. Е. Хмельницкого для невзаимодействующих электронов, магнетопроводимость в этой области должна испытывать осцилляции в магнитном поле, связанные с наличием делокализованных состояний. Показывается, что для случая кулоновского взаимодействия эти, так называемые квантовые холловские, осцилляции испытывает не только магнетопроводимость, но и теплоёмкость, а их амплитуда определяется инстантонным вкладом, и как следствие, растёт с понижением температуры. Демонстрируется, что найденная температурная зависимость амплитуды квантовых холловских осцилляций магнетопроводимости находится в качественном согласии с результатами экспериментов по магнетотранспорту. Завершается глава заключением (раздел 2.6).

Третья глава посвящена изучению явления макроскопического зарядового квантования в одноэлектронных устройствах. Во введении (раздел 3.1) делается обзор основных теоретических и экспериментальных результатов по электронному транспорту в одноэлектронных устройствах и изучению явления кулоновской блокады, а также формулируется задача, решаемая в третьей главе. В разделе 3.2 приводятся необходимые для дальнейшего рассмотрения сведения о действии Амбегаокара-Эккерна-Шона, описывающего одноэлектронный транзистор с большим числом туннельных каналов. Для теоретического описания этой системы используется модель, в которой межэлектронное взаимодействие на островке одноэлектронного транзистора учитывается с помощью ёмкостного взаимодействия. Связь островка с резервуарами описывается в рамках туннельного гамильтониана. В разделе 3.3 определяются физические наблюдаемые для одноэлектронного транзистора. С помощью стандартной процедуры отклика на изменение граничного условия для фазы в действии Амбегаокара-Эккерна-Шона находятся две физические наблюдаемые $\mathbb{G}$ и $\mathbb{Q}$, первая из которых совпадает с кондактансом одноэлектронного транзистора, а вторая, связанная с несимметризованным коррелятором токов, в задачах о транспорте через одноэлектронный транзистор до сих пор не рассматривалась. Показывается, что величины $\mathbb{G}$ и $\mathbb{Q}$ оказываются аналогичными диссипативной и холловской проводимости в целочисленном квантовом эффекте Холла. В разделе 3.4 исследуется поведение физических наблюдаемых в режиме слабой связи в действии Амбегаокара-Эккерна-Шона, что соответствует пределу сильного туннелирования между островком и резервуарами. Показывается, что в этом режиме, температурная зависимость физической наблюдаемой $\mathbb{Q}$ появляется только при учёте топологически нетривиальных решений классических уравнений движения (инстантонов) для действия Амбегаокара-Эккерна-Шона. В разделе 3.5 рассматривается режим сильной связи для действия Амбегаокара-Эккерна-Шона, когда между островком и резервуарами имеется слабое туннелирование. В области кулоновских пиков, т. е. при значениях наведённого заряда близкого к полуцелому значению, с помощью известного отображения действия Амбегаокара-Эккерна-Шона на более простое действие для модели Бозе-Кондо вычисляется зависимость физической наблюдаемой $\mathbb{Q}$ от температуры и напряжения затвора. Показывается, что при нулевой температуре физическая наблюдаемая $\mathbb{Q}$ становится независящей от туннельного кондактанса и целочисленно квантуется при всех значениях напряжения затвора, соответствующих полуцелым значениям наведённого заряда. Таким образом, демонстрируется, что одноэлектронный транзистор с большим числом туннельных каналов при нулевой температуре оказывается эквивалентным изолированному островку. Завершается глава заключением (раздел 3.6).

В **четвёртой главе** исследуются спиновые корреляции в квантовых точках вблизи порога стоунеровской неустойчивости. Во введении (раздел 4.1) делается обзор основных теоретических и экспериментальных результатов по межэлектронному взаимодействию в квантовых точках и ставится проблема, которая решается в четвёртой главе. В разделе 4.2

содержатся необходимые сведения об универсальном гамильтониане, который, как хорошо известно, описывает взаимодействующие электроны в квантовой точке в нульмерном пределе. Также в этом разделе для модели универсального гамильтониана содержится вывод точного аналитического результата для туннельной плотности состояний, определяющей ток через квантовую точку в приближении последовательного туннелирования. В разделе 4.3 вычисляется продольная спиновая восприимчивость, усреднённая по реализациям одноэлектронных уровней энергии, в зависимости от магнитного поля и температуры, при температурах больших типичного расстояния между одночастичными уровнями энергии. Анализируется поведение средней спиновой восприимчивости вблизи порога стоунеровской неустойчивости в разных областях на плоскости безразмерных параметров: отношения зеемановского расщепления к энергии обменного взаимодействия и отношения перенормированной энергии обменного взаимодействия, расходящейся на переходе Стоунера, к температуре. Показывается, что в области температур малых по сравнению с перенормированной энергией обменного взаимодействия из-за известного явления мезоскопической стоунеровской неустойчивости, средняя спиновая восприимчивость в нулевом магнитном поле ведет себя согласно закону Кюри с квадрата эффективного спина, логарифмически зависящим от температуры вследствие флуктуаций одночастичных уровней энергии. В разделе 4.4 рассматривается поведение туннельной плотности состояний, усреднённой по реализациям одноэлектронных уровней энергии, с изменением магнитного поля и температуры, при температурах больших типичного расстояния между одночастичными уровнями энергии, и вблизи порога стоунеровской неустойчивости. Показывается, что при температурах малых по сравнению с перенормированной энергией обменного взаимодействия явление мезоскопической стоунеровской неустойчивости проявляется в возникновении дополнительных максимумов в туннельной плотности состояний, причём учёт флуктуации одночастичных уровней энергии приводит к тому, что эти максимумы становятся более резкими. Завершается глава заключением (раздел 4.5).

В **заключении** сформулированы основные результаты и выводы диссертационной работы, выносимые на защиту.

В **приложения** вынесен ряд громоздких вычислений.

В диссертации используется система единиц, в которой постоянные Планка, Больцмана и скорости света равны единице: $\hbar = k_B = c = 1$.

Глава 1

Влияние спиновых и изоспиновых степеней свободы на переход металл-изолятор в двумерной сильно-коррелированной неупорядоченной электронной системе

1.1 Введение

В этой главе изучается влияние спиновых и изоспиновых степеней свободы на переход металл-изолятор в двумерной сильно-коррелированной неупорядоченной электронной системе. Построенная в этой главе теория позволяет объяснить ряд экспериментальных наблюдений в температурной зависимости сопротивления двумерных электронных систем при низких температурах. Также, построенная теория предсказывает ряд новых особенностей в низкотемпературном поведении сопротивления, которые являются специфическими для двухдолинных электронных систем.

1.1.1 Переход металл-изолятор в неупорядоченной электронной системе

Явление андерсоновской локализации [1] состоит в том, что интерференция может полностью подавить диффузию квантовой частицы в случайном потенциале. Квантовые состояния частицы с данной энергией могут быть либо все локализованы либо все делокализованы. Это приводит к возможности существования квантового фазового перехода при изменении энергии частицы или параметров случайного потенциала, который принято называть переходом Андерсона. Вместо квантовомеханической задачи про одну частицу можно рассматривать задачу о системе невзаимодействующих электронов. В этом случае переход Андерсона может происходить при изменении безразмерного параметра $k_F l$, где k_F – импульс Ферми, а l – длина свободного пробега. При этом факт наличия делокализованных состояний будет означать, что с точки зрения транспорта электронная система является металлом. Если же все состояния локализованы, то система невзаимодействующих электронов ведёт себя как изолятор.

Будут ли состояния при всех энергиях локализованы, делокализованны или существует переход Андерсона зависит от размерности пространства. В случае размерности пространства $d = 1$ все состояния локализованы при сколь угодно слабом случайном потенциале [2] (см. также [3]), а при $d = 3$ существует переход Андерсона [1]. Вопрос о том, какой вариант реализуется в размерности $d = 2$ оказывается более сложным. Основываясь на связи между кондактансом и откликом на изменение граничных условий в системе конечного размера [4], оказывается возможным построить скейлинговую теорию для кондактанса [5], которая находится в согласии с диаграммным расчётом в области слабого беспорядка [6, 7]. Анализ скейлинговой теории показывает, что в размерности $d = 2$ все состояния должны быть локализованы. При $d > 2$ скейлинговая теория предсказывает существование перехода Андерсона, вблизи которого кондактанс ведет себя степенным образом в зависимости от расстояния до точки перехода [8]. Наличие скейлинга вблизи перехода Андерсона позволяет использовать методы, развитые для описания критических явлений: низкоэнергетическое эффективное действие и ренормализационную группу (см., например [9, 10, 11]).

Для задачи об андерсоновской локализации низкоэнергетическое эффективное действие имеет вид нелинейной сигма-модели [12, 13, 14, 15, 16, 17], которая описывает диффузное движение частицы на масштабах больших длины свободного пробега [1]. Изучение андерсоновской локализации в области слабого беспорядка с помощью нелинейной сигма-модели существенно удобнее [19, 20], чем с использованием стандартной диаграммной техники. Для явления локализации основную роль играет взаимодействие диффузных мод [2], приводящее на масштабах больших длины свободного пробега к логарифмическим

[1]Для размерности $d = 1$ в строго одноканальном случае подход нелинейной сигма-модели не работает. Это связано с тем, что длина локализации равна длине свободного пробега и нет области масштабов, где происходит диффузное движение частицы [18].

[2]Под диффузными модами понимаются как диффузоны (двухчастичный пропагатор в канале частица-

расходимостям в размерности $d = 2$.

Существование перехода Андерсона зависит не только от размерности пространства, но и от симметрии гамильтониана, описывающего движение частицы. Вывод об отсутствии перехода Андерсона в размерности $d = 2$ справедлив для гамильтониана из ортогонального класса симметрии по классификации Вигнера-Дайсона [21, 22, 23], т.е. когда гамильтониан симметричен относительно обращения времени и вращения спина. Например, в случае симплектического класса симметрии, когда отсутствует симметрия относительно вращения спина, что бывает, например, при наличии спин-орбитального взаимодействия, в размерности $d = 2$ реализуется переход Андерсона. В настоящее время установлено существование ровно десяти классов симметрии для гамильтонианов, описывающих случайное движение частицы, и вид соответствующих им нелинейных сигма-моделей [24, 25, 26].

Оказывается, что для каждого класса симметрии соответствующая нелинейная сигма-модель при некоторых размерностях пространства допускает существование топологических членов. Наличие топологического члена существенным образом влияет на вопрос о локализации [3]. Первым и самым известным примером такого рода является целочисленный квантовый эффект Холла. Гамильтониан частицы в случайном двумерном потенциале в присутствии перпендикулярного постоянного магнитного поля относится к унитарному классу симметрии (нарушена симметрия относительно обращения времени). В этом случае в размерности $d = 2$ стандартная скейлинговая теория предсказывает локализацию [27]. Существование при $d = 2$ в нелинейной сигма-модели для унитарного класса симметрии топологического члена [28, 29] приводит к появлению делокализованных состояний и целочисленному квантованию холловской проводимости [30]. В настоящее время построена полная классификация топологических членов для всех десяти классов симметрии в зависимости от размерности пространства [31, 32, 33].

Интересной и важной особенностью перехода Андерсона является явление мультифрактальности [34, 35], проявляющееся в существовании бесконечного набора критических индексов, характеризующих поведение моментов функции распределения модуля квадрата волновой функции в системе конечного размера. Это явление связано с сильными корреляциями волновых функций в точке перехода. В нелинейной сигма-модели мультифрактальность волновых функций проявляется в существовании бесконечного числа релевантных операторов [34, 36].

Подчеркнем, что всё перечисленное выше разнообразие явления андерсоновской ло-

дырка), так и купероны (двухчастичный пропагатор в канале частица-частица).

[3]Более подробно влияние топологии на переход металл-изолятор обсуждается в главе 2.

кализации проявляется в задаче о невзаимодействующих (квази)частицах. Несмотря на простоту постановки задачи об андерсоновской локализации, к настоящему времени она полностью не решена, хотя и получено большое количество, как аналитических, так и численных результатов, позволяющих построить детальную качественную, а в чём-то, и количественную картину явления [37, 38, 39].

Согласно скейлинговой теории [5] кондактанс невзаимодействующих электронов в случайном потенциале зависит от размера системы L. При этом температура в этой зависимости не появляется, так как предполагается идеальная ситуация: электроны не взаимодействуют друг с другом и с окружением. Реализовать такие условия в лабораторных экспериментах достаточно сложно, так как невозможно исключить межэлектронное взаимодействие и взаимодействие электронов с фононами [4]. При низких температурах основную роль играет электрон-электронное взаимодействие. Неупругие процессы при электрон-электронном рассеянии с малой по сравнению с температурой передачей энергии приводят к тому, что фазовая когерентность, необходимая для квантовой интерференции, сохраняется только на временных масштабах меньших времени сбоя фазы τ_ϕ [42, 43, 44]. [5] При понижении температуры время τ_ϕ и соответствующий ему пространственный масштаб L_ϕ растут, обращаясь в бесконечность при нулевой температуре. При конечных температурах таких, что $L_\phi < L$, длина сбоя фазы играет роль эффективного размера системы, что приводит к температурной зависимости кондактанса [44].

Кроме влияния на кондактанс через время сбоя фазы [6] электрон-электронное взаимодействие приводит к появлению при низких температурах сильной температурной зависимости кондактанса, связанной с виртуальными процессами при электрон-электронном рассеянии [51]. Физически сильная температурная зависимость кондактанса возникает из-за когерентного рассеяния на фриделевских осцилляциях [53]. Сильная, по сравнению с ферми-жидкостной, температурная зависимость возникает также в термодинамических величинах: теплоёмкости и спиновой восприимчивости (см., например [54]). Наиболее интересная ситуация возникает в размерности $d = 2$, где в области слабого беспорядка

[4]Недавно появились эксперименты (см., например [40, 41]) в которых андерсоновская локализация изучается в системе холодных атомов в оптическом случайном потенциале.

[5]Заметим, что вообще говоря, время сбоя фазы отличается от обратной частоты электрон-электронных столкновений (уходного времени в формализме квантового кинетического уравнения [45, 46]) (см., например [47]).

[6]В ситуации, когда в приближении невзаимодействующих электронов все состояния локализованы электрон-электронное взаимодействие может приводить к существованию при конечной температуре перехода между состояниями с нулевой (при низких температурах) и конечной (при высоких температурах) проводимостью [48, 49, 50].

вклады в кондактанс, связанные с электрон-электронным взаимодействием, так же как и вклады, связанные с интерференцией электронов (обсуждавшиеся выше), оказываются логарифмическими [52]. В обоих случаях к логарифмическим вкладам приводит взаимодействие диффузных мод на масштабах больше длины свободного пробега. Для ортогонального класса симметрии влияние сильного электрон-электронного взаимодействия на кондактанс оказывается противоположным влиянию интерференции, стремящейся локализовать электроны. Это приводит к возможности существования в размерности $d = 2$ квантового фазового перехода металл-изолятор при изменении безразмерного параметра $k_F l$ в области сильного межэлектронного взаимодействия.

Первая попытка построить скейлинговую теорию перехода металл-изолятор по аналогии со скейлинговой теорией [5] для невзаимодействующих электронов была сделана в работе [55]. Несмотря на качественную и количественную неправильность предложенной теории, важным обстоятельством была идея о необходимости двухпараметрического скейлинга для описания перехода металл-изолятор в присутствии межэлектронного взаимодействия. Для последовательного изучения вопроса о переходе металл-изолятор оказывается возможным построить эффективное низкоэнергетическое действие, которое обобщает нелинейную сигма-модель для невзаимодействующих электронов на случай межэлектронного взаимодействия [56]. С помощью метода ренормализационной группы удалось построить правильную скейлинговую теорию для перехода металл-изолятор в размерности $d > 2$ с учётом электрон-электронного взаимодействия [57, 58, 59, 60, 61, 62]. Как правило, электрон-электронное взаимодействие приводит к изменению класса универсальности перехода металл-изолятор по сравнению с задачей без взаимодействия, (см., например [63, 64]), т.е. с точки зрения теории критических явлений, взаимодействие, как правило, оказывается релевантным возмущением для перехода Андерсона. Недавно влияние взаимодействия на локализацию было изучено также в сверхпроводящих и киральных классах симметрий [65].

Для ортогонального класса симметрии в размерности $d = 2$ при слабом беспорядке влияние электрон-электронного взаимодействия оказывается сильнее интерференционного эффекта, что приводит к металлическому поведению кондактанса при низких температурах [62]. Этот факт является аргументом в пользу существования перехода металл-изолятор в $d = 2$ при учёте межэлектронного взаимодействия.

Несмотря на длительное экспериментальное изучение двумерных электронных систем [66], экспериментальное наблюдение [67, 68] в кремниевых металл-оксид-полупроводник (Si-МОП) структурах с высокой подвижностью носителей изменение тем-

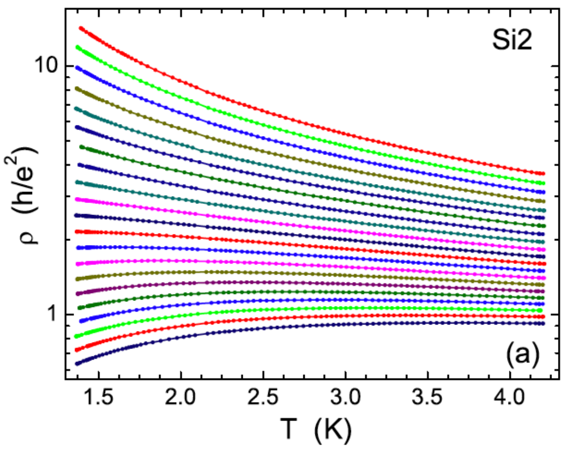

Рисунок 1.1: Температурная зависимость сопротивления в Si-МОП структуре. Электронная концентрация возрастает на $0.224 \cdot 10^{10}$ см$^{-2}$, начиная с $6.72 \cdot 10^{10}$ см$^{-2}$ (верхняя кривая). Рисунок взят из работы [69].

пературного поведения сопротивления от диэлектрического к металлическому типу при увеличении электронной концентрации (см. Рис. 1.1) оказалось неожиданным. Как раз к такому "веерному" поведению температурной зависимости сопротивления при разных электронных концентрациях и должен приводить переход металл-изолятор. Позже похожее поведение сопротивления было экспериментально обнаружено и в других двумерных электронных системах [70, 71, 72, 73, 74, 75]. В существовании температурного поведения сопротивления, характерного для перехода металл-изолятор, важную роль играет электронный спин. На это указывает тот факт, что магнитное поле, слабое по сравнению с полем необходимым для полной поляризации электронных спинов и приложенное параллельно двумерному слою в Si-МОП структуре, меняет температурную зависимость сопротивления с металлической на диэлектрическую [76, 77, 78](см. Рис. 1.2). Аналогичный эффект наблюдался в двумерной дырочной системе в гетероструктуре GaAs/AlGaAs [80]. В последнем случае такое поведение сопротивления в параллельном поле при низких температурах может быть объяснено скейлинговой теорией, учитывающей, что на больших расстояниях зеемановское расщепление выключает две из трёх диффузных мод в триплетном канале [63]. Недавно существование перехода металл-изолятор в размерности $d = 2$ было теоретически продемонстрировано в специальном случае, при котором спин электрона равен $\mathcal{N} \to \infty$ (сигма-модельное действие $SU(\mathcal{N})$ инвариантно) [81]. Таким образом, существующие экспериментальные и теоретические результаты показывают, что спиновые степени свободы играют важную роль для существования перехода металл-изолятор

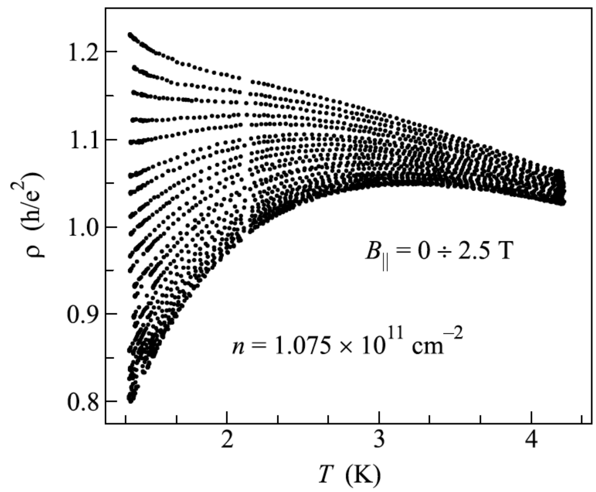

Рисунок 1.2: Температурная зависимость сопротивления для Si-МОП структуры с электронной концентрацией $n = 1.075 \cdot 10^{11}$ см$^{-2}$ в параллельном магнитном поле. Магнитное поле меняется на 0.1 Т в диапозоне от 0 до 2.5, начиная с нижней кривой. Рисунок взят из работы [79].

в двумерной электронной системе.

1.1.2 Постановка задачи

Недавно, предсказания скейлинговой теории [63] были детально сопоставлены с результатами экспериментов на Si-МОП структурах. Температурная зависимость сопротивления в металлической области [82], магнитосопротивление в параллельном поле [79, 83], и сопротивление в критической области (двух-параметрический скейлинг) [69] показали неплохое согласие с теорией. Существенной особенностью двумерной электронной системы в изучаемых экспериментально Si-МОП структурах является наличие двух долин [7]. Это приводит к появлению двух дополнительных энергетических масштабов: междолинного расщепления Δ_v и времени междолинного рассеяния $1/\tau_v$, величины которых в критической области оказываются порядка 1 К и 0.1 К, соответственно [84, 85]. Поэтому для детального сравнения экспериментальных данных с теорией при температурах ниже 1 К, требуется развитие теории с учётом наличия в двухдолинной электронной системе междолинного расщепления и конечного времени междолинного рассеяния.

[7] В объемном кремнии в зоне Бриллюэна находится 6 долин вырожденных по энергии. В Si(001)-МОП структуре вырождение частично снимается и четыре из шести долин становятся отделены от двух других долин, центры которых лежат на оси z в обратном пространстве, энергетической щелью порядка 200 К и поэтому не участвуют в транспорте при низких температурах.

Хорошо известно [86], что двухдолинная электронная система реализуется также в n-AlAs квантовой яме [8]. В отличие от Si-МОП структуры, в n-AlAs квантовой яме можно воздействовать не только на спиновую степень свободы, прикладывая параллельное магнитное поле, но и на возникающую из-за наличия двух долин изоспиновую степень свободы, используя упругое напряжение для изменения величины междолинного расщепления [87, 88]. В работах [87, 88] было обнаружено, что для изменения температурной зависимости сопротивления с металлической на диэлектрическую недостаточно приложить только параллельное магнитное поле или только упругое напряжение: необходимо наличие как зеемановского, так и междолинного расщеплений. Этот экспериментальный результат находится в согласии с экспериментами [76, 77, 78], так как в электронной системе в Si-МОП структуре конечное междолинное расщепление всегда присутствует. Однако, экспериментальные наблюдения работ [87, 88] находятся в противоречии с теорией. Простейшее обобщение теории [82] на случай только зеемановского или междолинного расщеплений приводит к тому, что наличие одного из этих факторов достаточно для смены температурной зависимости сопротивления с металлического на диэлектрическое [89]. Таким образом, теория электронного транспорта в двухдолинной системе оказывается в противоречии с экспериментом.

Ещё одной системой, в которой двумерные электроны имеют изоспиновую степень свободы, является гетероструктура с двойной квантовой ямой. В этом случае изоспин отличает состояния локализованные в разных ямах. Несмотря на большое количество интересных физических явлений, обнаруженных в гетероструктурах с двойной квантовой ямой, в том числе и в присутствии сильного магнитного поля, влияющего на орбитальное движение двумерных электронов, и таких как кулоновское увлечение [90, 91, 92, 93], конденсация Бозе-Эйнштейна экситонов [94, 95, 96], ферромагнитная [97, 98] и наклонная антиферромагнитная [99] фазы, переход металл-изолятор экспериментально подробно не исследовался. Электронный транспорт в гетероструктуре с двойной квантовой ямой изучался только при больших концентрациях электронов, вдали от области параметров, в которой можно ожидать перехода металл-изолятор [100, 101].

В гетероструктуре с двойной квантовой ямой и с общими рассеивателями для электронов в обеих ямах можно ожидать такое же поведения сопротивления как и в Si-МОП

[8]В объемном AlAs имеется шесть долин, вырожденных по энергии, центры которых расположены точно на границах зоны Бриллюэна, так что на одну зону приходится 3 долины. В n-AlAs квантовой яме вырождение частично снимается и при низких температурах играют роль только долины, расположенные на осях x и y в обратном пространстве.

структуре. Изменение концентрации электронов в одной из ям с помощью затвора позволяет плавно переходить от случая равных электронных концентраций в двух ямах (ситуация аналогичная двухдолинной системе) к случаю, когда электронами заполнена только одна яма (ситуация аналогичная однодолинной системе). Согласно теории [82], при переходе от двухдолинной к однодолинной ситуации ожидается сильное изменение температурной зависимости сопротивления. Однако, недавние эксперименты [102, 103] в гетероструктурах с двойной квантовой ямой не обнаружили значительных изменений в температурной зависимости сопротивления при обеднении одной из ям. Этот экспериментальный результат требует теоретического объяснения.

Важность спиновых (и изоспиновых) степеней свободы для существования перехода металл-изолятор подчеркивается предельным случаем бесспиновых электронов. Такой случай реализуется в однодолинной ситуации в присутствии достаточно сильных магнитных примесей или сильного магнитного поля, полностью поляризующего спины электронов. Хорошо известно [63], что в этом случае поправка в проводимость от взаимодействия действует в пользу локализации, приводя к температурной зависимости сопротивления диэлектрического типа. В связи с этим, интересно сравнить случай бесспиновых электронов со случаем, рассмотренным в работе [81], при котором спин электрона равен $\mathcal{N} \to \infty$. Для проведения такого сравнения необходимо вычислить поправку к проводимости бесспиновых электронов от взаимодействия в следующем порядке по малому безразмерному параметру $1/k_F l$.

Итак, *основной задачей*, которая решается в данной главе, является изучение влияния спиновых и изоспиновых степеней свободы на переход металл-изолятор в двумерной сильно-коррелированной неупорядоченной электронной системе.

Материал главы организован следующим образом. В разделе 1.2 приводятся необходимые для дальнейшего сведения о нелинейной сигма-модели и выводятся однопетлевые уравнения ренормализационной группы для ситуации, когда кроме спина состояние электрона характеризуется ещё изоспином. В разделе 1.3 полученные общие результаты применяются для изучения транспорта в двумерной двухдолинной электронной системе в Si-МОП структуре в присутствии междолинного и зеемановского расщеплений. В разделе 1.4 исследуется транспорт в двумерной электронной системе в структурах с двойной квантовой ямой и общими рассеивателями. В разделе 1.5 вычисляется проводимость двумерных бесспиновых электронов в двухпетлевом приближении. Завершается глава заключением (раздел 1.6).

1.2 Нелинейная сигма-модель

1.2.1 Введение

В этом разделе будет рассмотрена нелинейная сигма-модель для взаимодействующей электронной системы со спиновыми и изоспиновыми степенями свободы. В рамках однопетлевого приближения будут получены уравнения ренормализационной группы, описывающие зависимость физических наблюдаемых (проводимости, спиновой восприимчивости, изоспиновой восприимчивости и т. д.) от размера системы при нулевой температуре. Новизна этих уравнений ренормализационной группы состоит в том, что параметры, характеризующие взаимодействие в разных каналах, не предполагаются с самого начала равными. В следующих разделах общие уравнения ренормализационной группы применяются к описанию транспорта в двухдолинной электронной системе в Si-МОП структуре и в электронной системе в двойной квантовой яме.

1.2.2 Действие нелинейной сигма-модели

При низких температурах $T\tau_{\mathrm{tr}} \ll 1$, где τ_{tr} – транспортное время упругого рассеяния, эффективное описание неупорядоченной электронной жидкости производится с помощью нелинейной сигма-модели [9], которая учитывает взаимодействие низкоэнергетических мод (диффузонов и куперонов) с энергиями $|\varepsilon| \lesssim 1/\tau_{\mathrm{tr}}$. Нелинейная сигма-модель является теорией матричного поля $Q_{mn}^{\alpha\beta}(\boldsymbol{r})$, подчиняющегося условиям $Q^2(\boldsymbol{r}) = 1$ и $Q(\boldsymbol{r}) = Q^\dagger(\boldsymbol{r})$. Целые числа $\alpha, \beta = 1, 2, \dots, N_r$ обозначают репличные индексы. Целые числа m, n соответствуют мацубаровским энергиям $\varepsilon_n = \pi T(2n+1)$.

В зависимости от задачи элемент матрицы $Q_{mn}^{\alpha\beta}(\boldsymbol{r})$ может иметь дополнительную матричную структуру и удовлетворять дополнительным соотношениям [63, 64]. В этом разделе для определенности нелинейная сигма-модель будет сформулирована для случая, когда купероны и взаимодействие в куперовском канале можно не учитывать [10]. Тогда, $Q_{mn}^{\alpha\beta}(\boldsymbol{r})$ является матрицей 4×4, действующей в спиновом и изоспиновом пространствах.

[9]В этой и следующей главах используется репличная нелинейная сигма-модель. В принципе, рассматриваемые задачи можно было бы также решать с помощью келдышевской нелинейной сигма-модели (см., например [104]). Однако, так как в диссертации рассматриваются равновесные задачи, формализм келдышевской нелинейной сигма-модели приводит к ненужным усложнениям.

[10]Для двумерной электронной жидкости это происходит при наличии слабого перпендикулярного магнитного поля $B \gtrsim \max\{1/\tau_\phi, T\}/D$, где D – коэффициент диффузии (см., например [54]).

Действие нелинейной сигма-модели имеет вид

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_\sigma + \mathcal{S}_F + \mathcal{S}_{SB}. \tag{1.1}$$

Первый член $\mathcal{S}_\sigma$ представляет собой нелинейную сигма-модель для невзаимодействующих электронов [12, 13, 14, 16]

$$\mathcal{S}_\sigma = -\frac{\sigma_{xx}}{32}\int d\boldsymbol{r}\, \mathrm{tr}(\nabla Q)^2, \tag{1.2}$$

где $\sigma_{xx} = 4\pi\nu_\star D$ (D – коэффициент диффузии) представляет собой друдовскую проводимость в единицах e^2/h. Термодинамическая плотность состояний $\nu_\star = m_\star/\pi$ определяется эффективной массой $m_\star$, которая учитывает ферми-жидкостные перенормировки. Заметим, что друдовская проводимость равна $\sigma_{xx} = 2k_F l$ и предполагается большой по сравнению с единицей: $\sigma_{xx} \gg 1$. Символ tr обозначает след по репличным, мацубаровским, спиновым и изоспиновым индексам.

Наличие электрон-электронного взаимодействия приводит к дополнительному вкладу в действие нелинейной сигма-модели [56, 57, 58, 59, 105]

$$\mathcal{S}_F = -\pi T\int d\boldsymbol{r}\left[\sum_{\alpha n;ab}\frac{\Gamma_{ab}}{4}\,\mathrm{tr}\, I_n^\alpha t_{ab} Q(\boldsymbol{r})\,\mathrm{tr}\, I_{-n}^\alpha t_{ab} Q(\boldsymbol{r}) - 4z\,\mathrm{tr}\,\eta Q + 6z\,\mathrm{tr}\,\eta\Lambda\right]. \tag{1.3}$$

Здесь 16 матриц $t_{ab} = \boldsymbol{\tau}_a \otimes \boldsymbol{\sigma}_b$ $(a, b = 0, 1, 2, 3)$ являются генераторами группы $SU(4)$. Матрицы Паули $\boldsymbol{\tau}_a$, $a = 0, 1, 2, 3$, действуют в изоспиновом пространстве, а матрицы Паули $\boldsymbol{\sigma}_b$, $b = 0, 1, 2, 3$, действуют в спиновом пространстве. Величины Γ_{ab} обозначают амплитуды электрон-электронного взаимодействия. Параметр z определяется термодинамической плотностью состояний [11]: $z = \pi\nu_\star/4$. Физический смысл параметра z состоит в том, что его перенормированное значение определяет температурную зависимость теплоёмкости [106]. Амлитуды взаимодействия Γ_{ab} в действии (1.1) нелинейной сигма-модели связаны с ферми-жидкостными параметрами взаимодействия F_{ab}:

$$\Gamma_{ab} = -zF_{ab}/(1 + F_{ab}). \tag{1.4}$$

Матрицы Λ, η и I_k^γ определены следующим образом:

$$\Lambda_{nm}^{\alpha\beta} = \mathrm{sign}\, n\,\delta_{nm}\delta^{\alpha\beta} t_{00}, \qquad \eta_{nm}^{\alpha\beta} = n\delta_{nm}\delta^{\alpha\beta} t_{00}, \qquad (I_k^\gamma)_{nm}^{\alpha\beta} = \delta_{n-m,k}\delta^{\alpha\gamma}\delta^{\beta\gamma} t_{00}. \tag{1.5}$$

[11] Величина z является независимым зарядом (в теоретико-полевом смысле) действия нелинейной сигма-модели. Она впервые была введена А. М. Финкельштейном в работе [56] для того, чтобы уравнения ренормализационной группы согласовывались с условием сохранения полного числа частиц.

Последняя часть действия (1.1) учитывает наличие членов, понижающих симметрию:

$$\mathcal{S}_{SB} = iz_{ab}\Delta_{ab}\int d\boldsymbol{r}\,\mathrm{tr}\,t_{ab}Q + \frac{N_r z_{ab}}{\pi T}\int d\boldsymbol{r}\,\Delta_{ab}^2. \tag{1.6}$$

Например, наличие зеемановского расщепления Δ_s приводит к появлению члена (1.6) с $t_{ab} = t_{03}$ и $\Delta_{03} = \Delta_s$. В случае, когда изоспин нумерует электроны в двухдолинной электронной системе в Si-МОП структуре, наличие междолинного расщепления Δ_v соответствует появлению $\Delta_{30} = \Delta_v$.

Матрица Q в действии (1.1) формально имеет бесконечный размер в мацубаровском пространстве. Для того, чтобы работать с такими матрицами в промежуточных вычислениях необходимо ввести обрезание для больших мацубаровских частот. Будем считать, что целые числа m, n, соответствующие мацубаровским фермионным энергиям, изменяются в пределах $-N_M \leqslant m, n \leqslant N_M - 1$, где $N_M \gg 1$ [12]. Хорошо известно [105, 107], что глобальные вращения Q матрицей $\exp(i\hat{\chi})$:

$$Q(\boldsymbol{r}) \to \exp(i\hat{\chi})Q(\boldsymbol{r})\exp(-i\hat{\chi}), \tag{1.7}$$

где $\hat{\chi} = \sum_{\alpha,n}\chi_n^\alpha I_n^\alpha$, играют важную роль, так как связаны с постоянным в пространстве электрическим потенциалом, который может быть исключен из задачи с помощью калибровочного преобразования фермионных операторов. Удобно определить предельный переход $N_M \to \infty$ таким образом [13], чтобы выполнялись следующие соотношения ($\mathcal{F}$-алгебра) [105]:

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}\, I_n^\alpha t_{ab} e^{i\hat{\chi}} Q e^{-i\hat{\chi}} &= \mathrm{tr}\, I_n^\alpha t_{ab} e^{i\chi_0} Q e^{-i\chi_0} + 8in(\chi_{ab})_{-n}^\alpha\,, \\
\mathrm{tr}\,\eta e^{i\hat{\chi}} Q e^{-i\hat{\chi}} &= \mathrm{tr}\,\eta Q + \sum_{\alpha n; ab} in(\chi_{ab})_n^\alpha\,\mathrm{tr}\, I_n^\alpha t_{ab} Q - 4\sum_{\alpha n; ab} n^2(\chi_{ab})_n^\alpha(\chi_{ab})_{-n}^\alpha,
\end{aligned} \tag{1.8}$$

где $\chi_0 = \sum_\alpha \chi_0^\alpha I_0^\alpha$. С помощью соотношений (1.8) можно проверить что соотношение $\Gamma_{00} = -z$ гарантирует, так называемую, $\mathcal{F}$-инвариантность [105], т.е. инвариантность действия $\mathcal{S}_\sigma + \mathcal{S}_F$ при глобальных вращениях (1.7) с $\chi_{ab} = \chi\delta_{a0}\delta_{b0}$.

1.2.3 Физические наблюдаемые

Наиболее важные величины, которые содержат информацию о низкоэнергетическом поведении нелинейной сигма-модели, – это физические наблюдаемые σ'_{xx}, z', и z'_{ab}, соответству-

[12] Условие применимости нелинейной сигма-модели приводит к естественной оценке $N_M \sim 1/(2\pi T\tau_{\mathrm{tr}})$.

[13] Заметим, что предельный переход $N_M \to \infty$ делается при фиксированном значении числа $N = N_r N_M$, которое потом в репличном пределе $N_r \to 0$ стремится к нулю. Заметим, что теория с конечным значением N_M эквивалентна случаю невзаимодействующих электронов на масштабах много больших $\sqrt{D/2\pi T N_M}$ [108].

ющие параметрам σ_{xx}, z, и z_{ab} в действии (1.1). Величина σ'_{xx} – это полная проводимость электронной системы, определяемая по линейному отклику на внешнее электромагнитное поле. Величина z' определяет теплоёмкость [106]. Величины z'_{ab} соответствуют статическим обобщённым восприимчивостям: $\chi_{ab} = 2z'_{ab}/\pi$ [59, 61]. Кондактанс σ'_{xx} определяется из следующего выражения (формулы Кубо) [109]

$$\sigma'_{xx}(i\omega_n) = -\frac{\sigma_{xx}}{16n}\left\langle \operatorname{tr}[I^\alpha_n, Q][I^\alpha_{-n}, Q]\right\rangle + \frac{\sigma^2_{xx}}{64dn}\int d\boldsymbol{r}'\langle\langle \operatorname{tr} I^\alpha_n Q(\boldsymbol{r})\nabla Q(\boldsymbol{r}) \cdot \operatorname{tr} I^\alpha_{-n} Q(\boldsymbol{r}')\nabla Q(\boldsymbol{r}')\rangle\rangle \tag{1.9}$$

с помощью аналитического продолжения на действительные частоты $i\omega_n \to \omega + i0^+$ в статическом пределе $\omega \to 0$. Здесь средние вычисляются с действием (1.1), а $\langle\langle \ldots \rangle\rangle$ обозначает неприводимое среднее, $\langle\langle A \cdot B\rangle\rangle = \langle AB\rangle - \langle A\rangle\langle B\rangle$. Физическая наблюдаемая z' определяется из термодинамического потенциала Ω [109]:

$$z' = \frac{1}{2\pi \operatorname{tr} \eta\Lambda}\frac{\partial}{\partial T}\frac{\Omega}{T}. \tag{1.10}$$

Наблюдаемые z'_{ab} вычисляются с помощью следующих соотношений [63]:

$$z'_{ab} = \frac{\pi}{2N_r}\frac{\partial^2\Omega}{\partial\Delta^2_{ab}} \tag{1.11}$$

1.2.4 Однопетлевая перенормировка

Теория возмущений

Для построения теории возмущений по малому параметру $1/\sigma_{xx}$ удобно выбрать корневую параметризацию матрицы Q:

$$Q = W + \Lambda\sqrt{1 - W^2}, \qquad W = \begin{pmatrix} 0 & w \\ w^\dagger & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.12}$$

Тогда действие (1.1) может быть представлено как бесконечный ряд по степеням полей w и $w^\dagger$. В отсутствие $\mathcal{S}_{SB}$ парная корреляционная функция полей w и $w^\dagger$ имеет вид

$$\begin{aligned}\langle [w_{ab}(\boldsymbol{q})]^{\alpha_1\alpha_2}_{n_1n_2}[w^\dagger_{cd}(-\boldsymbol{q})]^{\alpha_4\alpha_3}_{n_4n_3}\rangle = \frac{4}{\sigma_{xx}}\delta_{ab;cd}\delta^{\alpha_1\alpha_3}\delta^{\alpha_2\alpha_4}\delta_{n_{12},n_{34}}\times \\ \times D_q(\omega_{12})\Big[\delta_{n_1n_3} - \frac{32\pi T\Gamma_{ab}}{\sigma_{xx}}\delta^{\alpha_1\alpha_2}D^{(ab)}_q(\omega_{12})\Big],\end{aligned} \tag{1.13}$$

где $\omega_{12} = \varepsilon_{n_1} - \varepsilon_{n_2} = 2\pi T n_{12} = 2\pi T(n_1 - n_2)$ и

$$D^{-1}_q(\omega_n) = q^2 + \frac{16z\omega_n}{\sigma_{xx}}, \qquad [D^{(ab)}_q(\omega_n)]^{-1} = q^2 + \frac{16(z + \Gamma_{ab})\omega_n}{\sigma_{xx}}\,. \tag{1.14}$$

Здесь и в дальнейшем используется соглашение, что целые числа $n_1, n_3, \dots$ принимают неотрицательные значения, а $n_2, n_4, \dots$ – отрицательные.

Динамическая обобщенная восприимчивость $\chi_{ab}(\omega, \boldsymbol{q})$, описывающая отклик на зависящий от времени и координат параметр Δ_{ab}, может быть получена из следующего выражения для мацубаровской восприимчивости [63]

$$\chi_{ab}(i\omega_n, \boldsymbol{q}) = \frac{2z_{ab}}{\pi} - T z_{ab}^2 \langle\langle \operatorname{tr} I_n^\alpha t_{ab} Q(\boldsymbol{q}) \operatorname{tr} I_{-n}^\alpha t_{ab} Q(-\boldsymbol{q}) \rangle\rangle \tag{1.15}$$

с помощью аналитического продолжения на действительные частоты: $i\omega_n \to \omega + i0^+$ [59]. В "древесном" приближении выражение (1.15) равно

$$\chi_{ab}(i\omega_n, \boldsymbol{q}) = \frac{2z_{ab}}{\pi} \left(1 - \frac{16 z_{ab}\omega_n}{\sigma_{xx}} D_q^{ab}(\omega_n)\right). \tag{1.16}$$

В зависимости от вида матрицы Γ_{ab} действие $\mathcal{S}_\sigma + \mathcal{S}_F$ может быть инвариантно относительно глобальных поворотов $Q \to uQu^{-1}$ с матрицей $u = u_{a_0b_0} t_{a_0b_0}$. Это означает, что сохраняется величина $\operatorname{tr} t_{a_0b_0} Q$ и, как следствие, выполняется тождество Уорда: $\chi_{a_0b_0}(\omega, \boldsymbol{q} = 0) = 0$. Тогда из уравнения (1.16) следует, что должно выполняться соотношение

$$z_{a_0b_0} = z + \Gamma_{a_0b_0}. \tag{1.17}$$

В общем случае простой связи между величинами z_{ab} и Γ_{ab} нет.

Наличие члена $\mathcal{S}_{SB}$ с $\Delta_{a_0b_0}$ меняет выражение (1.13) для парной корреляционной функции:

$$\begin{aligned}\langle [w_{ab}(\boldsymbol{q})]^{\alpha_1\alpha_2}_{n_1n_2} [w^\dagger_{cd}(-\boldsymbol{q})]^{\alpha_4\alpha_3}_{n_4n_3} \rangle = \frac{4}{\sigma_{xx}} \delta^{\alpha_1\alpha_3}\delta^{\alpha_2\alpha_4}\delta_{n_{12},n_{34}} \times \\ \times \left[\hat{D}_q(\omega_{12})\delta_{n_1n_3} - \frac{32\pi T}{\sigma_{xx}} \delta^{\alpha_1\alpha_2} \hat{D}_q(\omega_{12}) \hat{\Gamma} \hat{D}_q^{(\mathrm{int})}(\omega_{12})\right]_{ab,cd},\end{aligned} \tag{1.18}$$

где $\hat{\Gamma} = \operatorname{diag}\{\Gamma_{00}, \Gamma_{01}, \Gamma_{02}, \Gamma_{03}, \Gamma_{10}, \dots, \Gamma_{33}\}$ и

$$\begin{aligned}\left[\hat{D}_q(\omega_n)\right]^{-1}_{ab,cd} &= \left(q^2 + \frac{16 z\omega_n}{\sigma_{xx}}\right)\delta_{ab,cd} + 2i z_{a_0b_0}\Delta_{a_0b_0} \mathcal{C}^{a_0b_0}_{ab,cd}, \\ \left[\hat{D}_q^{(\mathrm{int})}(\omega_n)\right]^{-1}_{ab,cd} &= \left[\hat{D}_q(\omega_n)\right]^{-1}_{ab,cd} + \frac{16\Gamma_{ab}\omega_n}{\sigma_{xx}}\delta_{ab,cd}.\end{aligned} \tag{1.19}$$

Здесь $\mathcal{C}^{ab}_{cd;ef}$ обозначают структурные константы для $SU(4)$: $[t_{cd}, t_{ef}] = \sum_{ab} \mathcal{C}^{ab}_{cd;ef} t_{ab}$. Как видно из выражений (1.19), часть диффузных мод становится массивными, а значит не приводит к логарифмическим расходимостям на масштабах $L \gg \sqrt{\sigma_{xx}/(z_{a_0b_0}\Delta_{a_0b_0})}$. Можно проверить, что именно эти моды определяют перенормировку соответствующей обобщенной восприимчивости $\chi_{a_0b_0}(\omega, \boldsymbol{q})$. Как следствие, на масштабах $L \gg \sqrt{\sigma_{xx}/(z_{a_0b_0}\Delta_{a_0b_0})}$ величина $z_{a_0b_0}$ не перенормируется.

Однопетлевая перенормировка физических наблюдаемых

Ниже влияние члена $\mathcal{S}_{SB}$ на парную корреляционную функцию полей w and $w^\dagger$ учитываться не будет. Это возможно, если рассмотрение ограничивается масштабами $L \ll \min\limits_{ab} \sqrt{\sigma_{xx}/(z_{ab}\Delta_{ab})}$. Вычисляя стандартным образом с помощью уравнения (1.13) в однопетлевом приближении средние в выражении (1.9) находим, что

$$\sigma'_{xx}(i\omega_n) = \sigma_{xx} + \frac{256\pi T}{\omega_n \sigma_{xx} d} \int \frac{d^d \boldsymbol{p}}{(2\pi)^d}\, p^2 \sum_{ab;\omega_m>0} \Gamma_{ab} \min\{\omega_m, \omega_n\} D_p(\omega_{m+n}) D_p(\omega_m) D_p^{(ab)}(\omega_m). \quad (1.20)$$

Делая аналитическое продолжение на действительные частоты $i\omega_n \to \omega + i0^+$, в пределе $\omega \to 0$ получаем следующее выражение для статической проводимости:

$$\sigma'_{xx} = \sigma_{xx} + \frac{64}{\sigma_{xx} d} \operatorname{Im} \int \frac{d^d \boldsymbol{p}}{(2\pi)^d}\, p^2 \sum_{ab} \Gamma_{ab} \int d\Omega \frac{\partial}{\partial \Omega}\Big(\Omega \operatorname{cth} \frac{\Omega}{2T}\Big) [D_p^R(\Omega)]^2 D_p^{(ab),R}(\Omega). \quad (1.21)$$

Здесь $D_p^R(\Omega)$ и $D_p^{(ab),R}(\Omega)$ запаздывающие функции, соответствующие мацубаровским функциям $D_p(\omega_n)$ и $D_p^{(ab)}(\omega_n)$, соответственно:

$$[D_p^R(\Omega)]^{-1} = p^2 - \frac{16 i \Omega z}{\sigma_{xx}}, \quad [D_p^{(ab),R}(\Omega)]^{-1} = p^2 - \frac{16 i \Omega (z + \Gamma_{ab})}{\sigma_{xx}}. \quad (1.22)$$

Заметим, что результат (1.21) может быть получен также с помощью процедуры фонового поля [10], примененной для действия $\mathcal{S}_\sigma + \mathcal{S}_F$.

Для вычисления физической наблюдаемой z', необходимо вычислить термодинамический потенциал Ω. В однопетлевом приближении находим следующее выражение

$$T^2 \frac{\partial \Omega / T}{\partial T} = 8 N_r T \sum_{\omega_n>0} \omega_n \left[z + \frac{2}{\sigma_{xx}} \sum_{ab} \int \frac{d^d \boldsymbol{p}}{(2\pi)^d} \Big((z + \Gamma_{ab}) D_p^{(ab)}(\omega_n) - z D_p(\omega_n) \Big) \right]. \quad (1.23)$$

С помощью определения (1.10) получаем из уравнения (1.23), что

$$z' = z + \frac{2}{\sigma_{xx}} \sum_{ab} \Gamma_{ab} \int \frac{d^d \boldsymbol{p}}{(2\pi)^d} D_p(0). \quad (1.24)$$

Для нахождения физических наблюдаемых z'_{ab} необходимо вычислить в однопетлевом приближении обобщенную восприимчивость $\chi_{ab}(\omega, \boldsymbol{q})$ при $\omega = 0$ и $q \to 0$. Таким образом, получим

$$z'_{ab} = z_{ab} + \frac{32\pi z_{ab}^2}{\sigma_{xx}^2} \sum_{cd;ef} \left[\mathcal{C}^{ab}_{cd;ef}\right]^2 \int \frac{d^d \boldsymbol{p}}{(2\pi)^d} T \sum_{\omega_m>0} \Big[D_p^{(ef)}(\omega_m) D_p^{(cd)}(\omega_m) - D_p^2(\omega_m) \Big]. \quad (1.25)$$

Как обсуждалось выше, даже в отсутствие члена $\mathcal{S}_{SB}$, понижающего симметрию действия нелинейной сигма-модели, в ситуации общего положения величины z_{ab}, z Γ_{ab} не связаны друг с другом. Поэтому перенормировка величин Γ_{ab} должна находится независимо. Это может быть сделано с помощью процедуры фоновых полей (см. Прил. A.1) [110]. В результате, получаем

$$\Gamma'_{ab} = \Gamma_{ab} - \frac{1}{8\sigma_{xx}} \int \frac{d^d \boldsymbol{p}}{(2\pi)^d} D_p(0) \sum_{cd;ef} \Gamma_{cd} \big[\mathrm{sp}(t_{cd} t_{ef} t_{ab})\big]^2 - \frac{32\pi T}{\sigma_{xx}^2} \sum_{\omega_m>0} \int \frac{d^d \boldsymbol{p}}{(2\pi)^d} \sum_{cd;ef} \big[\mathcal{C}^{ab}_{cd;ef}\big]^2 \times$$
$$\times \Big\{ \Gamma_{ab}^2 D_p^2(\omega_m) - \Big[\Gamma_{cd}\Gamma_{ef} + \Gamma_{ab}^2 - 2\Gamma_{ab}\Gamma_{cd}\Big] D_p^{(cd)}(\omega_m) D_p^{(ef)}(\omega_m) \Big\}. \tag{1.26}$$

Здесь sp обозначает след по спиновым и изоспиновым индексам.

Выражения (1.21)-(1.26) полностью описывают однопетлевые перенормировки в действии (1.1) на масштабах $L \ll \min\limits_{ab} \sqrt{\sigma_{xx}/(z_{ab}\Delta_{ab})}$.

1.2.5 Уравнения ренормализационной группы в однопетлевом приближении

Выражения (1.21)-(1.26) позволяют найти уравнения ренормализационной группы в однопетлевом приближении. Обычно эти уравнения пишутся для зависимости от масштаба перенормированных параметров σ_{xx}, Γ_{ab} и z, стоящих в действии. Например, уравнения ренормализационной группы могут быть получены с помощью схемы минимального вычитания из требования, чтобы физические наблюдаемые σ'_{xx}, Γ'_{ab} и z' не содержали расходимостей при $\epsilon \to 0$ в размерности $d = 2+\epsilon$ [10]. Совершенно аналогичные уравнения ренормализационной группы могут быть записаны для физических наблюдаемых (см. Прил. A.2). Поэтому в дальнейшем в однопетлевых уравнениях ренормализационной группы у физических наблюдаемых будем опускать знак штриха для краткости. В этой главе нас будет интересовать случай размерности $d = 2$. В этом случае однопетлевые уравнения ренормализационной группы, которые определяют поведение физических наблюдаемых с изменением масштаба L при $T = 0$, имеют вид:

$$\frac{d\sigma_{xx}}{dy} = -\frac{2}{\pi}\left[2 + \sum_{ab} f(\Gamma_{ab}/z)\right], \qquad f(x) = 1 - \frac{1+x}{x}\ln(1+x)$$
$$\frac{d\Gamma_{ab}}{dy} = -\frac{1}{2\pi\sigma_{xx}} \sum_{cd;ef} \left[\big[\mathrm{sp}(t_{cd} t_{ef} t_{ab})\big]^2 \frac{\Gamma_{cd}}{8} + \big[\mathcal{C}^{ab}_{cd;ef}\big]^2 \left(\frac{\Gamma_{ab}^2}{z} - \frac{(\Gamma_{ab}-\Gamma_{cd})(\Gamma_{ab}-\Gamma_{ef})}{\Gamma_{cd}-\Gamma_{ef}} \ln\frac{z+\Gamma_{cd}}{z+\Gamma_{ef}} \right) \right],$$
$$\frac{dz}{dy} = \frac{1}{\pi\sigma_{xx}} \sum_{ab} \Gamma_{ab}. \tag{1.27}$$

Здесь $y = \ln L/l$. Уравнения (1.27) описывают поведение физических наблюдаемых на масштабах $L \ll \min\limits_{ab} \sqrt{\sigma_{xx}/(z_{ab}\Delta_{ab})}$ при $T = 0$. Уравнения (1.27) были впервые получены в работе [114] и обобщают известные результаты [63, 82] на случай электронной системы со спиновыми и изоспиновыми степенями свободы с учётом разных параметров взаимодействия Γ_{ab}. Согласно этим уравнениям ситуация, когда совпадают все Γ_{ab} кроме Γ_{00}, оказывается неустойчивой (см. Прил. А.3). Как показано в следующих разделах, различные значения Γ_{ab} действительно реализуются в электронных системах со спиновыми и изоспиновыми степенями свободы и приводят к ряду новых эффектов по сравнению со стандартной ситуацией [63, 82], когда все Γ_{ab} кроме Γ_{00} одинаковы.

В квадратные скобки в правой части ренормгруппового уравнения для σ_{xx} добавлена 2, которая описывает вклад от куперонов в слабую локализацию. Как хорошо известно [54, 111, 112], этот вклад не зависит от наличия членов $\mathcal{S}_{SB}$, понижающих симметрию действия нелинейной сигма-модели [14]. Напомним, что слаболокализационная поправка обрезается слабым орбитальным магнитным полем $B \gtrsim 1/D\tau_\phi$.

Вообще говоря, купероны также приводят к поправкам от взаимодействия в куперовском канале для проводимости и параметров взаимодействия. Для двумерной электронной системы с неэкранированным кулоновским взаимодействием, взаимодействие в куперовском канале, как правило, отталкивательное и перенормируется в нуль [63]. Более того, относительно слабое орбитальное магнитное поле $B \gtrsim T/D$ подавляет соответствующие вклады [113].

С помощью выражения (1.25) можно найти однопетлевые уравнения ренормализационной группы для наблюдаемых z_{ab} [114]:

$$\frac{dz_{ab}}{dy} = \frac{z_{ab}^2}{2\pi\sigma_{xx}} \sum_{cd;ef} \left[\mathcal{C}^{ab}_{cd;ef}\right]^2 \left[\frac{1}{\Gamma_{cd} - \Gamma_{ef}} \ln\frac{z + \Gamma_{cd}}{z + \Gamma_{ef}} - \frac{1}{z}\right]. \tag{1.28}$$

Как видно из уравнений (1.27), в общем случае подстановка $z_{ab} = z + \Gamma_{ab}$ не решает уравнение (1.28).

Строго говоря, уравнения ренормализационной группы описывают поведение наблюдаемых при $T = 0$ с изменением размера системы L. При конечной температуре T ожидается, что температурное поведение физических наблюдаемых может быть найдено из интегрирования ренормгрупповых уравнений до масштаба L_{in}, определяющегося температурой. Вообще говоря, существование однозначной связи температуры T и длины можно

[14]Строго говоря, это справедливо, если нет упругого рассеяния с переворотами спина или изоспина, приводящих к появлению в действии членов вида $\mathrm{tr}[\Sigma, Q]^2$, где вид матрицы Σ определяется конкретной задачей.

ожидать только вблизи фиксированных точек, описывающих переход металл-изолятор. В области хорошего металла $\sigma_{xx} \gg 1$ ситуация оказывается более сложной. При конечной температуре однопетлевые уравнения ренормгруппы (1.27) справедливы до масштаба $L_T = \sqrt{\sigma_{xx}/(zT)}$. После этого масштаба и до масштаба $L_\phi = \sqrt{\sigma_{xx}\tau_\phi/z}$ проводимость меняется только за счёт слаболокализационной поправки (цифра 2 в квадратных скобках в правой части первого уравнения в (1.27)).

В заключение отметим, что случай, когда все параметры взаимодействия кроме Γ_{00} одинаковы, оказывается неустойчивым и для однодолинной системы. Однако, на данный момент не известно как в однодолинной системе реализовать случай с разными значениями параметрами взаимодействия.

1.3 Взаимное влияние спина и долинного изоспина в двумерной неупорядоченной электронной жидкости

1.3.1 Введение

В этом разделе уравнение (1.27) будут применены к описанию зависимости сопротивления, спиновой и долинной восприимчивости от температуры в двумерной электронной системе в Si-МОП структуре. Ниже будем считать, что к Si-МОП структуре приложено параллельное магнитное поле B, создающее зеемановское расщепление $\Delta_s = g_L \mu_B B$. Здесь g_L и μ_B обозначают g-фактор и магнетон Бора, соответственно. Также будем считать, что в рассматриваемой двухдолинной электронной системе существует междолинное расщепление Δ_v и конечное время рассеяния между долинами τ_v. Будем предполагать, что выполняются следующие соотношения $\tau_{so}^{-1}, \tau_v^{-1} \ll \Delta_v \ll \tau_{\mathrm{tr}}^{-1}$, где τ_{so} – это время спиновой релаксации за счет спин-орбитального взаимодействия. Экспериментальные результаты работ [84, 85] указывают на то, что такие соотношения между параметрами выполняются в Si-МОП структурах при электронных концентрациях близких к тем, при которых наблюдается переход от металлической к диэлектрической температурной зависимости сопротивления (см. Рис. 1.1). Также будем предполагать, что зеемановское расщепление удовлетворяет неравенству $\Delta_v \ll \Delta_s \ll \tau_{\mathrm{tr}}^{-1}$.

1.3.2 Микроскопический гамильтониан

Для рассмотрения двумерной неупорядоченной электронной жидкости в системе с двумя долинами, которая реализуется в Si(001)-МОП структуре, удобно представить оператор уничтожения электрона с проекцией спина $\sigma/2$ на ось z в виде [115, 116]:

$$\psi_\sigma(\boldsymbol{R}) = \sum_{\tau=\pm} \psi^\sigma_\tau(\boldsymbol{r})\varphi(z)[e^{izQ/2} + \tau e^{-izQ/2}]/\sqrt{2}, \tag{1.29}$$

где ось z выбрана перпендикулярной двумерной плоскости (001), $\boldsymbol{r}$ – координатный вектор в плоскости, а $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{r} + z\boldsymbol{e_z}$. Индекс $\tau = \pm 1$ нумерует долины, а ψ^σ_τ обозначает оператор уничтожения электрона с проекциями спина $\sigma/2$ и изоспина $\tau/2$. Удобно выбрать огибающую функцию $\varphi(z)$ нормированной. В дальнейшем будем пренебрегать малым перекрытием $\int dz\, \varphi^2(z)\sin(Qz)$. Вектор $\boldsymbol{Q} = (0, 0, Q)$ соответствует кратчайшему расстоянию между долинными минимумами в обратном пространстве. Его величина $Q \sim a_{\mathrm{lat}}^{-1}$, где a_{lat} – это постоянная решетки [66].

Рассматриваемая электронная система описывается следующей большой канонической статистической суммой:

$$Z = \int \mathcal{D}[\bar\psi, \psi] \exp S[\bar\psi, \psi], \tag{1.30}$$

где действие в мнимом времени ($\beta = 1/T$) имеет вид

$$S = -\int\limits_0^\beta dt \left\{ \int d\boldsymbol{r} \bar\psi^\sigma_\tau(\boldsymbol{r}, t)\left[\partial_t + \mathcal{H}_0\right]\psi^\sigma_\tau(\boldsymbol{r}, t) - \mathcal{L}_{\mathrm{dis}} - \mathcal{L}_{\mathrm{int}} \right\}. \tag{1.31}$$

Одночастичный гамильтониан

$$\mathcal{H}_0 = -\frac{\nabla^2}{2m_e} - \mu + \frac{\Delta_s}{2}\sigma + \frac{\Delta_v}{2}\tau \tag{1.32}$$

описывает двумерную квазичастицу с массой m_e в присутствие параллельного магнитного поля, индуцирующего зеемановское расщепление $\Delta_s = g\mu_B B$, и междолинного расщепления Δ_v. Здесь, как обычно, μ обозначает химический потенциал. Лагранжиан

$$\mathcal{L}_{\mathrm{dis}} = -\int d\boldsymbol{r}\, \bar\psi^\sigma_{\tau_1}(\boldsymbol{r}) V_{\tau_1\tau_2}(\boldsymbol{r}) \psi^\sigma_{\tau_2}(\boldsymbol{r}) \tag{1.33}$$

описывает рассеяние электронов на случайном потенциале $V(\boldsymbol{R})$. Матричные элементы случайного потенциала имеют вид

$$V_{\tau_1\tau_2}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{2}\int dz\, V(\boldsymbol{R})\varphi^2(z)\Big[1 + \tau_1\tau_2 + \tau_1 e^{izQ} + \tau_2 e^{-izQ}\Big]. \tag{1.34}$$

В общем случае матричные элементы $V_{\tau_1\tau_2}(\boldsymbol{r})$ приводят не только к рассеянию внутри одной долины, но и к междолинному рассеянию. В дальнейшем будем считать распределение случайного потенциала $V(\boldsymbol{R})$ гауссовым, причем

$$\langle V(\boldsymbol{R})\rangle = 0, \quad \langle V(\boldsymbol{R}_1)V(\boldsymbol{R}_2)\rangle = W(|\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2|, |z_1-z_2|). \tag{1.35}$$

Здесь функция W убывает на типичном расстоянии d_W. Если d_W больше, чем эффективная толщина двумерной электронной системы $[\int dz\, \varphi^4(z)]^{-1}$, $d_W \gg [\int dz\, \varphi^4(z)]^{-1}$, то тогда можно пренебречь зависимостью от z в $V(\boldsymbol{R})$ под знаком интегрирования в уравнении (1.34). В этом случае, остается только внутридолинное рассеяние:

$$\langle V_{\tau_1\tau_2}(\boldsymbol{r})V_{\tau_3\tau_4}(0)\rangle = W(|\boldsymbol{r}|, 0)\delta_{\tau_1\tau_2}\delta_{\tau_3\tau_4}. \tag{1.36}$$

В противоположном случае, $d_W \ll [\int dz\, \varphi^4(z)]^{-1}$, получаем [84]

$$\begin{aligned}\langle V_{\tau_1\tau_2}(\boldsymbol{r})V_{\tau_3\tau_4}(0)\rangle = \int dz\, \varphi^4(z)\Big\{\delta_{\tau_1\tau_2}\delta_{\tau_3\tau_4}\Big[\widetilde{W}(|\boldsymbol{r}|, 0) + \tau_1\tau_3\widetilde{W}(|\boldsymbol{r}|, Q)/2\Big] \\ + \Big[\delta_{\tau_1\tau_4}\delta_{\tau_2\tau_3} - \delta_{\tau_1\tau_3}\delta_{\tau_2\tau_4}\Big]\widetilde{W}(|\boldsymbol{r}|, Q)/2\Big\},\end{aligned} \tag{1.37}$$

где $\widetilde{W}(|\boldsymbol{r}|, Q) = \int dz\, W(|\boldsymbol{r}|, |z|)\exp(iQz)$. Последний член в уравнении (1.37) соответствует времени междолинного рассеяния $1/\tau_v$. Предполагая, что $Q^{-1} \ll d_W$, можно пренебречь междолинным рассеянием по сравнению с внутридолинным, частота которого равна $1/\tau_i \sim \widetilde{W}(r, 0)$. Также будем считать, что электронная концентрация достаточно низкая, и выполняется условие $n_e d_W^2 \ll 1$. Тогда уравнения (1.36) и (1.37) приводят к следующему выражению

$$\langle V_{\tau_1\tau_2}(\boldsymbol{r}_1)V_{\tau_3\tau_4}(\boldsymbol{r}_2)\rangle = \frac{1}{2\pi\nu_\star\tau_i}\delta_{\tau_1\tau_2}\delta_{\tau_3\tau_4}\delta(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2), \tag{1.38}$$

$$\frac{1}{\tau_i} = 2\pi\nu_\star \int d^2\boldsymbol{r} dz_1 dz_2\, W(|\boldsymbol{r}|, |z_1-z_2|)\varphi^2(z_1)\varphi^2(z_2),$$

$$Q^{-1} \ll d_W, \ \left[\int \varphi^4(z) dz\right]^{-1} \ll n_e^{-1/2}. \tag{1.39}$$

При выполнении условий (1.39), гамильтониан, описывающий взаимодействие электронов, инвариантен при глобальных $SU(4)$ вращениях электронных операторов ψ_τ^σ в пространстве спина и изоспина:

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = -\frac{1}{2}\int d\boldsymbol{r}_1 d\boldsymbol{r}_2\, \bar{\psi}_{\tau_1}^{\sigma_1}(\boldsymbol{r}_1)\psi_{\tau_1}^{\sigma_1}(\boldsymbol{r}_1)U(|\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2|)\bar{\psi}_{\tau_2}^{\sigma_2}(\boldsymbol{r}_2)\psi_{\tau_2}^{\sigma_2}(\boldsymbol{r}_2). \tag{1.40}$$

Здесь $U(r) = e^2/\epsilon r$, где ϵ – это постоянная диэлектрического слоя. Низкоэнергетическая часть (на энергиях $|\varepsilon| \lesssim 1/\tau_{\rm tr}$) лагранжиана $\mathcal{L}_{\rm int}$ может быть записана в виде (см., например [63, 64, 53])

$$\mathcal{L}_{\rm int} = \frac{1}{4\nu_\star}\int' \frac{d\boldsymbol{q}}{(2\pi)^2}\sum_{a,b=0}^{3}\mathbb{F}_{ab}(q)m^{ab}(\boldsymbol{q})m^{ab}(-\boldsymbol{q}),\ m^{ab}(\boldsymbol{q}) = \int\frac{d\boldsymbol{k}}{(2\pi)^2}\bar{\boldsymbol{\psi}}(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q})t_{ab}\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{k}). \quad (1.41)$$

Здесь $\bar{\boldsymbol{\psi}} = \{\bar{\psi}^+_+, \bar{\psi}^-_+, \bar{\psi}^+_-, \bar{\psi}^-_-\}$, $\boldsymbol{\psi} = \{\psi^+_+, \psi^-_+, \psi^+_-, \psi^-_-\}^T$, а знак штриха у интеграла означает, что интегрирование по q ограничено условием $ql \lesssim 1$. Напомним, что 16 матриц $t_{ab} = \boldsymbol{\tau}_a\otimes\boldsymbol{\sigma}_b$ являются генераторами группы $SU(4)$. Матрица параметров взаимодействия имеет вид

$$\mathbb{F}(q) = \begin{pmatrix} F_s & F_t & F_t & F_t \\ F_t & F_t & F_t & F_t \\ F_t & F_t & F_t & F_t \\ F_t & F_t & F_t & F_t \end{pmatrix}, \quad (1.42)$$

где

$$F_t = -\frac{\nu_\star}{2}\langle U^{\rm scr}(0)\rangle_{FS}, \qquad F_s = \nu_\star U(q) + F_t. \quad (1.43)$$

Величина F_t – это стандартный ферми-жидкостной параметр взаимодействия в триплетном канале. В приближении случайных фаз, его величина определяется статической частью динамически экранированного взаимодействия

$$U^{\rm scr}(q,\omega) = \frac{U(q)}{1+U(q)\Pi(q,\omega)}, \qquad \Pi(q,\omega) = \nu_\star\frac{Dq^2}{Dq^2 - i\omega}, \quad (1.44)$$

усредненной по ферми-поверхности:

$$\langle U^{\rm scr}(0)\rangle_{FS} = \int\limits_0^{2\pi}\frac{d\theta}{2\pi}U^{\rm scr}(2k_F\sin(\theta/2), 0). \quad (1.45)$$

Подчеркнём, что здесь k_F – это импульс Ферми для электронов в одной долине. Параметр взаимодействия F_s содержит кулоновское взаимодействие на малом импульсе. В пределе $q \to 0$, $F_s(q) \approx \varkappa/q \to \infty$, где $\varkappa = 2\pi e^2\nu_\star/\epsilon$. Напомним известные результаты для параметра взаимодействия F_t [53]:

$$F_t = -\int\limits_0^{2\pi}\frac{d\theta}{4\pi}\frac{\varkappa}{2k_F\sin(\theta/2)+\varkappa} = -\frac{1}{2\pi}\mathcal{G}_0(\varkappa/2k_F), \quad \mathcal{G}_0(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\ln\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{1-\sqrt{1-x^2}}. \quad (1.46)$$

В пределе $x \to 0$ функция $\mathcal{G}_0(x)$ имеет следующий асимптотический вид

$$\mathcal{G}_0(x) \approx x \ln(2/x), \qquad x \ll 1. \tag{1.47}$$

Для применимости приближения случайных фаз, использованного при выводе выражения (1.44), необходимо выполнение условия $\varkappa/k_F \ll 1$.

1.3.3 Уравнения ренормгруппы в однопетлевом приближении: $SU(4)$ симметричный случай

В действии (1.3) амплитуды взаимодействия Γ_{ab} связаны с параметрами взаимодействия F_{ab} соотношениями (1.4). Удобно ввести следующее обозначение:

$$\gamma_t = -F_t/(1+F_t). \tag{1.48}$$

Тогда для всех Γ_{ab} кроме Γ_{00} выполняется соотношение $\Gamma_{ab} = z\gamma_t$, а $\Gamma_{00} = -z$. Таким образом, на высоких энергиях $|\varepsilon| \sim 1/\tau_{\rm tr}$ и на малых масштабах $L \sim l$, межэлектронное взаимодействие в Si-МОП структуре не различает в какой из двух долин находятся электроны.

Наличие в гамильтониане (1.32) зеемановского Δ_s и междолинного Δ_v расщеплений приводит к появлению в действии (1.1) членов (1.6), понижающих симметрию. На малых масштабах $L \ll L_{s,v}$, где $L_{s,v} = \sqrt{\sigma_{xx}/(16 z_{s,v}\Delta_{s,v})}$, причём [15] $z_{s,v} = z(1+\gamma_t)$ или, эквивалентно, при высоких температурах $T \gg \Delta_{s,v}$ член (1.6), нарушающий $SU(4)$ симметрию, не важен.

Используя общие однопетлевые уравнения ренормализационной группы (1.27), получаем хорошо известные результаты для двухдолинной электронной системы [82]:

$$\frac{d\sigma_{xx}}{dy} = -\frac{2}{\pi}\left[2+1+15 f(\gamma_t)\right], \tag{1.49}$$

$$\frac{d\gamma_t}{dy} = \frac{(1+\gamma_t)^2}{\pi\sigma_{xx}}, \tag{1.50}$$

$$\frac{d\ln z}{dy} = \frac{15\gamma_t - 1}{\pi\sigma_{xx}}. \tag{1.51}$$

Решение ренормгрупповых уравнений (1.49)-(1.50) приводит к зависимости сопротивления $\rho = 1/\pi\sigma_{xx}$ от y металлического типа (ρ уменьшается при больших значениях y), причём ρ проходит один раз через максимум при значении y, соответствующем значению $\gamma_t \approx 0.46$ [82]. Параметр взаимодействия γ_t монотонно возрастает с увеличением y.

[15] Эти соотношения следуют из уравнения (1.17) и связаны с сохранением полного спина и изоспина.

1.3.4 Уравнения ренормгруппы в однопетлевом приближении: случай симметрии $SU(2)\times SU(2)$

Будем считать, что выполняется условие $\Delta_s \gg \Delta_v$. Тогда, имеет смысл рассматривать поведение электронной системы на промежуточных масштабах $L_s \ll L \ll L_v$. На этих масштабах понижающий симметрию член вида (1.6) с $\Delta_{03} = \Delta_s$ становится важным. Если представить матрицу Q в виде $Q = \sum_{ab} t_{ab}Q_{ab}$, то как видно из уравнения (1.18), моды Q_{ab} с $b = 1, 2$ становятся массивными и больше не приводят к логарифмическим расходимостям на масштабах $L_s \ll L \ll L_v$. Таким образом, на этих масштабах действие нелинейной сигма-модели определяется выражениями (1.2) и (1.3), в которых матрица Q имеет вид

$$Q = \sum_{a=0}^{3} \sum_{b=0,3} t_{ab}Q_{ab}. \tag{1.52}$$

Заметим, что если ввести матрицы $Q_\pm = (t_{00} \pm t_{03})Q/2$, то без учёта электрон-электронного взаимодействия для них будет две независимые нелинейные сигма-модели.

Наличие сильного зеемановского расщепления делает возможным различать взаимодействие электронов с одной и той же проекцией спина, и электронов с разными проекциями спина. Это приводит, к следующему виду матрицы $\mathbf{\Gamma}$:

$$\mathbf{\Gamma} = \begin{pmatrix} \Gamma_s & 0 & 0 & \tilde{\Gamma}_t \\ \Gamma_t & 0 & 0 & \Gamma_t \\ \Gamma_t & 0 & 0 & \Gamma_t \\ \Gamma_t & 0 & 0 & \Gamma_t \end{pmatrix}. \tag{1.53}$$

Здесь амплитуда $(\Gamma_s + \tilde{\Gamma}_t)$ описывает взаимодействие электронов с одинаковыми проекциями спина, а амплитуда $(\Gamma_s - \tilde{\Gamma}_t)$ – взаимодействие электронов с разными спинами.

Как и в полностью симметричном случае, требование инвариантности действия (1.3) относительно глобального поворота (1.7) с $\chi_{ab} = \chi\delta_{a0}\delta_{b0}$ приводит к условию $\Gamma_s = -z$. Сохранение полного изоспина приводит к соотношению $z_v = z + \Gamma_t$, которое выполнялось и в полностью симметричном случае. Сохранение z-компоненты спина приводит к тому, что $z_s = z+\tilde{\Gamma}_t$. Так как перенормировка спиновой восприимчивости, которая определяется величиной z_s, происходит только из-за взаимодействия массивных диффузных мод (с $S_z = \pm 1$ в канале частица-дырка), то логарифмических расходимостей на масштабах $L_s \ll L \ll L_v$ не возникает. Поэтому на этих масштабах

$$\frac{dz_s}{dy} = \frac{d(\Gamma_s - \tilde{\Gamma}_t)}{dy} = 0. \tag{1.54}$$

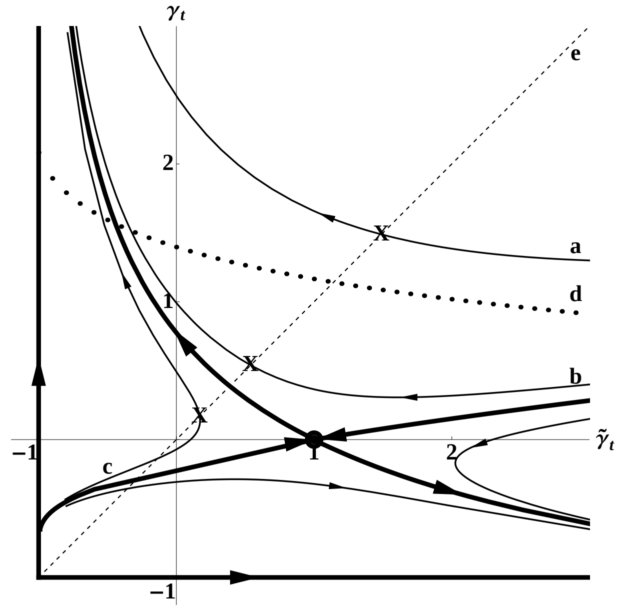

Рисунок 1.3: Проекция ренормгруппового потока (1.55)-(1.57) в трёхмерном пространстве $(\sigma_{xx}, \tilde{\gamma}_t, \gamma_t)$ на плоскость $(\tilde{\gamma}_t, \gamma_t)$. Пунктирная кривая d определяется решениями уравнения $2 + 1 + 6f(\gamma_t) + f(\tilde{\gamma}_t) = 0$. Штриховая линия e соответствует уравнению $\gamma_t = \tilde{\gamma}_t$.

Подчеркнём, что величины z_v и z_s, имеющие одинаковое ренормгрупповое поведение на малых масштабах $L \ll L_s \ll L_v$, должны вести себя по-разному на промежуточных масштабах $L_s \ll L \ll L_v$. Именно это и приводит к необходимости появления амплитуды $\tilde{\Gamma}_t$, имеющей, как будет показано ниже, отличное от Γ_t ренормгрупповое поведение.

Используя общие выражения (1.27), получаем однопетелевые уравнения ренормализационной группы на промежуточных масштабах $L_s \ll L \ll L_v$ $(\tilde{\gamma}_t = \tilde{\Gamma}_t/z)$:

$$\frac{d\sigma_{xx}}{dy} = -\frac{2}{\pi}\left[2 + 1 + 6f(\gamma_t) + f(\tilde{\gamma}_t)\right], \tag{1.55}$$

$$\frac{d\gamma_t}{dy} = \frac{1+\gamma_t}{\pi\sigma_{xx}}(1 + 2\gamma_t - \tilde{\gamma}_t), \tag{1.56}$$

$$\frac{d\tilde{\gamma}_t}{dy} = \frac{1+\tilde{\gamma}_t}{\pi\sigma_{xx}}(1 - 6\gamma_t - \tilde{\gamma}_t), \tag{1.57}$$

$$\frac{d\ln z}{dy} = -\frac{1}{\pi\sigma_{xx}}\left(1 - 6\gamma_t - \tilde{\gamma}_t\right). \tag{1.58}$$

Здесь $y = \ln L/l_s$, где масштаб l_s порядка L_s. Точное вычисление связи между l_s и L_s требует аккуратного описания поведения $\sigma_{xx}, \gamma_t, \tilde{\gamma}_t$ и z на масштабах L порядка L_s, что представляет собой отдельную (кроссоверную) задачу (см., например [10]). В дальнейшем естественно считать, что в начале значения γ_t и $\tilde{\gamma}_t$ одинаковы: $\tilde{\gamma}_t(0) = \gamma_t(0)$. Уравнения (1.55)-(1.58) были впервые получены в работе [117].

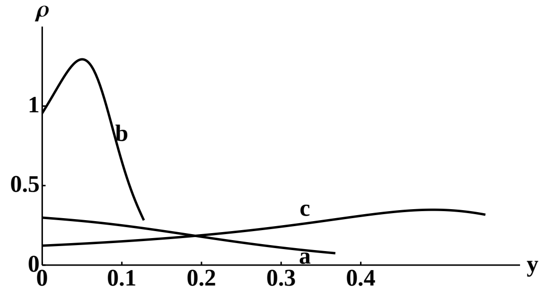

Рисунок 1.4: Зависимость сопротивления $\rho = 1/(\pi\sigma_{xx})$ от y. Начальные условия для кривых a, b, и c соответствуют пересечению кривых a, b, и c с линией e (точки X) на Рис. 1.3.

На рисунке 1.3 представлен ренормгрупповой поток в координатах $(\tilde{\gamma}_t, \gamma_t)$. Есть неустойчивая фиксированная точка при $\tilde{\gamma}_t = 1$ и $\gamma_t = 0$. Однако, в двухдолинной электронной системе эта фиксированная точка недостижима, так как ренормгрупповой поток начинается около $\gamma_t = \tilde{\gamma}_t > 0$. Как показано на рисунке 1.4, возможно два различных типа поведения сопротивления ρ как функции масштаба y. Вдоль кривой a (см. Рис. 1.3), которая не пересекает кривую d, отвечающую уравнению $2 + 1 + 6f(\gamma_t) + f(\tilde{\gamma}_t) = 0$, сопротивление имеет зависимость металлического типа: ρ монотонно уменьшается при увеличении y. Если двигаться вдоль кривых b или c, которые пересекают кривую d один раз, сопротивление проходит через максимум. Интересно, что во всех случаях поведение сопротивления на больших масштабах имеет металлический тип. Причина такого поведения может быть легко объяснена. При больших значениях y параметр γ_t растёт, тогда как $\tilde{\gamma}_t$ стремится к -1. В этом пределе электроны с разными проекциями спина становятся совершенно независимы, и уравнения (1.55)-(1.58) превращаются в уравнения для однодолинной электронной системы с проводимостью равной $\sigma_{xx}/2$. Хорошо известно [63], что в такой ситуации однопетлевые уравнения ренормгруппы приводят к металлическому поведению сопротивления.

1.3.5 Уравнения ренормгруппы в однопетлевом приближении: полностью несимметричный случай

На больших расстояниях $L \gg L_v \gg L_s$ понижающий симметрию член вида (1.6) с $\Delta_{30} = \Delta_v$ также становится важным. Из восьми мод Q_{ab} с $a = 0, 1, 2, 3$ и $b = 0, 3$, которые были безмассовыми на промежуточных масштабах $L_s \ll L \ll L_v$, на больших масштабах $L \gg L_v \gg L_s$ безмассовыми остаются только четыре: Q_{00}, Q_{03}, Q_{30} и Q_{33}. Таким образом, на этих масштабах действие нелинейной сигма-модели определяется выражениями (1.2) и

(1.3), в которых матрица Q имеет вид

$$Q = \sum_{a,b=0,3} t_{ab} Q_{ab}. \tag{1.59}$$

Заметим, что если ввести четыре матрицы $Q_s^{s'} = (t_{00} + st_{03} + s't_{30} + ss't_{33})Q/4$, где $s, s' = \pm$, то без учёта электрон-электронного взаимодействия для них будет четыре независимые нелинейные сигма-модели.

Вообще говоря, наличие сильных зеемановского и междолинного расщеплений делает возможным различать взаимодействие электронов с одинаковыми и разными проекциями спина и изоспина. Это приводит, к следующему виду матрицы $\mathbf{\Gamma}$:

$$\mathbf{\Gamma} = \begin{pmatrix} \Gamma_s & 0 & 0 & \tilde{\Gamma}_t \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \Gamma_t & 0 & 0 & \hat{\Gamma}_t \end{pmatrix}. \tag{1.60}$$

Здесь $(\Gamma_s + s\tilde{\Gamma}_t + s'\Gamma_t + ss'\hat{\Gamma}_t)/4$ описывает взаимодействие электронов с проекцией спина s и изоспина s'.

Как и в предыдущем случае, требование инвариантности действия (1.3) относительно глобального поворота (1.7) с $\chi_{ab} = \chi\delta_{a0}\delta_{b0}$ приводит к условию $\Gamma_s = -z$. Сохранение z-проекции изоспина приводит к соотношению $z_v = z + \Gamma_t$, которое выполнялось и на промежуточных масштабах $L_s \ll L \ll L_v$. Сохранение z-компоненты спина приводит к тому, что $z_s = z + \tilde{\Gamma}_t$. Аналогично спиновой восприимчивости, на масштабах $L \gg L_v \gg L_s$ долинная восприимчивость перестаёт перенормироваться. По аналогии со спиновой и долинной восприимчивостью можно формально ввести ещё спин-долинную восприимчивость, которая описывает отклик на расщепление Δ_{33}. Её статическая часть будет определяться величиной $z_{sv} = z + \hat{\Gamma}_t$. Можно убедится, что на масштабах $L \gg L_v \gg L_s$ величина z_{sv} не перенормируется. Таким образом, выполняются следующие соотношения

$$\begin{aligned} \frac{dz_v}{dy} &= \frac{d(\Gamma_t - \Gamma_s)}{dy} = 0, \\ \frac{dz_s}{dy} &= \frac{d(\tilde{\Gamma}_t - \Gamma_s)}{dy} = 0, \\ \frac{dz_{sv}}{dy} &= \frac{d(\hat{\Gamma}_t - \Gamma_s)}{dy} = 0. \end{aligned} \tag{1.61}$$

Так как параметры взаимодействия $\hat{\Gamma}_t$ и Γ_t совпадают на масштабах $L \sim L_v$, а на бóльших масштабах перенормируются одинаковым образом, то естественно считать их равными: $\hat{\Gamma}_t \equiv \Gamma_t$.

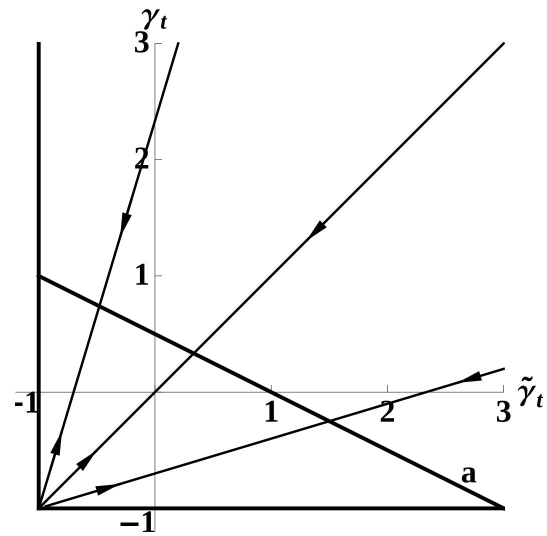

Рисунок 1.5: Проекция ренормгруппового потока (1.62)-(1.64) в трёхмерном пространстве $(\sigma_{xx}, \tilde{\gamma}_t, \gamma_t)$ на плоскость $(\tilde{\gamma}_t, \gamma_t)$. Прямая линия a задается уравнения $2\gamma_t + \tilde{\gamma}_t = 1$.

Используя общие выражения (1.27), получаем однопетелевые уравнения ренормализационной группы на больших масштабах $L \gg L_v \gg L_s$:

$$\frac{d\sigma_{xx}}{dy} = -\frac{2}{\pi}\left[2 + 1 + 2f(\gamma_t) + f(\tilde{\gamma}_t)\right], \tag{1.62}$$

$$\frac{d\gamma_t}{dy} = \frac{1+\gamma_t}{\pi\sigma_{xx}}(1 - 2\gamma_t - \tilde{\gamma}_t), \tag{1.63}$$

$$\frac{d\tilde{\gamma}_t}{dy} = \frac{1+\tilde{\gamma}_t}{\pi\sigma_{xx}}(1 - 2\gamma_t - \tilde{\gamma}_t), \tag{1.64}$$

$$\frac{d\ln z}{dy} = -\frac{1}{\pi\sigma_{xx}}\left[1 - 2\gamma_t - \tilde{\gamma}_t\right]. \tag{1.65}$$

Заметим, что здесь $y = \ln L/l_v$, где масштаб l_v порядка L_v. Уравнения (1.62)-(1.58) были впервые получены в работе [117].

Ренормгрупповой поток, соответствующий уравнениям (1.62)-(1.64), на плоскости $(\gamma_t, \tilde{\gamma}_t)$ показан на рисунке 1.4. Существует линия фиксированных точек, описываемая уравнением $2\gamma_t+\tilde{\gamma}_t = 1$. Линии ренормгруппового потока в плоскости $(\gamma_t, \tilde{\gamma}_t)$ представляют собой прямые, описываемые уравнениями: $(1+\tilde{\gamma}_t)/(1+\gamma_t) = \text{const}$. Кривая, соответствующая уравнению $2+1+2f(\gamma_t)+f(\tilde{\gamma}_t) = 0$, проходит в области достаточно больших значений γ_t и $\tilde{\gamma}_t$. Поэтому, если при $y = 0$ значение этих параметров не велико, сопротивление $\rho(y)$ будет монотонно увеличиваться при увеличении y, т.е. будет диэлектрического типа.

Таблица 1.1: Диапозоны температур, в которых применимы уравнения ренормализационной группы (1.49)-(1.50), (1.55)-(1.57) и (1.62)-(1.64).

Уравнение	$\Delta_s = 0$	$\Delta_s \gg \Delta_v$
(1.49)-(1.50)	$\Delta_s \ll T \ll 1/\tau_{\mathrm{tr}}$	$\Delta_s \ll T \ll 1/\tau_{\mathrm{tr}}$
(1.55)-(1.57)	$1/\tau_v \ll T \ll \Delta_v$	$\Delta_v \ll T \ll \Delta_s$
(1.62)-(1.64)		$1/\tau_v \ll T \ll \Delta_v$

1.3.6 Обсуждение результатов

С оговорками сделанными в конце раздела 1.2.5 будем считать, что уравнения ренормализационной группы (1.49)-(1.50), (1.55)-(1.57) и (1.62)-(1.64) описывают температурное поведение наблюдаемых в соответсвующих интервалах температур, как показано в таблице 1.1.

Рассмотрим сначала случай нулевого зеемановского расщепления ($\Delta_s = 0$). Будем предполагать, что выполняется условие $\Delta_v < T_{\max}^{(I)}$, где $T_{\max}^{(I)}$ – это температура, при которой сопротивление, согласно уравнениям (1.49)-(1.50), имеет максимум [16]. Тогда в зависимости от начальных условий (значений σ_{xx} и γ_t при температуре порядка $1/\tau$) возможны два типа поведения сопротивления с температурой, как показано на рисунке 1.6а. Кривая a представляет типичную зависимость сопротивления от температуры $\rho(T)$, наблюдаемую в транспортных экспериментах на Si-МОП структурах [67]. Интересно, что также возможно другое поведение сопротивления с температурой – зависимость с двумя максимумами (кривая b на Рис. 1.6а). Отметим, что такое поведение $\rho(T)$ экспериментально до сих пор не наблюдалось. Таким образом, в отсутствии зеемановского расщепления при температурах $1/\tau_v \ll T \ll 1/\tau$, металлическое поведение $\rho(T)$ в области низких температур не разрушается наличием конечного междолинного расщепления $\Delta_v \gg 1/\tau_v$. Это находится в согласии с экспериментальными наблюдениями работ [87, 88, 76, 77, 78].

При наличии сравнительно слабого параллельного магнитного поля $\Delta_s < T_{\max}^{(I)}$, возможно три вида поведения $\rho(T)$, проиллюстрированных на рисунке 1.6б. Во всех трёх случаях сопротивление имеет максимум при температуре $T = T_{\max}^{(I)}$ и растёт при уменьшении температуры. Как видно из рисунка 1.4, в области температур между Δ_s и Δ_v, возможно металлическое (кривая a на Рис. 1.6б), диэлектрическое (кривая b на Рис. 1.6б)

[16]Например, для Si-МОП структуры с электронной концентрацией около 10^{11} см$^{-2}$ величина $T_{\max}^{(I)}$ равна нескольким градусам Кельвина.

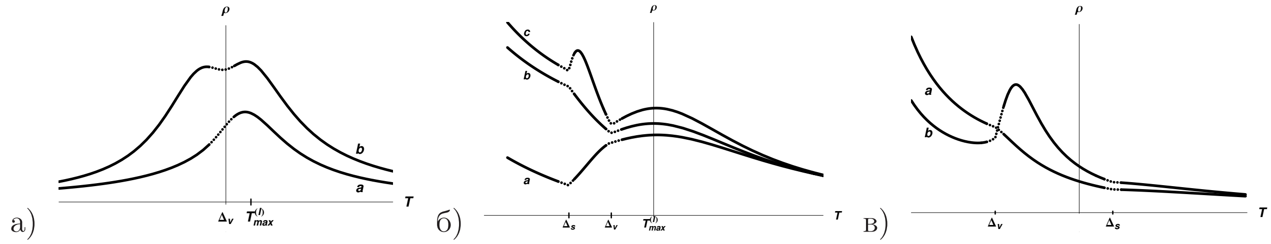

Рисунок 1.6: Схематическая зависимость сопротивления ρ от температуры T в случае а) нулевого зеемановского расщепления, б) $\Delta_s < \Delta_v$, в) сильного магнитного поля: $\Delta_v, T_{\max}^{(I)} < \Delta_s$.

и немонотонное (кривая c на Рис. 1.6б) поведение $\rho(T)$. Как следствие, в присутствии параллельного магнитного поля также возможно существование зависимости $\rho(T)$ с двумя максимами. Таким образом, наличие как междолинного расщепления так и зеемановского расщепления приводит к изменению температурной зависимости сопротивления при низких температурах (больших $1/\tau_v$) с металлической на диэлектрическую в полном согласии с экспериментами [87, 88, 76, 77, 78].

В больших параллельных магнитных полях $\Delta_s > T_{\max}^{(I)}$ точка максимума при $T = T_{\max}^{(I)}$ отсутствует и возможно только два вида зависимости $\rho(T)$, как показано на рисунке 1.6в. Если $T_{\max}^{(II)} < \Delta_v$, то температурная зависимость сопротивления монотонная и диэлектрическая (кривая a на Рис. 1.6в). Здесь $T_{\max}^{(II)}$ обозначает температуру максимума сопротивления как следует из решения уравнений (1.55)-(1.57). В противоположном случае $T_{\max}^{(II)} > \Delta_v$, типичная зависимость сопротивления от температуры показана кривой b на рисунке 1.6в. Поэтому, если междолинное расщепление достаточно большое, $\Delta_v > T_{\max}^{(II)}$, то в параллельных полях таких, что $\Delta_s \sim T_{\max}^{(I)}$, поведение сопротивления должно изменятся с металлического на диэлектрическое. Это находится в согласии с экспериментальными даными для Si-МОП структур [76, 79]. Однако, если междолинное расщепление $\Delta_v < T_{\max}^{(II)}$, то максимум в зависимости $\rho(T)$ остаётся и в присутствии параллельного магнитного поля, смещаясь в сторону более низких температур.

Кроме интересного поведения сопротивления с температурой, развитая в этом разделе теория предсказывает интересное поведение спиновой и долинной восприимчивостей при понижении температуры. Рассмотрим отношение статических восприимчивостей χ_v/χ_s. На рисунке 1.7 схематически представлена зависимость χ_v/χ_s от T при фиксированном значении междолинного расщепления и для разных значений зеемановского расщепления. При высоких температурах, $T \gg \Delta_v, \Delta_s$, отношение восприимчивостей равно единице,

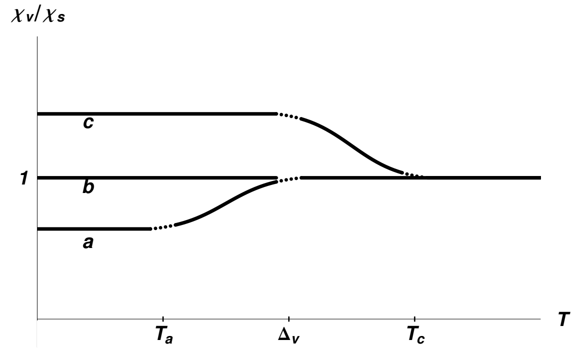

Рисунок 1.7: Схематическая зависимость отношения χ_v/χ_s от температуры для случая $\Delta_s < \Delta_v$ (кривая a), для $\Delta_s = \Delta_v$ (кривая b), и для $\Delta_s > \Delta_v$ (кривая c). Характерные температурные масштабы $T_{a,c} \equiv \Delta_s$.

$\chi_v/\chi_s = 1$. При $T \ll \Delta_v, \Delta_s$, находим

$$\frac{\chi_v}{\chi_s} \begin{cases} < 1 & , \Delta_s < \Delta_v, \\ = 1 & , \Delta_s = \Delta_v, \\ > 1 & , \Delta_s > \Delta_v. \end{cases} \tag{1.66}$$

Таким образом, отношение χ_v/χ_s при $T \to 0$ чувствительно к величине отношения Δ_v/Δ_s. Этот факт может быть использован для альтернативного измерения величины междолинного расщепления в Si-МОП структурах.

Для наблюдения второго максимума в зависимости сопротивления от температуры требуется иметь достаточно широкий интервал между $1/\tau_v$ и Δ_v. Экспериментальные данные по магнитосопротивлению в Si-МОП структуре [84] позволяют оценить время междолинного рассеяния. В интервале электронных концентраций $3 - 6 \cdot 10^{11}$ см$^{-2}$ величина $1/\tau_v$ оказывается порядка 0.36 К. В том же интервале электронных концентраций междолинное расщепление остаётся постоянным, но зато меняется от образца к образцу [85]. Из данных по сопротивлению в параллельном поле междолинное расщепление Δ_v было оценено порядка $0.4 - 0.7$ К. Такое соотношение между $1/\tau_v$ и Δ_v затрудняет наблюдение второго максимума в зависимости $\rho(T)$ [118]. Отметим, что эксперименты для Si-МОП структуры по магнетотранспорту в параллельном поле показывают отсутствие заметной анизотропии с изменением направления тока относительно направления магнитного поля [78]. Это указывает на малость эффектов, связанных со спин-орбитальным взаимодействием, которое приводит к процессам релаксации спина.

В заключение этого раздела отметим, что идея о необходимости появления трёхпараметрического скейлинга на масштабах $L \gg \min\{L_s, L_v\}$ и уравнения ренормализационной группы (1.55)-(1.57) и (1.62)-(1.64) были подтверждены в работах [119, 120]. Также в этих работах был исследован вопрос о том, как устроены уравнения ренормализационной группы на масштабах, соответствующих температурам $T \ll 1/\tau_v \ll \Delta_v$. При этом оказалось, что в случае нулевого зеемановского расщепления уравнения ренормализационной группы оказываются в точности такими же как для однодолинной электронной системы [63], т.е. сохраняется металлическое поведение сопротивления с температурой. Для конечного зеемановского расщепления такого, что $\Delta_s \gg \Delta_v \gg 1/\tau_v$, при $T \ll 1/\tau_v$ уравнения ренормализационной группы оказываются такими же как для однодолинной системы в присутствии параллельного магнитного поля [63]. Как известно, в этом случае сопротивление зависит от температуры диэлектрическим образом. Таким образом, при прохождении по температуре масштаба $1/\tau_v$ зависимость сопротивления от температуры в двухдолинной электронной системе качественно не меняется.

1.4 Двумерная неупорядоченная электронная жидкость в двойной квантовой яме

1.4.1 Введение

В этом разделе результаты (1.27) применяются к описанию зависимости сопротивления от температуры в двумерной электронной системе с двумя почти идентичными квантовыми ямами и с общими рассеивателями. Будет рассмотрен наиболее интересный случай баланса, когда концентрации и подвижности электронов в обоих квантовых ямах совпадают. Результаты, полученные для случая баланса, будут сравниваться со случаем, когда одна из квантовых ям полностью обеднена электронами. В этом разделе предполагается, что выполняются следующие соотношения $1/\tau_{+-}, \Delta_s, \Delta_{SAS} \ll T \ll 1/\tau_{\rm tr}$, где $1/\tau_{+-}$ – это время упругого рассеяния между симметричным и антисимметричным состояниями в структуре с почти идентичными квантовыми ямами, а Δ_{SAS} – расщепление между этими состояниями. Такие условия были реализованы в недавних экспериментах [102, 103].

1.4.2 Микроскопический гамильтониан

В случае двух почти одинаковых квантовых ям оператор уничтожения электрона удобно записать в базисе симметричного и антисимметричного состояний:

$$\psi^\sigma(\boldsymbol{R}) = \psi^\sigma_\tau(\boldsymbol{r})\varphi_\tau(z), \quad \varphi_\tau(z) = \frac{\varphi_l(z) + \tau\varphi_r(z)}{\sqrt{2}}. \tag{1.67}$$

Здесь мы считаем, что движение электрона вдоль оси z ограниченно наличием квантовых ям, $\boldsymbol{r}$ обозначает координатный вектор в плоскости перпендикулярной оси z, а $\boldsymbol{R}=\boldsymbol{r}+z\boldsymbol{e_z}$. Индекс $\sigma=\pm$ обозначает проекцию спина электрона на ось z, изоспиновый индес $\tau=\pm$ нумерует симметричное $(+)$ и антисимметричное $(-)$ состояния в двойной квантовой яме, ψ^σ_τ обозначает оператор уничтожения состояния с проекциями спина $\sigma/2$ и изоспина $\tau/2$, соответственно. Нормированные волновые функции $\varphi_{l,r}(z)=\varphi(z\pm d/2)$ описывают электрон, локализованный в левой/правой квантовой яме. Ниже будем пренебрегать перекрытием волновых функций в левой и правой ямах. Также будем считать выполненным условие $[\int dz\,\varphi^4(z)]^{-1}\ll d$, где d – это расстояние между центрами квантовых ям, которое означает, что квантовые ямы достаточно узкие.

Рассматриваемая электронная система описывается статистической суммой в большом каноническом ансамбле:

$$Z=\int \mathcal{D}[\bar{\psi},\psi]\exp S[\bar{\psi},\psi] \tag{1.68}$$

с действием в мнимом времени

$$S=-\int\limits_0^\beta dt\Big\{\int d\boldsymbol{r}\bar{\psi}^\sigma_\tau(\boldsymbol{r}t)\big[\partial_t+\mathcal{H}_0\big]\psi^\sigma_\tau(\boldsymbol{r}t)-\mathcal{L}_{\mathrm{dis}}-\mathcal{L}_{\mathrm{int}}\Big\}. \tag{1.69}$$

Одночастичный гамильтониан

$$\mathcal{H}_0=-\frac{\nabla^2}{2m_e}-\mu+\frac{1}{2}(\Delta_s\sigma+\Delta_{\mathrm{SAS}}\tau) \tag{1.70}$$

описывает двумерную частицу с массой m_e. Магнитное поле B, перпендикулярное оси z приводит к зеемановскому расщеплению $\Delta_s=g\mu_B B$. Расщепление Δ_{SAS} по энергии между симметричным и антисимметричным состояниями может быть оценено порядка $2\varphi(d/2)\varphi'(d/2)/m_e$ [121].

Заметим, что одночастичный гамильтониан (1.70) полностью аналогичен гамильтониану (1.32) предыдущего раздела, в котором рассматривалась двухдолинная электронная система в Si-МОП структуре. В последнем случае индекс τ относился к долинам, а Δ_{SAS} играло роль междолинного расщепления.

Следующий член

$$\mathcal{L}_{\mathrm{dis}}=-\int d\boldsymbol{r}\,\bar{\psi}^\sigma_{\tau_1}(\boldsymbol{r}t)V_{\tau_1\tau_2}(\boldsymbol{r})\psi^\sigma_{\tau_2}(\boldsymbol{r}t) \tag{1.71}$$

описывает рассеяние электронов на случайном потенциале $V(\boldsymbol{R})$. Матричные элементы определены как

$$V_{\tau_1\tau_2}(\boldsymbol{r})=\int dz\,V(\boldsymbol{R})\varphi_{\tau_1}(z)\varphi_{\tau_2}(z). \tag{1.72}$$

В общем случае, матричные элементы $V_{\tau_1\tau_2}$ приводят к переходам между симметричным и антисимметричным состояниями в двойной квантовой яме. В случае зеркально-симметричного случайного потенциала: $V(\boldsymbol{r}, z) = V(\boldsymbol{r}, -z)$, переходов между симметричным и антисимметричным состояниями нет.

Имея в виду эксперименты [102, 103], будем в дальнейшем предполагать, что примеси, создающие случайный потенциал $V(\boldsymbol{R})$, сосредоточены в плоскости, перпендикулярной оси z и проходящей по середине между квантовыми ямами. Также будем считать распределение случайного потенциала $V(\boldsymbol{R})$ гауссовым, причём

$$\langle V(\boldsymbol{R})\rangle = 0, \qquad \langle V(\boldsymbol{R}_1)V(\boldsymbol{R}_2)\rangle = W(|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|, |z_1|, |z_2|), \tag{1.73}$$

где функция $W(x)$ отличается от нуля при $x \lesssim d_W$. Если следующее условие

$$\left[\int dz\, \varphi^4(z)\right]^{-1} \ll d \tag{1.74}$$

выполняется, то можно пренебречь различием (порядка $\varphi(d/2)\varphi'(d/2)$) во временах рассеяния между симметричными состояниями и антисимметричными состояниями. Тогда,

$$\langle V_{\tau_1\tau_2}(\boldsymbol{r}_1)V_{\tau_3\tau_4}(\boldsymbol{r}_2)\rangle = W\left(|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|, d/2, d/2\right)\delta_{\tau_1\tau_2}\delta_{\tau_3\tau_4}. \tag{1.75}$$

Считая, что случайный потенциал скоррелирован на малых масштабах [17], находим

$$\langle V_{\tau_1\tau_2}(\boldsymbol{r}_1)V_{\tau_3\tau_4}(\boldsymbol{r}_2)\rangle = \frac{1}{2\pi\nu_\star\tau_i}\delta_{\tau_1\tau_2}\delta_{\tau_3\tau_4}\delta(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2), \tag{1.76}$$
$$\frac{1}{\tau_i} = 2\pi\nu_\star \int d^2\boldsymbol{r}\, W(|\boldsymbol{r}|, d/2, d/2).$$

Напомним, что здесь $\nu_\star$ – это термодинамическая плотность состояний двумерных электронов (включая спин). Подчеркнем, что электроны в обеих квантовых ямах чувствуют скоррелированный беспорядок, так как рассеиваются на одних и тех же примесях.

Небольшая ассиметрия распределения примесей вдоль оси z приводит к рассеянию между симметричным и антисимметричным состояниями. Скорость такого рассеяния можно оценить как $1/\tau_{+-} \sim (b/d)^2/\tau_i \ll 1/\tau_i$, где b – это типичная длина, характеризующая ассиметрию. В дальнейшем таким рассеянием будем пренебрегать.

[17] В экспериментах [102, 103] случайный потенциал создавался заряженными примесями, расположенными вблизи плоскости $z = 0$. В этом случае характерный масштаб случайного потенциала определяется трёхмерной длиной экранировки, т.е. $d_W \sim 1/\sqrt{\varkappa k_F}$. Для того, чтобы считать такой случайный потенциал скоррелированным на малых масштабах, должно выполняться условие $d_W \ll l$ или, эквивалентно, $k_F l \gg \sqrt{k_F/\varkappa}$.

Часть лагранжиана, отвечающая за электрон-электронное рассеяние, имеет вид

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = -\frac{1}{2}\int d\boldsymbol{R}d\boldsymbol{R'}\rho(\boldsymbol{R}t)\,U(|\boldsymbol{R}-\boldsymbol{R'}|)\,\rho(\boldsymbol{R'}t), \tag{1.77}$$

где $U(\boldsymbol{R}) = e^2/\epsilon R$.

Представляя оператор электронной плотности в виде $\rho(\boldsymbol{R}t) = \bar{\psi}^{\sigma}_{\tau_1}(\boldsymbol{r}t)\psi^{\sigma}_{\tau_2}(\boldsymbol{r}t)\varphi_{\tau_1}(z)\varphi_{\tau_2}(z)$ и предполагая выполненным условие (1.74), находим, что

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = -\frac{1}{8}\int d\boldsymbol{r}d\boldsymbol{r'}\,\bar{\psi}^{\sigma_1}_{\tau_1}(\boldsymbol{r}t)\psi^{\sigma_1}_{\tau_2}(\boldsymbol{r}t)\bar{\psi}^{\sigma_2}_{\tau_3}(\boldsymbol{r'}t)\psi^{\sigma_2}_{\tau_4}(\boldsymbol{r'}t)\Big[(1+\tau_1\tau_2\tau_3\tau_4)U_{11}(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r'}|)+ \\ +(\tau_1\tau_2+\tau_3\tau_4)U_{12}(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r'}|)\Big]. \tag{1.78}$$

Здесь

$$U_{11}(r) = \frac{e^2}{\epsilon}\int dzdz'\frac{\varphi_l^2(z)\varphi_l^2(z')}{\sqrt{r^2+(z-z')^2}} \approx \frac{e^2}{\epsilon r} \tag{1.79}$$

представляет собой электрон-электронное взаимодействие внутри одной ямы. Взаимодействие электронов из разных ям имеет следующий вид

$$U_{12}(r) = \frac{e^2}{\epsilon}\int dzdz'\frac{\varphi_l^2(z)\varphi_r^2(z')}{\sqrt{r^2+(z-z')^2}} \approx \frac{e^2}{\epsilon\sqrt{r^2+d^2}}. \tag{1.80}$$

Из-за отличия U_{11} и U_{12} лагранжиан $\mathcal{L}_{\text{int}}$ не являет инвариантным относительно глобального $SU(4)$ поворота электронных операторов ψ^{σ}_{τ} в спиновом и изоспиновом пространствах. Именно вид лагранжиана взаимодействия $\mathcal{L}_{\text{int}}$ отличает задачи о электронах в двойной квантовой яме и в Si-МОП структуре.

Стандартным образом удобно выделить низкоэнергетическую часть лагранжиана $\mathcal{L}_{\text{int}}$ с малыми передачами импульса (см., например [63, 64, 53]). Тогда,

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = \frac{1}{4\nu_\star}\int' \frac{d\boldsymbol{q}}{(2\pi)^2}\sum_{a,b=0}^{3}\mathbb{F}_{ab}(q)m^{ab}(\boldsymbol{q})m^{ab}(-\boldsymbol{q}),\;\; m^{ab}(\boldsymbol{q}) = \int\frac{d\boldsymbol{k}}{(2\pi)^2}\bar{\boldsymbol{\psi}}(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q})t_{ab}\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{k}). \tag{1.81}$$

Здесь $\bar{\boldsymbol{\psi}} = \{\bar{\psi}^+_+, \bar{\psi}^-_+, \bar{\psi}^+_-, \bar{\psi}^-_-\}$, $\boldsymbol{\psi} = \{\psi^+_+, \psi^-_+, \psi^+_-, \psi^-_-\}^T$, а знак штриха у интеграла означает, что интегрирование по q ограничено условием $ql \lesssim 1$. Как и в предыдущем разделе 16 матриц $t_{ab} = \boldsymbol{\tau}_a\otimes\boldsymbol{\sigma}_b$ являются генераторами группы $SU(4)$. Матрица параметров взаимодействия имеет вид

$$\mathbb{F}(q) = \begin{pmatrix} F_s & F_t & F_t & F_t \\ \tilde{F}_s & F_t & F_t & F_t \\ F_v & F_v & F_v & F_v \\ F_v & F_v & F_v & F_v \end{pmatrix}, \tag{1.82}$$

где

$$F_t=-\frac{\nu_\star}{2}\langle U_{11}^{\rm scr}(0)\rangle_{FS}, \quad F_v=-\frac{\nu_\star}{2}\langle U_{12}^{\rm scr}(0)\rangle_{FS}, \quad F_s/\tilde{F}_s=\nu_\star[U_{11}(q)\pm U_{12}(q)]+F_t. \qquad (1.83)$$

Здесь $U_{11}(q)=2\pi e^2/q\epsilon$, $U_{12}(q)=U_{11}(q)\exp(-qd)$. Величины F_t и F_v аналогичны стандартным ферми-жидкостным параметрам в триплетном канале. Они определяются статической частью динамически экранированного взаимодействия $U_{11/12}^{\rm scr}(q,\omega)$, усредненной по ферми-поверхности. В случае равных электронных концентраций и подвижностей в обоих квантовых ямах

$$\langle U_{11/12}^{\rm scr}(0)\rangle_{FS}=\int\limits_0^{2\pi}\frac{d\theta}{2\pi}U_{11/12}^{\rm scr}(2k_F\sin(\theta/2),0), \qquad (1.84)$$

где k_F – это импульс Ферми для электронов в одной квантовой яме. Параметр взаимодействия F_s содержит кулоновское взаимодействие на малом импульсе. В пределе $q\to 0$, $F_s(q)\approx 2\varkappa/q\to\infty$, где $\varkappa=2\pi e^2\nu_\star/\epsilon$. При этом

$$\tilde{F}_s=\varkappa d+F_t. \qquad (1.85)$$

При $d=0$, когда две квантовые ямы превращаются в одну, параметры взаимодействия $\tilde{F}_s$, F_t, F_v равны: $\tilde{F}_s=F_t=F_v$. В этом случае рассматриваемая система аналогична Si-МОП структуре. В противоположном предельном случае $d\to\infty$, взаимодействие электронов в разных ямах исчезает и $\tilde{F}_s=F_s$, а $F_v=0$. При этом действие (1.69) (для $\Delta_{SAS}=\Delta_s=0$) становится инвариантным относительно глобальных $SU(2)$ поворотов электронного спина в каждой яме отдельно. При промежуточных значениях d, действие (1.69) также инвариантно относительно глобальных $SU(2)\times SU(2)$ поворотов, если Δ_{SAS} и Δ_s равны нулю.

Параметры F_t и F_v определяются экранированным кулоновским взаимодействием внутри и между квантовыми ямами. В приближении случайных фаз динамически экранированное взаимодействие хорошо известно [122, 123, 124]:

$$U_{11}^{\rm scr}=\frac{U_{11}+\Pi_2[U_{11}^2-U_{12}^2]}{1+[\Pi_1+\Pi_2]U_{11}+\Pi_1\Pi_2[U_{11}^2-U_{12}^2]}, \qquad (1.86)$$

$$U_{12}^{\rm scr}=\frac{U_{12}}{1+[\Pi_1+\Pi_2]U_{11}+\Pi_1\Pi_2[U_{11}^2-U_{12}^2]}, \qquad (1.87)$$

$$U_{22}^{\rm scr}=\frac{U_{11}+\Pi_1[U_{11}^2-U_{12}^2]}{1+[\Pi_1+\Pi_2]U_{11}+\Pi_1\Pi_2[U_{11}^2-U_{12}^2]}. \qquad (1.88)$$

В диффузионном приближении ($ql\ll 1$, $\omega\tau_{\rm tr}\ll 1$) поляризационные операторы имеют вид

$$\Pi_j(q,\omega)=\nu_\star\frac{D_jq^2}{D_jq^2-i\omega}, \quad j=1,2, \qquad (1.89)$$

где D_j – это коэффициент диффузии в j-ой квантовой яме. Заметим, что при $D_1 \neq D_2$ динамически экранированное взаимодействие в первой и второй ямах разные. В случае одинаковых электронных концентраций и подвижностей $D_1 = D_2 = D$, $U_{11}^{\rm scr} = U_{22}^{\rm scr}$ и

$$U_{11/12}^{\rm scr} = \frac{\varkappa}{2\nu_\star q}\Big(Dq^2 - i\omega\Big)\left\{\frac{1+e^{-qd}}{Dq\Big[q+\varkappa(1+e^{-qd})\Big]-i\omega} \pm \frac{1-e^{-qd}}{Dq\Big[q+\varkappa(1-e^{-qd})\Big]-i\omega}\right\}. \quad (1.90)$$

При $qd \gg 1$ влияние электронов в правой яме на динамически экранированное взаимодействие в левой яме пренебрежимо мало. В противоположном случае, $qd \ll 1$, электроны правой ямы влияют на динамически экранированное взаимодействие в левой яме только при $\varkappa d \lesssim 1$.

Оценки для параметров взаимодействия

Оценим параметры взаимодействия F_t и F_v в случае равной электронной концентрации в обоих квантовых ямах. Используя уравнения (1.86) и (1.87), найдём

$$F_t \pm F_v = -\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{4\pi} \frac{\varkappa(1 \pm e^{-2k_F d \sin\theta/2})}{2k_F \sin\frac{\theta}{2} + \varkappa(1 \pm e^{-2k_F d\sin\theta/2})}. \quad (1.91)$$

Для применимости приближения случайных фаз, использованного при выводе выражений (1.86)-(1.87), будем считать выполненным условие $\varkappa/k_F \ll 1$. Как следует из (1.91), F_t и F_v отрицательные и $|F_t| \geqslant |F_v|$. Параметр $\tilde{F}_s$ отрицательный при малых значениях d и положительный при больших d. Зависимость критического значения d_c, при котором $\tilde{F}_s$ обращается в нуль, от безразмерного параметра $\varkappa/k_F$ показана на Рис. 1.8. Заметим, что $|\tilde{F}_s| \leqslant |F_t|$ при $d < d_c$.

Для случая одной квантовой ямы параметр взаимодействия в триплетном канале, который будем в этом разделе обозначать как F_t^0, оценивается выражением (1.46). В случае квантовых ям с равными концентрациями электронов получаем следующую оценку при $k_F d \gg 1$:

$$F_t = F_t^0 + \frac{1}{8\pi k_F d}\mathcal{G}_1(\varkappa d), \quad F_v = \frac{1}{8\pi k_F d}\mathcal{G}_2(\varkappa d), \quad (1.92)$$

$$\mathcal{G}_1(x) = \frac{3x\, e^x E_1(x)}{x+1} + \frac{2x\, e^{-2x/(x-1)}}{x^2-1}E_1\left(-\frac{2x}{x-1}\right), \qquad \mathcal{G}_2(x) = \mathcal{G}_1(x) - \frac{4x\, e^x E_1(x)}{x+1}.$$

Здесь функция $E_1(x)$ обозначает интегральную экспоненту, $E_1(x) = \int_x^\infty dt\, \exp(-t)/t$.

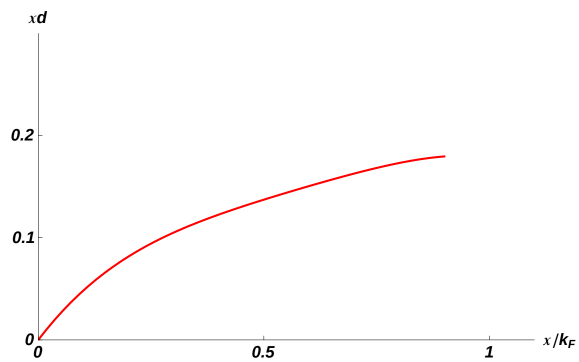

Рисунок 1.8: Зависимость значения параметра $\varkappa d_c$, при котором $\tilde{F}_s = 0$, от отношения $\varkappa/k_F$.

1.4.3 Уравнения ренормализационной группы в однопетлевом приближении

Матрица амплитуд взаимодействия $\mathbf{\Gamma}$ имеет ту же матричную структуру, что и матрица $\mathbb{F}$ (см. (1.82)). Удобно ввести следующие обозначения ($a = 1, 2, 3$ и $b = 0, 1, 2, 3$):

$$\Gamma_{10} = z\tilde{\gamma}_s = -\frac{z\tilde{F}_s}{1 + \tilde{F}_s}, \quad \Gamma_{0a} = \Gamma_{1a} = z\gamma_t = -\frac{zF_t}{1 + F_t}, \quad \Gamma_{2b} = \Gamma_{3b} = z\gamma_v = -\frac{zF_v}{1 + F_v}. \tag{1.93}$$

Ещё раз напомним, что выполняется соотношение $\Gamma_{00} = -z$, так как рассматривается случай кулоновского взаимодействия. Наличие в гамильтониане (1.70) зеемановского расщепления Δ_s и расщепления Δ_{SAS} между симметричным и антисимметричным состояниями приводит к появлению в действии (1.1) членов (1.6), понижающих симметрию. В этом разделе будут исследоваться относительно высокие температуры $T \gg \Delta_{s,SAS}$ или, эквивалентно, малые масштабы $L \ll \sqrt{\sigma_{xx}/(16z\Delta_{s,SAS})}$.

Подставляя определения (1.93) в общие однопетлевые уравнения ренормализационной группы (1.27), получаем

$$\frac{d\sigma_{xx}}{dy} = -\frac{2}{\pi}\big[2 + 1 + f(\tilde{\gamma}_s) + 6f(\gamma_t) + 8f(\gamma_v)\big], \tag{1.94}$$

$$\frac{d\tilde{\gamma}_s}{dy} = \frac{1 + \tilde{\gamma}_s}{\pi\sigma_{xx}}\left[1 - 6\gamma_t - \tilde{\gamma}_s + 8\gamma_v + 16\gamma_v\frac{\tilde{\gamma}_s - \gamma_v}{1 + \gamma_v}\right], \tag{1.95}$$

$$\frac{d\gamma_t}{dy} = \frac{1 + \gamma_t}{\pi\sigma_{xx}}\left[1 - \tilde{\gamma}_s + 2\gamma_t + 8\gamma_v\frac{\gamma_t - \gamma_v}{1 + \gamma_v}\right], \tag{1.96}$$

$$\frac{d\gamma_v}{dy} = \frac{1}{\pi\sigma_{xx}}\left[1 + \tilde{\gamma}_s + \gamma_v - \gamma_v(6\gamma_t + \tilde{\gamma}_s) + 8\gamma_v^2\right], \tag{1.97}$$

$$\frac{d\ln z}{dy} = \frac{1}{\pi\sigma_{xx}}\left[\tilde{\gamma}_s + 6\gamma_t + 8\gamma_v - 1\right]. \tag{1.98}$$

Уравнения (1.94)-(1.98) впервые были получены в работе [114]. Заметим, что правая часть уравнений (1.95) и (1.96) не полиномиальна по амплитуде взаимодействия γ_v. Во всех случаях, которые изучались до сих пор, правые части однопетлевых уравнений ренормализационной группы для амплитуд взаимодействия были полиномами второй степени [63, 64, 117, 119, 120]. Этот факт тесно связан с инвариантностью действия $\mathcal{S}_\sigma + \mathcal{S}_F$ при глобальных вращениях (1.7) матрицы Q. Как это следует из уравнений (1.8), действие $\mathcal{S}_\sigma + \mathcal{S}_F$ с амплитудами взаимодействия (1.93) инвариантно относительно вращений (1.7) с $\chi_{ab} = \chi\delta_{ac}\delta_{bd}$, где $c = 0, 1$, а $d = 1, 2$ или 3, если выполняется соотношение $\gamma_t = -1$. То же самое относится к вращениям с $\chi_{ab} = \chi\delta_{a1}\delta_{b0}$, если $\tilde{\gamma}_s = -1$. Это гарантирует, что $\gamma_t = -1$ и $\tilde{\gamma}_s = -1$ являются фиксированными точками ренормализационной группы. Поэтому правые части уравнений ренормализационной группы не должны иметь особенностей при $\gamma_t = -1$ и $\tilde{\gamma}_s = -1$. При значении амплитуды взаимодействия γ_v равном -1 действие $\mathcal{S}_\sigma + \mathcal{S}_F$ не оказывается инвариантным относительно вращений (1.7). Именно, этот факт и приводит к возможности появления членов пропорциональных $1/(1+\gamma_v)$, которые расходятся при $\gamma_v = -1$, в уравнениях (1.95) и (1.96).

Уравнения (1.94)-(1.97) описывают четырехмерную $(\sigma_{xx}, \tilde{\gamma}_s, \gamma_t, \gamma_v)$ диаграмму потока ренормализационной группы. Во-первых, двумерная поверхность $\gamma_t = \gamma_v = \tilde{\gamma}_s$ является инвариантной относительно ренормализационной группы. Эта поверхность соответствует случаю совпадающих квантовых ям ($d = 0$). В этом случае уравнения (1.94)-(1.98) полностью эквивалентны уравнениям (1.49)-(1.51) для электронной жидкости с двумя долинами. Однако, эта поверхность неустойчива: небольшое различие в начальных значениях амплитуд взаимодействия, например, из-за конечного расстояния d между ямами, увеличивается в процессе потока ренормализационной группы. Во-вторых, поток сохраняет двумерную поверхность $\gamma_v = 0$, $\tilde{\gamma}_s = -1$, которая является устойчивой. Эта поверхность реализуется в пределе двух отдельных квантовых ям ($d = \infty$). Кроме этого, имеются ещё дополнительные интересные особенности потока. Например, сохраняется двумерная поверхность $\gamma_t = \tilde{\gamma}_s = -1$. Также сохраняется линия $\tilde{\gamma}_s = -1$, $\gamma_v = -1/2$, $\gamma_t = -1/3$ в рамках однопетлевого приближения. К сожалению, последние две особенности потока нельзя наблюдать в двойной квантовой яме. Действительно, начальные значения параметров γ_t, γ_v и $\tilde{\gamma}_s$ удовлетворяют неравенствам

$$\gamma_t(0) \geqslant \gamma_v(0) \geqslant 0, \qquad \gamma_t(0) \geqslant \tilde{\gamma}_s(0). \tag{1.99}$$

Используя уравнения (1.95)-(1.97), можно доказать, что в процессе потока ренормализационной группы условия $\gamma_t \geqslant \gamma_v \geqslant 0$ и $\gamma_t \geqslant \tilde{\gamma}_s$ сохраняются, а γ_t всегда возрастает. Начиная с начальных значений параметров γ_t, γ_v и $\tilde{\gamma}_s$, удовлетворяющих условиям (1.99), поток ренормализационной группы приводит к тому, что γ_v обращается в нуль, $\tilde{\gamma}_s$ стремится к -1, а γ_t неограниченно возрастает (см. Рис. 1.9).

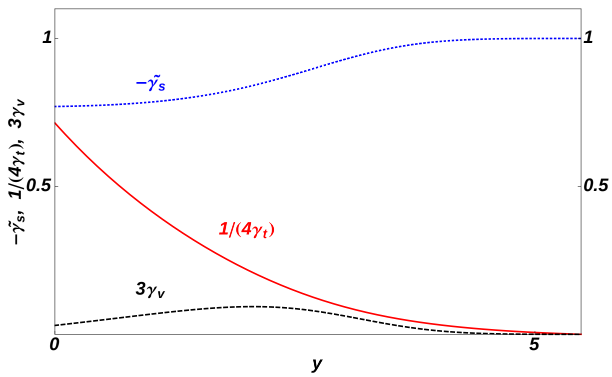

Рисунок 1.9: Зависимость величин γ_t, γ_v, и $\tilde{\gamma}_s$ от y. Выбраны следующие начальные значения $\gamma_t(0) = 0.35$, $\gamma_v(0) = 0.01$, $\tilde{\gamma}_s(0) = -0.77$, и $\sigma_{xx}(0) = 6$.

Также как и в случае электронной жидкости с двумя долинами, зависимость σ_{xx} от температуры является металлического типа: проводимость возрастает на больших масштабах. В зависимости от знака величины $2+K_{ee}$, где $K_{ee} = 1+f(\tilde{\gamma}_s(0))+6f(\gamma_t(0))+8f(\gamma_v(0))$, сопротивление убывает с ростом y монотонно (при $2+K_{ee} < 0$) или проходит через максимум (при $2+K_{ee} > 0$).

Проводимость σ'_{xx}, перенормируемая согласно уравнению (1.94), представляет собой полную проводимость электронной системы в двойной квантовой яме, которую можно представить в виде $\sigma'_{xx} = \sigma'_{11}+\sigma'_{22}+\sigma'_{12}+\sigma'_{21}$, где σ'_{11} и σ'_{22} – это проводимости внутри квантовой ямы (левой и правой, соответственно), а σ'_{12} и σ'_{21} обозначают транспроводимость, которая характеризует эффект увлечения электронов в одной яме при приложении электрического поля в другой яме. В случае одинаковых квантовых ям, естественно $\sigma'_{11} = \sigma'_{22}$ и $\sigma'_{12} = \sigma'_{21}$. В экспериментах [102, 103] измерялась полная проводимость σ'_{xx}. В принципе, в исследуемой экспериментально гетероструктуре с двойной квантовой ямой мог бы быть измерен и эффект увлечения. Как было показано в работе [125], в случае общего беспорядка в низшем порядке по обратной проводимости транспроводимость определяется только куперовским взаимодействием. Однако, в работе [125] в канале частица-дырка было учтено только межэлектронное взаимодействие U_{12}^{scr}. Можно показать [114], что аккуратный учёт межэлектронного взаимодействия в канале частица-дырка (т.е., учёт Γ_s, $\tilde{\Gamma}_s$, Γ_t, и Γ_v) не меняет вывод работы [125]: однопетлевой вклад в транспроводимость σ'_{12} от электронного взаимодействия в канале частица-дырка равен нулю.

1.4.4 Время сбоя фазы

Наличие правой ямы меняет свойства электронов в левой яме. Одной из важных характеристик взаимодействующих электронов в случайном потенциале является время сбоя фазы [54]. В частности, зависимость времени сбоя фазы от температуры определяет температурное поведение слаболокализационной поправки к проводимости. Поэтому интересно выяснить, как наличие электронов в правой квантовой яме меняет время сбоя фазы электронов в левой яме по сравнению со случаем, когда правая яма пуста.

Будем рассматривать случай баланса. Обобщая известные результаты [45, 46, 126] на рассматриваемый случай двух квантовых ям, найдём следующее выражение для времени сбоя фазы в левой яме:

$$\frac{1}{\tau_\phi} = -\frac{2}{\sigma_{xx}} \int\limits_{\tau_\phi^{-1}} d\omega \int \frac{d^2q}{(2\pi)^2} \frac{\operatorname{Re} D_q^R(\omega)}{\operatorname{sh}(\omega/T)} \sum_{ab} \operatorname{Im} \mathcal{U}^{(ab)}(q,\omega). \tag{1.100}$$

где

$$\mathcal{U}^{(ab)}(q,\omega) = \frac{\Gamma_{ab}}{z} D_q^{(ab),R}(\omega) [D_q^R(\omega)]^{-1}. \tag{1.101}$$

Производя интегрирование по импульсу и частоте и обрезая логарифмически расходящиеся интегралы самим временем сбоя фазы, получим

$$\frac{1}{\tau_\phi} = \mathcal{A} \frac{T}{2\sigma_{xx}} \ln T\tau_\phi, \qquad \mathcal{A} = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{\tilde\gamma_s^2}{2+\tilde\gamma_s} + 6\frac{\gamma_t^2}{2+\gamma_t} + 8\frac{\gamma_v^2}{2+\gamma_v}\right]. \tag{1.102}$$

Заметим, что в этом выражении параметры взаимодействия $\tilde\gamma_s$, γ_t, γ_v и проводимость σ_{xx} должны браться на масштабе $L_T = \sqrt{\sigma_{xx}/zT}$.

Полезно сравнить уравнение (1.102) с результатом для случая, когда электроны в правой яме отсутствуют. Беря предел $d \to \infty$ в выражении (1.102), т.е. полагая $\tilde\gamma_s = -1$, $\gamma_v = 0$, и $\gamma_t = \gamma_{t,0}$, находим [126]

$$\mathcal{A} \to \mathcal{A}_0 = \left[1 + \frac{3\gamma_{t,0}^2}{2+\gamma_{t,0}}\right], \tag{1.103}$$

где начальное значение для $\gamma_{t,0}$ равно $\gamma_{t,0}(0) = -F_t^0/(1+F_t^0)$.

1.4.5 Обсуждение результатов и сравнение с экспериментом

Недавно экспериментально изучались слаболокализационные поправки [102] и поправки от взаимодействия [103] в проводимости двойной квантовой ямы в гетероструктуре $\mathrm{Al}_x\mathrm{Ga}_{1-x}\mathrm{As/GaAs/Al}_x\mathrm{Ga}_{1-x}\mathrm{As}$. Детально исследовались две гетероструктуры 3243 и 3154,

Таблица 1.2: Параметры образцов, изучаемых в работах [102, 103].

образец	n, 10^{11} см$^{-2}$	k_F, 10^6 см$^{-1}$	$\varkappa$, 10^6 см$^{-1}$	d, 10^{-6} см	$\varkappa d$	$k_F d$	$\varkappa/k_F$
#3154	4.5	1.7	2	1.8	3.6	3.06	1.18
#3243	7.5	2.2	2	1.8	3.6	3.95	0.91

различающиеся уровнем допирования. Из анализа магнетопроводимости находились время сбоя фазы и величина K_{ee}. Измением напряжения на затворе контролировалась электронная концентрация в правой яме. Экспериментально электронная концентрация n была такова, что проводимость при высоких температурах (4.2 K) была примерно равна $80\,e^2/h$. Поэтому физика, связанная с ренормгрупповым потоком (1.94)-(1.98), не наблюдалась. Основным и неожиданным наблюдением работ [102, 103] был тот факт, что время сбоя фазы (коэффициент $\mathcal{A}$ в уравнении (1.102)) и поправка от взаимодействия в проводимость (параметр K_{ee}) как в случае баланса, так и в случае полного обеднения электронами одной из ям были практически одинаковыми. На первый взгляд это кажется удивительным, если считать, что $\gamma_t(0) \approx \tilde{\gamma}_s(0) \approx \gamma_v(0) \approx \gamma_{t,0}(0)$. Экспериментальные результаты работ [102, 103] представлены в таблице 1.2. Теоретические оценки для параметров взаимодействия представлены в таблице 1.3. В экспериментальной ситуации величина $\varkappa d = 3.6$. При этом параметр взаимодействия F_v близок к нулю, F_t и F_t^0 совпадают друг с другом, а $\tilde{F}_s$ приближённо равен $\varkappa d$. Сравнение между теоретическими и экспериментальными значениями для величин K_{ee}, $\mathcal{A}$, $K_{ee,0} = 1 + 3f(\gamma_{t,0}(0))$ и $\mathcal{A}_0$ представлены в таблице 1.4. Как видно из таблицы, теоретические оценки находятся в хорошем согласии с экспериментальными данными. Заметим, что так как величина $K_{ee,0}$ положительна для $\varkappa/k_F \lesssim 1$, существенный эффект в поправке от взаимодействия в проводимость может быть виден в двойной квантовой яме с параметром $\varkappa d \lesssim 1$, если с помощью напряжения затвора перевести электронную систему из случая полного обеднения электронами одной из ям в случай баланса, в котором ожидается $K_{ee} < 0$.

Как было отмечено выше, построенная теория справедлива при температурах $T \gg \Delta_{SAS}, \Delta_s, 1/\tau_{+-}$. В экспериментах [102, 103] зеемановское расщепление (в полях, при которых измерялось магнитосопротивление) и Δ_{SAS} оцениваются как $\Delta_s \lesssim 0.2$ K и $\Delta_{SAS} \lesssim 1$ K, соответственно. Небольшая ассиметрия в расположении примесей вдоль оси z приводит к появлению упругого рассеяния между симметричным и антисимметричным состояниями. Соответствующее время $(1/\tau_{+-})$ может быть экспериментально оценено из темпера-

Таблица 1.3: Теоретические оценки для параметров взаимодействия при условиях, соответствующим образцам 3154 и 3243 из работ [102, 103].

образец	$\tilde{F}_s$	F_t	F_v	$\tilde{\gamma}_s(0)$	$\gamma_t(0)$	$\gamma_v(0)$	F_t^0	$\gamma_{t,0}(0)$
#3154	3.34	−0.26	−0.009	−0.77	0.35	0.009	−0.26	0.35
#3243	3.37	−0.23	−0.007	−0.77	0.30	0.007	−0.23	0.30

Таблица 1.4: Сравнение теоретических оценок и экспериментальных данных для величин K_{ee}, $\mathcal{A}$, $K_{ee,0}$ и $\mathcal{A}_0$.

	Теория		Эксперимент	
	#3154	#3243	#3154	#3243
K_{ee}	0.59	0.72	0.50 ± 0.05	0.57 ± 0.05
$K_{ee,0}$	0.52	0.59	0.53 ± 0.05	0.60 ± 0.05
$\mathcal{A}$	0.89	0.86		
$\mathcal{A}_0$	1.15	1.12		
$\mathcal{A}/\mathcal{A}_0$	0.77	0.77	1.00 ± 0.05	1.00 ± 0.05

турной и магнитополевой зависимости слаболокализационной поправки к проводимости. Как хорошо известно [54], в случае отсутствия упругого рассеяния между симметричным и антисимметричным состояниями ($1/\tau_{+-} = 0$), наличие Δ_s и/или Δ_{SAS} не влияет на слаболокализационную поправку. В отсутствии магнитного поля слаболокализационная поправка для обоих предельных случаев $\Delta_{SAS} \ll 1/\tau_{+-}$ и $\Delta_{SAS} \gg 1/\tau_{+-}$ может быть записана в виде:

$$\delta\sigma_{xx}^{WL} = \frac{1}{\pi} \ln\Big[\frac{\tau_{\rm tr}^2}{\tau_\phi}\Big(\frac{1}{\tau_\phi} + \frac{1}{\tau_{12}}\Big)\Big], \tag{1.104}$$

где $1/\tau_{12} \sim \min\{\Delta_{SAS}^2 \tau_{+-}, 1/\tau_{+-}\}$. Выражение (1.104) ведет себя с температурой при высоких температурах ($1/\tau_\phi \gg 1/\tau_{12}$) также как в двухдолинной системе, а при низких температурах ($1/\tau_\phi \ll 1/\tau_{12}$) как в однодолинной системе. В экспериментах [102] $1/\tau_{12}$, оцененное из магнитополевой зависимости слаболокализационной поправки, оказалось порядка 0.1 K. С учётом оценки $\Delta_{SAS} \lesssim 1$ K, это даёт $1/\tau_{+-} \sim 1/\tau_{12} \lesssim 0.1$ K. Таким образом, корректно сравнивать построенную теорию с экспериментами [102, 103] при температурах $T \gtrsim 1$ K, а именно в этом температурном режиме эксперименты и проводились.

1.5 Переход Андерсона в неупорядоченной бесспиновой электронной жидкости

1.5.1 Введение

В этом разделе будет изучаться переход Андерсона в бесспиновой неупорядоченной электронной системе. Физически, такая ситуация реализуется в однодолинной электронной системе в присутствии достаточно сильных магнитных примесей или сильного магнитного поля, полностью поляризующего спины электронов. Для случая бесспиновых электронов однопетлевые уравнения ренормализационной группы хорошо известны [63] и предсказывают в $d = 2$ температурную зависимость сопротивления диэлектрического типа. Этот факт указывает на вероятное отсутствие перехода металл-изолятор в $d = 2$ бесспиновой электронной системе. Для проверки этой гипотезы в этом разделе будет вычислена поправка к проводимости бесспиновых электронов в следующем порядке по малому безразмерному параметру $1/k_F l$.

1.5.2 Уравнения ренормализационной группы в однопетлевом приближении

В рассматриваемом случае полностью поляризованной по спину электронной системы в действии (1.2) и (1.3) матрица Q пропорциональна генератору t_{00}, а все параметры взаимодействия кроме $\Gamma_{33} = \Gamma_{30} = \Gamma_{03} = \Gamma_{00}$ равны нулю. В этом случае действие (1.1) описывает четыре полностью эквивалентные системы бесспиновых электронов. Естественно, что физический интерес представляет величина $\tilde{\sigma}_{xx} = \sigma_{xx}/4$ – проводимость для одной системы [18]. Для общности в этом разделе будем рассматривать общий случай электрон-электронного взаимодействия, в том числе и случай короткодействия. В последнем случае соотношение $\Gamma_{00} = -z$ не обязано выполняться и поэтому удобно ввести параметр $\gamma_s = \Gamma_{00}/z$. В случае кулоновского взаимодействия $\gamma_s = -1$, в случае невзаимодействующих электронов $\gamma_s = 0$, а в случае короткодействующего межэлектронного взаимодействия γ_s принимает промежуточные значения [19]. Члены вида (1.6), понижающие симметрию, от-

[18] Альтернативно, можно считать, что матрица Q пропорциональна комбинации $(t_{00}+t_{03}+t_{30}+t_{33})/4$, а все параметры взаимодействия кроме Γ_{00} равны нулю. Тогда действие (1.1) будет описывать одну систему бесспиновых электронов.

[19] Соотношение $\gamma_s = -1$ выполняется для любого межэлектронного взаимодействия, для которого $1/U(q) \to 0$ при $q \to 0$. Если $U(r)$ на больших расстояниях спадает как $r^{-\lambda}$, то $\gamma_s = -1$ для всех $\lambda < d$.

сутствуют.

Используя общие однопетлевые уравнения ренормализационной группы (1.27), получаем хорошо известные результаты для полностью поляризованной по спину электронной системы [60]:

$$\frac{d\tilde{\sigma}_{xx}}{dy} = -\frac{2}{\pi} f(\gamma_s), \tag{1.105}$$

$$\frac{d\gamma_s}{dy} = -\frac{\gamma_s(1+\gamma_s)}{\pi\tilde{\sigma}_{xx}}, \tag{1.106}$$

$$\frac{dz}{dy} = -\frac{d\Gamma_{00}}{dy} = \frac{\Gamma_{00}}{\pi\tilde{\sigma}_{xx}}. \tag{1.107}$$

В уравнении (1.105) отсутствует вклад, связанный со слабой локализацией, так как сильное перпендикулярное поле, которое поляризует электронный спин, подавляет вклады от куперонов. Заметим, что однопетлевое уравнение ренормгруппы для всех $-1 \leqslant \gamma_s < 0$ предсказывает уменьшение проводимости с увеличением размера системы, т.е. диэлектрическое поведение.

Уравнение (1.106) предсказывает существование двух фиксированных точек: при $\gamma_s = 0$ (устойчивой) и при $\gamma_s = -1$ (неустойчивой). Таким образом, в случае электронов полностью поляризованных по спину оказывается, что система с короткодействующим межэлектронным взаимодействием на больших масштабах становится эквивалентна системе невзаимодействующих электронов [60]. Электроны полностью поляризованные по спину с кулоновским взаимодействием представляют систему с другим классом универсальности. Именно, в этом случае представляет интерес вычисление уравнений ренормализационной группы для проводимости в двухпетлевом приближении.

1.5.3 Вычисление проводимости в двухпетлевом приближении

Для вычисления проводимости в двухпетлевом приближении удобно использовать метод размерной регуляризации, т.е. производить все вычисления в размерности $d = 2 + \epsilon$ с $\epsilon \to 0^+$. При этом логарифмические расходимости в размерности $d = 2$ заменяются на степенные $1/\epsilon^k$. Хорошо известно, что в случае безмассовой теории размерная регуляризация имеет свойство смешивать инфракрасные и ультрафиолетовые особенности [10].

В дальнейшем случай $\gamma_s = -1$ будем называть случаем кулоновского взаимодействия. Если соотношение $1/U(q) \to 0$ при $q \to 0$ не выполняется, то такое взаимодействие будем называть короткодействующим. К этому случаю относятся как экранированное кулоновское взаимодействие так и взаимодействие, спадающее на больших расстояниях как $r^{-\lambda}$ с $\lambda \geqslant d$.

Для их разделения удобно добавить к действию нелинейной сигма-модели (1.2) и (1.3) массовый член:

$$S_h[Q] = \frac{\sigma_{xx} h_0^2}{16} \int d\boldsymbol{r}\, \mathrm{tr}\, \Lambda Q. \tag{1.108}$$

Этот член приводит к конечной массе (пропорциональной h_0^2) диффузных мод и тем самым регуляризует инфракрасные особенности.

Известно, что действие $S_h[Q]$ перенормируется [109]. Перенормированное значение параметра h_0 можно определить из следующего соотношения:

$$h'^2 = \frac{\sigma_{xx} h_0^2}{\sigma'_{xx}} \frac{\mathrm{tr}\, \Lambda \langle Q(\boldsymbol{r})\rangle}{\mathrm{tr}\, \Lambda^2}. \tag{1.109}$$

Величина $1/h'$ представляет собой физический масштаб длины, который появляется в теории из-за наличия массового члена (1.108).

Однопетлевое вычисление выражения (1.109) с помощью двухточечной корреляционной функции (1.19), в которой в функциях $D_q(\omega_n)$ и $D_q^{(ab)}(\omega_n)$ (см. (1.18)) произведена замена q^2 на $q^2 + h_0^2$, приводит к следующему результату [109]:

$$h' = h_0 \left[1 - \frac{2\Omega_d h_0^\epsilon}{\epsilon \tilde{\sigma}_{xx}} \big(2 + \ln(1+\gamma_s)\big)\right], \qquad \Omega_d = \frac{S_d}{2(2\pi)^d}, \tag{1.110}$$

где $S_d = 2\pi^{d/2}/\Gamma(d/2)$ – площадь сферы единичного радиуса в d-мерном пространстве. Заметим, что в правой части выражения (1.110) возникла логарифмическая расходимость при $\gamma_s = -1$. Это связано с тем, что $\mathrm{tr}\, \Lambda Q$ не является калибровочно инвариантной величиной [20].

Для нахождения двухпетлевой перенормировки проводимости удобно вычислять её на нулевой частоте, при нулевой температуре в системе бесконечного размера. При этом, если вычислять σ'_{xx} как функцию физического масштаба h', то, как будет показано ниже, все расходимости при $\gamma_s = -1$ сократятся.

Однопетлевой вклад в проводимость в размерности $d = 2 + \epsilon$ при $\gamma_s = -1$ равен:

$$\delta^{(1)} \sigma'_{xx} = \frac{32 \Omega_d h_0^\epsilon}{\epsilon}. \tag{1.111}$$

Раскладывая матрицу Q по степеням W в выражении (1.9), определяющем проводимость, и в действии (1.2), (1.3) и (1.108), находим, что двухпетлевой вклад определяется следующим выражением:

$$\begin{aligned}\delta^{(2)} \sigma'_{xx}(i\omega_n) \;&=\; \Big\langle O_1^{(4)} + O_1^{(3)} S_{\mathrm{int}}^{(3)} + O_1^{(2)} (S_{\mathrm{int}}^{(4)} + S_0^{(4)} + \frac{1}{2}(S_{\mathrm{int}}^{(3)})^2) + \\ &+\; O_2^{(6)} + O_2^{(5)} S_{\mathrm{int}}^{(3)} + O_2^{(4)} (S_{\mathrm{int}}^{(4)} + S_0^{(4)} + \frac{1}{2}(S_{\mathrm{int}}^{(3)})^2) \Big\rangle_{(0)}. \end{aligned} \tag{1.112}$$

[20] Величина $\langle [Q_{00}]_{nn}^{\alpha\alpha} \rangle$ пропорциональна локальной туннельной плотности состояний $\nu(\boldsymbol{r}, \epsilon_n)$.

Здесь средние $\langle \ldots \rangle_{(0)}$ вычисляются с помощью применения теоремы Вика и двухчастичной корреляционной функции (1.19), в которой в функциях $D_q(\omega_n)$ и $D_q^{(ab)}(\omega_n)$ (см. (1.18)) произведена замена q^2 на $q^2 + h_0^2$. Далее,

$$\begin{aligned}
O_1^{(2)} &= -\frac{\sigma_{xx}}{2} \operatorname{tr} \left\{ I_n^\alpha w_{00}^\dagger I_{-n}^\alpha w_{00} + I_{-n}^\alpha w_{00}^\dagger I_n^\alpha w_{00} - 2(I_n^\alpha \Lambda I_{-n}^\alpha + I_{-n}^\alpha \Lambda I_n^\alpha)[w_{00}, w_{00}^\dagger] \right\}, \\
O_1^{(3)} &= \frac{\sigma_{xx}}{4} \operatorname{tr} \left\{ I_n^\alpha (w_{00} + w_{00}^\dagger) I_{-n}^\alpha w_{00} w_{00}^\dagger - I_{-n}^\alpha (w_{00} + w_{00}^\dagger) I_n^\alpha w_{00}^\dagger w_{00} \right\}, \\
O_1^{(4)} &= \frac{\sigma_{xx}}{16} \operatorname{tr} \left\{ (I_n^\alpha \Lambda I_{-n}^\alpha + I_{-n}^\alpha \Lambda I_n^\alpha)[w_{00} w_{00}^\dagger w_{00}, w_{00}^\dagger] - 2 I_n^\alpha [w_{00}, w_{00}^\dagger] I_{-n}^\alpha [w_{00}, w_{00}^\dagger] \right\}, \\
O_2^{(4)} &= \frac{\sigma_{xx}^2}{4d} \int d\boldsymbol{r} \operatorname{tr} I_n^\alpha (w_{00} \nabla w_{00}^\dagger + w_{00}^\dagger \nabla w_{00}) \operatorname{tr} I_{-n}^\alpha (w_{00} \nabla w_{00}^\dagger + w_{00}^\dagger \nabla w_{00}), \\
O_2^{(5)} &= \frac{\sigma_{xx}^2}{8d} \int d\boldsymbol{r} \Big\{ \operatorname{tr} I_n^\alpha (w_{00} \nabla w_{00}^\dagger + w_{00}^\dagger \nabla w_{00}) \operatorname{tr} I_{-n}^\alpha w_{00} (\nabla w_{00}^\dagger) w_{00} + \\
&+ \operatorname{tr} I_{-n}^\alpha (w_{00} \nabla w_{00}^\dagger + w_{00}^\dagger \nabla w_{00}) \operatorname{tr} I_n^\alpha w_{00}^\dagger (\nabla w_{00}) w_{00}^\dagger \Big\}, \\
O_2^{(6)} &= \frac{\sigma_{xx}^2}{16d} \int d\boldsymbol{r} \Big\{ \operatorname{tr} I_n^\alpha \Lambda w_{00}^\dagger (\nabla w_{00}) w_{00}^\dagger \operatorname{tr} I_{-n}^\alpha \Lambda w_{00} (\nabla w_{00}^\dagger) w_{00} + \\
&+ \operatorname{tr} I_n^\alpha (w_{00} \nabla w_{00}^\dagger + w_{00}^\dagger \nabla w_{00}) \operatorname{tr} I_{-n}^\alpha \big(w_{00} w_{00}^\dagger \nabla (w_{00} w_{00}^\dagger) + w_{00}^\dagger w_{00} \nabla (w_{00}^\dagger w_{00}) \big) + \\
&+ \operatorname{tr} I_{-n}^\alpha (w_{00} \nabla w_{00}^\dagger + w_{00}^\dagger \nabla w_{00}) \operatorname{tr} I_n^\alpha \big(w_{00} w_{00}^\dagger \nabla (w_{00} w_{00}^\dagger) + w_{00}^\dagger w_{00} \nabla (w_{00}^\dagger w_{00}) \big) \Big\},
\end{aligned} \tag{1.113}$$

и

$$\begin{aligned}
S_{\mathrm{int}}^{(3)} &= \pi T \Gamma_{00} \int d\boldsymbol{r} \sum_{\beta, m>0} \left\{ \operatorname{tr} I_m^\beta w_{00}^\dagger \operatorname{tr} I_{-m}^\beta [w_{00}, w_{00}^\dagger] + \operatorname{tr} I_{-m}^\beta q \operatorname{tr} I_m^\beta [w_{00}, w_{00}^\dagger] \right\}, \\
S_{\mathrm{int}}^{(4)} &= -\frac{\pi T \Gamma_{00}}{4} \int d\boldsymbol{r} \left\{ 2 \sum_{\beta, m>0} \operatorname{tr} I_{-m}^\beta [w_{00}, w_{00}^\dagger] \operatorname{tr} I_m^\beta [w_{00}, w_{00}^\dagger] + \sum_\beta (\operatorname{tr} I_0^\beta [w_{00}, w_{00}^\dagger])^2 \right\}, \\
S_0^{(4)} &= \frac{\sigma_{xx}}{32} \int \left(\prod_{j=1}^4 \frac{d^d \boldsymbol{q}_j}{(2\pi)^d} \right) \delta \left(\sum_{j=1}^4 \boldsymbol{q}_j \right) \sum_{n_1 n_2 n_3 n_4}^{\beta\gamma\delta\mu} [w_{00}]_{n_1 n_2}^{\beta\gamma}(q_1) [w_{00}^\dagger]_{n_2 n_3}^{\gamma\delta}(q_2) [w_{00}]_{n_3 n_4}^{\delta\mu}(q_3) \times \\
&\times [w_{00}^\dagger]_{n_4 n_1}^{\mu\beta}(q_4) \left\{ (\boldsymbol{q}_1 + \boldsymbol{q}_2)(\boldsymbol{q}_3 + \mathbf{q}_4) + (\boldsymbol{q}_2 + \boldsymbol{q}_3)(\boldsymbol{q}_1 + \boldsymbol{q}_4) - \kappa^2 z_0 (n_{12} + n_{34}) - 2h_0^2 \right\}.
\end{aligned} \tag{1.114}$$

Вычисления средних в (1.112) несложные, но достаточно громоздки (подробности приведены в приложении A.4). Ответы для каждого из членов в выражении (1.112) приведены в таблице 1.5.

Полное выражение для двухпетлевого вклада (1.112) принимает вид (как обычно существенны только члены расходящиеся при $\epsilon \to 0$):

$$\delta^{(2)} \sigma'_{xx} = 8 \frac{\Omega_d^2 h_0^{2\epsilon}}{\tilde{\sigma}_{xx} \epsilon} \left[a_2 - 8\big(2 + \ln(1 + \gamma_s)\big) \right], \tag{1.115}$$

Таблица 1.5: Двухпетлевые вклады в выражении (1.112). Символ * обозначает, что интегралы A_0 и C_0' (см. Прил. А.4), которые сокращаются в сумме двух членов, опущены. Параметр $\alpha \equiv 1 + \gamma_s$ стремится к нулю.

	$\frac{2}{\epsilon\alpha}$	$\frac{\ln^2\alpha}{(\epsilon/2)^2}$	$\frac{\ln\alpha}{(\epsilon/2)^2}$	$\frac{\ln^2\alpha}{\epsilon/2}$	$\frac{\ln\alpha}{\epsilon/2}$	$\frac{4}{\epsilon^2}$	$\frac{2}{\epsilon}$
$O_1^{(4)}$	0	2	0	0	0	2	0
$O_1^{(3)} S_{\rm int}^{(3)}$	0	-4	0	0	0	-4	$8 + 4\zeta(3)$
$O_1^{(2)}\big(S_{\rm int}^{(4)} + S_0^{(4)} + {}+\frac{1}{2}(S_{\rm int}^{(3)})^2\big)$	0	2	0	0	0	2	$-4 - 2\zeta(3) - \frac{2}{3}\pi^2$
$O_2^{(6)}$	0	0	16	0	-4	-2	$-\frac{\pi^2}{3} + \frac{\pi^2}{2}\ln 2 + \frac{\pi^4}{12} + \frac{11}{2}\zeta(3) + {}+\frac{\pi^2}{3}\ln^2 2 - \frac{1}{3}\ln^4 2 - {}-7\zeta(3)\ln 2 - 8\,\mathrm{li}_4(\frac{1}{2})$
$O_2^{(5)} S_{\rm int}^{(3)*}$	0	0	-8	4	20	4	$-12 + 4\zeta(3) + \frac{4}{3}\pi^2$
$O_2^{(4)} S_0^{(4)}$	2	4	-8	-2	1	2	44/3
$O_2^{(2)}\big(S_{\rm int}^{(4)} + {}+\frac{1}{2}(S_{\rm int}^{(3)})^2\big)^*$	-2	-4	0	-2	-25	-4	$\frac{55}{2} - 2\zeta(3) - \frac{8}{3}\pi^2 + 12\ln^2 2 - {}-44\ln 2 + 16\boldsymbol{G} - 8\,\mathrm{li}_2(\frac{1}{2})$
Суммарно	0	0	0	0	- 8	0	$a_2 - 16$

где

$$
\begin{aligned}
a_2 \;&=\; 50 + \frac{1}{6} - 3\pi^2 + \frac{19}{2}\zeta(3) + 16\ln^2 2 - 44\ln 2 + \frac{\pi^2}{2}\ln 2 + 16\boldsymbol{G} \\
&+\; \frac{\pi^4}{12} + \frac{\pi^2}{3}\ln^2 2 - \frac{1}{3}\ln^4 2 - 7\zeta(3)\ln 2 - 8\,\mathrm{li}_4(1/2) \approx 1.64. \qquad (1.116)
\end{aligned}
$$

Здесь $\boldsymbol{G} \approx 0.916$ – постоянная Каталана, $\zeta(x)$ – дзета функция Римана, и $\mathrm{li}_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x^k/k^n$. Обратим внимание, что в выражении (1.115) есть логарифмически расходящий при $\gamma_s = -1$ член. В окончательных выражениях для отдельных членов в (1.112), представленных в таблице 1.5, есть члены более сингулярные как по ϵ, так и по $1 + \gamma_s$. Однако все они сокращаются в конечном итоге.

С учётом однопетлевого вклада (1.111) выражение для проводимости в двухпетлевом приближении принимает вид:

$$
\sigma_{xx}' = \sigma_{xx}\Big[1 + \frac{8\Omega_d h'^{\epsilon}}{\epsilon\tilde{\sigma}_{xx}} + \frac{2a_2\Omega_d^2 h'^{2\epsilon}}{\tilde{\sigma}_{xx}^2\epsilon}\Big]. \qquad (1.117)
$$

Используя процедуру [10] минимального переопределения параметра σ_{xx} таким образом, чтобы в физической наблюдаемой σ_{xx}, определяемой выражением (1.117), не осталось расходимостей при $\epsilon \to 0$ можно получить двухпетлевое уравнение ренормгруппы [21]. В размерности $d = 2$ уравнение ренормгруппы для проводимости в двухпетлевом приближении принимает вид:

$$\frac{d\tilde{\sigma}_{xx}}{dy} = -\frac{2}{\pi} - \frac{a_2}{4\pi^2\tilde{\sigma}_{xx}}. \tag{1.118}$$

Впервые этот результат был получен в работе [127].

1.5.4 Обсуждение результатов

Полезно сравнить двухпетлевое уравнение (1.118) с известным до пятой петли включительно уравнением ренормализационной группы для случая невзаимодействующих электронов ($\gamma_s = 0$) [128, 129, 130]:

$$\frac{d\tilde{\sigma}_{xx}}{dy} = -\frac{1}{2\pi^2\tilde{\sigma}_{xx}} - \frac{3}{8\pi^4\tilde{\sigma}_{xx}^3}. \tag{1.119}$$

Как в случае невзаимодействующих электронов, так и в случае электронов с кулоновским взаимодействием, петлевые поправки в уравнение ренормализационной группы отрицательные. Это даёт основание считать, что в обоих случаях для электронов, поляризованных по спину, в $d = 2$ переход металл-изолятор отсутствует и электронная система становится локализованной на больших масштабах. Интересно отметить, что наличие кулоновского взаимодействия усиливает локализацию.

1.6 Заключение

В этой главе с помощью подхода нелинейной сигма-модели и метода ренормализационной группы изучено влияние спиновых и изоспиновых степеней свободы на переход металл-изолятор в двумерной сильно-коррелированной неупорядоченной электронной системе. Самым интересным результатом этой главы являются однопетлевые уравнения ренормализационной группы (1.27). Новизна этого результата состоит в том, что при выводе уравнений ренормализационной группы не предполагается равенство амплитуд взаимодействия между электронами с разными проекциями спина и изоспина. При этом оказывается, что случай, когда все амплитуды взаимодействия одинаковы, является неустойчивым относительно малых нарушений этого условия.

[21] На самом деле в данном случае эта процедура соответствует дифференцированию обоих частей выражения (1.117) по h'.

Общие уравнения ренормализационной группы (1.27) были применены для описания транспорта в двумерной электронной системе в Si-МОП структуре, где изоспиновая степень свободы возникает из-за наличия двух долин. Показано, что наличие конечного междолинного и зеемановского расщеплений приводит в процессе ренормгруппового потока к нарушению симметрии в амплитудах взаимодействия электронов с разными проекциями спина и изоспина. Это позволяет объяснить экспериментально наблюдаемую эволюцию температурной зависимости сопротивления от металлического к диэлектрическому типу при увеличении параллельного магнитного поля. Также предсказана возможность существования двух максимумов в температурной зависимости сопротивления вблизи перехода металл-изолятор.

Другое применение общих уравнений ренормализационной группы (1.27) – это описание транспорта в двумерной электронной системе в структурах с двойной квантовой ямой и общими рассеивателями. Из-за различия в межэлектронном взаимодействии внутри и между ямами естественно возникает ситуация, в которой амплитуды взаимодействия различны с самого начала. Это приводит к тому, что при низких температурах электроны в каждой из квантовых ям ведут себя независимо. Сильное различие в амплитудах взаимодействия, связанное с достаточно большим (по сравнению с длиной статического экранирования) расстоянием между ямами, позволяет объяснить наблюдаемое в эксперименте слабое изменение температурной зависимости сопротивления и времени сбоя фазы при сильном обеднении электронами одной из квантовых ям.

Как важный предельный случай, исследован транспорт в двумерной электронной системе, полностью поляризованной по спину, с кулоновским взаимодействием. В этом случае однопетлевое уравнение ренормализационной группы для проводимости становится универсальным (правая часть зависит только от проводимости) и предсказывает локализацию в $d = 2$. Полученный в этой главе двухпетлевой вклад в уравнение ренормализационной группы также работает в пользу локализации. Это обстоятельство указывает на то, что в электронной системе, полностью поляризованной по спину, переход металл-изолятор отсутствует в $d = 2$ при любом межэлектронном взаимодействии.

Глава 2

Роль электрон-электронного взаимодействия в целочисленном квантовом эффекте Холла

2.1 Введение

В этой главе изучается роль электрон-электронного взаимодействия в целочисленном квантовом эффекте Холла. Построенная в этой главе теория показывает, что механизм появления делокализованных состояний в магнитном поле выживает в присутствии меж-электронного взаимодействия. Также построенная теория объясняет эксперимент по наблюдению осцилляций магнитосопротивления, отличающихся от осцилляций Шубникова-де Гааза, в слабом магнитном поле и предсказывает существование аналогичных осцилляций теплоёмкости.

2.1.1 Целочисленный квантовый эффект Холла

Физика двумерной заряженной частицы в сильном постоянном перпендикулярном магнитном поле и в случайном потенциале исследовалась достаточно интенсивно, начиная с 60-х годов прошлого века. Несмотря на интересную специфику электронного транспорта в размерности $d = 2$ в присутствии постоянного перпендикулярного магнитного поля [131, 132, 133, 134, 135, 136, 137, 138], в пределе большого размера системы стандартная скейлинговая теория предсказывает локализацию частицы для унитарного класса симметрии [27], аналогично случаю без магнитного поля (ортогональный класс симметрии). Открытие целочисленного [139, 140], а затем и дробного [141] квантовых эффектов Холла показывает, что предсказания стандартной скейлинговой теории для двумерного электронного транспорта в присутствии постоянного перпендикулярного магнитного поля не верны. Основное противоречие состоит в том, что в пределе низких температур [1] при некоторых значениях магнитного поля наблюдается конечная диссипативная проводимость σ_{xx}. Эти значения магнитного поля лежат между областями магнитного поля, в которых при низких температурах холловская проводимость σ_{xy} принимает целочисленное или дробное значения в единицах e^2/h, а σ_{xx} обращается в нуль (см. Рис. 2.1).

Для объяснения дробного квантового эффекта Холла сразу же было привлечено электрон-электронное взаимодействие [141, 143, 144] [2]. В тоже время объяснение целочисленного квантового эффекта Холла строилось исходя из модели невзаимодействующих электронов. В работах [148, 149, 150, 151, 152] была сформулирована основная проблема: для объяснения экспериментального наблюдаемого целочисленного квантования холловской проводимости необходим механизм, который позволяет существовать делокализованным состояниям в задаче о частице в случайном двумерном потенциале в присутствии перпендикулярного постоянного магнитного поля. В рамках подхода нелинейной сигма-модели таким механизмом оказался топологический член, существование которого при $d = 2$ для унитарного класса симметрии даёт возможность объяснить наличие делокализованных состояний и целочисленное квантование холловской проводимости [28, 29] [3]. Топологический член может быть записан в виде интеграла по границе и поэтому не вносит вклад в стандартных пертурбативных (по $1/\sigma_{xx}$) вычислениях. Значение топологического члена не равно нулю на специальных решениях классических уравнений движения для нелинейной сигма-модели. Эти решения принято называть инстантонами и нумеровать значением топологического заряда. Инстантоны в нелинейной сигма-модели с топологическим членом представляют собой обобщение инстантонов Белавина-Полякова

[1] Типичный диапозон температур составляет 0.05 – 4 К.

[2] Так как целью настоящей главы является рассмотрение целочисленного квантового эффекта Холла, в дальнейшем дробный квантовый эффект Холла обсуждаться не будет. К сожалению, в настоящее время отсутствует обзор, охватывающий современное состояние всей области исследований дробного квантового эффекта Холла. Детальный обзор ранних экспериментальных данных и теоретических подходов можно найти в [145, 146, 147].

[3] Отметим, что топология появляется также в задаче о частице в периодическом двумерном потенциале в присутствии перпендикулярного постоянного магнитного поля с рациональным числом квантов магнитного потока на одну ячейку [153, 154]. Существенным отличием этой задачи является наличие трансляционной инвариантности. Несмотря на различие задач с периодическим и случайным потенциалом, имеется их некоторая связь с точки зрения топологической классификации [31, 32, 33].

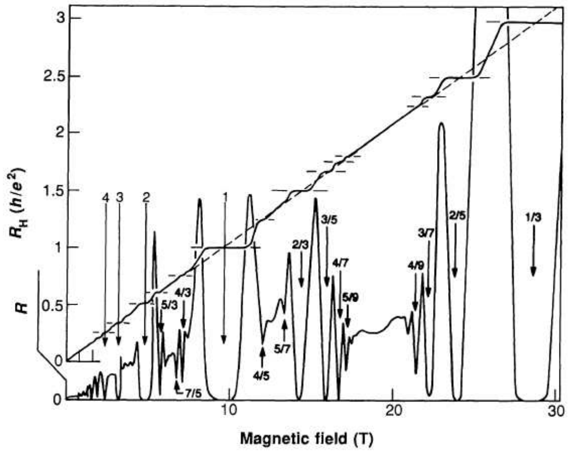

Рисунок 2.1: Зависимость холловского (R_H) и диссипативного (R) сопротивлений от магнитного поля. Рисунок взят из работы [142].

в $O(3)$ нелинейной сигма-модели, описывающей двумерный ферромагнетик [155]. Так как топологический член пропорционален σ_{xy}, то в теории зависимость от холловской проводимости появляется только за счёт учета непертурбативных (с точки зрения разложения по $1/\sigma_{xx}$) эффектов.

Как оказывается нелинейная сигма-модель с топологическим членом, описывающая частицу в двумерном случайном потенциале в присутствии перпендикулярного постоянного магнитного поля, во многом аналогична четырёхмерным калибровочным теориям Янга-Миллса (в том числе и квантовой хромодинамике). В нелинейной сигма-модели также как и в теории Янга-Миллса имеются асимптотическая свобода (слабая локализация) [156, 157, 158], инстантоны [159] и θ-вакуум (зависимость от холловской проводимости) [160, 161] [4]. Применение непертурбативных методов, развитых для теории Янг-Миллса в работах [162, 163, 164] [5], позволило распространить скейлинговую теорию андерсоновской локализации в размерности $d = 2$ на случай перпендикулярного постоянного магнитного поля [170, 171, 172, 173, 174, 175, 176, 177]. Важной особенностью этой скейлинговой теории является её двухпараметричность: с изменением размера меняется не только диссипативная, но и холловская проводимость. Идея перенормировки холловской проводимости, необходимая для объяснения целочисленного квантования холловской проводимости, была перенесена в теорию Янга-Миллса и известна как перенормировка θ-

[4] В теории Янга-Миллса величина, которой пропорционален топологический член в действии и которая аналогична холловской проводимости, называется θ-углом.

[5] Подробное изложение непертурбативных методов в теории Янга-Миллса можно найти в обзорах [165, 166, 167, 168] и книге [169].

угла [178, 174].

Существование инстантонов основано на целочисленном квантовании топологического заряда или, эквивалентно, отождествлении границы области, в которой определена теория, с одной точкой. Для задачи о целочисленном квантовом эффекте Холла это означает отождествление двумерной поверхности со сферой. В тоже время при выводе нелинейной сигма-модели из гамильтонина частицы в двумерном случайном потенциале в присутствии перпендикулярного постоянного магнитного поля граничных условий, нужных для целочисленного квантования топологического заряда, не появляется [29]. Недавно, в работе [179] было показано, что флуктуации топологического заряда около целочисленного значения описывают краевые моды, которые существуют на границе двумерной области [152].

Как видно из рисунка 2.2, область магнитных полей ΔB, в которой холловская проводимость отличается от целого значения, а диссипативная проводимость не равна нулю, уменьшается при понижении температуры. Важным предсказанием двухпараметрической скейлинговой теории является существование делокализованных состояний при значениях энергии, отвечающих полуцелым значениям холловской проводимости. Зависимость ширины соответствующей критической области от температуры является степенной, $\Delta B \propto T^{\kappa}$, с одним и тем же критическим индексом κ для переходов между плато с разными целочисленными значениями σ_{xy} [181]. В работах [182, 183] это предсказание было экспериментально подтверждено. Дальнейшая проверка предсказаний скейлинговой теории до сих пор остаётся в центре экспериментальных исследований целочисленного квантового эффекта Холла. Они включают в себя аккуратное измерение критических индексов, описывающих скейлинг в критической области с температурой, с частотой [184, 185, 186, 187], с размером образца [188, 189, 190, 191] и с током [192, 193, 194]. Было обнаружено, что на возможность наблюдения скейлингового поведения существенным образом влияют макроскопические неоднородности в образце, например, градиент электронной концентрации, и плавноменяющаяся компонента случайного потенциала [195, 196, 197, 198, 199, 200, 201].

Параллельно с развитием скейлинговой теории на основе нелинейной сигма-модели с топологическим членом, для объяснения целочисленного квантового эффекта Холла рассматривалась задача о частице в двумерном случайном плавном (меняющимся на масштабах больших магнитной длины) потенциале в присутствии перпендикулярного постоянного магнитного поля. Её изучение с помощью идей классической перколяции для движения по эквипотенциальным линиям потенциала [202, 203, 204, 205, 206] и учётом квантового

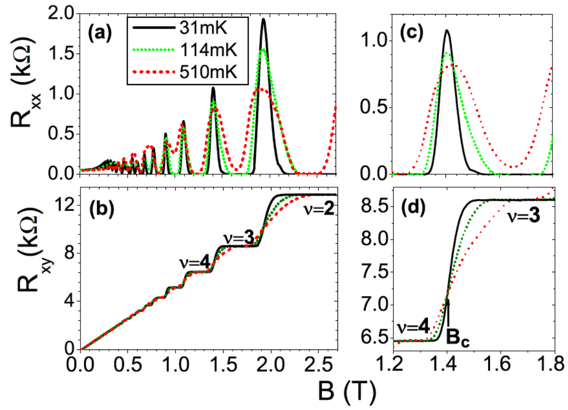

Рисунок 2.2: Зависимость холловского (R_{xy}) и диссипативного (R_{xx}) сопротивлений от магнитного поля при разных температурах в $\mathrm{Al_{0.0085}Ga_{0.9915}As}$-$\mathrm{Al_{0.3}Ga_{0.7}As}$ гетероструктуре с электронной концентрацией $1.2 \cdot 10^{11}$ см$^{-2}$. Рисунок взят из работы [180].

туннелирования между ними [207, 209] привело к созданию модели Чалкера-Коддингтона [209], которая, наряду с методом прямой диагонализации гамильтониана, успешно используется для численного изучения скейлинга в целочисленном квантовом эффекте Холла (см., например [210, 38]). Численные эксперименты позволяют определить критический индекс ν, характеризующий связь ширины критической области с размером системы L, $\Delta B \propto L^{-1/\nu}$. Также численные эксперименты позволяют детально исследовать явление мультифрактальности волновых функций в критической области, соответствующей переходу между плато с разными целочисленными значениями холловской проводимости (см., например [37, 38]).

Существование делокализованных состояний в конечном перпендикулярном магнитном поле и их отсутствие в нулевом магнитном поле является одним из предсказаний скейлинговой теории целочисленного квантового эффекта Холла. При уменьшении магнитного поля энергия делокализованных состояний увеличивается и они одно за одним независимо всплывают над уровнем Ферми [211, 212]. Последовательное пересечение уровня Ферми делокализованными состояниями должно приводить к появлению дополнительных, по сравнению со стандартными осцилляциями Шубникова-де Гааза, осцилляций магнитосопротивления [212]. Следуя работам [213, 214] будем называть эти осцилляции, развивающиеся в целочисленный квантовый эффект Холла при низких температурах и/или сильных магнитных полях, квантовыми холловскими осцилляциями. Начиная с работы [215], численные эксперименты в целом подтверждают всплывание делокализованных уровней при уменьшении магнитного поля, при этом детали зависят от отношения длины корреляции случайного потенциала к магнитной длине[216, 217, 218, 219, 220, 221, 222]. Экспериментальные исследования в двумерной эдектронной системе в Si-МОП структурах [223, 224, 225, 226, 227] и других двумерных системах [228, 229] показали, что при уменьшении магнитного поля делокализованные состояния сливаются в одно состояние, которое выживает в пределе нулевого магнитного поля. Такое поведение было связано (см., например [74]) с существованием в нулевом магнитном поле во взаимодействующей электронной системе перехода металл-изолятор, который обсуждался в главе 1.

Скейлинговая теория, построенная с помощью подхода нелинейной сигма-модели с топологическим членом, даёт качественное описание целочисленного квантового эффекта Холла для невзаимодействующих электронов. Значения критических индексов, характеризующих переход между плато и мультифрактальность волновых функций на нём, дают численные эксперименты, моделирующие одноэлектронную задачу. В тоже время во всех лабораторных экспериментах, в которых изучается целочисленный квантовый эффект Холла, с одной стороны, имеется качественное согласие с скейлинговой теорией для невзаимодействующих электронов, а с другой стороны, имеется в наличии электрон-электронное взаимодействие. В пользу последнего указывает наблюдение дробного квантового эффекта Холла и перехода металл-изолятор в нулевом магнитном поле на тех же образцах, на которых наблюдается целочисленный квантовый эффект Холла [6]. При этом в настоящее время теоретическое описание всех трёх явлений: целочисленного и дробного квантовых эффетов Холла и перехода металл-изолятор в нулевом магнитном поле, строится по-разному. Таким образом, требуется построение теории, которая могла бы единообразным образом описывать все три явления в двумерной взаимодействующей неупорядоченной электронной системе.

2.1.2 Постановка задачи

Для того, чтобы учесть электрон-электронное взаимодействие в теории целочисленного квантового эффекта Холла необходимо рассматривать нелинейную сигма-модель (1.2) и (1.3) с добавленным к ней топологическим членом. В работе [233] в рамках такого подхода, идеи скейлинговой теории работ [28, 170] были распространены на случай взаимодействующей электронной системы со спинами, полностью поляризованными магнитным полем. Существенным упрощением рассматриваемой ситуации является тот факт, что, как это об-

[6] Отметим также, что в режиме магнитных полей, когда холловская проводимость целочисленно квантована и основную роль в транспорте играют краевые состояния, электрон-электронное взаимодействие играет важную роль, так как его учёт принципиально важен для описания экспериментов по интерференции и релаксации краевых состояний (см., например [230, 231, 232]).

суждалось в разделе 1.5, переход металл-изолятор в двумерной бесспиновой электронной системе в нулевом магнитном поле отсутствует. В работах [234, 235] нелинейная сигма-модель (1.2) и (1.3) с топологическим членом была использована для описания дробного квантового эффекта Холла с помощью идеи преобразования Черна-Саймонса (см., например [147]).

В работе [233] предполагалось, что также как и без учёта топологического члена случай короткодействующего межэлектронного взаимодействия на больших масштабах эквивалентен случаю невзаимодействующих электронов, а случай кулоновского взаимодействия относится к другому классу универсальности. Поэтому, экспериментальные результаты в критической области переходов между плато должны описываться другими критическими индексами, чем те, которые дают численные расчёты в модели невзаимодействующих электронов. Численные результаты работы [236] подтверждают предположение об иррелевантности короткодействующего взаимодействия. Однако, в рамках нелинейной сигма-модели (1.2) и (1.3) с топологическим членом предположение о иррелевантоности короткодействующего электрон-электронного взаимодействия для электронов с полностью поляризованным спином до сих пор проверено не было. Для проверки этого утверждения требуется обобщение непертурбативных вычислений работ[176, 177] на случай межэлектронного взаимодействия.

В численном эксперименте учёт межэлектронного взаимодействия достаточно сложен. В случае короткодействующего взаимодействия между электронами, поляризованными по спину, имеет смысл приближение Хартри-Фока, построенное на волновых функциях невзаимодействующей задачи [7]. Основной интерес представляет вычисление критического индекса, определяющего зависимость времени сбоя фазы от температуры в критической точке, соответствующей переходу между плато в одноэлектронной задаче, и, соответственно, зависимость ширины критической области перехода между плато от температуры [8]. В

[7]Это связано с тем, что в этом случае короткодействующее межэлектронное взаимодействие иррелевантно.

[8]Отметим, что в настоящее время не существует численных результатов для критических индексов, характеризующих переход между плато в случае кулоновского взаимодействия. Это связано с тем, что для изучения критической точки, соответствующей случаю кулоновского взаимодействия, хартри-фоковский подход не годится, так как предполагает иррелевантность кулоновского взаимодействия, что не верно. Несмотря на это, в работах [237, 238, 239] с помощью хартри-фоковского подхода было исследовано влияние кулоновского взаимодействия на туннельную плотность состояний, перенормировку g-фактора и сжимаемости. Не удивительно, что при этом для критических индексов на переходе между плато были получены значения, согласующиеся с результатами для критической точки в одноэлектронной задаче [240, 238].

рамках приближения Хартри-Фока [9] этот критический индекс был численно вычислен в работе [236]. Найденное значение критического индекса приводит к значению κ меньшему на 10%, чем то, которое извлекается из лабораторных экспериментов [242]. Существенным предположением работ [236, 242] является то, что время сбоя фазы определяется только одним (соответствующим квадрату модуля антисимметризованного произведения двух волновых функций) из бесконечного набора мультифрактальных индексов. Для обоснования этого предположения необходимо провести аккуратное вычисление температурной зависимости времени сбоя фазы с помощью нелинейной сигма-модели (1.2) и (1.3) с топологическим членом для случая короткодействующего межэлектронного взаимодействия.

Скейлинговая теория целочисленного квантового эффекта Холла для невзаимодействующих электронов предсказывает проявление в слабом магнитном поле делокализованных состояний в виде квантовых холловских осцилляций [212]. В недавних экспериментах [243] по измерению магнитосопротивления в тонком трёхмерном образце из слоёв GaAs, допированных Si при низких температурах ($0.1 - 4.2$ K), когда транспорт в образце имел характер двумерного с эффективной концентрацией электронов около 10^{12} см$^{-2}$, в слабых магнитных полях были найдены осцилляции, отличающиеся от осцилляций Шубникова-де Гааза. Оказалось, что при низких температурах амплитуда наблюдаемых осцилляций имеет сильную температурную зависимость, в то время как амплитуда квантовых холловских осцилляций в случае невзаимодействующих электронов должна иметь слабую температурную зависимость. Этот экспериментальный результат, указывающий на необходимость количественного учёта межэлектронного взаимодействия в скейлинговой теории целочисленного квантового эффекта Холла, требует теоретического объяснения.

Итак, *основной задачей*, которая решается данной главе, является изучение влияния электрон-электронного взаимодействия на целочисленный квантовый эффект Холла в двумерной сильно-коррелированной неупорядоченной электронной системе в магнитном поле, полностью поляризующем электронный спин.

Материал данной главы организован следующим образом. В разделе 2.2 приводятся необходимые для понимания дальнейшего материала сведения о нелинейной сигма-модели с топологическим членом и выводятся выражения для (непертурбативных) инстанонных поправок в физические наблюдаемые. В разделе 2.3 полученные результаты применяются для изучения роли электрон-электронного взаимодействия для переходов между плато в

[9] В работе [241] было предложено обобщение модели Чалкера-Коддингтона на случай короткодействующего межэлектронного взаимодействия. Однако, численные вычисления критических индексов проведены не были.

режиме целочисленного квантового эффекта Холла. В разделе 2.4 вычисляется температурная зависимость времени сбоя фазы на переходе между плато в случае короткодействующего межэлектронного взаимодействия. В разделе 2.5 результаты, полученные в разделе 2.2, применяются для изучения влияния межэлектронного взаимодействия на осцилляции магнитосопротивления и теплоёмкости, связанные с наличием делокализованных состояний. Завершается глава заключением (раздел 2.6).

2.2 Нелинейная сигма-модель с топологическим членом

2.2.1 Введение

В этом разделе будет рассмотрена нелинейная сигма-модель с топологическим членом, которая описывает двумерную взаимодействующую электронную систему в сильном, поляризующем спин, перпендикулярном магнитном поле. С учётом наличия межэлектронного взаимодействия будут вычислены непертурбативные (инстантонные) вклады в зависимость диссипативной и холловской проводимости от размера системы при нулевой температуре.

2.2.2 Топологический член и холловская проводимость

В предыдущей главе элемент $Q^{\alpha\beta}_{mn}(\boldsymbol{r})$ был матрицей 4×4 в спиновом и изоспиновом пространстве. Так как в этой главе рассматривается ситуация двумерных электронов, полностью поляризованных по спину магнитным полем (также как и в разделе 1.5), то величина $Q^{\alpha\beta}_{mn}(\boldsymbol{r})$ является скаляром. В случае двумерных электронов, полностью поляризованных по спину перпендикулярным магнитным полем $\boldsymbol{B}$, действие нелинейной сигма-модели имеет вид

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_\sigma + \mathcal{S}_F + \mathcal{S}_{\text{top}}. \tag{2.1}$$

Здесь [12, 13, 14, 16]

$$\mathcal{S}_\sigma = -\frac{\sigma_{xx}}{8} \int d^2\boldsymbol{r} \, \mathrm{tr}(\nabla Q)^2, \tag{2.2}$$

где σ_{xx} представляет собой друдовскую проводимость в единицах e^2/h и предполагается большой по сравнению с единицей [10]: $\sigma_{xx} \gg 1$. Символ tr обозначает след по репличным

[10]Заметим, что коэффициенты перед знаком интеграла в уравнениях (1.2) и (2.2) отличаются в $2\times 2 = 4$ раза, где одна двойка соответствует вырождению по спину, а другая двойка – по изоспину.

и мацубаровским индексам. Наличие электрон-электронного взаимодействия приводит к дополнительному вкладу в действие нелинейной сигма-модели [56, 57, 58, 59, 105]

$$\mathcal{S}_F = -\pi T\Gamma_{00}\int d^2\boldsymbol{r}\,\mathrm{tr}\, I_n^\alpha Q(\boldsymbol{r})\,\mathrm{tr}\, I_{-n}^\alpha Q(\boldsymbol{r}) + 4\pi T z\int d^2\boldsymbol{r}\,\mathrm{tr}\,\eta Q - 6\pi T z\int d^2\boldsymbol{r}\,\mathrm{tr}\,\eta\Lambda. \tag{2.3}$$

При наличии сильного перпендикулярного магнитного поля возникает еще одно слагаемое [28]:

$$\mathcal{S}_{\mathrm{top}} = 2\pi i\sigma_{xy}\mathcal{C}[Q], \qquad \mathcal{C}[Q] = \frac{1}{16\pi i}\int d^2\boldsymbol{r}\,\mathrm{tr}\,\varepsilon_{ab} Q\nabla_a Q\nabla_b Q. \tag{2.4}$$

Здесь σ_{xy} представляет собой холловскую проводимость [11] без учёта квантовых поправок в единицах e^2/h, $\varepsilon_{ab} = -\varepsilon_{ba}$ – антисимметричный тензор второго ранга. Наличие для $d = 2$ в нелинейной сигма-модели члена (2.4) связано с тем, что он имеет две пространственные производные и инвариантен относительно преобразования $\boldsymbol{B} \to -\boldsymbol{B}$, $x \to y$ и $y \to x$.

Выражение (2.4) принято называть топологическим членом, а величину $\mathcal{C}[Q]$ – топологическим зарядом. Если параметризовать матрицу Q с помощью унитарной матрицы $\mathcal{T}$ [12] как $Q = \mathcal{T}^{-1}\Lambda\mathcal{T}$, то $\mathcal{C}[Q]$ можно переписать в виде интеграла по границе двумерной области:

$$\mathcal{C}[Q] = \frac{1}{4\pi i}\oint ds\,\mathrm{tr}\,\Lambda\mathcal{T}\nabla_s\mathcal{T}^{-1}. \tag{2.5}$$

Можно показать, что если матрица Q на границе принимает одно и то же значение, например, $Q\big|_{\mathrm{edge}} = \Lambda$, то

$$\mathcal{C}[Q] = W, \tag{2.6}$$

где W – целое число. Этот результат является выражением следующего результата гомотопической теории [244] [13]:

$$\pi_2(SU(2N)/SU(N)\times U(N)) = \mathbb{Z}. \tag{2.7}$$

Напомним, что здесь $2N = 2N_M N_r$ – это размер матрицы Q, который стремится к нулю в репличном пределе $N_r \to 0$.

Вообще говоря, граничные условия на матрицу Q в действии $\mathcal{S}$ нелинейной сигма-модели не требуют постоянства Q на границе. Поэтому удобно разделить функциональный

[11] Заметим, что при наличии перпендикулярного магнитного поля величина σ_{xx} в выражении (2.2) тоже зависит от магнитного поля. Например, в случае классически слабых магнитных полей $\omega_c\tau_{\mathrm{tr}} \ll 1$, $\sigma_{xx} = \pi\nu_\star D/(1+\omega_c^2\tau_{\mathrm{tr}}^2)$ и $\sigma_{xy} = \omega_c\tau_{\mathrm{tr}}\sigma_{xx}$.

[12] Заметим, что только унитарные матрицы $\mathcal{T}$, не коммутирующие с Λ (из факторгруппы $U(2N)/U(N)\times U(N)$), приводят к нетривиальной матрице Q. Это согласуется с тем, что унитарная и эрмитова матрица Q размера $2N\times 2N$ параметризуется $2N^2$ действительными параметрами.

[13] С учетом того, что $SU(N)/SU(N-1)\times U(1)$ изоморфно CP^{N-1}, результат (2.7) аналогичен более известному результату $\pi_2(CP^{N-1}) = \pi_2(S_1) = \mathbb{Z}$.

интеграл по Q на интеграл по всем Q с заданным значением Q_b на границе, $Q\big|_{\text{edge}} = Q_b$, и интеграл по всем Q_b. Для этого представим матрицу Q в виде [179]:

$$Q = t^{-1} Q_0 t, \tag{2.8}$$

где Q_0 – произвольная матрица, удовлетворяющая граничному условию

$$Q_0\big|_{\text{edge}} = \Lambda. \tag{2.9}$$

Будем считать, что матрица $Q_t = t^{-1}\Lambda t$ удовлетворяет классическим уравнениям движения для действия $\mathcal{S}$ и условию $Q_t\big|_{\text{edge}} = Q_b$ на границе. Тогда

$$\int \mathcal{D}[Q] e^{\mathcal{S}[Q]} = \int \mathcal{D}[Q_t] e^{\mathcal{S}_{\text{eff}}[Q_t]}, \qquad \mathcal{S}_{\text{eff}}[Q_t] = \ln \int_{Q_0\big|_{\text{edge}}=\Lambda} \mathcal{D}[Q_0] e^{\mathcal{S}[t^{-1}Q_0 t]}. \tag{2.10}$$

В силу своего определения матрица $t(\boldsymbol{r})$ меняется на масштабах порядка размера системы L, и поэтому может рассматриваться как медленная переменная по сравнению с матрицей $Q_0(\boldsymbol{r})$. Поэтому, $\mathcal{S}_{\text{eff}}[Q_t]$ можно рассматривать как эффективное действие для медленных полей в процедуре стандартной перенормировки с помощью разделения на быстрые (Q_0) и медленные (Q_t) переменные. Важное дополнительное обстоятельство – это граничное условие $Q_0\big|_{\text{edge}} = \Lambda$ для быстрых полей.

Имеет место следующее соотношение [179]

$$e^{\mathcal{S}_{\text{top}}[t^{-1}Q_0 t]} = e^{i\theta \mathcal{C}[t^{-1}Q_0 t]} e^{2\pi i k \mathcal{C}[t^{-1}\Lambda t]}, \tag{2.11}$$

где целое число k и параметр θ определены с помощью соотношений $\sigma_{xy} = k + \theta/2\pi$, $-\pi < \theta \leqslant \pi$. Выражение (2.11) показывает, что для теории в объёме важно не значение σ_{xy}, а только значение её дробной части, т. е. θ, которую принято называть топологическим или θ-углом. При этом топологический заряд для полей в объёмной теории принимает целые значения по построению. В дальнейшем под $\mathcal{S}_{\text{top}}[Q_0]$ будем понимать величину $i\theta\mathcal{C}[Q_0]$. Тогда,

$$\mathcal{S}_{\text{eff}}[Q_t] = 2\pi i k \mathcal{C}[Q_t] + \tilde{\mathcal{S}}_{\text{eff}}[Q_t], \qquad \tilde{\mathcal{S}}_{\text{eff}}[Q_t] = \ln \int_{Q_0\big|_{\text{edge}}=\Lambda} \mathcal{D}[Q_0] e^{\mathcal{S}[t^{-1}Q_0 t]}. \tag{2.12}$$

Естественно предположить, что эффективное действие $\tilde{\mathcal{S}}_{\text{eff}}[Q_t]$ имеет тот же самый вид, что и действие $\mathcal{S}[Q_0]$, однако (перенормированные) параметры σ_{xx}, θ, z и Γ_{00} определены теперь на масштабе L. Если в объёмной теории существует конечная корреляционная длина ξ, то в пределе $L/\xi \to \infty$ перенормированные параметры σ_{xx} и θ обратятся в нуль и эффективная теория для матрицы Q_t примет простой вид:

$$\mathcal{S}_{\text{eff}}[Q_t] \to 2\pi i k \mathcal{C}[Q_t], \qquad L/\xi \to \infty. \tag{2.13}$$

Можно показать, что действие $2\pi ik\mathcal{C}[Q_t]$ описывает k одномерных невзаимодействующих киральных фермионов [234] [14].

Как это уже обсуждалось в предыдущей главе, наиболее важные величины, которые содержат информацию о низкоэнергетическом поведении нелинейной сигма-модели, – это физические наблюдаемые. Их вычисление более удобно, чем вычисление перенормированных параметров в действии. В рассматриваемом случае перенормированным параметрам σ_{xx}, θ и z в эффективном действии $\tilde{\mathcal{S}}_{\text{eff}}[Q_t]$ соответствуют физические наблюдаемые σ'_{xx}, θ' и z' [15]. Величины σ'_{xx} и $\sigma'_{xy} = k+\theta'/(2\pi)$ – это статические диссипативная и холловская проводимости электронной системы, определяемые по линейному отклику на внешнее электромагнитное поле. Они находятся из формул Кубо (ср. с (1.9)) [105]:

$$\begin{aligned}
\sigma'_{xx}(i\omega_n) &= -\frac{\sigma_{xx}}{4n}\left\langle \operatorname{tr}[I^\alpha_n, Q_0(\boldsymbol{r})][I^\alpha_{-n}, Q_0(\boldsymbol{r})]\right\rangle + \\
&\quad +\frac{\sigma_{xx}^2}{8n}\int d\boldsymbol{r}\left\langle \operatorname{tr} I^\alpha_n Q_0(\boldsymbol{r})\nabla Q_0(\boldsymbol{r}) \operatorname{tr} I^\alpha_{-n} Q_0(\mathrm{r}')\nabla Q_0(\mathrm{r}')\right\rangle, \qquad (2.14)\\
\sigma'_{xy}(i\omega_n) &= k+\frac{\theta}{2\pi}+\frac{\sigma_{xx}^2}{8n}\int d\boldsymbol{r}\varepsilon_{ab}\langle \operatorname{tr} I^\alpha_n Q_0(\boldsymbol{r})\nabla_a Q_0(\boldsymbol{r}) \operatorname{tr} I^\alpha_{-n} Q_0(\mathrm{r}')\nabla_b Q_0(\mathrm{r}')\rangle \qquad (2.15)
\end{aligned}$$

с помощью аналитического продолжения на действительные частоты $i\omega_n \to \omega + i0^+$ в статическом пределе $\omega \to 0$. Здесь усреднение $\langle \dots \rangle$ производится с помощью действия $\mathcal{S}[Q_0]$. Величина z', определяющая теплоёмкость, определяется с помощью выражения (1.10), в котором термодинамический потенциал Ω соответствует действию $\mathcal{S}[Q_0]$.

Если в теории с действием $\mathcal{S}[Q_0]$ (в объёмной теории) существует конечная корреляционная длина ξ, то в пределе $L/\xi \to \infty$ естественно ожидать, что σ'_{xx} и θ' обратятся в нуль. Это означает, что в пределе $L/\xi \to \infty$ электронная система характеризуется нулевой диссипативной проводимостью, $\sigma'_{xx} = 0$, и целочисленно квантованной холловской проводимостью, $\sigma'_{xy} = k$. Это рассуждение не зависит от наличия электрон-электронного взаимодействия. В тоже время, вид эффективного действия для края [234] и, как будет показано ниже, конкретная зависимость физических наблюдаемых σ'_{xx}, θ' и z' от размера системы L зависят от межэлектронного взаимодействия.

В дальнейшем мы будем опускать индекс 0 у матричного поля Q_0, имея в виду, что всегда рассматриваются конфигурации, удовлетворяющие граничному условию (2.9).

---

[14] В присутствии электрон-электронного взаимодействия при выводе нелинейной сигма-модели возникают дополнительные граничные члены, которые мы опустили, так как они не связаны с топологией задачи. Эти граничные члены приводят к тому, что эффективное действие для края в пределе $L/\xi \to \infty$ имеет более сложный вид, чем выражение (2.13), и соответствует k киральным взаимодействующим фермионам [234].

[15] Напомним, что величина $z + \Gamma_{00}$ не зависит от масштаба как следствие сохранения числа частиц.

2.2.3 Инстантоны

Вычисление физических наблюдаемых в теории возмущений по $1/\sigma_{xx}$, как это делалось в первой главе, приводит к тому, что $\theta' = \theta$, а остальные наблюдаемые не зависят от θ. Хорошо известно (см., например [165]), что для появления зависимости физических наблюдаемых от θ-угла необходимо учитывать вклады в корреляционные функции от полевых конфигураций с топологическим зарядом $\mathcal{C}[Q] \neq 0$. Легко показать с помощью неравенства $\operatorname{tr}[\partial_a Q \pm i\epsilon_{ab} Q \partial_b Q]^2 \geqslant 0$, что выполняется следующее неравенство

$$\frac{1}{8}\int d\boldsymbol{r}\, \operatorname{tr}(\nabla Q)^2 \geqslant 2\pi \bigl|\mathcal{C}[Q]\bigr|, \tag{2.16}$$

Решения $Q(\boldsymbol{r})$, на которых это неравенство становится равенством называются инстантонами и нумеруются значениями топологического заряда. Инстантон с топологическим зарядом $\mathcal{C}[Q] = 1$ имеет вид [233]

$$Q_{\text{inst}}(\boldsymbol{r}) = \mathcal{T}_0^{-1} \Lambda_{\text{inst}}(\boldsymbol{r}) \mathcal{T}_0, \qquad \Lambda_{\text{inst}}(\boldsymbol{r}) = \Lambda + \rho(\boldsymbol{r}). \tag{2.17}$$

Здесь у матрицы $\rho^{\alpha\beta}_{nm}(\boldsymbol{r})$ только четыре ненулевых элемента:

$$\begin{gathered}
\rho^{11}_{00} = -\rho^{11}_{-1-1} = -2e_0^2, \qquad \rho^{11}_{0-1} = \bar{\rho}^{11}_{-10} = 2e_0 e_1, \\
e_0 = \frac{\lambda}{\sqrt{|z-z_0|^2 + \lambda^2}}, \qquad e_1 = \frac{(z-z_0)}{\sqrt{|z-z_0|^2+\lambda^2}},
\end{gathered} \tag{2.18}$$

где $z = x + iy$. Инстантон параметризуется комплексным числом z_0, которое имеет смысл позиции инстантона, и действительным числом λ, которое определяет размер инстантона в пространстве. Постоянная матрица $\mathcal{T}_0 \in U(2N)$ параметризует повороты инстантона в мацубаровском и репличном пространстве. Как будет видно ниже, решение (2.17) зависит всего от $2N^2 + 4N$ действительных параметров. Инстантон (2.17) представляет собой известный инстантон Белавина-Полякова [155] для $O(3)$ нелинейной сигма-модели, вставленный в большую матрицу размера $2N \times 2N$.

Следуя работе [245], матрицу Λ_{inst} удобно представить в виде поворота матрицы Λ:

$$\Lambda_{\text{inst}} = R^{-1} \Lambda R, \tag{2.19}$$

где

$$\begin{gathered}
R^{\alpha\beta}_{n_1 n_3} = \delta^{\alpha\beta}\delta_{n_1 n_3}\bigl[1 + (\bar{e}_1 - 1)\delta^{\alpha 1}\delta_{n_1,0}\bigr], \quad R^{\alpha\beta}_{n_1 n_2} = -\delta^{\alpha\beta}\delta^{\alpha 1}\delta_{n_1,0}\delta_{n_2,-1} e_0, \\
R^{\alpha\beta}_{n_1 n_2} = \delta^{\alpha\beta}\delta^{\alpha 1}\delta_{n_1,0}\delta_{n_2,-1} e_0, \quad R^{\alpha\beta}_{n_2 n_4} = \delta^{\alpha\beta}\delta_{n_2 n_4}\bigl[1 + (e_1 - 1)\delta^{\alpha 1}\delta_{n_2,-1}\bigr].
\end{gathered} \tag{2.20}$$

Решение с $\mathcal{C}[Q] = -1$ (антиинстантон) получается из выражения (2.17) комплексным сопряжением. Действие S_σ на решении (2.17) равно

$$S_\sigma[Q_{\text{inst}}] = -2\pi\sigma_{xx}\Big|\mathcal{C}[Q_{\text{inst}}]\Big|. \tag{2.21}$$

Классическое действие (2.21) не зависит от параметров решения (2.17), которые поэтому являются нулевыми модами инстантона.

Наличие члена $\mathcal{S}_F$ в действии нелинейной сигма-модели приводит к тому, что инстантон (2.17) не является точным решением для действия (2.1). Однако, с точки зрения теории поля $\mathcal{S}_F$ является просто членом, приводящем к конечной массе пропорциональной соответствующей мацубаровской частоте у возбуждений w и $w^\dagger$ (см. (1.13)). Поэтому следует ожидать [16], что его роль сводится к подавлению вклада от инстантонов с размером $\lambda \lesssim 1/\sqrt{T}$. Так как мы интересуемся пределом $T \to 0$, учитывать член $\mathcal{S}_F$ при решении классических уравнений движения не требуется. Значение действия $\mathcal{S}_F$ на инстантонном решении не только зависит от параметров инстантона (в том числе и от λ), но и логарифмически расходится с размером системы. Казалось бы это означает, что всё-таки нельзя рассматривать инстантон (2.17), а надо искать новые решения для классических уравнений движения для действия (2.1). Как будет показано ниже, это не так. Проблема с логарифмической расходимостью с размером системы классического действия $\mathcal{S}_F[Q_{\text{inst}}]$ решается с помощью известного метода пространственно изменяющейся массы [163]. При этом оказывается, что в пределе нулевой температуры квантовая теория становится хорошо определенной.

2.2.4 Квантовая теория: флуктуации около инстантона

Матрица Q с топологическим зарядом $\mathcal{C}[Q] = 1$ может быть записана в виде

$$Q = \mathcal{T}_0^{-1} R^{-1} \hat{Q}\, R\, \mathcal{T}_0, \qquad \hat{Q} = W + \Lambda\sqrt{1-W^2}, \qquad W = \begin{pmatrix} 0 & w \\ w^\dagger & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.22}$$

Здесь $\mathcal{T}_0 \in U(2N)$ – постоянная в пространстве матрица, а матрица $\hat{Q}$ описывает (малые) флуктуации вокруг инстантона.

[16] На самом деле из-за того, что масса пропорциональна мацубаровским частотам, по которым проводится суммирование, член $\mathcal{S}_F$ существенным образом влияет на квантовую теорию, не только обрезая логарифмические расходимости температурой, но и меняя множители перед логарифмами. Именно из-за этого возникает зависимость уравнений ренормализационной группы (1.27) от параметров взаимодействия.

Подставляя представление (2.22) в выражение (2.2) и разлагаясь до второго порядка по W, находим, что

$$\mathcal{S}_\sigma = -2\pi\sigma_{xx} + \frac{\sigma_{xx}}{4}\int d\boldsymbol{r}\mu_\lambda^2(r) \sum_{\alpha,\beta,n_1,n_2} w^{\alpha\beta}_{n_1 n_2}\Big[O^{(0)}+\big(O^{(1)}-O^{(0)}\big)\big(\delta^{\alpha 1}(1+\delta^{1\beta})\delta_{n_1,0} +\delta^{1\beta}(1+\delta^{\alpha 1})\delta_{n_2,-1}\big)+\big(O^{(2)}+O^{(0)}-2O^{(1)}\big)\delta^{\alpha 1}\delta^{1\beta}\delta_{n_1,0}\delta_{n_2,-1}\Big] w^{\dagger\beta\alpha}_{n_2 n_1}. \tag{2.23}$$

Здесь дифференциальные операторы $O^{(a)}$, $a = 0,1,2$, определены следующим образом:

$$O^{(a)} = \frac{(r^2+\lambda^2)^2}{4\lambda^2}\left[\nabla_j + \frac{ia}{r^2+\lambda^2}\varepsilon_{jk}r_k\right]^2 + \frac{a}{2}. \tag{2.24}$$

Множитель $\mu^2_\lambda(r)$ в уравнении (2.23), где

$$\mu_\lambda(r) = \frac{2\lambda}{r^2+\lambda^2}, \tag{2.25}$$

выделен специально, так как известно [176], что анализ спектра флуктуаций вокруг инстантонного решения удобнее проводить в координатах (η,φ) стереографической проекции на сферу радиуса λ:

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{r^2-\lambda^2}{r^2+\lambda^2}, \qquad -1<\eta<1,\\ \varphi &= \tan^{-1}\frac{y}{x}, \qquad 0\leqslant\varphi<2\pi. \end{aligned} \tag{2.26}$$

При этом оператор [17]

$$O^{(a)} = \frac{\partial}{\partial\eta}\left[(1-\eta^2)\frac{\partial}{\partial\eta}\right] + \frac{1}{1-\eta^2}\frac{\partial^2}{\partial^2\varphi} + \frac{ia}{1-\eta}\frac{\partial}{\partial\varphi} - \frac{a^2}{4}\frac{1+\eta}{1-\eta} + \frac{a}{2}. \tag{2.27}$$

Собственные значения $-E^{(a)}_J$ и собственные функции $\Phi^{(a)}_{J,M}$ для оператора $O^{(a)}$ (для $a = 0,1,2$) имеют вид:

$$\begin{aligned} E^{(a)}_J &= \Big(J+\frac{a(a-3)}{2}\Big)\Big(J+1+\frac{a(a-1)}{2}\Big),\\ \Phi^{(a)}_{J,M} &= C^{(a)}_{J,M}e^{iM\varphi}(1-\eta^2)^{M/2}(1-\eta)^{a/2}P^{M+a,M}_{J-M+a(a-3)/2}(\eta),\\ C^{(a)}_{J,M} &= \frac{\sqrt{\Gamma(J-M+\frac{(2-a)(1-a)}{2})\Gamma(J+M+1+\frac{a(a-1)}{2})(2J+1)}}{2^{M+1}\sqrt{\pi}\Gamma(J)J^{(a-1)^2/2}\sqrt{(1+a(3-a)/2)J+a}}, \end{aligned} \tag{2.28}$$

где $P^{\alpha,\beta}_n(\eta)$ – полиномы Якоби [18], а целые числа J и M, принимающие следующие значения

$$J = \frac{a(3-a)}{2}, \frac{a(3-a)}{2}+1,\dots, \qquad M = -J+\frac{(1-a)a}{2},\cdots, J+\frac{a(3-a)}{2}, \tag{2.29}$$

[17]Заметим, что $d\eta d\varphi = d\boldsymbol{r}\mu^2_\lambda(r)$, $e_0 = \sqrt{(1-\eta)/2}$ и $e_1 = e^{i\varphi}\sqrt{(1+\eta)/2}$.

[18]Напомним определение полиномов Якоби: $P^{\alpha,\beta}_n(\eta) = \frac{(-1)^n}{2^n n!}(1-\eta)^{-\alpha}(1+\eta)^{-\beta}\frac{d^n}{d\eta^n}(1-\eta)^{n+\alpha}(1+\eta)^{n+\beta}$.

Таблица 2.1: Соответствие между флуктуациями нулевых мод инстантона и $w^{\alpha\beta}_{n_1 n_2}$. Выражения для $w^{\dagger\alpha\beta}_{n_1 n_2}$ получаются комплексным сопряжением.

$\alpha\ \beta$	$n_1\ n_2$	$O^{(0)}$	$O^{(1)}$	$O^{(2)}$
$\alpha > 1,\ \beta > 1$	$n_1 \geqslant 0,\ n_2 \leqslant -1$	$2it^{\alpha\beta}_{n_1 n_2}\Phi^{(0)}_{0,0}$		
$\alpha > 1,\ \beta = 1$	$n_1 \geqslant 0,\ n_2 = -1$		$2i\sqrt{2\pi}[t^{\alpha 1}_{n_1,-1}\Phi^{(1)}_{1,-1} - t^{\alpha 1}_{n_1,0}\Phi^{(1)}_{1,0}]$	
	$n_1 \geqslant 0,\ n_2 < -1$	$2it^{\alpha 1}_{n_1 n_2}\Phi^{(0)}_{0,0}$		
$\alpha = 1,\ \beta > 1$	$n_1 > 0,\ n_2 \leqslant -1$	$2it^{1\beta}_{n_1 n_2}\Phi^{(0)}_{0,0}$		
	$n_1 = 0,\ n_2 \leqslant -1$		$2i\sqrt{2\pi}\left[t^{1\beta}_{0,n_2}\Phi^{(1)}_{1,-1} + t^{1\beta}_{-1,n_2}\Phi^{(1)}_{1,0}\right]$	
$\alpha = 1,\ \beta = 1$	$n_1 > 0,\ n_2 < -1$	$2it^{\alpha\beta}_{n_1 n_2}\Phi^{(0)}_{0,0}$		
	$n_1 = 0,\ n_2 < -1$		$2i\sqrt{2\pi}\left[t^{11}_{0,n_2}\Phi^{(1)}_{1,-1} + t^{11}_{-1,n_2}\Phi^{(1)}_{1,0}\right]$	
	$n_1 > 0,\ n_2 = -1$		$2i\sqrt{2\pi}\left[t^{11}_{n_1,-1}\Phi^{(1)}_{1,-1} - t^{11}_{n_1,0}\Phi^{(1)}_{1,0}\right]$	
	$n_1 = 0,\ n_2 = -1$			$4i\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{6}}\left[\sqrt{2}t^{11}_{-1,0}\Phi^{(2)}_{1,-2} + t^{11}_{-1,-1}\Phi^{(2)}_{1,-1}\right] -$ $-4i\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{6}}\left[t^{11}_{0,0}\Phi^{(2)}_{1,-1} - i\frac{\delta\lambda}{\lambda}\Phi^{(2)}_{1,-1}\right] -$ $-4i\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{3}}\left[t^{11}_{0,-1}\Phi^{(2)}_{1,0} - \frac{\delta\bar{z}_0}{\lambda}\Phi^{(2)}_{1,0}\right]$

имеют смысл величины момента импульса и его проекции.

Как видно из уравнения (2.28), каждый из операторов $O^{(a)}$ имеет $(a+1)$ нулевую моду. Учитывая на сколько полей $w^\dagger$ действует каждый из операторов $O^{(a)}$, всего получим $2(N^2+2N)$ нулевых мод. Это число в точности соответствует числу действительных переменных, параметризующих инстантон (2.17). Небольшие изменения в размере инстантона ($\delta\lambda$), в его положении (δz_0), и в матрицах поворота ($\mathcal{T}_0 = 1 + it$) приводят к флуктуациям w и $w^\dagger$. Соответствие между ними устанавливается стандартным образом (см. Прил. Б.1). Результаты приведены в таблице 2.1. В этой таблице (с учётом $w^\dagger$) элементы $t^{\alpha\beta}_{n_1 n_2}$ и $t^{\alpha\beta}_{n_2 n_1}$ обозначают генераторы из $U(2N)/U(N)\times U(N)$, $t^{\alpha 1}_{n_1,0}$ и $t^{1\alpha}_{0,n_1}$ с $n_1 \neq 0$ для $\alpha = 1$ соответствуют генераторам из $U(N)/U(N-1)\times U(1)$. Тоже самое относится к элементам $t^{\alpha 1}_{n_2,-1}$ и $t^{1\alpha}_{-1,n_2}$ с $n_2 \neq -1$ при $\alpha = 1$. Наконец, $t^{11}_{0,0} - t^{11}_{-1,-1}$ соответствует генератору $U(1)$, описывающему вращение в плоскости xy. Отметим, что нулевые моды, отвечающие генераторам из $[U(N)/U(N-1)\times U(1)]\times[U(N)/U(N-1)\times U(1)]\times U(1)$, появляются только из-за наличия инстантона. Удобно считать, что эти генераторы, новые по сравнению с генераторами нулевых мод для тривиального решения, соответствуют некоторой матрице поворота U в уравнении (2.17). При этом матрица U имеет следущие ненулевые элементы $U^{1\beta}_{0n_1}$ и $U^{1\beta}_{-1,n_2}$ и коммутирует с Λ.

Спектр (2.28) оператора $O^{(a)}$ показывает, что флуктуации с моментом $J \gg 1$ (в отсутствии члена $\mathcal{S}_F$) меняются на масштабе порядка $\lambda/J \ll \lambda$. Разложение члена $\mathcal{S}_F$ около $Q_{\rm inst}$ до второго порядка по w и $w^\dagger$ приводит к тому, что полное действие для флуктуаций оказывается недиагональным в базисе функций $\Phi^{(a)}_{J,M}$. Это существенным образом затрудняет вычисление флуктуационного детерминанта. Для преодоления этой трудности, следуя работе [163], мы видоизменим член (2.3) следующим образом:

$$\mathcal{S}_F[Q] \to -\pi T \lambda^2 \int d\boldsymbol{r} \mu_\lambda^2(r) \Big(\Gamma_{00} \sum_{\alpha n} \operatorname{tr} I_n^\alpha Q \operatorname{tr} I_{-n}^\alpha Q - 4z \operatorname{tr} \eta Q + 6z \operatorname{tr} \eta \Lambda \Big). \tag{2.30}$$

Как будет видно из дальнейшего, во флуктуационном детерминанте возникают логарифмические расходимости. Они связаны с вкладами флуктуаций с $J \gg 1$. Поэтому можно ожидать, что введение в действие $\mathcal{S}_F$ массы $\mu_\lambda^2(r)$, медленно меняющейся в пространстве по сравнению с флуктуациями, не изменяет вида логарифмических расходимостей.

Теперь вычисления с членом $\mathcal{S}_F$, определённым выражением (2.30), становятся достаточно стандартными, хотя и трудоёмкими. Выписывается полное действие в квадратичном по W приближении и вычисляется гауссов интеграл по массивным модам. При этом, из-за наличия логарифмических расходимостей в квантовой теории требуется произвести регуляризацию флуктуационных детерминантов. В рассматриваемом случае удобно использовать схему регуляризации Паули-Вилларса [246], в которой логарифмические расходимости регуляризуются безразмерным параметром M. После вычисления флуктуационного детерминанта необходимо еще проинтегрировать по нулевым модам инстантона. В результате для отношения вкладов в статистическую сумму в секторе с топологическим зарядом $\mathcal{C}[Q] = 1$ (Z_{+1}) и с топологическим зарядом $\mathcal{C}[Q] = 0$ (Z_0) получим (см. Прил. Б.2):

$$\frac{Z_{+1}}{Z_0} = \frac{N^2}{8\pi^2} \int dx_0 dy_0 \int \frac{d\lambda}{\lambda^3} D(\gamma_s) e^{-2\pi\sigma_{xx}(M_\lambda) + i\theta} \left\langle e^{\mathcal{S}'_{F,\rm inst}} \right\rangle_U , \tag{2.31}$$

$$\mathcal{S}'_{F,\rm inst} = -\pi T \lambda^2 \int d\eta d\theta \Big(\Gamma_{00}(M_\lambda) \sum_{\alpha n} \operatorname{tr} I_n^\alpha U^{-1} \rho U \operatorname{tr} I_{-n}^\alpha U^{-1} \rho U - 4z(M_\lambda) \operatorname{tr} \eta U^{-1} \rho U \Big). \tag{2.32}$$

Здесь усреднение $\langle \ldots \rangle_U$ производится по вращениям U, соответствующим нулевым модам из $[U(N)/U(N-1) \times U(1)] \times [U(N)/U(N-1) \times U(1)] \times U(1)$, которые отсутствуют у тривиального решения. В согласии с работой [163], учёт квантовых флуктуаций в выражении (2.31) привел к замене величин σ_{xx}, Γ_{00} и z в классическом действии на их перенормированные значения

$$\sigma_{xx}(M) = \sigma_{xx}\left[1 - \frac{2f(\gamma_s)}{\pi\sigma_{xx}}\ln Me^{\boldsymbol{\gamma}}\right], \tag{2.33}$$

$$\Gamma_{00}(M) = \Gamma_{00}\left[1 - \frac{1}{\pi\sigma_{xx}}\ln Me^{\boldsymbol{\gamma}-1/2}\right], \tag{2.34}$$

$$z(M) = z\left[1 + \frac{\gamma_s}{\pi\sigma_{xx}}\ln Me^{\boldsymbol{\gamma}-1/2}\right]. \tag{2.35}$$

Напомним, что $f(x) = 1-(1+1/x)\ln(1+x)$, а $\boldsymbol{\gamma} \approx 0.577$ обозначает постоянную Эйлера. Величины $\sigma_{xx}(M)$ и $z(M)$ совпадают с физическими наблюдаемыми σ'_{xx} и z', вычисленными с помощью однопетлевых выражений (1.21) и (1.24) в регуляризации Паули-Вилларса (см. Прил. Б.3). Индекс у массы M_λ под знаком интеграла по λ указывает на то, что массивные флуктуации вычисляются вокруг инстантонного решения с размером λ. Соотношение между M_λ и λ может быть установлено из простых размерных соображений

$$M_\lambda = c_1\lambda/l. \tag{2.36}$$

Расчёт [19] приводит к значению $c_1 = e^2/4$, но, как будет показано ниже, от него результаты для физических наблюдаемых не зависят. Вычисление флуктуационного детерминанта привело к появлению функции

$$D(\gamma_s) = 16\pi\exp\Bigg\{1 - 4\gamma_E\Big[1-(1+\gamma_s^{-1})\ln(1+\gamma_s)\Big] + 2(1+\gamma_s^{-1})\Bigg[-\frac{2\gamma_s^2\ln 2}{1+2\gamma_s} + \\ + \left[\psi\left(3+\gamma_s^{-1}\right) + \psi\left(-\gamma_s^{-1}\right) - 1\right]\ln(1+\gamma_s) + g\left(-1-\gamma_s^{-1}\right) - g\left(-\gamma_s^{-1}\right)\Bigg]\Bigg\}, \tag{2.37}$$

где

$$g(z) = 2z^2\sum_{J=2}^{\infty}\frac{\ln J}{J(J^2-z^2)}. \tag{2.38}$$

Согласно выражению (2.37), функция $D(\gamma_s)$ зависит от параметра взаимодействия в синглетном канале γ_s крайне нетривиальным образом. Отдельные члены в выражении (2.37) расходятся при значениях $\gamma_s = -1/k$, где $k = 1, 2, 3, \ldots$. В полном выражении (2.37) эти расходимости сокращаются и функция $D(\gamma_s)$ остаётся хорошо определенной на всём интервале $-1 \leqslant \gamma_s \leqslant 0$, причём $D(0) = 16\pi/e$, а $D(-1) = 16\pi\exp(1-4\boldsymbol{\gamma})$. График функции

[19] Появление в действии массы в регуляризации Паули-Вилларса означает, что теория вместо масштаба l определена теперь на масштабе $\mu_\lambda^{-1}(\boldsymbol{r})$. Поэтому, в плоском пространстве величину $\sigma_{xx}(M)$ из уравнений (2.35) можно интерпретировать как $\sigma_{xx}(l^{-1}\mu_\lambda^{-1}(\boldsymbol{r}))$. Следуя работе [163], определим величину M_λ с помощью следующего соответствия: $\sigma_{xx}(M_\lambda) = \int d\boldsymbol{r}\,\sigma_{xx}(l^{-1}\mu^{-1}(\boldsymbol{r}))\,\mathrm{tr}(\nabla Q_{\mathrm{inst}}(\boldsymbol{r}))^2$. Вычисляя интеграл, получим соотношение (2.36).

$D(\gamma_s)$ приведен на рисунке 2.3. Выражение для Z_{-1}/Z_0 получается из уравнения (2.31) комплексным сопряжением.

Выражение (2.31) имеет структуру характерную для инстантонных поправок к термодинамическому потенциалу и может быть написано из простых соображений о том, как устроены нулевые моды инстантона (см., например [165]). Для определения функции $D(\gamma_s)$ требуется вычислять флуктуационный детерминант. Для невзаимодействующих электронов ($\gamma_s = 0$) величина $D(0)$ вычислялась в работе [176] [20]. Для случая кулоновского взаимодействия ($\gamma_s = -1$) величина $D(-1)$ вычислялась в работе [233], где для неё был получен ответ $64\pi/e$. Значение $D(-1)$, следующее из (2.37), было впервые получено в работе [108]. Выражение (2.37) для функции $D(\gamma_s)$ для всех γ_s в интервале $-1 \leqslant \gamma_s \leqslant 0$ было впервые получено в работе [247]. Результат (2.31)-(2.37) показывает, что идеология инстантонных вычислений, разработанная на моделях, в которых массовые члены не влияют на вид уравнений ренормализационной группы, оказывается справедливой и для более сложных моделей, в которых массовые члены меняют перенормировку зарядов теории. Для нелинейной сигма-модели (2.1) результат (2.31)-(2.37) демонстрирует, что инстантоны определяют зависимость термодинамического потенциала от θ для $\sigma_{xx} \gg 1$ и в случае наличия межэлектронного взаимодействия.

2.2.5 Физические наблюдаемые

Диссипативная и холловская проводимости

Для нахождения зависимости диссипативной и холловской проводимости, которые определены выражениями (2.14) и (2.15), от θ-угла при $\sigma_{xx} \gg 1$ можно использовать следующее разложение корреляционной функции по топологическим секторам:

$$\langle \mathcal{O}[Q] \rangle \approx \langle \mathcal{O} \rangle_0 + \frac{Z_{+1}}{Z_0}\big(\langle \mathcal{O} \rangle_{+1} - \langle \mathcal{O} \rangle_0\big) + \frac{Z_{-1}}{Z_0}\big(\langle \mathcal{O} \rangle_{-1} - \langle \mathcal{O} \rangle_0\big) + \dots \tag{2.39}$$

Здесь $\mathcal{O}[Q]$ - произвольный функционал от матричного поля Q, а $\langle \mathcal{O} \rangle_W$ означает усреднение в топологическом секторе W. В главном порядке по $1/\sigma_{xx}$ предэкспоненту в $\langle \mathcal{O} \rangle_{\pm 1}$ достаточно вычислять в классическом приближении, т.е. без учета квантовых флуктуа-

[20] От схемы регуляризации зависит нелогарифмическая часть в выражении (2.33), изменение которой приводит к изменению величины $D(\gamma_s)$. В работе [163] нелогарифмическая часть $\sigma_{xx}(M)$ выбиралась такой, как получается в размерной регуляризации. Из-за этого в работе [176] для $D(0)$ был получен ответ в 16 раз больше, чем следует из выражения (2.37). На то, что вычисление инстантонных поправок необходимо делать в одной и той же схеме регуляризации, внимание впервые было обращено в работе [245].

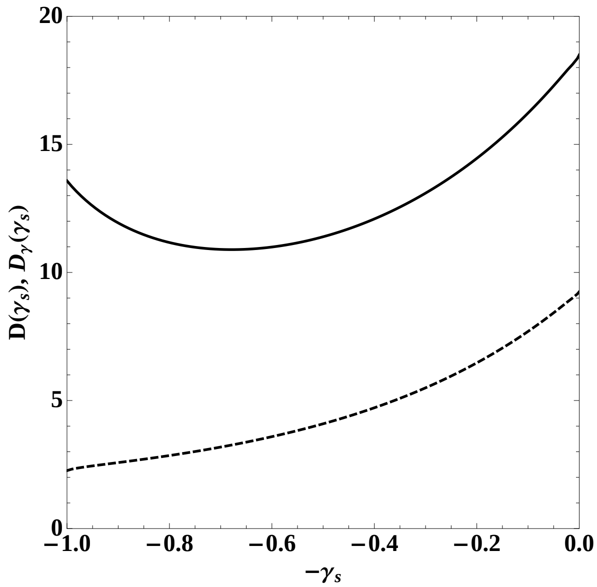

Рисунок 2.3: Функции $D(\gamma_s)$ (сплошная кривая) и $D_\gamma(\gamma_s)$ (штриховая кривая).

ций. Тогда, используя выражения (2.14) и (2.15), находим

$$\begin{aligned}\sigma'_{xx} &= \sigma_{xx}(M) + \int \frac{d\lambda}{\lambda} D(\gamma_s) \Big\langle \left(J_{xx}[Q_{\text{inst}}] e^{i\theta} + c.c. \right) e^{-2\pi\sigma_{xx}(M_\lambda) + \mathcal{S}'_{F,\text{inst}}} \Big\rangle_U, \\ \frac{\theta'}{2\pi} &= \frac{\theta}{2\pi} + \int \frac{d\lambda}{\lambda} D(\gamma_s) \Big\langle \left(J_{xy}[Q_{\text{inst}}] e^{i\theta} + c.c. \right) e^{-2\pi\sigma_{xx}(M_\lambda) + \mathcal{S}'_{F,\text{inst}}} \Big\rangle_U.\end{aligned} \tag{2.40}$$

Здесь для удобства введена величина

$$J_{ab}[Q] = \lim_{n\to 0} \frac{N^2 \sigma_{xx}^2}{32\pi^2 n \lambda^2} \int d\boldsymbol{r} \,\mathrm{tr}\, I_n^\alpha Q \nabla_a Q \int d\boldsymbol{r}' \,\mathrm{tr}\, I_{-n}^\alpha Q \nabla_b Q. \tag{2.41}$$

В пределе нулевой температуры, $T \to 0$, при вычислении среднего по U-вращениям в выражениях (2.40) член $\mathcal{S}'_{F,\text{inst}}$ можно не учитывать. Тогда в пределе $N \to 0$ находим [21]

$$\langle J_{ab}[Q_{\text{inst}}] \rangle_U = \frac{\sigma_{xx}^2}{2} \left(\delta_{ab} - i\varepsilon_{ab} \right). \tag{2.42}$$

Отсюда получаем следующие выражения для σ'_{xx} и θ':

$$\sigma'_{xx} = \sigma_{xx}(M) - \int \frac{d\lambda}{\lambda} D(\gamma_s) \sigma_{xx}^2 e^{-2\pi\sigma_{xx}(M_\lambda)} \cos\theta, \tag{2.43}$$

$$\frac{\theta'}{2\pi} = \frac{\theta}{2\pi} - \int \frac{d\lambda}{\lambda} D(\gamma_s) \sigma_{xx}^2 e^{-2\pi\sigma_{xx}(M_\lambda)} \sin\theta. \tag{2.44}$$

[21] Здесь для усреднения используются следующие соотношения $\langle (U)^{\alpha 1}_{n_1,0} (U^{-1})^{1\beta}_{0,n_3} \rangle_U = \delta_{n_1 n_3} \delta^{\alpha\beta}/N$ и $\langle (U)^{\alpha 1}_{n_1,0} (U^{-1})^{1\beta}_{0,n_3} (U)^{\gamma 1}_{n_5,0} (U^{-1})^{1\delta}_{0,n_7} \rangle_U = [\delta_{n_1 n_3} \delta^{\alpha\beta} \delta_{n_5 n_7} \delta^{\gamma\delta} + \delta_{n_1 n_7} \delta^{\alpha\delta} \delta_{n_5 n_3} \delta^{\gamma\beta}]/N(1+N)$. Аналогичные соотношения выполняются для элементов $U^{\alpha 1}_{n_2,-1}$.

Напомним, что нелинейная сигма-модель применима на масштабах больших длины свободного пробега l. Поэтому физически нет смысла рассматривать инстантоны с размером меньшим, чем $\lambda_{\min} \sim l$. В то же время максимальный размер инстантона (при $T = 0$) определяется величиной $\lambda_{\max}$ порядка размера системы L, $\lambda_{\max} \sim L$ [22]. Поэтому интегрирование по λ в выражениях (2.43)-(2.44) идёт от $\lambda_{\min}$ до $\lambda_{\max}$. Как хорошо известно, учёт квантовых флуктуаций вокруг инстантона в следующем порядке по $1/\sigma_{xx}$, приводит к появлению бегущих с M_λ величин в предэкспоненте подынтегрального выражения для инстантонного вклада в термодинамический потенциал и наблюдаемые [23]. Учитывая этот факт, и то, что $M \propto \lambda_{\max}/\lambda_{\min}$, после дифференцирования по L выражений (2.43)-(2.44) находим, что σ'_{xx} и θ' удовлетворяют следующим уравнениям

$$\frac{d\sigma'_{xx}}{dy} = -\frac{2}{\pi} f(\gamma_s) - D(\gamma_s)\sigma_{xx}^2 e^{-2\pi\sigma_{xx}} \cos\theta, \tag{2.45}$$

$$\frac{d\theta'}{dy} = -2\pi D(\gamma_s)\sigma_{xx}^2 e^{-2\pi\sigma_{xx}} \sin\theta. \tag{2.46}$$

Напомним, что здесь $y = \ln L/l$. Зависимость σ_{xx} и γ_s от y определяется пертурбативными уравнениями ренормализационной группы (см. (1.105)-(1.106)), а θ от y не зависит. Начальные условия для уравнений (2.45)-(2.46) имеют вид: $\sigma'_{xx}(0) = \sigma_{xx}(0) = \sigma_{xx}$ [24] и $\theta'(0) = \theta$. Уравнения (2.45)-(2.46) справедливы при $\sigma_{xx} \gg 1$.

В случае отсутствия взаимодействия ($\gamma_s = 0$) и в случае кулоновского взаимодействия ($\gamma_s = -1$) система уравнений (2.45)-(2.46) полностью определяет зависимость наблюдаемых σ'_{xx} и θ' от размера системы при $T = 0$. Для этих предельных случаев уравнения (2.45)-(2.46) были впервые получены в работах [177] и [233], соответственно (см. обсуждение в конце раздела 2.2.4). В общем случае, для произвольного межэлектронного взаимодействия ($-1 \leqslant \gamma_s \leqslant 0$) уравнения (2.45)-(2.46) были впервые получены в работе [247].

Физическая наблюдаемая z'

Согласно выражению (1.10), физическая наблюдаемая z' определяется по термодинамическому потенциалу Ω, который может быть представлен в виде суммы вкладов от разных топологических секторов:

$$\beta\Omega = -\ln Z_0 - \frac{Z_{+1} + Z_{-1}}{Z_0} - \dots. \tag{2.47}$$

[22] Естественно ожидать, что выполняется соотношение $\lambda_{\max}/\lambda_{\min} = L/l$.

[23] В работах [248, 249, 250, 251] это утверждение было проверено прямыми вычислениями для обычной и $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричной теорий Янга-Миллса.

[24] Здесь в последнем равенстве мы пренебрегли константой порядка единицы по сравнению с $\sigma_{xx} \gg 1$.

Используя выражение (2.31), находим

$$z' = z(M) - \int \frac{d\lambda}{\lambda} D(\gamma_s) \frac{N^2 \langle \mathcal{S}'_{F,\mathrm{inst}} \rangle_U}{8\pi^3 \lambda^2 T \operatorname{tr} \eta \Lambda} e^{-2\pi\sigma_{xx}(M_\lambda)} \cos\theta. \tag{2.48}$$

Усредняя по U-вращениям также как в предыдущем разделе, получаем

$$\langle \mathcal{S}'_{F,\mathrm{inst}} \rangle_U = -\frac{\pi T}{N^2} \int d\boldsymbol{r} \Gamma_{00}\left(M_\lambda\right) |\rho^{11}_{-10}(r)|^2 \operatorname{tr} \eta \Lambda. \tag{2.49}$$

Регуляризация Паули-Вилларса фактически означает появление в действии (2.2)-(2.3) массового члена (1.108) с h_0 равным $\mu_\lambda(r)/M_\lambda$. Поэтому, естественно переписать выражение (2.49) в виде

$$\langle \mathcal{S}'_{F,\mathrm{inst}} \rangle_U = -\frac{\pi T}{N^2} \int d\boldsymbol{r} \Gamma_{00}\left(M_\lambda \mu_\lambda(0)/\mu_\lambda(r)\right) |\rho^{11}_{-10}(r)|^2 \operatorname{tr} \eta \Lambda. \tag{2.50}$$

Интеграл по $\boldsymbol{r}$ в выражении (2.50) сходится, так как амплитуда Γ_{00} имеет отрицательную аномальную размерность (см. (2.34)) и, поэтому $\Gamma_{00}(M) \to 0$ при $M \to \infty$. Аккуратное вычисление приводит к следующему результату (см. Прил. Б.4):

$$\langle \mathcal{S}'_{F,\mathrm{inst}} \rangle_U = \frac{8\pi^3 \lambda^2 T}{N^2} \Gamma_{00}(M_\lambda) \sigma_{xx} m_1(\gamma_s) \operatorname{tr} \eta \Lambda, \tag{2.51}$$

где функция

$$m_1(\gamma_s) = -\frac{1+\gamma_s}{2\gamma_s} \exp\left[-\frac{2}{\gamma_s} \ln(1+\gamma_s)\right] \int\limits_0^{-\gamma_s} ds (1-s)^{-2-2/s}. \tag{2.52}$$

Функция $m_1(\gamma_s)$ монотонно убывает от значения $m_1(0) = 1/2$ для случая невзаимодействующих электронов до значения $m_1(-1) = 1/6$ для случая кулоновского взаимодействия. Обратим внимание, что в результате учёта квантовых флуктуаций логарифм $\ln L/\lambda$, получающийся в выражении для $\langle \mathcal{S}_F[Q_{\mathrm{inst}}] \rangle_U$ на классическом уровне, заменяется на первую степень σ_{xx}. Это качественно связано с тем, что квантовые флуктуации приводят к появлению в задаче масштаба $L_\Gamma \sim l \exp(\pi\sigma_{xx})$, на котором величина Γ_{00} обращается в нуль. Поэтому при учете квантовых флуктуаций логарифмическая расходимость в $\langle \mathcal{S}_F[Q_{\mathrm{inst}}] \rangle_U$ обрезается на масштабе L_Γ, а не масштабе L.

С помощью выражения (2.52) окончательно находим

$$z' = z(M) + \int \frac{d\lambda}{\lambda} D_\gamma(\gamma_s) \sigma_{xx} \Gamma_{00}(M_\lambda) e^{-2\pi\sigma_{xx}(M_\lambda)} \cos\theta, \tag{2.53}$$

где функция $D_\gamma(\gamma_s)$ определена как

$$D_\gamma(\gamma_s) = m_1(\gamma_s) D(\gamma_s) \tag{2.54}$$

и показана на рисунке 2.3. Учитывая замечания, которые обсуждались при переходе от выражений (2.43)-(2.44) к выражениям (2.45)-(2.46), и дифференцируя обе части уравнения (2.53) по L, получаем

$$\frac{dz'}{dy} = z\left(\frac{\gamma_s}{\pi\sigma_{xx}} + D_\gamma(\gamma_s)\gamma_s\sigma_{xx}e^{-2\pi\sigma_{xx}}\cos\theta\right). \tag{2.55}$$

Здесь в правой части зависимость σ_{xx}, γ_s и z от y определяется пертурбативными уравнениями ренормализационной группы (см. (1.105)-(1.107)), а θ от y не зависит. Начальное условие для уравнения (2.55) имеет вид: $z'(0) = z(0) = z$. Уравнение (2.55) справедливо при $\sigma_{xx} \gg 1$.

Выражение (2.55) для случая кулоновского взаимодействия, $\gamma_s = -1$, впервые было получено в работе [233] с коэффициентом $64\pi/e$ вместо $D_\gamma(-1) = 8\pi\exp(1 - 4\boldsymbol{\gamma})/3$, полученного впервые в работе [108]. Для случая невзаимодействующих электронов, $\gamma_s = 0$, выражение (2.55) было впервые получено в работе [245]. Общий ответ (2.55) для произвольного межэлектронного взаимодействия, $-1 \leqslant \gamma_s \leqslant 0$, был впервые получен в работе [247].

2.2.6 Обсуждение результатов

Уравнения (2.45)-(2.46) и (2.55) показывают, что механизм появления зависимости физических наблюдаемых от θ-угла в нелинейной сигма-модели с топологическим членом не зависит от наличия межэлектронного взаимодействия, несмотря на то, что взаимодействие меняет поведение наблюдаемых при увеличении размера системы. Как видно из уравнения (2.46), при всех значениях σ_{xx} и γ_s есть два выделенных значения θ-угла: $\theta = 0$ и $\theta = \pi$, при которых θ' не зависит от L и равна θ. При $-\pi < \theta < \pi$ физическая наблюдаемая θ' уменьшается, стремясь к значению 0. Это согласуется с общими ожиданиями, что в пределе $L \to \infty$ физическая наблюдаемая θ' стремится к нулю. При значении $\theta = 0$ инстантонная поправка в выражении (2.45) при всех значениях γ_s усиливает локализацию (увеличивает значение $|d\sigma'_{xx}/dy|$). Поэтому можно ожидать, что в пределе $L \to \infty$ наступает полная локализация и σ'_{xx} обращается в нуль в согласии с общими идеями раздела 2.2.2. При значении $\theta = \pi$ ситуация противоположная: инстантонный вклад в выражении (2.45) является антилокализующим. Это указывает на то, что в точной теории при $\theta = \pi$ непертурбативные вклады могут привести к тому, что в пределе $L \to \infty$ диссипативная проводимость σ'_{xx} будет стремиться к конечному значению. Это означает, что при $\theta = \pi$ корреляционная длина расходится. Как видно из уравнения (2.45) электрон-электронное взаимодействие усиливает пертурбативную поправку (первый член в правой части) и уменьшает непертурбативную (второй член в правой части). Подчеркнём ещё раз, что результаты, полученные в этом разделе, показывают, что общее объяснение целочисленного квантования холловской проводимости на основе нелинейной сигма-модели с топологическим членом не зависит от наличия межэлектронного взаимодействия.

2.3 Роль электрон-электронного взаимодействия для переходов между плато

2.3.1 Введение

В этом разделе результаты предыдущего раздела будут применены к изучению влияния электрон-электронного взаимодействия на ширину критической области (при конечном размере системы или ненулевой температуре) при переходе между плато в режиме целочисленного квантового эффекта Холла.

2.3.2 Зависимость физических наблюдаемых от размера системы

Выражения (2.45), (2.46) и (2.55) описывают зависимость физических наблюдаемых σ'_{xx}, θ' и z' от размера системы при $T = 0$. Подчеркнём, что в правых частях этих выражений стоят величины σ_{xx}, θ, γ_s и z, зависимость которых от L описывается пертурбативными уравнениями ренормализационной группы. Как обсуждалось в разделе 1.2, пертурбативные уравнения ренормализационной группы для физических наблюдаемых и перенормированных параметров действия совпадают. Более того, эти уравнения могут быть получены с помощью вычисления физических наблюдаемых из формул линейного отклика, либо из перенормировки действия с помощью процедуры фонового поля. С непертурбативными (инстантонными) вкладами ситуация более сложная. Это связано с тем, что интеграл, определяющий вклад от инстантонов в физические наблюдаемые, формально не является логарифмическим и не расходится в ультрафиолете (на малых расстояниях). Поэтому, например, в схеме минимального вычитания такие вклады не будут влиять на уравнения ренормализационной группы. В то же время, в уравнениях ренормализационной группы для физических наблюдаемых, которые получаются так, как изложено в приложении А.2, такие вклады будут учитываться.

С той точностью, с которой были получены уравнения (2.45) и (2.46), их правые части можно выразить через физические наблюдаемые и получить следующие уравнения

$$\frac{d\sigma'_{xx}}{dy} = \beta_\sigma(\sigma'_{xx}, \theta', \gamma'_s) = -\frac{2}{\pi} f(\gamma'_s) - D(\gamma'_s)\sigma'^2_{xx} e^{-2\pi\sigma'_{xx}} \cos\theta', \tag{2.56}$$

$$\frac{d\theta'}{dy} = \beta_\theta(\sigma'_{xx}, \theta', \gamma'_s) = -2\pi D(\gamma'_s)\sigma'^2_{xx} e^{-2\pi\sigma'_{xx}} \sin\theta'. \tag{2.57}$$

Аналогично, уравнение (2.55) можно переписать в виде:

$$\frac{d\ln z'}{dy} = \gamma'_s \left(\frac{1}{\pi\sigma'_{xx}} + D_\gamma(\gamma'_s)\sigma'_{xx} e^{-2\pi\sigma'_{xx}} \cos\theta' \right). \tag{2.58}$$

Используя условие сохранение числа частиц, т. е. соотношение $z'(1+\gamma'_s) = \mathrm{const}$, из уравнения (2.58) находим, что

$$\frac{d\gamma'_s}{dy} = \beta_\gamma(\sigma'_{xx}, \theta', \gamma'_s) = -(1+\gamma'_s)\gamma'_s \left(\frac{1}{\pi\sigma'_{xx}} + D_\gamma(\gamma'_s)\sigma'_{xx} e^{-2\pi\sigma'_{xx}} \cos\theta' \right). \tag{2.59}$$

С учётом начальных условий $\sigma'_{xx}(l) = \bar{\sigma}_{xx}$, $\theta'(l) = \bar{\theta}$, и $\gamma'_s(l) = \bar{\gamma}_s$, уравнения (2.56)-(2.57) и (2.59) описывают зависимость физических наблюдаемых σ'_{xx}, θ' и γ'_s от размера системы L при $T = 0$. Они справедливы для $\sigma'_{xx} \gg 1$. Для проверки справедливы ли уравнения (2.56)-(2.59) в области $\sigma'_{xx} \gtrsim 1$ требуется вычисление двухинстантонных вкладов в выражения для физических наблюдаемых [25].

С учетом оговорок, сделанных выше, будем применять к уравнениям (2.56)-(2.57) и (2.59) терминологию, которую используют для анализа уравнений ренормализационной группы. Уравнение (2.59) демонстрирует, что имеются две фиксированные точки: устойчивая (относительно направления γ'_s) при $\gamma'_s = 0$, соответствующая случаю невзаимодействующих электронов, и неустойчивая при $\gamma'_s = -1$, соответствующая случаю кулоновского взаимодействия. Как уже обсуждалось в разделе 1.2, при $\gamma'_s = -1$ действие нелинейной сигма-модели (2.1) инвариантно относительно глобальных поворотов (1.7) матрицы Q. В интервале $-1 < \gamma'_s < 0$ отношение $D(\gamma'_s)/D_\gamma(\gamma'_s) > 2$, а функция $f(\gamma'_s) < 1$, поэтому в рамках уравнений (2.56)-(2.57) и (2.59) больше фиксированных точек не существует. Как следствие, весь интервал $-1 < \gamma'_s \leqslant 0$ контролируется фиксированной точкой при $\gamma'_s = 0$. Впервые для рассматриваемой задачи это предположение было сформулировано в работе [233] и было подтверждено численными вычислениями в работе [236] (см. раздел 2.4). Отметим, однако, что, так как в работе [233] функции $D(\gamma'_s)$ и $D_\gamma(\gamma'_s)$ явно вычислены не были, то проверка этого утверждения в рамках уравнений (2.56)-(2.57) и (2.59) произведена была только в работах [247, 252].

[25]Как будет показано в разделе 2.5 уравнения (2.55) и (2.58) приводят к разным предсказаниям для амплитуды осцилляций теплоёмкости с магнитным полем. Таким образом, какое из двух уравнений реализуется может быть проверено, хотя бы в принципе, экспериментально.

Случай невзаимодействующих электронов

В случае невзаимодействующих электронов, $\gamma'_s = 0$, уравнения (2.56)-(2.57) принимают вид:

$$\frac{d\sigma'_{xx}}{dy} = \beta_\sigma(\sigma'_{xx}, \theta', 0) = -\frac{1}{2\pi^2\sigma'_{xx}} - D(0)\sigma'^2_{xx} e^{-2\pi\sigma'_{xx}} \cos\theta', \tag{2.60}$$

$$\frac{d\theta'}{dy} = \beta_\theta(\sigma'_{xx}, \theta', 0) = -2\pi D(0)\sigma'^2_{xx} e^{-2\pi\sigma'_{xx}} \sin\theta', \tag{2.61}$$

где, напомним, $D(0) = 16\pi/e \approx 18.6$. Здесь в уравнение (2.60) добавлена двухпетлевая пертурбативная поправка [128], так как однопетлевая поправка обращается в нуль. Эти уравнения предсказывают поведение физических наблюдаемых при изменении размера системы, согласующееся с общими идеями раздела 2.2.2. Зависимость σ'_{xx} и σ'_{xy} от L удобно представить в виде диаграммы ренормгруппового потока (см. Рис. 2.4). Вдоль линии $\theta' = 0$ система при $L \to \infty$ стремится к локализации: σ'_{xx} уменьшается при увеличении L. Поэтому можно ожидать существования фиксированной точки при $\theta' = \sigma'_{xx} = 0$, которая описывает локализованную электронную систему с целочисленно квантованной холловской проводимостью. На линии $\theta' = \pi$ пертурбативный и инстантонный вклады имеют разные знаки, что может привести к появлению неустойчивой критической точки при конечном значении $\sigma'_{xx} = \sigma^\star_{xx}$ (см. Рис. 2.4). При $-\pi < \theta' < \pi$ физическая наблюдаемая θ' уменьшается, стремясь к нулевому значению.

Неустойчивая критическая точка при $\theta' = \pi$ и $\sigma'_{xx} = \sigma^\star_{xx}$ отвечает переходу между двумя состояниями с целочисленно-квантованными значениями холловской проводимости. Стандартным образом (см., например [10]) она характеризуется расходящейся корреляционной длиной:

$$\xi = l|\bar{\theta} - \pi|^{-\nu}, \qquad \nu^{-1} = -\left.\frac{\partial\beta_\theta(\sigma^\star_{xx}, \theta', 0)}{\partial\theta'}\right|_{\theta'=\pi}. \tag{2.62}$$

Вблизи неустойчивой критической точки имеется скейлинговое поведение: физические наблюдаемые зависят от безразмерного отношения L/ξ.

Формально уравнение (2.60) даёт значение $\sigma^\star_{xx} \approx 0.9$, которое, строго говоря, лежит за рамками применимости уравнений (2.60)-(2.61). Из уравнения (2.62) получается следующая оценка для критического индекса корреляционной длины $\nu \approx 2.8$. Она находится в разумном согласии с данными численных экспериментов $\nu \simeq 2.35$ [210] [26]. Полученные

[26] В недавних численных экспериментах [253] было получено значение $\nu \simeq 2.59$, которое, согласно утверждению авторов работы [253], больше общепринятого значения 2.35 из-за более аккуратного учёта поправок к скейлингу.

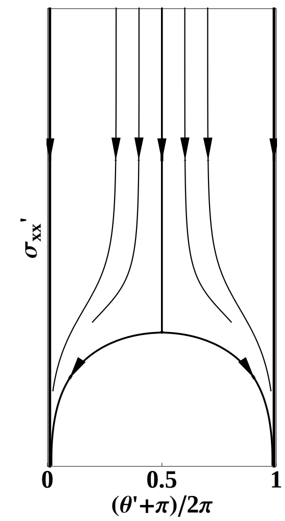

Рисунок 2.4: Схематическая диаграмма, иллюстрирующая зависимость физических наблюдаемых σ'_{xx} и θ' от размера системы L. Стрелки указывают направление увеличения масштаба L.

в работе [245] оценки на основе уравнений (2.56)-(2.57) и (2.59) для других критических индексов, характеризующих поправки к скейлингу, так же находятся в разумном согласии с данными численных экпериментов.

Случай кулоновского взаимодействия

В случае кулоновского взаимодействия, $\gamma'_s = -1$, уравнения (2.56)-(2.57) принимают вид:

$$\frac{d\sigma'_{xx}}{dy} = \beta_\sigma(\sigma'_{xx}, \theta', -1) = -\frac{2}{\pi} - D(-1)\sigma'^2_{xx} e^{-2\pi\sigma'_{xx}} \cos\theta', \tag{2.63}$$

$$\frac{d\theta'}{dy} = \beta_\theta(\sigma'_{xx}, \theta', 0) = -2\pi D(-1)\sigma'^2_{xx} e^{-2\pi\sigma'_{xx}} \sin\theta', \tag{2.64}$$

где, напомним, $D(-1) = 16\pi \exp(1 - 4\boldsymbol{\gamma}) \approx 13.6$. Как видно, по своей структуре уравнения (2.63)-(2.64) аналогичны уравнениям (2.56)-(2.57), описывающим случай невзаимодействующих электронов. Поэтому, зависимость физических наблюдаемых σ'_{xx} и θ' от размера системы оказывается аналогичной случаю невзаимодействующих электронов (см. Рис. 2.4). Отметим только, что в случае кулоновского взаимодействия локализационный пертурбативный вклад оказывается больше, чем в случае невзаимодействующих электронов, а инстантонный (делокализующий) вклад, наоборот, оказывается меньше. Поэтому можно ожидать, что значение $\sigma^\star_{xx}$ в случае кулоновского взаимодействия будет меньше, чем в случае невзаимодействующих электронов. Согласно уравнению (2.63), функция $\beta_\sigma(\sigma'_{xx}, \pi, -1)$ оказывается отрицательной при всех значениях σ'_{xx}, что не позволяет оценить критический

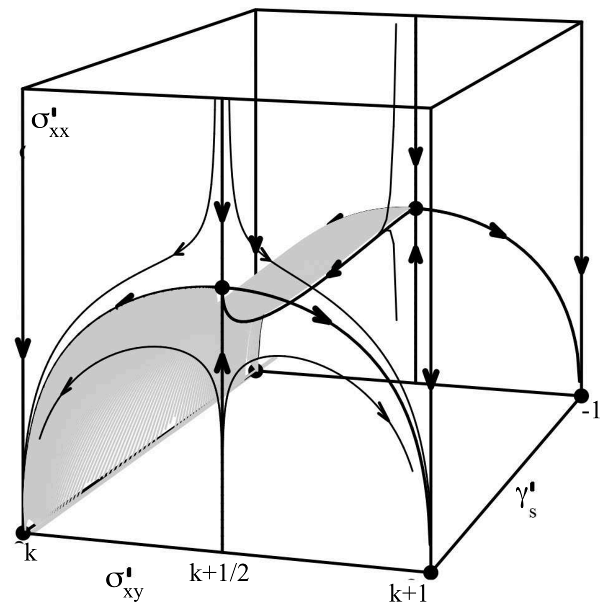

Рисунок 2.5: Схематическая диаграмма, иллюстрирующая зависимость физических наблюдаемых σ'_{xx}, $\sigma'_{xy} = k+\theta'/2\pi$ и γ'_s от размера системы L. Стрелки указывают направление увеличения масштаба L.

индекс ν, который также как в случае невзаимодействующих электронов, характеризует каким образом в критической точке расходится корреляционная длина. К сожалению, в настоящее время отсутствует возможность вычисления критических индексов для случая кулоновского взаимодействия в численном эксперименте.

Уравнения (2.56)-(2.57) и (2.59) интерполируют между двумя фиксированными точками $\gamma'_s = 0$ и $\gamma'_s = -1$. На рисунке 2.5, с учётом сказанного выше, приведена ожидаемая схематическая диаграмма потока, соединяющая случаи невзаимодействующих электронов и электронов с кулоновским взаимодействием.

2.3.3 Обсуждение результатов и сравнение с экспериментом

Результаты, полученные выше, указывают на то, что в двумерной электронной системе в перпендикулярном магнитном поле, полностью поляризующим электронные спины, в пределе бесконечного размера системы в зависимости от межэлектронного взаимодействия реализуется только два типа поведения: 1) поведение характерное для случая электронов с кулоновским взаимодействием и 2) поведение характерное для случая невзаимодействующих электронов. Последнее реализуется при любом короткодействующем межэлектронном взаимодействии. В обоих случаях имеется неустойчивая критическая точка, соответствующая переходу между состояниями с целочисленными значениями холловской проводимости. При нуле температур и конечном размере системы L ширина этого перехода, которая, например, соответствует ширине пиков в зависимости σ'_{xx} и $\partial\sigma'_{xy}/\partial B$ от магнитного поля B, находится из условия $\xi \sim L$ и оказывается порядка $\Delta B \propto L^{-1/\nu}$.

Информация о критическом поведении в случае невзаимодействующих электронов извлекается из численных экспериментов, в которых как раз и измеряется зависимость от размера системы при нуле температур (см., например [210]). В тоже время критическое поведение для случая электронов с кулоновским взаимодействием извлекается в лабораторных экспериментах из транспортных измерений при конечных температурах. В этом случае экспериментально определяется критический индекс κ, который характеризует ширину пиков в зависимости σ'_{xx} и $\partial\sigma'_{xy}/\partial B$ от магнитного поля B при конечной температуре: $\Delta B \propto T^{\kappa}$ [181]. Первые эксперименты на InGaAs/InP образцах дали значение индекса $\kappa = 0.42{\pm}0.04$ [182]. На измеряемую величину индекса κ сильно влияют макроскопические неоднородности в образце, затрудняющие наблюдение настоящего критического поведения и приводящие к увеличению измеряемого значения для κ [195, 196, 197, 198, 199, 200]. Недавние работы [200, 191] по измерению ширины критической области в AlGaAs/AlGaAs вплоть до температуры 1 мК дали значение κ=0.42±0.01 в согласии с результатом работы [182].

Критические индексы ν и κ, связаны как $\kappa = 1/(\nu z_T)$, где критический индекс z_T определяет зависимость длины сбоя фазы от температуры: $L_\phi \propto T^{-1/z_T}$. Заметим, что можно ввести два, вообще говоря, разных динамических критических индекса: z_T и z, где индекс z_T (z) описывает скейлинг с температурой (частотой). В частности, критический индекс z определяет связь между длиной и временем сбоя фазы: $L_\phi \propto \tau_\phi^{1/z}$. Для случая электронов с кулоновским взаимодействием известно [57], что оба динамических индекса совпадают и равны $z_T = z = 2 - \mu_2$, где [27]

$$\mu_2 = -\frac{\partial \beta_\gamma(\sigma^\star_{xx}, \pi, \gamma'_s)}{\partial \gamma'_s}\bigg|_{\gamma'_s=-1}. \tag{2.65}$$

Это означает одинаковый скейлинг с частотой и температурой, как это бывает в стандартных квантовых фазовых переходах. В частности это означает, что частота сбоя фазы пропорциональна температуре: $1/\tau_\phi \propto T$ (см. раздел 2.4).

Экспериментальное измерение индексов ν, z и z_T представляет очень сложную задачу. К настоящему времени экспериментально проверено, что $z = z_T$ [187], и измерены значения $\nu \simeq 2.3$ [188, 186] и $z_T \simeq 1$ [191] с разбросом экспериментальных точек около 10%.

[27] Отметим, что в работе [57] индекс μ_2 обозначался как ζ, а в работе [233] как $-\gamma^*_T$.

Однако, по-видимому, эти результаты имеют значительные систематические ошибки. В работах [188, 186] было получено значение индекса κ в интервале от 0.6 до 0.8, что указывает на наличие макроскопических неоднородностей в образце, маскирующее критическое поведение. В работе [191] индекс z_T находился из анализа экспериментальных данных для образцов разных размеров при низких температурах [28]. Однако, при обработке экспериментальных данных в работе [191] не учитывался тот факт, что в образцах разных размеров случайный потенциал был, вообще говоря, разный [254]. Это обстоятельство ставит под сомнение надёжность измеренного значения для z_T и указывает на необходимость продолжения экспериментальной работы по надёжному измерению индексов ν и z_T.

Для критической точки, соответствующей случаю невзаимодействующих электронов, температурная зависимость ширины критической области может появится благодаря сбою фазы электронов из-за наличия короткодействующего кулоновского взаимодействия. В этом случае динамический индекс z совпадает с размерностью пространства, $z = d$, но температурная зависимость времени сбоя фазы определяется индексом p: $\tau_\phi \propto T^{-p}$. Отсюда получается, что динамический индекс $z_T = d/p$. Связь индекса p с функцией $\beta_\gamma(\sigma_{xx}, \pi, \gamma'_s)$ будет установлена в следующем разделе.

2.4 Время сбоя фазы на переходе между плато в случае короткодействующего межэлектронного взаимодействия

2.4.1 Введение

В этом разделе будет проведено вычисление температурной зависимости времени сбоя фазы на переходе между плато в случае короткодействующего межэлектронного взаимодействия. В частности будет показано, что $\tau_\phi \propto T^{-p}$, где индекс p определяется производной функцией $\beta_\gamma(\sigma'_{xx}, \theta', \gamma'_s)$ в критической точке, соответствующей невзаимодействующим электронам. Несмотря на то, что основной целью этой главы является изучение целочисленного квантового эффекта Холла, большая часть результатов этого раздела относится и к переходам Андерсона с нарушенной симметрией относительно обращения времени в размерностях $d > 2$.

[28] При низких температурах, таких что $L_\phi \gg L$, ширина критической области по магнитному полю определяется размером образца: $\Delta B \propto L^{-1/\nu}$.

2.4.2 Выражение для времени сбоя фазы через точные волновые функции

Поправка первого порядка по взаимодействию к термодинамическому потенциалу

Следуя работе [236], запишем поправку первого порядка по межэлектронному взаимодействию $U(\boldsymbol{r})$ к усреднённому по беспорядку термодинамическому потенциалу:

$$\delta^{(1)}\Omega = \int \frac{dEd\omega}{\Delta^2} f_F(E) f_F(E+\omega) \int d\boldsymbol{r_1} d\boldsymbol{r_2} U(\boldsymbol{r_1}-\boldsymbol{r_2}) \mathcal{K}_1(\boldsymbol{r_1},\boldsymbol{r_2},E,\omega)\,, \tag{2.66}$$

где $f_F(\epsilon) = 1/[1+\exp(\epsilon/T)]$ обозначает распределение Ферми-Дирака, $\delta = 1/\nu_\star L^d$ – среднее расстояние между точными уровнями энергии ϵ_α для невзаимодействующих электронов в данном случайном потенциале. Корреляционная функция

$$\mathcal{K}_1(\boldsymbol{r_1},\boldsymbol{r_2},E,\omega) = \frac{\delta^2}{2} \sum_{\alpha\beta} \Big\langle \big|\mathcal{B}_{\alpha\beta}(\boldsymbol{r_1},\boldsymbol{r_2})\big|^2 \delta(E+\omega-\epsilon_\alpha)\delta(E-\epsilon_\beta) \Big\rangle\,, \tag{2.67}$$

где $\langle \dots \rangle$ означает усреднение по случайному потенциалу, определяется величиной

$$\mathcal{B}_{\alpha\beta}(\boldsymbol{r_1},\boldsymbol{r_2}) = \phi_\alpha(\boldsymbol{r_1})\phi_\beta(\boldsymbol{r_2}) - \phi_\alpha(\boldsymbol{r_2})\phi_\beta(\boldsymbol{r_1}). \tag{2.68}$$

Здесь $\phi_\alpha(\boldsymbol{r})$ обозначают точные волновые функции, соответствующие энергиям ϵ_α. Функция $\mathcal{K}_1(\boldsymbol{r_1},\boldsymbol{r_2},E,\omega)$, описывающая корреляции двух собственных состояний задачи без взаимодействия, в пределе $L \to \infty$ имеет следующее скейлинговое поведение [236]:

$$\begin{gathered}\mathcal{K}_1(\boldsymbol{r_1},\boldsymbol{r_2},E,\omega) = L^{-2d} \left(\frac{|\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2|}{L_\omega}\right)^{\mu_2} \tilde{\mathcal{K}}_1\left(\frac{|\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2|}{L_\omega}\right), \\ \tilde{\mathcal{K}}_1(x) = \begin{cases} 1, & x \ll 1, \\ x^{-\mu_2}, & x \gg 1 \end{cases}, \end{gathered} \tag{2.69}$$

где $L_\omega = L(\delta/|\omega|)^{1/d}$ – это масштаб, соответствующий энергии ω. Заметим, что индекс $\mu_2 > 0$ из-за хартри-фоковского сокращения в определении (2.68). Это означает, что на масштабах меньших L_ω корреляционная функция (2.69) в критической области сильно подавлена по сравнению с тем, что было бы для ситуации хорошего металла. Подчеркнём, что эта ситуация противоположна той, которая наблюдается для неантисимметризованных корреляционных функций, которые усиливаются в критической области [37].

Считая, что межэлектронное взаимодействие имеет следующее поведение на малых и больших расстояниях ($\lambda > d$) [29]:

$$U(R) = u_0 \begin{cases} 1, & R \ll a, \\ (a/R)^\lambda, & R \gg a, \end{cases} \tag{2.70}$$

находим, что поправка к термодинамическому потенциалу может быть записана в виде:

$$\delta^{(1)}\Omega \propto \int \frac{dEd\omega}{\delta} f_F(E) f_F(E+\omega) u(L_\omega)\,. \tag{2.71}$$

Здесь величина

$$u(L_\omega) = \nu_\star u_0 a^d \begin{cases} (a/L_\omega)^{\mu_2}, & d+\mu_2 < \lambda, \\ (a/L_\omega)^{\mu_2} \ln \frac{L_\omega}{a}, & \lambda = d+\mu_2, \\ (a/L_\omega)^{\lambda - d}, & d < \lambda < d+\mu_2 \end{cases} \tag{2.72}$$

может рассматриваться как перенормированное на масштабе L_ω взаимодействие [236]. Выражение (2.72) показывает, что для $\lambda > d$ межэлектронное взаимодействие действительно иррелевантно (уменьшается при увеличении масштаба) вблизи невзаимодействующей критической точки $u = 0$. Это заключение, полученное на основе изучения поправки первого порядка по взаимодействию к термодинамическому потенциалу, находится в согласии с аналогичным выводом из нелинейной сигма-модели. Как будет видно из дальнейшего, при $\lambda > d + \mu_2$ величина u имеет тот же скейлинг вблизи невзаимодействующей критической точки, что и параметр γ_s', поэтому можно считать, что они совпадают.

Время сбоя фазы: поправка второго порядка к собственной энергии

Следуя работе [255], для вычисления частоты сбоя фазы в духе золотого правила Ферми [30] необходимо вычислить поправку второго порядка по взаимодействию к собственно энергетической части $\Sigma_\alpha^R(\varepsilon)$ (см. Рис. 2.6) и усреднить по случайному беспорядку величину $\sum_\alpha \Sigma_\alpha^R(\varepsilon)\delta(E-\epsilon_\alpha)$. Тогда, находим

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}\Sigma^R(E,\varepsilon) = \operatorname{Im}\delta \left\langle \sum_\alpha \Sigma_\alpha^R(\varepsilon)\delta(E-\epsilon_\alpha) \right\rangle = -\pi \left(\prod_{j=1}^4 \int d\boldsymbol{r_j} \right) U(\boldsymbol{r_1}-\boldsymbol{r_2}) U(\boldsymbol{r_3}-\boldsymbol{r_4}) \times \\ \times \int \frac{d\omega d\varepsilon'}{\delta^3} \Big\{ f_F(\varepsilon'+\omega)[1-f_F(\varepsilon')] + [f_F(\varepsilon') - f_F(\varepsilon'+\omega)] f_F(\varepsilon+\omega) \Big\} \mathcal{K}_2(\{\boldsymbol{r_j}\}, E, \varepsilon, \varepsilon', \omega)\,, \end{aligned} \tag{2.73}$$

[29]Отметим, что экспоненциальному спаданию $U(R)$ на больших R отвечает $\lambda \to \infty$.

[30]Более аккуратно вычисляется частота ухода в формализме кинетического уравнения, которое в рассматриваемом случае совпадает с частотой сбоя фазы.

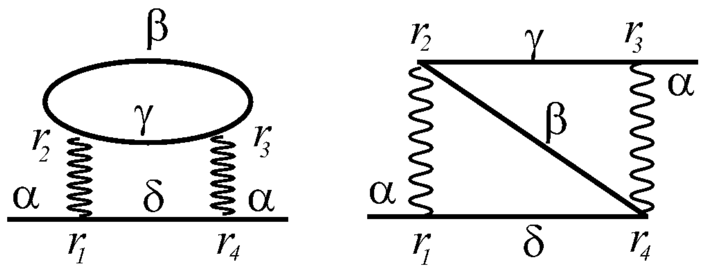

Рисунок 2.6: Поправки второго порядка по взаимодействию к собственно энергетической части, определяющие частоту сбоя фазы. Волнистая линия обозначает взаимодействие, а сплошная линия – точные одночастичные электронные функции Грина.

где корреляционная функция

$$\mathcal{K}_2(\{\boldsymbol{r}_j\}, E, \varepsilon, \varepsilon', \omega) = \frac{\delta^4}{8}\Big\langle \sum_{\alpha\beta\gamma\delta} \mathcal{B}^*_{\alpha\beta}(\boldsymbol{r_1}, \boldsymbol{r_2})\mathcal{B}_{\delta\gamma}(\boldsymbol{r_1}, \boldsymbol{r_2})\mathcal{B}^*_{\gamma\delta}(\boldsymbol{r_3}, \boldsymbol{r_4})\mathcal{B}_{\beta\alpha}(\boldsymbol{r_3}, \boldsymbol{r_4})\times$$
$$\times\delta(E-\epsilon_\alpha)\delta(\varepsilon'+\omega-\epsilon_\beta)\delta(\varepsilon'-\epsilon_\gamma)\delta(\varepsilon+\omega-\epsilon_\delta)\Big\rangle. \tag{2.74}$$

Для того, чтобы определить зависимость частоты сбоя фазы от температуры необходимо выбрать характерные значения для энергетических переменных. Во-первых, нас интересует частота сбоя фазы на массовой поверхности ($E = \varepsilon$) и при характерных энергиях порядка температуры, $E \sim T$. Для оценки частоты сбоя фазы по порядку величины достаточно считать $E = 0$. Во-вторых, как можно проверить, характерные значения ε' и ω в интеграле (2.73) оказываются порядка температуры. Производя интегрирование по ε', находим

$$\operatorname{Im}\Sigma^R(0,0) \sim -\frac{1}{\delta^3}\left(\prod_{j=1}^{4}\int d\boldsymbol{r_j}\right) U(\boldsymbol{r_1}-\boldsymbol{r_2})U(\boldsymbol{r_3}-\boldsymbol{r_4}) \int \frac{d\omega\,\omega}{\operatorname{sh}(\omega/T)}\mathcal{K}_2(\{\boldsymbol{r}_j\}, 0, 0, \varepsilon' \sim T, \omega). \tag{2.75}$$

Учитывая, что для $|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|, |\boldsymbol{r}_3 - \boldsymbol{r}_4| \ll R \leqslant L_\omega$ скейлинговое поведение корреляционной функции $\mathcal{K}_2(\{\boldsymbol{r}_j\}, 0, 0, \varepsilon' \sim \omega, \omega)$ имеет вид [236] [31]

$$\mathcal{K}_2(\{\boldsymbol{r}_j\}, 0, 0, \varepsilon' \sim \omega, \omega) = L^{-4d}\left(\frac{|\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2|}{R}\frac{|\boldsymbol{r}_3-\boldsymbol{r}_4|}{R}\right)^{\mu_2}\left(\frac{R}{L_\omega}\right)^{\alpha}, \tag{2.76}$$

[31] Выражение (2.76) может быть пояснено следующим образом. Для $R \sim L_\omega$ корреляции между волновыми функциями в точках $r_{1,2}$ и $r_{3,4}$ становятся независимыми. Поэтому, скейлинг функции $\mathcal{K}_2$ оказывается таким же как у двух независимых корреляционых функций $\mathcal{K}_1$, т. е., $(|\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2|/R)^{\mu_2}(|\boldsymbol{r}_3-\boldsymbol{r}_4|)/R)^{\mu_2}$. Показатель α описывает скейлинг по отношению к переменной R/L_ω. Для $R \gg L_\omega$ корреляции быстро (экспоненциально) спадают, так что эта область значений R не даёт вклада в интеграл (2.77).

Таблица 2.2: Выражения для индексов ζ_1 и ζ_2 в уравнении (2.78). Здесь $\alpha_c = \min\{2\mu_2 - d, 2\lambda - 3d\}$.

	$d < \lambda < d + \mu_2$	$\lambda = d + \mu_2$	$d + \mu_2 < \lambda$
$\alpha > \alpha_c$	$\zeta_1 = -1 + 2\lambda/d$ $\zeta_2 = 0$	$\zeta_1 = 1 + 2\mu_2/d$ $\zeta_2 = 2$	$\zeta_1 = 1 + 2\mu_2/d$ $\zeta_2 = 0$
$\alpha = \alpha_c$	$\zeta_1 = -1 + 2\lambda/d$ $\zeta_2 = 1$	$\zeta_1 = 1 + 2\mu_2/d$ $\zeta_2 = 3$	$\zeta_1 = 1 + 2\mu_2/d$ $\zeta_2 = 1$
$-d < \alpha < \alpha_c$	$\zeta_1 = 2 + \alpha/d$ $\zeta_2 = 0$	$\zeta_1 = 2 + \alpha/d$ $\zeta_2 = 0$	$\zeta_1 = 2 + \alpha/d$ $\zeta_2 = 0$

где $\boldsymbol{R} = (\boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_3 - \boldsymbol{r}_4)/2$, получаем

$$\frac{1}{\tau_\phi} \sim |\operatorname{Im} \Sigma^R(0,0)| \sim \nu_\star T \int_0^T d\omega \int_a^{L_\omega} d\boldsymbol{R}\, u^2(R) \left(\frac{R}{L_\omega}\right)^\alpha . \tag{2.77}$$

Результат интегрирования по $\boldsymbol{R}$ зависит от соотношения между λ, μ_2, α и d. В случае $\alpha > -d$, частота сбоя фазы имеет вид

$$\frac{1}{\tau_\phi} \propto T_0 u^2(a) \left(\frac{T}{T_0}\right)^{\zeta_1} \ln^{\zeta_2} \frac{T_0}{T}, \tag{2.78}$$

где $T_0 = 1/\nu_\star a^d$ обозначает ультрафиолетовый масштаб энергий, а значения индексов ζ_1 и ζ_2 приведены в таблице 2.2. Обратим внимание, что индекс $\zeta_1 > 1$. Это связано с тем, что $1/\tau_\phi$ не может убывать при $T \to 0$ медленнее, чем первая степень температуры, в ситуации когда имеются хорошо определённые фермиевские возбуждения.

Для $\alpha \leqslant -d$, интеграл по ω садится на малые значения и определяется инфракрасным обрезанием порядка $1/\tau_\phi$. Решая соответствующее самосогласованное уравнение для τ_ϕ, находим

$$\frac{1}{\tau_\phi} \propto \begin{cases} T u^2(a) |\ln u(a)|, & \alpha = -d, \\ T_0 \left[T u^2(a)/T_0\right]^{-d/\alpha}, & \alpha < -d. \end{cases} \tag{2.79}$$

Таким образом, для определения зависимости частоты сбоя фазы от температуры в критической области необходимо знать критические индексы μ_2 и α. Для случая $\alpha > \alpha_c = 2\mu_2 - d$ и $\lambda > \mu_2 + d$ выражение (2.78) было впервые получено в работе [242]. Для произвольных значений μ_2, λ и α выражения (2.78) и (2.79) впервые были получены в работе [256].

2.4.3 Корреляционные функции $\mathcal{K}_1$ и $\mathcal{K}_2$ в подходе нелинейной сигма-модели

Критические индексы μ_2 и α определяют скейлинг корреляционных функций $\mathcal{K}_1$ и $\mathcal{K}_2$ в невзаимодействующей критической точке. Для прояснения их смысла необходимо выразить эти корреляционные функции через соответствующие операторы на языке нелинейной сигма-модели.

Начнём с корреляционной функции $\mathcal{K}_2$ как более сложной. Запишем $\mathcal{K}_2$ через точные одночастичные электронные функции Грина $G_E^{R,A}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')$:

$$\mathcal{K}_2(\{\boldsymbol{r}_j\}, E, \varepsilon, \varepsilon', \omega) = \frac{\delta^4}{\pi^4}\Big\langle \operatorname{Im} G_E^R(\boldsymbol{r}_4, \boldsymbol{r}_1) \operatorname{Im} G_{\varepsilon'+\omega}^R(\boldsymbol{r}_3, \boldsymbol{r}_2)\Big[\operatorname{Im} G_{\varepsilon+\omega}^R(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_4) \operatorname{Im} G_{\varepsilon'}^R(\boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_3) - \\ - \operatorname{Im} G_{\varepsilon+\omega}^R(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_3) \operatorname{Im} G_{\varepsilon'}^R(\boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_4)\Big]\Big\rangle. \tag{2.80}$$

Для того, чтобы определить индекс α, достаточно рассмотреть скейлинг $\mathcal{K}_2(\{\boldsymbol{r}_j\}, 0, 0, 0, 0)$ с размером системы L для фиксированных расстояний $|\boldsymbol{r}_j - \boldsymbol{r}_k|$. Следуя стандартной процедуре (см., например [37]), получим

$$\mathcal{K}_2(\{\boldsymbol{r}_j\}, 0, 0, 0, 0) = \frac{\nu_\star^4 \delta^4}{16}\Bigg\langle \operatorname{tr}\Big[\Lambda_n^\alpha Q(\boldsymbol{r_1}) \Lambda_m^\beta Q(\boldsymbol{r_4})\Big] \operatorname{tr}\Big[\Lambda_k^\gamma Q(\boldsymbol{r_2}) \Lambda_l^\sigma Q(\boldsymbol{r_3})\Big] + \\ + \operatorname{tr}\Big[\Lambda_n^\alpha Q(\boldsymbol{r_1}) \Lambda_m^\beta Q(\boldsymbol{r_4}) \Lambda_k^\gamma Q(\boldsymbol{r_2}) \Lambda_s^\sigma Q(\boldsymbol{r_3})\Big]\Bigg\rangle \tag{2.81}$$

Здесь $\langle \ldots \rangle$ означает усреднение с действием для нелинейной сигма-модели (2.2) и (2.4). Матрица Λ_n^α диагональна и определяется как

$$\big(\Lambda_n^\alpha\big)_{n_1 n_1}^{\beta\beta} = \delta_{n_1, n} \delta^{\beta\alpha}, \qquad \big(\Lambda_n^\alpha\big)_{n_2 n_2}^{\beta\beta} = \delta_{n_2, -n-1} \delta^{\beta\alpha} \tag{2.82}$$

при $n \geqslant 0$, и как

$$\big(\Lambda_n^\alpha\big)_{n_1 n_1}^{\beta\beta} = \delta_{n_1, -n-1} \delta^{\beta\alpha}, \qquad \big(\Lambda_n^\alpha\big)_{n_2 n_2}^{\beta\beta} = \delta_{n_2, -n-1} \delta^{\beta\alpha} \tag{2.83}$$

при $n < 0$. Подчеркнём, что пары (n, α), (m, β), (k, γ) и (s, σ) должны быть все разными, так как корреляционная функция $\mathcal{K}_2(\{\boldsymbol{r}_j\}, 0, 0, 0, 0)$ определяется четырьмя разными состояниями. При выводе выражения (2.81) предполагалось, что все расстояния $|\boldsymbol{r}_j - \boldsymbol{r}_k|$ превышают длину свободного пробега l, так что усредненные функции Грина между любыми двумя разными точками экспоненциально малы [32]. С другой стороны, можно считать, что расстояния $|\boldsymbol{r}_j - \boldsymbol{r}_k|$ малы с точки зрения масштабов нелинейной сигма-модели (скажем

[32]Это предположение не влияет на скейлинговое поведение, но упрощает вычисления.

всего порядка нескольких длин свободного пробега) и, как следствие, все пространственные аргументы матриц Q в выражении (2.81) совпадают.

Выражение (2.81), в отличие от действия нелинейной сигма-модели (2.2) и (2.4), не инвариантно относительно $U(N)\times U(N)$ вращений [33]. Для получения инвариантного выражения оператор, стоящий под знаком среднего в (2.81), необходимо усреднить по глобальным $U(N)\times U(N)$ вращениям. Как известно [34], $U(N)\times U(N)$ инвариантные операторы k-ого порядка по матрице Q имеют вид $O_\lambda = \mathrm{Tr}(\Lambda Q)^{k_1}\ldots\mathrm{Tr}(\Lambda Q)^{k_m}$, где $\lambda=\{k_1,\ldots,k_m\}$ – разбиение целого числа k на сумму целых чисел: $k=k_1+\ldots+k_m$, причём $k_1\geq k_2\ldots\geq k_m$. В частности, для $k=1$ есть только один оператор $\{1\}$, для $k=2$ есть два оператора $\{2\}$ и $\{1,1\}$, для $k=3$ три оператора: $\{3\}$, $\{2,1\}$, и $\{1,1,1\}$, для $k=4$ пять операторов $\{4\}$, $\{3,1\}$, $\{2,2\}$, $\{2,1,1\}$, и $\{1,1,1,1\}$, и т. д.

Так как оператор $\mathcal{K}_2$ (2.81) содержит четыре матрицы Q, то после усреднения по глобальным $U(N)\times U(N)$ вращениям он может быть выражен через операторы с чётными значениями $k\leqslant 4$. Производя усреднение по $U(N)\times U(N)$ вращениям, находим (см. Прил. Б.5)

$$\mathcal{K}_2 = \frac{\nu_\star^4\delta^4}{16}\left\langle \sum_\lambda C_\lambda O_\lambda[Q]\right\rangle , \tag{2.84}$$

где операторы $O_\lambda[Q]$ и соответствующие коэффициенты имеют вид:

$$\begin{aligned}
O_4[Q] &= \mathrm{tr}(\Lambda Q)^4, & C_4 &= \frac{-3+13N+16N^2+4N^3}{4N^2(-1+N)(1+N)^2(2+N)(3+N)},\\
O_{3,1}[Q] &= \mathrm{tr}(\Lambda Q)^3\,\mathrm{tr}\,\Lambda Q, & C_{3,1} &= -\frac{-7+3N+12N^2+4N^3}{2N^2(-1+N^2)^2(3+N)(2+N)},\\
O_{2,2}[Q] &= \mathrm{tr}(\Lambda Q)^2\,\mathrm{tr}(\Lambda Q)^2, & C_{2,2} &= \frac{-3-21N+20N^2+32N^3+8N^4}{8N^2(-1+N^2)^2(3+N)(2+N)},\\
O_{2,1,1}[Q] &= \mathrm{tr}(\Lambda Q)^2(\mathrm{tr}\,\Lambda Q)^2, & C_{2,1,1} &= -\frac{3+2N}{2N^2(-1+N)(1+N)^2(3+N)},\\
O_{1,1,1,1}[Q] &= (\mathrm{tr}\,\Lambda Q)^4, & C_{1,1,1,1} &= \frac{5+5N+2N^2}{8N^2(-1+N^2)^2(3+N)(2+N)},\\
O_2[Q] &= \mathrm{tr}(\Lambda Q)^2, & C_2 &= \frac{-3+3N+4N^2}{2N^2(-1+N)^2(3+N)},\\
O_{1,1}[Q] &= (\mathrm{tr}\,\Lambda Q)^2, & C_{1,1} &= -\frac{3+5N+4N^2}{2N^2(-1+N^2)^2(3+N)(2+N)},\\
O_0[Q] &= 1, & C_0 &= \frac{-9+93N+4N^2-76N^3-24N^4}{2N(-1+N^2)^2(3+N)(2+N)}.
\end{aligned} \tag{2.85}$$

[33] Напомним, что $U(N)\times U(N)$ вращения – это вращения с матрицей U, имеющей ненулевые матричные элементы $U^{\alpha\beta}_{n_1n_3}$ и $U^{\alpha\beta}_{n_2n_4}$.

Операторы $O_\lambda[Q]$ инвариантны относительно $U(N)\times U(N)$ вращений, но не являются собственными операторами относительно ренормализационной группы. Последние представляют собой линейные комбинации из операторов $O_\lambda[Q]$ и полностью определяются группой симметрии $(U(2N)/U(N)\times U(N))$ рассматриваемой нелинейной сигма-модели и реализуют её различные представления аналогично тому, как сферические функции реализуют представления группы вращений [257]. Семь собственных относительно ренормализационной группы операторов нумеруются таблицами Юнга: P_4, $P_{3,1}$, $P_{2,2}$, $P_{2,1,1}$, $P_{1,1,1,1}$, P_2, и $P_{1,1}$ [34, 258, 259, 260] [34]. Для того, чтобы выразить эти собственные операторы через операторы $O_\lambda[Q]$, можно использовать теоретико-групповой подход [258, 259, 260] или однопетлевую перенормировку с помощью метода фонового поля [34, 261, 36]. Так или иначе, можно найти, что корреляционная функция $\mathcal{K}_2$ представляется в виде следующей линейной комбинации собственных операторов (см. Прил. Б.6):

$$\mathcal{K}_2=\frac{\nu_\star^4\delta^4}{16}\Biggl[\frac{4N^2}{4N^2(N^2-1)^2}\langle P_{2,2}[Q]\rangle-\frac{4N^2+8N+3}{6N^2(N+1)^2(N^2+N-2)}\langle P_{2,1,1}[Q]\rangle+ \\ +\frac{4N^2+16N+15}{2N^2(N+1)^2(N+2)(N+3)}\langle P_{1,1,1,1}[Q]\rangle\Biggr]. \tag{2.86}$$

Удивительным образом, из-за наличия хартри-фоковского сокращения корреляционная функция $\mathcal{K}_2$ выражается только через три из семи возможных собственных операторов.

Совершенно аналогично можно найти (см. Прил. Б.5 и Б.6), что корреляционная функция $\mathcal{K}_1$ определяется только оператором $P_{1,1}[Q]$:

$$\mathcal{K}_1=\frac{\nu_\star^2\delta^2}{4}\langle P_{1,1}[Q]\rangle. \tag{2.87}$$

Соотношения (2.86) и (2.87) впервые были получены в работе [256]. Они позволяют связать индексы μ_2 и α с аномальными размерностями операторов нелинейной сигма-модели собственных относительно ренормализационной группы.

[34]Напомним, что значения аномальных размерностей собственных относительно ренормализационной группы операторов P_{2k}, определяющих скейлинговое поведение величин $\langle\int d^2\boldsymbol{r}|\phi_\alpha(\boldsymbol{r})|^{2k}\rangle$, задают мультифрактальный спектр.

2.4.4 Температурная зависимость времени сбоя фазы в критической области

Аномальная размерность оператора $P_{1,1}[Q]$ известна с точностью до пятого порядка петлевого разложения и в репличном пределе $N \to 0$ имеет вид [34, 261, 36, 258, 259, 260]:

$$\gamma_{P_{1,1}}(\sigma'_{xx}) = -\frac{1}{\pi\sigma'_{xx}} - \frac{3}{8\pi^3\sigma'^3_{xx}} + \frac{3\zeta(3)}{8\pi^4\sigma'^4_{xx}} + \dots. \tag{2.88}$$

Как можно установить из сравнения (2.88) и однопетлевого выражения (1.107) $\gamma_{P_{1,1}}$ определяет скейлинг наблюдаемой Γ'_{00}. Аномальная размерность наблюдаемой Γ'_{00} равна $\beta_\gamma(\sigma'_{xx}, \theta', \gamma'_s)/[\gamma'_s(1+\gamma'_s)]$ (см. (2.59)). В пределе $\gamma'_s \to 0$, который нас интересует, аномальная размерность наблюдаемой Γ'_{00} примет вид:

$$\gamma_{P_{1,1}}(\sigma'_{xx}, \theta', 0) \equiv \left.\frac{\partial\beta_\gamma(\sigma'_{xx}, \theta', \gamma'_s)}{\partial\gamma'_s}\right|_{\gamma'_s=0} = \gamma_{P_{1,1}}(\sigma'_{xx}) - \frac{D(0)}{2}\sigma'_{xx}e^{-2\pi\sigma'_{xx}}\cos\theta'. \tag{2.89}$$

Критический индекс μ_2 определяется значением функции $\gamma_{P_{1,1}}(\sigma'_{xx}, \theta', 0)$ в критической точке:

$$\mu_2 = -\gamma_{P_{1,1}}(\sigma^\star_{xx}, \pi, 0) = -\left.\frac{\partial\beta_\gamma(\sigma^\star_{xx}, \pi, \gamma'_s)}{\partial\gamma'_s}\right|_{\gamma'_s=0}. \tag{2.90}$$

Таким образом, критический индекс μ_2, характеризующий скейлинг корреляционной функции $\mathcal{K}_1$, определяется значением производной функции $\beta_\gamma(\sigma'_{xx}, \theta', \gamma'_s)$ в критической точке, соответствующей невзаимодействующим электронам.

Оценка $\gamma_{P_{1,1}}(\sigma^\star_{xx}, \pi, 0)$ с помощью уравнения (2.60) даёт приближённое значение 0.3. Как уже упоминалось выше, оценка критических индексов с помощью уравнения (2.60) является, строго говоря, выходом за рамки приближения, в котором это уравнение было получено. Действительно, вычисление критического индекса μ_2 с помощью численного моделирования в модели Чалкера-Коддингтона даёт значение $\mu_2 = 0.62 \pm 0.05$ [256]. Это значение находится в согласии с результатом работы [236], в которой использовалась сетка размером на порядок меньше, чем в работе [256].

Для собственных операторов $P_{2,2}$, $P_{2,1,1}$ и $P_{1,1,1,1}$, которые входят в выражение (2.86), аномальные размерности с точностью до пятого порядка петлевого разложения и в репличном пределе $N \to 0$ равны [34, 36, 258, 259, 260]

$$\gamma_{P_{2,2}}(\sigma'_{xx}) = 0, \tag{2.91}$$

$$\gamma_{P_{2,1,1}}(\sigma'_{xx}) = -\frac{2}{\pi\sigma'_{xx}} - \frac{3}{4\pi^3\sigma'^3_{xx}} + \frac{3\zeta(3)}{2\pi^4\sigma'^4_{xx}}, \tag{2.92}$$

$$\gamma_{P_{1,1,1,1}}(\sigma'_{xx}) = -\frac{6}{\pi\sigma'_{xx}} - \frac{7}{2\pi^3\sigma'^3_{xx}} + \frac{27\zeta(3)}{2\pi^4\sigma'^4_{xx}}. \tag{2.93}$$

Результаты работы [245] позволяют учесть в аномальных размерностях (2.91)-(2.93) инстантонные вклады, так что они примут вид:

$$\gamma_{P_{2,2}}(\sigma'_{xx}, \theta', 0) = \gamma_{P_{2,2}}(\sigma'_{xx}), \tag{2.94}$$

$$\gamma_{P_{2,1,1}}(\sigma'_{xx}, \theta', 0) = \gamma_{P_{2,1,1}}(\sigma'_{xx}) - \frac{D(0)}{2}\sigma'_{xx}e^{-2\pi\sigma'_{xx}}\cos\theta', \tag{2.95}$$

$$\gamma_{P_{1,1,1,1}}(\sigma'_{xx}, \theta', 0) = \gamma_{P_{1,1,1,1}}(\sigma'_{xx}) - \frac{D(0)}{2}\sigma'_{xx}e^{-2\pi\sigma'_{xx}}\cos\theta'. \tag{2.96}$$

Заметим, что инстантонный вклад в аномальную размерность собственного оператора $P_{2,2}$ равен точно нулю. Критический индекс α определяется минимальным значением, взятых с обратным знаком, аномальных размерностей операторов $P_{2,2}$, $P_{2,1,1}$ и $P_{1,1,1,1}$ в критической точке:

$$\alpha = \min\{-\gamma_{P_{2,2}}(\sigma^\star_{xx}, \pi, 0), -\gamma_{P_{2,1,1}}(\sigma^\star_{xx}, \pi, 0), -\gamma_{P_{1,1,1,1}}(\sigma^\star_{xx}, \pi, 0)\}. \tag{2.97}$$

Результаты пертурбативных и инстантонных вычислений указывают на то, что аномальная размерность собственного оператора $P_{2,2}$ точно равна нулю при всех значениях σ'_{xx}. С учётом того, что аномальные размерности собственных операторов $P_{2,1,1}$ и $P_{1,1,1,1}$ отрицательны при больших значениях σ'_{xx}, естественно предположить, что значение критического индекса α равно нулю: $\alpha = 0$. Это предположение согласуется с результатом $\alpha = -0.05 \pm 0.1$, полученным с помощью численного моделирования [256] в модели Чалкера-Коддингтона [35].

Таким образом, установив, что значение индекса α равно нулю, из уравнения (2.78) и таблицы 2.2 находим температурную зависимость времени сбоя фазы на переходе между плато в режиме целочисленного квантового эффекта Холла в случае короткодействующего межэлектронного взаимодействия:

$$\frac{1}{\tau_\phi} \propto T_0 u^2(a) \begin{cases} (T/T_0)^{1+\mu_2}, & \lambda_c < \lambda, \\ (T/T_0)^{1+\mu_2}\ln^2(T_0/T), & \lambda = \lambda_c, \\ (T/T_0)^{-1+\lambda}, & 2 < \lambda < \lambda_c, \end{cases} \tag{2.98}$$

где $\lambda_c = 2 + \mu_2 \approx 2.62 \pm 0.05$. В случае $\lambda > \lambda_c$, в согласии с обсуждением в конце раздела (2.3) получаем, что $1/\tau_\phi \propto T^p$ причём $p = 1+\mu_2$. Отсюда находим, что критический индекс

[35] Гипотеза о том, что значение критического индекса α равно нулю впервые была высказана в работе [236], в которой это значение определялось с помощью численного моделирования в модели Чалкера-Коддингтона. Однако, из-за малого размера моделируемой системы в работе [236] не удалось достичь скейлингового предела и действительно определить значение α. Использование в [256] сетки размера 1024x1024, что на порядок больше чем в работе [236], позволило достичь скейлингового предела и извлечь значение α.

$z_T = 2/p = 2/(1+\mu_2)$. Отметим, что впервые этот результат был получен в работе [242], в которой предполагалось, что индекс α равен нулю.

Используя значения индексов $\nu \simeq 2.35$ [210] и $\mu_2 \simeq 0.62$ [236, 256], найденные из численного моделирования, получаем оценку 0.35 для значения критического индекса $\kappa = 1/(\nu z_T)$, характеризующего зависимость ширины критической области от температуры для критической точки, соответствующей невзаимодействующим электронам [242, 256].

2.4.5 Обсуждение результатов

При анализе температурной зависимости частоты сбоя фазы были сделаны два предположения: о критическом поведении волновых функций, которые определяли температурную зависимость частоты сбоя фазы, и о том, что имеет смысл усреднённая частота сбоя фазы.

При вычислении частоты сбоя фазы как мнимой части собственно энергетической части, значение энергии $E = 0$ в точности соответствовало критической точке (см. (2.73)). Предположим теперь, что химический потенциал μ отстоит от критического значения μ_c на величину порядка ширины перехода при данной температуре: $|\mu - \mu_c| \propto T^{\kappa}$. Корреляционная длина $\xi_\mu \propto |\mu - \mu_c|^{-\nu}$, определяющая характерный пространственный масштаб электронных состояний, в этом случае будет равна длине $L_\phi \propto T^{-1/z_T}$. Характерный масштаб интегрирования по $\boldsymbol{R}$ в выражении (2.77) определяется длиной $L_T \sim T^{-1/z}$, которая в силу неравенства $z_T < z = d$ $(p > 1)$ много меньше L_ϕ: $L_T \ll L_\phi$. Последнее неравенство оправдывает сделанное предположение о критическом поведении волновых функций.

Другое предположение, которое было сделано, – это усреднение частоты сбоя фазы по реализациям случайного потенциала. Как известно, в диэлектрической фазе при низких температурах усреднение не имеет смысла [48, 49, 50] так, как расстояние между уровнями энергии, соответствующим состояниям, с которыми данное состояние связано ненулевыми матричными элементами взаимодействия, становится больше средней частоты сбоя фазы, а значит золотое правило Ферми, на котором основано стандартное вычисление частоты сбоя фазы, теряет применимость. Однако, в критической области ситуация существенно другая. При данной температуре число состояний, дающих вклад в частоту сбоя фазы данного состояния, т.е. число состояний в полосе энергий порядка T и в объёме порядка L_ϕ^d, оказывается пропорционально T^{1-d/z_T}, т. е. растёт по мере понижения температуры. Таким образом, неравенство $z_T < d$ $(p > 1)$ оправдывает усреднение частоты сбоя фазы.

В этом разделе была вычислена частота сбоя фазы в низшем приближении по межэлектронному взаимодействию (золотое правило Ферми). Строго говоря, такое вычисление даёт только оценку сверху на значение L_ϕ, т. е. нижнюю оценку для критического индекса

z_T (или верхнюю оценку для критического индекса κ). В принципе, нельзя исключить ситуации, когда вклады старших порядков по межэлектронному взаимодействию будут доминировать из-за сильной мультифрактальности волновых функций. Для перехода между плато в режиме квантового эффекта Холла такая ситуация кажется маловероятной из-за наличия только слабой мультифрактальности. Однако, такая ситуация может реализовываться, например, в переходе Андерсона в $d = 3$ (как с магнитным полем, так и без него), где мультифрактальность достаточно сильная. Отметим, что в настоящее время значения критических индексов μ_2 и α для переходов Андерсона в $d = 3$ неизвестны.

Полученные в этом разделе результаты о связи критических индексов, определяющих температурное поведение частоты сбоя фазы, с аномальными размерностями операторов, не влияющих на лидирующее мультифрактальное поведение, указывают на важность более детального исследования этих операторов. Их аномальные размерности численно могут быть найдены из изучения статистики волновых функций в критической области за рамками лидирующего мультифрактального поведения.

Результаты этого и предыдущего разделов демонстрируют, что значение критического индекса $\kappa = 0.42 \pm 0.01$, найденное из транспортных измерений в работе [191], не соответствует сделанным в ней выводам о том, что переход между плато в экспериментальной системе соответствует критической точке для невзаимодействующих электронов. В таком случае, значение критического индекса κ должно быть меньше: $\kappa \simeq 0.35$ [242, 256]. Для окончательного подтверждения этого заключения, необходимы эксперименты по изучению переходов между плато в режиме целочисленного квантового эффекта Холла в ситуации, когда электрон-электронное взаимодействие короткодействующее. Потенциально, это можно было бы реализовать с помощью дополнительного затвора, экранирующего электрон-электронное взаимодействие в двумерной системе [262].

2.5 Осцилляции магнитосопротивления и теплоёмкости, связанные с наличием делокализованных состояний

2.5.1 Введение

В этом разделе будет изучаться зависимость физических наблюдаемых (диссипативной и холловской проводимости, теплоёмкости) от температуры и магнитного поля в области, где $\sigma'_{xx} \gg 1$. Ниже будет показано, что физические наблюдаемые испытывают осцилляции с магнитным полем, амплитуда которых определяется инстантонным вкладом, и как следствие, растёт с понижением температуры. Для упрощения вычислений и, имея в виду сравнение с экспериментом, будем рассматривать случай кулоновского взаимодействия, $\gamma'_s = -1$.

2.5.2 Зависимость диссипативной и холловской проводимости от температуры и магнитного поля

Зависимость диссипативной и холловской проводимости от размера системы L при $T = 0$ может быть найдена из решения уравнений (2.45)-(2.46). Решая их для $\gamma_s = -1$, получаем

$$\begin{aligned} \sigma'_{xx}(L) &= \sigma_{xx}(L) - \Big[f_{xx}\big(\sigma_{xx}(L)\big) - f_\infty(\sigma_{xx})\Big]\cos 2\pi\sigma_{xy}, \\ \sigma'_{xy}(L) &= \sigma_{xy} - \Big[f_{xy}\big(\sigma_{xx}(L)\big) - f_\infty(\sigma_{xx})\Big]\sin 2\pi\sigma_{xy}. \end{aligned} \tag{2.99}$$

Здесь функции $f_{xx}(z)$, $f_{xy}(z)$ и $f_\infty(z)$ совпадают и равны: $f_{xx}(z) = f_{xy}(z) = f_\infty(z) = [D(-1)/4]z^2\exp(-2\pi z)$. Напомним, что $\sigma_{xx}(L) = \sigma_{xx} - (2/\pi)\ln L/l$, а $\sigma_{xx} \equiv \sigma_{xx}(l)$ и $\sigma_{xy} \equiv \sigma_{xy}(l)$. Заметим, что величины σ_{xx} и σ_{xy} зависят от магнитного поля. Зависимость холловской и диссипативной проводимости от температуры можно найти из уравнений (2.99), если учесть, что при конечной температуре и $L \gg L_T = \sqrt{\sigma_{xx}/(zT)}$ логарифмическая расходимость обрезается масштабом L_T (см. обсуждение в разделе 1.2.5). Тогда, получаем

$$\begin{aligned} \sigma'_{xx}(T) &= \sigma_{xx}(T) - \Big[f_{xx}\big(\sigma_{xx}(T)\big) - f_\infty(\sigma_{xx})\Big]\cos 2\pi\sigma_{xy}, \\ \sigma'_{xy}(T) &= \sigma_{xy} - \Big[f_{xy}\big(\sigma_{xx}(T)\big) - f_\infty(\sigma_{xx})\Big]\sin 2\pi\sigma_{xy}. \end{aligned} \tag{2.100}$$

Аккуратное вычисление однопетлевой поправки к проводимости (1.21) при конечной температуре даёт

$$\sigma_{xx}(T) = \sigma_{xx} - \frac{2}{\pi}\ln\frac{c_2^2 L_T}{4\sqrt{\pi}l}, \quad c_2 = \int\limits_1^\infty \frac{\ln x}{\operatorname{sh}^2 x}dx - \int\limits_0^1 [1 - x\operatorname{cth} x]\frac{dx}{x^2} \approx 0.43. \tag{2.101}$$

Выражения (2.100) описывают осцилляции диссипативной и холловской проводимости с магнитным полем (точнее с σ_{xy}) с амплитудой, определяемой инстантонным вкладом и увеличивающейся при понижении температуры. В дальнейшем будем называть эти осцилляции квантовыми холловскими осцилляциями. Выражения (2.100) справедливы при не слишком низких температурах таких, что $\sigma_{xx}(T) \gg 1$.

Величины $\sigma'_{xx}(T)$ и $\sigma'_{xy}(T)$ представляют собой *усредненные по ансамблю* диссипативную и холловскую проводимости. В макроскопическом образце размера $L \gg L_\phi$ измеряемые проводимости G_{xx} и G_{xy} (также как и другие физические наблюдаемые) могут сильно отличаться от усредненных по ансамблю. Это связано с тем, что образец размера $L \gg L_\phi$ эффективно разделён на независимые области с характерным размером порядка L_ϕ. В каждой такой области тензор проводимости испытывает мезоскопические флуктуации [263, 264, 265]. Из-за этого измеряемые физические наблюдаемые зависят от функций распределения физических наблюдаемых в области с размером порядка L_ϕ [266]. Поэтому, для сравнения с экспериментом полезно обобщить выражения (2.100) таким образом, чтобы, с одной стороны, они описывали зависимость измеряемой проводимости от температуры, а, с другой стороны, не зависели от конкретного вида функций распределения.

Для того, чтобы найти зависимость G_{xx} и G_{xy} от температуры, применим хорошо известный метод уравнения Каллана-Симанчика [10]. В нём предполагается, что измеряемая физическая наблюдаемая, которая, вообще говоря, есть функция переменых $l, \bar{\sigma}_{xx}, \bar{\sigma}_{xy}$, и $T\bar{z}$ не зависит от длины свободного пробега, на которой определены величины $\bar{\sigma}_{xx} = \sigma'_{xx}(l)$ и $\bar{\sigma}_{xy} = \sigma'_{xy}(l)$ [36]. Заметим, что, как видно из уравнения (2.99), $\bar{\sigma}_{xx} \equiv \sigma_{xx}$, $\bar{\sigma}_{xy} \equiv \sigma_{xy}$ и $\bar{z} \equiv z$. Тогда, измеряемые проводимости удовлетворяют уравнению Каллана-Симанчика:

$$\left[l\frac{\partial}{\partial l} + \beta_\sigma(\bar{\sigma}_{xx}, \bar{\theta}, \bar{\gamma}_s)\frac{\partial}{\partial \bar{\sigma}_{xx}} + \beta_\theta(\bar{\sigma}_{xx}, \bar{\theta}, \bar{\gamma}_s)\frac{\partial}{\partial \bar{\theta}} + \frac{\partial \beta_\gamma(\bar{\sigma}_{xx}, \bar{\theta}, \bar{\gamma}_s)}{\partial \bar{\gamma}_s} T\bar{z}\frac{\partial}{\partial T\bar{z}} \right]\Bigg|_{\bar{\gamma}_s=-1} G_{ab} = 0. \quad (2.102)$$

Решая эти уравнения с помощью выражений (2.56)-(2.57) и (2.59), найдём

$$\begin{aligned} G_{xx}(T) &= g(X) - \Big[f_{xx}\big(g(X)\big) - f_\infty(\bar{\sigma}_{xx})\pi X g'(X) \Big] \cos 2\pi\bar{\sigma}_{xy}, \\ G_{xy}(T) &= \bar{\sigma}_{xy} - \Big[f_{xy}\big(g(X)\big) - f_\infty(\bar{\sigma}_{xx}) \Big] \sin 2\pi\bar{\sigma}_{xy}, \end{aligned} \quad (2.103)$$

где теперь f_{xx} и f_{xy} произвольные функции своего аргумента $g(X)$, который есть произвольная функция скейлинговой переменной $X = T\bar{z}l^2 \exp(\pi\bar{\sigma}_{xx})/\sqrt{\bar{\sigma}_{xx}}$. Последняя, как легко проверить, не зависит от l. Уравнения (2.103) описывают зависимость измеряемой диссипативной и холловской проводимости от температуры и магнитного поля. Они, в отличие от уравнений (2.100), не ограничены условием $\sigma'_{xx}(T) \gg 1$, а справедливы даже при таких температурах, что $g(X) \sim 1$, если выполнены условия, что амплитуда осцилляций при изменении $\bar{\sigma}_{xy}$ мала: $f_{xx}(g(X)) \ll g(X)$ и $f_{xy}(g(X)) \ll 1$. При этом, конечно, предполагается, что $\bar{\sigma}_{xx} \gg 1$. Сравнение уравнений (2.100) и (2.103) показывает, что при

[36]Такая гипотеза о независимости физических наблюдаемых от микроскопического масштаба находится в основе скейлинговой теории.

температурах таких, что $X \gg 1$, $g(X) \approx (1/\pi)\ln X$, а $f_{xx}(g) = f_{xy}(g) = f_\infty(g)$. Выражения (2.103), описывающие квантовые холловские осцилляции проводимости, были впервые получены в работе [267].

2.5.3 Зависимость теплоёмкости от температуры и магнитного поля

Физическая наблюдаемая z' определяет температурное поведение теплоёмкости (на единицу площади). Как следует из определения (1.10), теплоёмкость можно оценить как [37]

$$c_v = \frac{2\pi}{3} T z'(T). \tag{2.104}$$

Здесь численный коэффициент выбран так, чтобы с учётом того, что $z = m_\star/4$, выражение (2.104) без учёта квантовых поправок, т. е. при z вместо $z'(T)$, переходило в известный ответ для ферми-жидкости.

Решая уравнение (2.55) для $z'(T)$ при $\gamma_s = -1$, получаем при $\sigma_{xx} \gg 1$ и не слишком низких температурах, таких что $\sigma_{xx}(T) \gg 1$, следующее выражение

$$z'(T) = z\left(\frac{\sigma_{xx}(T)}{\sigma_{xx}}\right)^{1/2}\left\{1 - \left[h_\infty(\sigma_{xx}(T)) - h_\infty(\sigma_{xx})\left(\frac{\sigma_{xx}}{\sigma_{xx}(T)}\right)^{1/2}\right]\cos 2\pi\sigma_{xy}\right\}. \tag{2.105}$$

Здесь $z \equiv z(l)$ и функция $h_\infty(z) = [D(-1)/24] z \exp(-2\pi z)$. Выражение (2.105) описывает квантовые холловские осцилляции теплоёмкости.

Как обсуждалось выше, физическая наблюдаемая $z'(T)$ определяет усреднённую по ансамблю теплоёмкость, которая может отличаться от измеряемой теплоёмкости, равной $(2\pi/3)T\mathcal{Z}(T)$. В предположении, что $\mathcal{Z}(T)$ удовлетворяет уравнению Каллана-Симанчика (2.102), находим, что

$$\mathcal{Z}(T) = \frac{\bar{z}}{\sqrt{\bar{\sigma}_{xx}}}\left\{h(g(X)) + \left[h_z(g(X)) + h_\infty(\bar{\sigma}_{xx})h(g(X)) + f_\infty(\bar{\sigma}_{xx})\frac{dh(g(X))}{d\ln X}\right]\cos 2\pi\bar{\sigma}_{xy}\right\}, \tag{2.106}$$

где $h(g)$ и $h_z(g)$ произвольные функции своего аргумента $g(X)$. Заметим, что, как следует из уравнения (2.105), $\bar{z} = z = z(l)$. Выражение (2.106) впервые было получено в работе

[37] Отметим, что, если делать более аккуратно [109], то имеет место следующее соотношение: $\partial(\beta\Omega)/\partial\beta = -T\sum_{\omega_n}|\omega_n|\Upsilon(i\omega_n)$, причём наблюдаемая z' определяется функцией $\Upsilon(i\omega_n)$ как $z' = \lim_{n\to 0}\Upsilon(i\omega_n)$. Теплоёмкость $c_v = (\partial/\partial T)\int_0^\infty d\omega(\omega/\pi)\operatorname{cth}(\omega/2T)\operatorname{Re}\Upsilon^R(\omega)$, где $\Upsilon^R(\omega)$ – это запаздывающая функция, соответствующая мацубаровской функции $\Upsilon(i\omega_n)$. В случае, когда интеграл определяется частотами $\omega \sim T$, получаем выражение (2.104).

[268]. Сравнение температурной зависимости выражений (2.105) и (2.106) показывает, что при не слишком низких температурах, таких что $X \gg 1$ и $g(X) = (1/\pi)\ln X$, функция $h(g) = \sqrt{g}$ и $h_z(X)/h(X) = -h_\infty(g)$. В этом режиме выражение (2.106) принимает вид

$$\mathcal{Z}(T) = \bar{z}\left(\frac{\sigma'_{xx}(T)}{\bar{\sigma}_{xx}}\right)^{1/2}\Big\{1 + 2\Big[h_\infty(\sigma_{xx}(T)) - h_\infty(\bar{\sigma}_{xx})\Big]\cos\theta\Big\}. \tag{2.107}$$

Отметим, что выражения (2.106) и (2.107) различаются только членами порядка $\exp(-2\pi\bar{\sigma}_{xx})$. Такое различие возникает из-за того, что при выводе выражения (2.106) решалось уравнение (2.55), а выражение (2.107) соответствует решению уравнений (2.56)-(2.57) и (2.59). Таким образом, в квантовых холловских осцилляциях теплоёмкости (в отличие от осцилляций проводимости) можно проверить гипотезу о том, что уравнения (2.45)-(2.46) и (2.55) переходят в (2.56)-(2.57) и (2.59).

2.5.4 Обсуждение результатов и сравнение с экспериментом

Квантовые холловские осцилляции в таких физических наблюдаемых, как диссипативная и холловская проводимости, теплоёмкость, и (в случае неполной спиновой поляризации) спиновая восприимчивость, имеют совершенно другую физическую природу, чем хорошо известные осцилляции Шубникова-де Гааза и де Гааза-ван Альфена. Существование последних связано с наличием периодической структуры в плотности состояний, в частности, с наличием уровней Ландау. Размытие уровней Ландау приводит к исчезновению осцилляций Шубникова-де Гааза и де Гааза-ван Альфена в режиме слабых магнитных полей $\tau_q^{-1} \gg \omega_c = eB/m_\star c$, где τ_q – время рассеяния на все углы. В тоже время, в этом случае квантовые холловские осцилляции могут иметь заметную амплитуду при низких температурах, так как они связаны только с существованием периодической (в переменных $\bar{\sigma}_{xy}$) структуры делокализованных состояний [170, 211, 212]. Отметим, что существование квантовых холловских осцилляций в теплоёмкости является специфическим явлением для взаимодействующих электронов. В невзаимодействующей электронной системе они отсутствуют в отличие от квантовых холловских осцилляций проводимости, которые впервые обсуждались в работе [212].

В двумерных электронных системах, изучаемых экспериментально, всегда присутствует длинноволновая компонента случайного потенциала. Поэтому, необходимо различать транспортное время рассеяния ($\tau_{\rm tr}$) и время рассеяния на все углы (τ_q), которое определяет уширение уровней Ландау из-за беспорядка. В области классически слабых магнитных полей, $\omega_c \ll 1/\tau_{\rm tr}$, при низких температурах таких, что $\sigma_{xx}(T) \gtrsim 1$, должны наблюдаться осцилляции физических наблюдаемых с магнитным полем, которые являются квантовыми холловскими осцилляциями. При этом положение экстремумов определяется условием $\bar{\sigma}_{xy} = k + 1/2$ и не совпадает с положением экстремумов у осцилляций Шубникова-де Гааза и де Гааза-ван Альфена, которые в этом режиме полностью подавлены беспорядком. В области магнитных полей $1/\tau_{\rm tr} \ll \omega_c \ll 1/\tau_q$ при низких температурах опять должны наблюдаться квантовые холловские осцилляции. Но, в этом режиме положение экстремумов совпадает с положениями экстремумов у осцилляций Шубникова-де Гааза и де Гааза-ван Альфена, которые всё ещё подавлены рассеянием на случайном потенциале. В области сильных магнитных полей, $1/\tau_q \ll \omega_c$, когда уровни Ландау хорошо разделены, осцилляции Шубникова-де Гааза и де Гааза-ван Альфена преобладают над квантовыми холловскими осцилляциями. Поэтому, для наблюдения квантовых холловских осцилляций нужно выполнение следующих условий: а) слабое магнитное поле, $\omega_c \ll \tau_q^{-1}$, б) не очень большие значения $\bar{\sigma}_{xx}$ для того, чтобы были достижимы низкие температуры такие, что $\sigma_{xx}(T) \gtrsim 1$, в) холловская проводимость должна меняться на несколько единиц при изменении магнитного поля, ограниченного условием $\omega_c \ll \tau_q^{-1}$. Вообще говоря, совместить все эти три условия в одном эксперименте достаточно сложно.

Недавно осцилляции магнитопроводимости изучались экспериментально на тонком трёхмерном образце из слоёв GaAs, допированных Si [243]. При низких температурах транспорт в образце имел характер двумерного с эффективной концентрацией электронов около 10^{12} см$^{-2}$. Значение диссипативной проводимости в нулевом магнитном поле было $G_{xx}(B=0) \approx 14$, несмотря на низкую подвижность (около 2500 см^2/В·с). В работе [243] в области промежуточных магнитных полей, $\tau_{\rm tr}^{-1} \lesssim \omega_c \lesssim \tau_q^{-1}$, было найдено, что осцилляции магнитопроводимости при температурах от 0.1 К до $T_0 = 4.2$ К описываются следующими формулами

$$\begin{aligned} G_{xx}(T) &\approx G_{xx}^{\rm sm}(T) - [f_{xx}(G_{xx}^{\rm sm}(T)) - f_{xx}(G_{xx}^{\rm sm}(T_0))]\cos[2\pi G_{xy}(T_0)], \\ G_{xx}(T) &\approx G_{xy}(T_0) - [f_{xy}(G_{xx}^{\rm sm}(T)) - f_{xy}(G_{xx}^{\rm sm}(T_0))]\sin[2\pi G_{xy}(T_0)], \end{aligned} \tag{2.108}$$

где $G_{xx}^{\rm sm}(T)$ – это неосциллирующая часть диссипативной проводимости, которая в эксперименте [243] менялась в достаточно узком интервале от 0.7 до 0.9 [38]. При этом оказалось, что $G_{xx}^{\rm sm}(T) \approx (1/\pi)\ln X$, а $f_{xx}(G_{xx}^{\rm sm}) = f_{xy}(G_{xx}^{\rm sm}) \approx 7.6\exp(-2\pi G_{xx}^{\rm sm})$. Как легко видеть, выражения (2.108), описывающие экспериментальные зависимости, следуют из общих уравнений (2.103) для зависимости измеряемых диссипативной и холловской проводимости от

[38] В эксперименте [243] магнитное поле было недостаточным для поляризации спина электронов. Для сравнения с теорией результаты эксперимента [243] пересчитаны на одну проекцию спина.

температуры и $\bar{\sigma}_{xy}$ при условии $g(X) = (1/\pi)\ln X$ [39].

Таким образом можно сказать, что результаты экспериментов [243] находятся в качественном согласии с представленной в этом разделе теорией квантовых холловских осцилляций проводимости. Для более детального сравнения теории и эксперимента необходимы измерения осцилляций магнитосопротивления в более широком интервале температур так, чтобы $G_{xx}^{\rm sm}(T)$ изменялось в широком диапозоне. Также, было бы полезно измерить квантовые холловские осцилляции проводимости на других системах с двумерными электронами. Интересной представляется задача измерения квантовых холловских осцилляций теплоёмкости и спиновой восприимчивости в случае неполной поляризации.

2.6 Заключение

В этой главе с помощью нелинейной сигма-модели с топологическим членом изучено влияние электрон-электронного взаимодействия на целочисленный квантовый эффект Холла. Самым интересным результатом этой главы являются непертурбативные уравнения (2.45), (2.46) и (2.55), описывающие для случая взаимодействующих электронов, полностью поляризованных по спину, зависимость диссипативной и холловской проводимости, а также амплитуды взаимодействия z' от размера системы и магнитного поля при нулевой температуре. Важность этого аналитического результата состоит в том, что он подтверждает гипотезы работы [233] о том, что а) наличие межэлектронного взаимодействия в случае электронов с полностью поляризованными спинами не меняет качественную картину объяснения целочисленного квантования холловской проводимости, предложенную в работе [28, 170] для невзаимодействующих электронов, и б) переход между плато в случае короткодействующего электрон-электронного взаимодействия попадает в тот же класс универсальности, что и модель невзаимодействующих электронов, тогда как в случае кулоновского взаимодействия этот квантовый фазовый переход находится в новом по сравнению с моделью невзаимодействующих электронов классе универсальности. С точки зрения неабелевых калибровочных теорий результаты (2.45), (2.46) и (2.55) интересны тем, что демонстрируют независимость непертурбативных поправок к физическим наблюдаемым от схемы регуляризации в отличие от поправок к термодинамическому потенциалу, если при вычислении вкладов квантовых флуктуаций около топологически тривиального и нетривиального решений использовать одну и ту же схему регуляризации.

Непертурбативные уравнения (2.45), (2.46) и (2.55) применены для построения теории

[39] При выводе надо учесть, что $G_{xx}(T_0) \approx G_{xx}^{\rm sm}(T_0)$ и $\bar{\sigma}_{xy} \approx G_{xy}(T_0)$.

осцилляций магнитосопротивления с магнитным полем, связанных с наличием делокализованных состояний – так называемых, квантовых холловских осцилляций – в двумерной неупорядоченной электронной системе с кулоновским взаимодействием. Показано, что при низких температурах зависимость амплитуды квантовых холловских осцилляций от температуры отличается от такой зависимости для амплитуды осцилляций Шубникова-де Гааза и совпадает с наблюдаемой в эксперименте [243]. Предсказано существование квантовых холловских осцилляций в теплоёмкости и построена их теория в случае кулоновского взаимодействия.

Также в этой главе исследована температурная зависимость времени сбоя фазы в критической области перехода между плато для случая электронов с полностью поляризованными спинами и с короткодействующим взаимодействием. С помощью подхода нелинейной сигма-модели аналитически показано, что критический индекс, характеризующий степенную зависимость от температуры времени сбоя фазы в критической области перехода между плато, определяется значением аномальной размерности амплитуды электрон-электронного взаимодействия в критической точке, соответствующей невзаимодействующим электронам, в согласии с численными результатами работы [236].

В заключение отметим, что методы, развитые в этой главе, могут быть использованы для построения скейлинговой теории в случае электронов с неполностью поляризованными спинами, когда возможно существование перехода металл-изолятор в нулевом магнитном поле (см. Гл. 1). В этом случае схематическая диаграмма, иллюстрирующая зависимость физических наблюдаемых от размера системы, должна иметь вид топологически отличный от диаграммы на рисунке 2.5. Также результаты этой главы указывают на необходимость изучения вопроса о мультифрактальности на переходе между плато в случае кулоновского взаимодействия [40].

[40]В этом случае вместо моментов волновой функции естественно изучать моменты одночастичной плотности состояний.

Глава 3

Макроскопическое зарядовое квантование в одноэлектронных устройствах

3.1 Введение

В этой главе рассматривается принципиально другая физическая система – одноэлектронный транзистор. Существенное влияние на транспорт в одноэлектронном транзисторе оказывает электрон-электронное взаимодействие. Именно оно приводит к хорошо известному явлению кулоновской блокады. В этой главе показывается, что явление кулоновской блокады в одноэлектронном транзисторе, по своей сути, во многом аналогично явлению квантового эффекта Холла.

3.1.1 Одноэлектронный транспорт и кулоновская блокада

Исследования электронного транспорта через туннельные контакты проводятся с середины прошлого века. Типичные экспериментальные системы изображены на рисунке 3.1. К двум металлическим электродам, разделенным диэлектрической прослойкой, в которой возможно находятся одна или несколько металлических гранул малых размеров, прикладывается разность потенциалов и измеряется электрический ток. Первые эксперименты, выполненные на туннельном контакте [269], туннельных контактах с металлическими гранулами в диэлектрической прослойке [270, 271] и туннельном контакте с третьим металлическим электродом [272] показали неожиданно сильную зависимость кондактанса от тем-

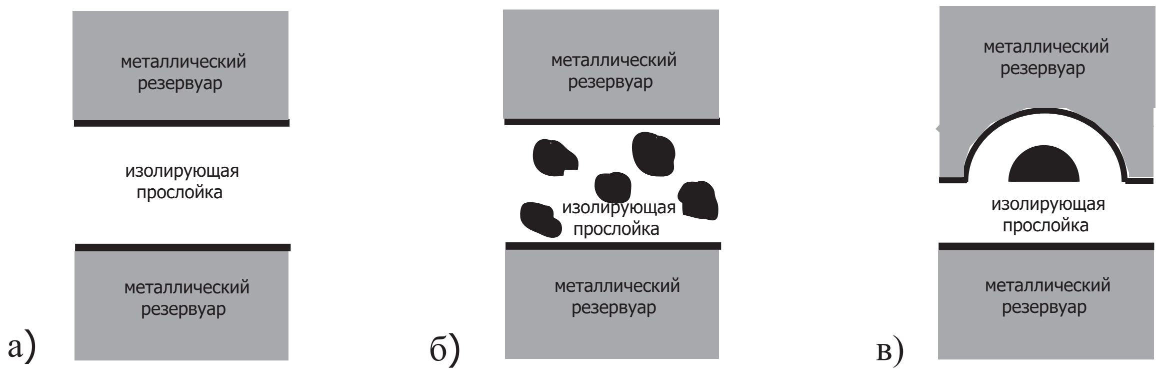

Рисунок 3.1: а) Схема туннельного контакта; б) схема туннельного контакта с несколькими металлическими грануллами в диэлектрической прослойке; в) схема туннельного контакта с одним металлическим островком.

пературы, а дифференциального кондактанса от напряжения. Оказалось, что характерная энергия, которая определяет зависимость дифференциального кондактанса от напряжения при низких температурах, равна, так называемой *зарядовой энергии* $E_c = e^2/2C$, где e – заряд электрона, а C – полная ёмкость системы. Для ёмкости $C = 10^{-5}$ пФ, что соответствует размеру контакта $L \approx 100$ нм, зарядовая энергия оказывается порядка 0.01 эВ, что соответствует температуре примерно 100 К. Таким образом, наличие всего лишь *одного* электрона, нарушающего общую электронейтральность в туннельном контакте малых размеров, приводит к заметному изменению электрического потенциала в контакте.

Если считать, что основной механизм транспорта через туннельный контакт – это последовательное туннелирование электронов, то естественно ожидать подавления электронного транспорта при температурах и напряжениях меньших E_c. Такое подавление электронного транспорта называется *кулоновской блокадой*. Насколько известно автору, первое теоретическое рассмотрение электронного транспорта через туннельный контакт с несколькими металлическими гранулами в диэлектрической прослойке было сделано в работах [273, 274]. Было показано, что случайное распределение параметров гранул приводит к линейной зависимости кондактанса от температуры. Теория электронного транспорта для туннельного контакта с одной металлической гранулой в диэлектрической прослойке в рамках подхода кинетического уравнения на вероятности туннелирования была развита

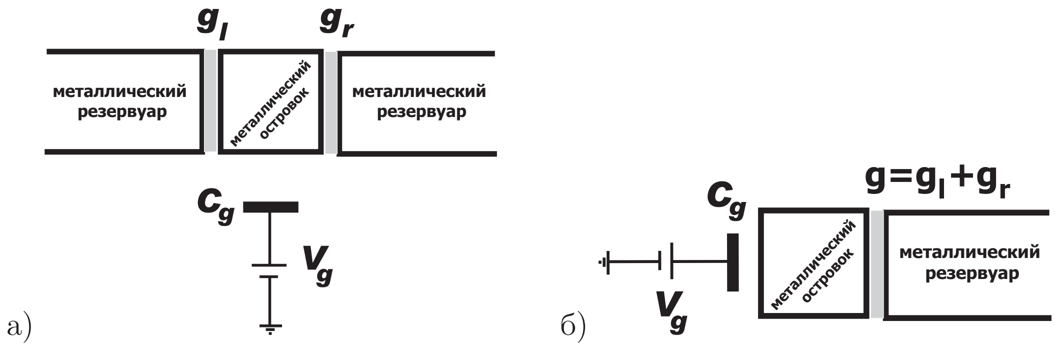

Рисунок 3.2: а) Схема одноэлектронного транзистора; б) схема одноэлектронной коробочки.

в работе [275]. В настоящее время принято называть эту теорию – *ортодоксальной теорией* кулоновской блокады. В частности, было показано, что при низких температурах $T \ll E_c$ кондактанс туннельного контакта экспоненциально подавлен. Сравнение теории с экспериментом было сильно затруднено невозможностью контролировать изучаемые образцы.

В конце 80-х годов прошлого века появилась технологическая возможность делать хорошо контролируемые туннельные контакты с металлическим островком заданной геометрии, помещенным в диэлектрическую прослойку. Также для управления током через туннельный контакт металлический островок стали соединять ёмкостным образом с ещё одним металлическим электродом – затвором (см. Рис. 3.2а). Такое устройство называется *одноэлектронным транзистором*. Важным отличием одноэлектронного транзистора от туннельного контакта является периодическая зависимость тока от потенциала затвора V_g. Транспортные измерения впервые демонстрирующие такую зависимость были проведены в работе [276]. На рисунке 3.2б схематически изображена *одноэлектронная коробочка* – металлический островок, соединенный туннельным образом с одним металлическим электродом и ёмкостным образом с другим, который называется затвором [1]. Экспериментальные измерения периодической зависимости эффективной ёмкости (обратная мнимая часть импенданса в пределе нулевой частоты) одноэлектронной коробочки от потенциала затвора V_g были впервые выполнены в работе [277]. Быстрое экспериментальное развитие в этой области привело к реализации контролируемого транспорта с переносом заряда, соответствующего одному электрону [278, 279]. Подробное описание ключевых экспериментов в области транспорта в одноэлектронных устройствах можно найти в обзорах [280, 281].

К настоящему времени одноэлектронный транзистор также был реализован в других

[1] Заметим, что в отсутствие транспортного напряжения между левым и правым электродами одноэлектронный транзистор во многом не отличается от одноэлектронной коробочки.

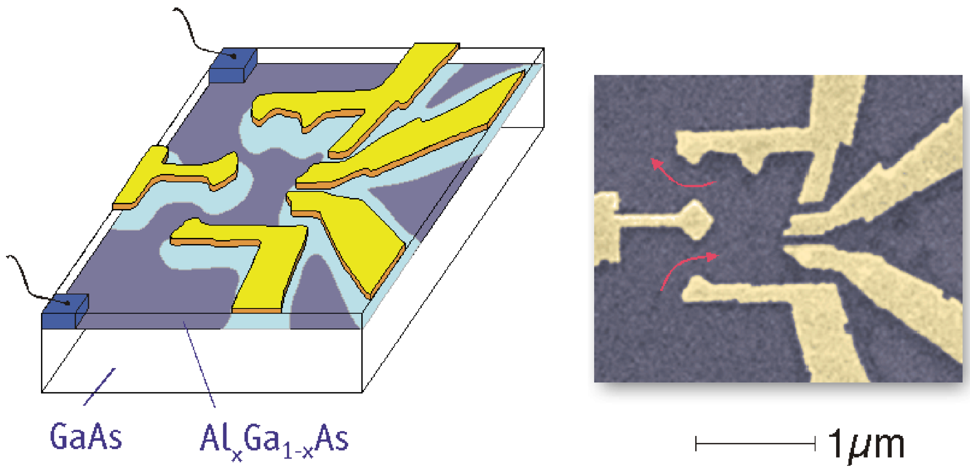

Рисунок 3.3: Схема (слева) и микрограф (справа) квантовой точки. Движение электронов в перпендикулярном плоскости направлении квантовано. Металлические затворы, выполненные с помощью электронно-лучевой литографии, ограничивают движение электронов в плоскости. Рисунок взят из работы [288].

физических системах. Периодическая зависимость тока от потенциала на затворе была измерена в одноэлектронном транзисторе, в котором металлические электроды соединены короткой углеродной нанотрубкой [282, 283]. Также кулоновская блокада наблюдалась при комнатной температуре в одноэлектронном транзисторе с молекулой C_{60}, играющей роль островка [284]. Широкое распространение получил одноэлектронный транзистор, сформированный в двумерном электронном газе с помощью металлических затворов (см. Рис. 3.3), в котором удается наблюдать влияние кулоновской блокады на электронный транспорт [285, 286]. Недавно одноэлектроный транзистор был реализован в графене [287]. На транспорт в таких системах, которые принято называть *квантовыми точками*, оказывает большое влияние дискретность спектра одноэлектронных состояний на островке. В этой главе эффекты дискретности спектра не будут обсуждаться, т. е. типичное расстояние между одноэлектронными уровнями энергии на островке одноэлектронного транзистора будет считаться пренебрежимо малым по сравнению с другими энергетическими масштабами. Подробное описание электронного транспорта через квантовые точки можно найти в обзорах [289, 290, 291].

Ортодоксальная теория применима для описания электронного транспорта через одноэлектронный транзистор с сопротивлением существенно больше квантового $h/e^2 \approx 25.8$ кОм. Оказалось, что предсказываемого в рамках ортодоксальной теории экспоненциального подавления электронного транспорта при низких температурах можно избежать, если рассмотреть процессы, в которых электрон туннелирует через виртуальное состояние на островке одноэлектронного транзистора [292, 293]. Такие процессы называются *котуннелированием* и приводят к степенному подавлению транспорта с понижением температуры (см., например [294]).

Важной характеристикой туннельного контакта является не только его сопротивление, но и число транспортных каналов (по порядку величины равное отношению площади сечения контакта к квадрату фермиевской длины). Как правило в квантовых точках реализуется ситуация с несколькими транспортными каналами, а в одноэлектронных транзисторах с металлическими электродами и островком транспортных каналов бывает существенно больше единицы. Естественно ожидать, что при сопротивлении туннельного контакта существенно меньше h/e^2 кулоновская блокада будет сильно подавлена. Эти ожидания были экспериментально подтверждены в транспортных измерениях в квантовых точках с несколькими каналами [295] и в одноэлектронном транзисторе с большим количеством каналов малой прозрачности [296].

Основными объектами теоретических исследований явления кулоновской блокады в одноэлектронном транзисторе (с большим числом транспортных каналов) являются средний заряд на островке (эффективная ёмкость), линейный и дифференциальный кондактансы, и дробовой шум.

Долгое время теоретическое изучение явления кулоновской блокады оставалось в рамках ортодоксальной теории – вычисление всех интересующих величин ограничивалось первым порядком разложения по малому отношению кванта сопротивления h/e^2 к сопротивлению одноэлектронного транзистора. С помощью эффективного действия в мнимом времени [297] были вычислены средний заряд, сопротивление и дробовой шум [298, 299, 300]. Детальный обзор ранних результатов представлен в работе [301].

С помощью наведенного затвором заряда на островке одноэлектронного транзистора можно компенсировать разницу электростатических энергий между состояниями с зарядами ke и $(k+1)e$, где k – целое число (см. Рис. 3.4). Вблизи значений потенциала затвора $V_g = e(k+1/2)/C_g$ (C_g – ёмкость затвора), соответствующих такому режиму компенсации, из-за наличия вырождения теория возмущений по малому отношению кванта сопротивления h/e^2 к сопротивлению одноэлектронного транзистора перестает работать. В рамках упрощенного гамильтониана, учитывающего только два вырожденных по энергии зарядовых состояния (с зарядами ke и $(k+1)e$), удалось вычислить зависимость среднего заряда на островке от потенциала затвора при нулевой температуре [302]. Поправки от невырожденных зарядовых состояний оказались регулярными и малыми в меру малости отноше-

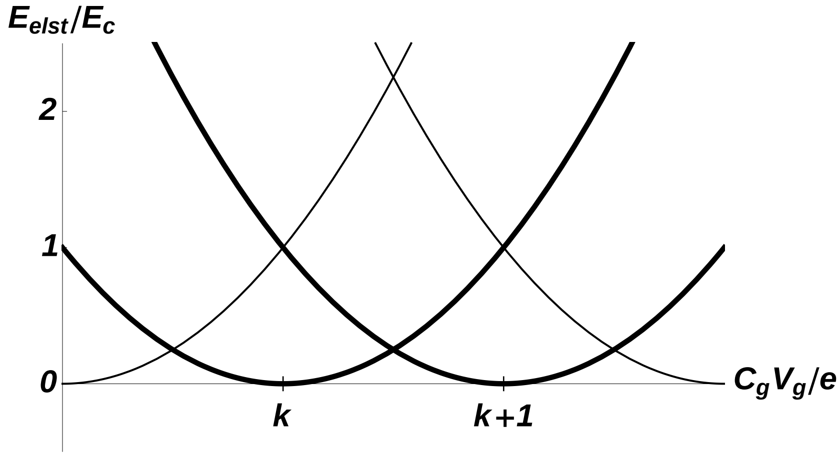

Рисунок 3.4: Схематическая зависимость электростатической энергии $E_{\mathrm{elst}} = (Q - C_gV_g)^2/2C$ островка от потенциала затвора V_g при условии, что заряд всегда равен целому числу электронов. Жирные кривые соответствуют состояниям с зарядом Q равным ke и $(k+1)e$.

ния кванта сопротивления h/e^2 к сопротивлению одноэлектронного транзистора [303]. В рамках упрощенного гамильтониана были вычислены зависимости от температуры и от потенциала затвора для среднего заряда на островке, кондактанса и дифференциального кондактанса одноэлектронного транзистора [304, 305].

Для теоретического описания одноэлектронного транзистора с сопротивлением существенно меньшим h/e^2 в ситуации, когда есть большое количество транспортных каналов малой прозрачности, можно использовать тоже самое эффективное действие работы [297], что использовалось для обратного случая большого сопротивления. Такой подход становится точным в пределе бесконечного числа каналов малой прозрачности [306, 307] и позволяет исследовать одноэлектронный транзистор с произвольным сопротивлением в рамках одного и того же эффективного действия, которое принято называть действием Амбегаокара-Эккерна-Шона. Для режима сопротивления существенно меньшего h/e^2 было показано, что это действие имеет топологически нетривиальные решения (инстантоны) [308, 309, 310] и асимптотически свободно [311, 309]. Топологически нетривиальные решения классических уравнений движения для действия Амбегаокара-Эккерна-Шона обеспечивают слабую осциллирующую зависимость среднего заряда на островке [312, 313] и кондактанса [314] одноэлектронного транзистора от потенциала затвора. Эта зависимость является проявлением кулоновской блокады в режиме сопротивления существенно меньшего h/e^2.

В заключение этого раздела заметим, что действие Амбегаокара-Эккерна-Шона может быть обобщено и использовано для изучения транспорта в гранулированных электронных системах и массивах туннельных контактов при не слишком низких температурах [315, 316, 314]. Обзор полученных результатов представлен в работе [317]. Также действие Амбегаокара-Эккерна-Шона можно обобщить таким образом, чтобы оно описывало одноэлектронный транзистор с конечным числом транспортных каналов произвольной прозрачности [318, 319, 314]. Недавно возник новый интерес к действию Амбегаокара-Эккерна-Шона так, как оказалось, что оно описывает эффективную теорию модели "круговой браны" [320, 321].

3.1.2 Постановка задачи

Рассмотрим одноэлектронный транзистор в пределе бесконечно большого сопротивления, когда туннелирование между островком и металлическими электродами отсутствует. Электростатическая энергия $E_{\text{elst}} = (Q - C_g V_g)^2/2C$ как функция потенциала затвора V_g представлена на рисунке 3.4. Квантовая механика проявляется в том, что Q может принимать только целочисленные значения в единицах заряда электрона. С помощью распределения Гиббса легко вычислить, что для потенциала затвора, лежащего в интервале $k \leqslant C_g V_g/e < k+1$, где k – целое число, средний заряд на островке при $T \ll E_c$ равен

$$Q = k + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\,\mathrm{th}\,\frac{E_c(k + 1/2 - C_g V_g/e)}{2T}. \tag{3.1}$$

Экспериментальные данные работы [277] по измерению среднего заряда Q на островке показывают, что при низких температурах Q отклоняется от поведения (3.1), ожидаемого из модели изолированного островка (см. Рис. 3.5). В эксперименте такое отклонение может быть вызвано не только туннельной связью островка с электродами, но и наличием внешнего электромагнитного шума, который существенным образом влияет на характеристики туннельного контакта [322, 323, 324, 325]. В действительности оказывается, что аккуратный микроскопический расчет среднего заряда на островке одноэлектронного транзистора с сопротивлением существенно большим h/e^2 при нулевой температуре даёт конечные отклонения Q от целочисленного (в единицах заряда электрона) значения [302]. Происхождение такого результата легко понять из следующих соображений. Средний заряд измеряет среднее число избыточных электронов на островке. Однако состояние электрона, находящегося на островке, имеет конечное (в меру конечности сопротивления туннельного контакта) перекрытие с состояниями в электродах. Это и приводит к тому, что среднее число электронов на островке отличается от целого.

Таким образом, средний заряд на островке одноэлектронного транзистора не принимает целочисленных значений при нуле температур в отличие от ситуации с изолированным

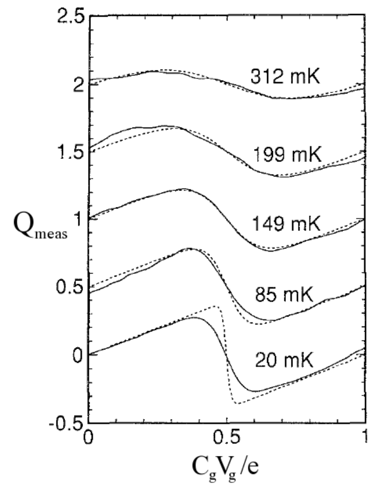

Рисунок 3.5: Измеренная зависимость величины $Q_{\rm meas} = (C_g V_g - (1 - C_g/C)Q)/e$ от потенциала затвора (сплошные кривые) и её теоретическая зависимость согласно (3.1) при разных температурах. Зарядовая энергия $E_c \approx 1.5$ К, ёмкости $C = (0.6 \pm 0.3) \cdot 10^{-3}$ пФ и $C_g = (0.85 \pm 0.01) \cdot 10^{-4}$ пФ, сопротивление 620 кОм при $T = 4$ К. Рисунок взят из работы [277].

островком. Тем не менее, тот факт, что элементарный электрический заряд в этой системе не может быть меньше заряда электрона, должен проявляться в существовании физической величины, которая принимает целочисленные значения при нуле температур. Эта физическая величина должна правильным образом учитывать гибридизацию состояний на островке и в электродах.

На существование физической величины, которая принимает целочисленные значения при нуле температур, указывает также тесное сходство действия Амбегаокара-Эккерна-Шона и нелинейной сигма-модели с топологическим членом, описывающей целочисленный квантовый эффект Холла в невзаимодействующей двумерной электронной системе (см. Гл. 2). В этих теориях имеется асимптотическая свобода и существуют топологически нетривиальные решения классических уравнений движения. При этом поведение кондактанса одноэлектронного транзистора с температурой и потенциалом затвора [309, 311, 314] аналогично поведению диссипативной проводимости с температурой и перпендикулярным магнитным полем в целочисленном квантовом эффекте Холла. Естественно ожидать, что для одноэлектронного транзистора должна существовать физическая наблюдаемая, которая будет аналогична холловской проводимости σ_{xy}. В частности, как σ_{xy}, эта физическая величина будет целочисленно квантоваться при нуле температур. [2]

[2]Автор признателен А. А. Абанову, который обратил наше внимание на тесную аналогию между дей-

Напомним, что в целочисленном квантовом эффекте Холла удобным представлением является диаграмма, показывающая изменение диссипативной и холловской проводимостей с уменьшением температуры (увеличением размера системы) при разных значениях магнитного поля (см. Рис. 2.4). Обнаружение в одноэлектронном транзисторе физической величины, которая аналогична холловской проводимости, позволит построить аналогичную диаграмму, на которой режимы сильной и слабой туннельной связи островка с электродами будут объединены.

Итак, *основной задачей*, которая решается в данной главе, является отыскание новой физической величины для одноэлектронного транзистора, в которой, в отличие от среднего заряда на островке, действительно проявляется макроскопическое зарядовое квантование.

Материал главы организован следующим образом. В разделе 3.2 приводятся необходимые для дальнейшего сведения о действии Амбегаокара-Эккерна-Шона. В разделе 3.3 с помощью процедуры фоновых полей выводятся выражения для физических наблюдаемых и объясняется их физический смысл. В разделах 3.4 и 3.5 вычисляется зависимость новой физической величины от температуры и потенциала затвора в режимах сильной и слабой туннельной связи островка с электродами. Завершается глава заключением (раздел 3.6).

3.2 Модель Амбегаокара-Эккерна-Шона

3.2.1 Введение

В этом разделе будут приведены необходимые для дальнейшего сведения о действии Амбегаокара-Эккерна-Шона, которое описывает одноэлектронный транзистор с большим числом туннельных каналов.

3.2.2 Гамильтониан одноэлектронного транзистора

Для теоретического описания одноэлектронного транзистора (см. Рис. 3.2а) используется нульмерная эффективная модель, в которой электрон-электронное взаимодействие на ост-

---

ствием Амбегаокара-Эккерна-Шона и нелинейной сигма-моделью с топологическим членом. Насколько известно автору, первая попытка использовать эту аналогию для получения физических предсказаний в одноэлектронной коробочке была сделана в работе [326]. Однако, физическая наблюдаемая, которая была бы аналогична холловской проводимости и целочисленно квантуется при нуле температур, в работе [326] не была найдена.

ровке одноэлектронного транзистора учитывается с помощью ёмкостного взаимодействия. Кроме этого, пренебрегается взаимодействием электронов в металлических электродах, которые считаются находящимися в равновесии с заданной температурой. В дальнейшем будем называть их резервуарами. Связь островка с резервуарами описывается в рамках туннельного гамильтониана. Несмотря на сильную упрощенность модели, теоретические предсказания, сделанные в ее рамках, как правило, хорошо согласуются с экспериментальными данными.

Гамильтониан рассматриваемой модели состоит из трёх частей

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_c + \sum_{s=l,r} \mathcal{H}_T^{(s)}. \tag{3.2}$$

Первая часть – это гамильтониан свободных электронов

$$\mathcal{H}_0 = \sum_{k,s=l,r} \epsilon_k^{(s)} a_k^{(s)\dagger} a_k^{(s)} + \sum_{\alpha} \epsilon_\alpha d_\alpha^\dagger d_\alpha. \tag{3.3}$$

Здесь индекс s принимает значения l для электронов в левом резервуаре и r для электронов в правом резервуаре, соответственно. Нижний индекс k обозначает электронные состояния в резервуарах, а α – состояния на островке. Величины $\epsilon_k^{(s)}, \epsilon_\alpha$ обозначают энергии электронов, отсчитанных от уровня Ферми.

Второй член в уравнении (3.2) описывает взаимодействие между электронами на островке

$$\mathcal{H}_c = E_c \left(\sum_{\alpha} d_\alpha^\dagger d_\alpha - q \right)^2. \tag{3.4}$$

Напомним, что $E_c = e^2/(2C)$ обозначает, так называемую, зарядовую энергию, где полная ёмкость C складывается из ёмкостей туннельных контактов ($C_{l,r}$) и затвора (C_g): $C = C_l + C_r + C_g$. Величина $q = C_g V_g / e$ представляет собой дополнительный заряд (в единицах заряда электрона), наведенный на островке при приложении напряжения V_g на затворе.

Последний член в уравнении (3.2) описывает туннелирование электронов между резервуарами и островком

$$\mathcal{H}_T^{(s)} = \sum_{k\alpha} t_{k\alpha}^{(s)} a_k^{(s)\dagger} d_\alpha + \text{h.c.} \tag{3.5}$$

Матрица $t_{k\alpha}^{(s)}$ содержит амплитуды туннелирования между электронными состояниями в резервуаре и на островке. Для дальнейшего удобно ввести следующие эрмитовы матрицы

$$\begin{aligned}
\hat{g}^{(s)}_{kk'} &= 4\pi^2 \left[\delta(\epsilon^{(s)}_k)\delta(\epsilon^{(s)}_{k'})\right]^{1/2} \sum_{\alpha} t^{(s)}_{k\alpha}\delta(\epsilon_\alpha)t^{(s)\dagger}_{\alpha k'}, \\
\check{g}^{(s)}_{\alpha\alpha'} &= 4\pi^2 \left[\delta(\epsilon_\alpha)\delta(\epsilon_{\alpha'})\right]^{1/2} \sum_{k} t^{(s)\dagger}_{\alpha k}\delta(\epsilon^{(s)}_k)t^{(s)}_{k\alpha'}.
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Первая из этих матриц действует в пространстве состояний резервуара, а вторая матрица действует в пространстве состояний островка. Дельта-функции, входящие в правые части уравнений (3.6), подразумеваются сглаженными на масштабе δE таком, что $\max\{\delta, \delta^{(l,r)}\} \ll \delta E \ll T$. Здесь δ и $\delta^{(l,r)}$ обозначают средние расстояния между одночастичными уровнями энергии на островке и резервуарах, соответственно.

С помощью введенных выше матриц удобно выразить безразмерный кондактанс (в единицах e^2/h) контакта между островком и резервуаром [294]:

$$g_s = \sum_k \hat{g}^{(s)}_{kk} \equiv \sum_\alpha \check{g}^{(s)}_{\alpha\alpha}. \tag{3.7}$$

Можно сказать, что каждое ненулевое собственное значение матрицы $\hat{g}^{(s)}$ или $\check{g}^{(s)}$ соответствует коэффициенту прохождения одного из каналов между резервуаром и островком. Эффективное число каналов ($N^{(s)}_{\rm ch}$) можно найти как

$$N^{(s)}_{\rm ch} = \frac{\left(\sum\limits_k \hat{g}^{(s)}_{kk}\right)^2}{\sum\limits_{kk'} \hat{g}^{(s)}_{kk'}\hat{g}^{(s)}_{k'k}} \equiv \frac{\left(\sum\limits_\alpha \check{g}^{(s)}_{\alpha\alpha}\right)^2}{\sum\limits_{\alpha\alpha'} \check{g}^{(s)}_{\alpha\alpha'}\check{g}^{(s)}_{\alpha'\alpha}}. \tag{3.8}$$

Эффективный кондактанс $g^{(s)}_{\rm ch}$ на один канал можно записать в следующем виде:

$$g^{(s)}_{\rm ch} = \frac{\sum\limits_{kk'} \hat{g}^{(s)}_{kk'}\hat{g}^{(s)}_{k'k}}{\sum\limits_k \hat{g}^{(s)}_{kk}} \equiv \frac{\sum\limits_{\alpha\alpha'} \check{g}^{(s)}_{\alpha\alpha'}\check{g}^{(s)}_{\alpha'\alpha}}{\sum\limits_\alpha \check{g}^{(s)}_{\alpha\alpha}}. \tag{3.9}$$

При этом кондактанс контакта g_s принимает естественный вид, $g_s = g^{(s)}_{\rm ch}N^{(s)}_{\rm ch}$. В дальнейшем, в этой главе мы всегда будем предполагать выполненными условия

$$g^{(l,r)}_{\rm ch} \ll 1, \qquad N^{(l,r)}_{\rm ch} \gg 1. \tag{3.10}$$

Условие большого количества туннельных каналов в контакте позволяет при выводе эффективного действия оставить только диаграмму низшего порядка по туннельному гамильтониану [3] и получить действие Амбегаокара-Эккерна-Шона. Отметим, что при выполнении условий (3.10) кондактансы контактов $g_{l,r}$ могут быть как больше единицы, так

[3]Заметим, что в принципе это упрощающее предположение можно не делать и работать с полным эффективным действием, полученным впервые в работе [318].

и меньше. Также будем считать, что среднее расстояние между одночастичными уровнями энергии на островке удовлетворяет условию $\delta \ll T/\max\{1,g\}$, где $g = g_l + g_r$. Это условие позволяет считать одночастичную плотность состояний на островке, независящей от энергии и равной $1/\delta$ [315], а также не учитывать поправки, связанные с конечностью числа электронов на островке (различие между большим каноническим и каноническим ансамблями) [327, 316].

Гамильтониан $\mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_c$ является нульмерным пределом точного микроскопического гамильтониана, что оправдано в силу малости величины $\delta/E_{\rm Th} \ll 1$ [328, 329], где $E_{\rm Th}$ – это энергия Таулесса, равная по порядку величины $v_F \min\{l, L\}/L^2$, где v_F и l обозначают скорость Ферми и длину свободного пробега в материале, из которого сделан островок, имеющий характерный размер L.

3.2.3 Действие Амбегаокара-Эккерна-Шона

В рамках предположений, которые были сформулированы выше, от гамильтониана (3.2) можно перейти к эффективному действию в мнимом времени τ на одну переменную – абелеву фазу $\Phi(\tau)$ [297], которая связана с флуктуирующим электрическим потенциалом на островке соотношением $V(\tau) = i\dot{\Phi}(\tau)$. Статистическая сумма (в большом каноническом ансамбле) может быть записана в виде суммы по целым числам W:

$$Z = \sum_{W=-\infty}^{\infty} e^{2\pi i q W} Z_W, \tag{3.11}$$

где Z_W представляет интеграл по всем конфигурациям поля $\Phi(\tau)$, которые удовлетворяют условию

$$\Phi(\beta) = \Phi(0) + 2\pi W, \tag{3.12}$$

где напомним, что $\beta = 1/T$, и имеет вид [297]

$$Z_W = \int\limits_{\partial V} \mathcal{D}\Phi(\tau)\, e^{-\mathcal{S}_d[\Phi] - \mathcal{S}_c[\Phi]}. \tag{3.13}$$

Здесь индекс ∂V обозначает, что функциональный интеграл берется с периодическим граничным условием (3.12). Действие $\mathcal{S}_d$ описывает эффект туннелирования электронов между островком и резервуарами:

$$\mathcal{S}_d[\Phi] = \frac{g}{4} \int\limits_0^\beta d\tau_1 d\tau_2\; \alpha(\tau_1 - \tau_2)\, e^{i\Phi(\tau_1) - i\Phi(\tau_2)}. \tag{3.14}$$

Здесь ядро $\alpha(\tau)$ имеет вид

$$\alpha(\tau) = -\frac{T^2}{\sin^2(\pi T \tau)} = \frac{T}{\pi} \sum_{\omega_n} |\omega_n| e^{-i\omega_n \tau}, \tag{3.15}$$

где напомним, что $\omega_n = 2\pi T n$. Второй член действия $\mathcal{S}_c$ учитывает конечность зарядовой энергии на островке одноэлектронного транзистора:

$$\mathcal{S}_c[\Phi] = \frac{1}{4E_c} \int\limits_0^\beta d\tau\, \dot{\Phi}^2. \tag{3.16}$$

Экспоненциальный множитель, содержащий наведенный заряд q в уравнении (3.11), описывает связь между островком и затвором. Уравнения (3.11)-(3.16) представляют собой действие Амбегаокара-Эккерна-Шона для одноэлектронного транзистора [297].

Целочисленный топологический заряд, равный W, можно записать в следующем виде:

$$\mathcal{C}[\Phi] = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^\beta d\tau\, \dot{\Phi} = W. \tag{3.17}$$

Он имеет смысл числа намоток (W) вектора $\boldsymbol{n} = (\cos\Phi, \sin\Phi)$. Заметим, что условие периодичности (3.12), и как следствие, целочисленное квантование топологического заряда в (3.17) являются следствием того, что Φ – это бозонное поле. В силу условия периодичности (3.12) действие Амбегаокара-Эккерна-Шона зависит от наведенного заряда q только по модулю 2π. Если представить q в виде суммы дробной части, $-1 < \theta/\pi \leqslant 1$, и целой части k:

$$q = k + \frac{\theta}{2\pi}, \tag{3.18}$$

то статистическая сумма (3.11) зависит только от дробной части θ

$$Z[q] = Z[\theta/2\pi]. \tag{3.19}$$

Параметр θ аналогичен тэта-углу, введенному как дробная часть $2\pi\sigma_{xy}$ в предыдущей главе. Для действия Амбегаокара-Эккерна-Шона ситуация проще, чем для нелинейной сигма модели, т. к. топологический заряд квантуется с самого начала.

3.2.4 Инстантоны

Одним из важных свойств диссипативной части (3.14) действия Амбегаокара-Эккерна-Шона является наличие классических решений $\Phi_W(\tau)$, которые минимизируют действие в каждом топологическом секторе, характеризующимся числом намоток W. Эти решения принято называть инстантонами так, как они аналогичны инстантонам в теории Янг-Миллса [159]. Общее выражение для инстантонов действия Амбегаокара-Эккерна-Шона имеет вид [308, 310]

$$e^{i\Phi_W(\tau)} = \prod_{a=1}^{|W|} \frac{e^{2\pi i T\tau} - z_a}{1 - \bar{z}_a e^{2\pi i T\tau}}. \tag{3.20}$$

Для инстантонов ($W > 0$) комплексные параметры z_a лежат внутри единичной окружности, а для антиинстантонов ($W < 0$) эти параметры находятся вне единичной окружности. Диссипативное действие на классическом решении конечно и равно

$$\mathcal{S}_d[\Phi_W] = \frac{g}{2}|W|. \tag{3.21}$$

Тот факт, что оно не зависит от параметров z_a означает, что они представляют собой нулевые моды.

В пределе $g \gg 1$ конфигурация с одним инстантоном или одним антиинстантоном являются наиболее важными. Для одноинстантонного решения параметр $\tau_0 = \arg z_1/2\pi T$ имеет смысл позиции инстантона на отрезке от 0 до β, а параметр $\lambda = (1-|z_1|^2)\beta$ определяет его размер и соответствует длительности импульса флуктуирующего потенциала $i\dot{\Phi}_{\pm 1}(\tau)$. Как видно из уравнения (3.11), учет вклада от инстантонных решений с $|W| = 1$ существенен для появления зависимости статистической суммы от наведенного заряда q, а точнее от его дробной части $\theta/2\pi$. Поправка в термодинамический потенциал, соответствующий статистической сумме (3.11), $\Omega = -T\ln Z$, от конфигураций с одним инстантоном или антиинстантоном, [4] была впервые правильно вычислена в работе [313]. Её удобно представить в следующем виде, явно содержащим интегрирование по нулевым модам, τ_0 и λ:

$$\beta\Omega_{\text{inst}} = -\int_0^\beta d\tau_0 \int_0^\beta \frac{d\lambda}{\lambda^2} g(\lambda) D_\Omega \, e^{-\frac{1}{2}g(\lambda) + \frac{2}{E_c(\lambda)}(T - \frac{2}{\lambda})} \cos 2\pi q. \tag{3.22}$$

Здесь численный коэффициент $D_\Omega = 2e^{-\gamma_E - 1}$, где, напомним, $\gamma_E \approx 0.577$ обозначает постоянную Эйлера. Как это обычно бывает, величины $g(\lambda)$ и $E_c(\lambda)$ имеют такую же зависимость от масштаба λ, как и в стандартной теории возмущений по $1/g$ около тривиального решения $\Phi = 0$ [311, 309]

$$g(\lambda) = g - 2\ln \lambda\Lambda, \qquad E_c(\lambda) = E_c\left(1 - \frac{2}{g}\ln\lambda\Lambda\right). \tag{3.23}$$

[4]Заметим, что для термодинамического потенциала можно просуммировать вклады от решений со всеми $|W| > 0$, так как взаимодействие инстантонов и антиинстантонов оказывается слабым [313, 319].

Масштаб $\Lambda = gE_c/\pi^2 D_\Omega$ является естественным масштабом теории, на котором определены затравочные параметры действия Амбегаокара-Эккерна-Шона g, q и E_c. Физически масштаб Λ имеет простой смысл – это обратное RC-время, которое считается самым малым временным масштабом в задаче.

Уравнения (3.23) можно представить в виде уравнений ренормализационной группы в низших порядках по $1/g$:

$$\beta_g = \frac{dg(\lambda)}{d\ln\lambda} = -2 - \frac{4}{g(\lambda)}\ , \quad \beta_c = \frac{d\ln E_c(\lambda)}{d\ln\lambda} = -\frac{2}{g(\lambda)}. \tag{3.24}$$

Заметим, что в уравнение на $g(\lambda)$, которое показывает, что действие Амбегаокара-Эккерна-Шона асимптотически свободно, добавлен двухпетлевой вклад, вычисленный в работах [330, 331]. Существенной особенностью этих (пертурбативных) уравнений является отсутствие зависимости от наведенного заряда q. Это останется верным в любом сколь угодно большом порядке по $1/g$. Основываясь на уравнениях ренормализационной группы, можно получить, что при $g \ll 1$ в области высоких температур $T \gg \xi^{-1}$ кондактанс на масштабе $\lambda = 1/T$ остается большим и равным $g(T) = 2\ln\xi T \gg 1$, где ξ обозначает динамически генерируемый корреляционный масштаб в мнимом времени равный $\xi = \Lambda^{-1}g^{-1}e^{g/2}$ [330]. При низких температурах $T \ll \xi^{-1}$ можно ожидать экспоненциальную зависимость кондактанса от температуры: $g(T) = \exp[-(\xi T)^{-\kappa}] \ll 1$, где $\kappa > 0$ неизвестный динамический индекс.

Существенно, что эта картина не учитывает зависимость действия Амбегаокара-Эккерна-Шона от наведенного заряда q. Также не ясно, как эта картина согласуется с устоявшей картиной при $g \ll 1$, в которой сильная зависимость от q имеется.

3.3 Физические наблюдаемые

3.3.1 Введение

В этом разделе будут рассмотрены физические наблюдаемые в одноэлектронном транзисторе. С помощью процедуры отклика на изменение граничных условий будут построены две физические наблюдаемые, которые аналогичны диссипативной и холловской проводимости в целочисленном квантовом эффекте Холла. Новизна представленного в этом разделе результата состоит в том, что физическая наблюдаемая, аналогичная холловской проводимости, до работ автора в литературе не рассматривалась.

3.3.2 Фоновые поля

Для того, чтобы в модели Амбегаокара-Эккерна-Шона связать режимы $g \gg 1$ и $g \ll 1$, необходимо изучать не термодинамический потенциал, а физические наблюдаемые, соответствующие параметрам действия g, q и, вообще говоря, E_c. Так как зарядовая энергия E_c является размерной величиной, то ее поведение с изменением масштаба диктуется поведением безразмерных параметров g и q (см. (3.23)). Поэтому основной вопрос, требующий ответа, – это какие физические наблюдаемые соответствуют параметрам g и q в действии Амбегаокара-Эккерна-Шона. [5] Естественно ожидать, что физическая наблюдаемая, соответствующая g – это кондактанс одноэлектронного транзистора. Какой физической наблюдаемой соответствует наведенный заряд заранее не ясно. Это отличает рассматриваемую задачу от целочисленного квантового эффекта Холла, который рассматривался в предыдущей главе, где из физических соображений ясно соответствие между параметрами в эффективном действии и физическими наблюдаемыми – диссипативной и холловской проводимостями.

Наиболее удобным для определения физических наблюдаемых является изучение отклика статистической суммы, соответствующей эффективному действию, на малое изменение граничных условий. Этот способ близок к методу, использованному Таулессом при определении критерия локализации Андерсона [332]. Также этот способ похож на идею 'т Хофта об использовании твистованных граничных условий для изучения вопроса о существовании безмассовых возбуждений в теории при разных значениях θ-угла [333].

Для того, чтобы иметь возможность рассматривать фоновые поля с нецелым числом намоток, $C[\Phi] = W + \phi$, где $-1/2 \leqslant \phi < 1/2$, необходимо модифицировать ядро $\alpha(\tau)$ (см. (3.15)) диссипативной части действия Амбегаокара-Эккерна-Шона. Введем определение

$$\alpha_\phi(\tau) = \frac{T}{\pi} \sum_{\omega_n} e^{-i(\omega_n + 2\pi T\phi)\tau} \; |\omega_n + 2\pi T\phi|. \tag{3.25}$$

Тогда отлик, модифицированной таким образом диссипативной части действия Амбегаокара-Эккерна-Шона на фоновое поле вида $\Phi_0(\tau) = (\omega_m + 2\pi T\phi)\tau$, равен

$$\mathcal{S}_d[\Phi + \Phi_0] = \frac{g}{4\pi} \int\limits_0^\beta d\tau_1 d\tau_2 \, e^{i\Phi(\tau_1) - i\Phi(\tau_2)} T \sum_{\omega_n} e^{-i\omega_n(\tau_1 - \tau_2)} \; |\omega_n + \dot{\Phi}_0|. \tag{3.26}$$

Отметим, что фоновое поле $\Phi_0(\tau)$ удовлетворяет классическому уравнению движения для полного действия Амбегаокара-Эккерна-Шона.

[5] Нахождение физической величины, которая соответствует E_c, представляет собой интересную задачу, которая до настоящего время не решена.

Фоновое поле Φ_0 с нецелым числом намоток

Рассмотрим частный случай фонового поля вида $\Phi_0 = 2\pi T\phi\tau$. Это фоновое поле может напрямую использоваться для изучения отклика модифицированного действия Амбегаокара-Эккерна-Шона на изменения граничных условий и для нахождения выражений для наблюдаемых. Определим корреляционную функцию фаз:

$$D(i\omega_n) = T\int\limits_0^\beta d\tau_1 d\tau_2 e^{i\omega_n(\tau_1-\tau_2)}\left\langle e^{-i\Phi(\tau_1)+i\Phi(\tau_2)}\right\rangle. \tag{3.27}$$

Тогда, раскладывая модифицированное действие Амбегаокара-Эккерна-Шона с фоновым полем в ряд по ϕ, найдем

$$\mathcal{S}_{\rm tot}[\phi] = \frac{\tilde{\mathbb{G}}}{2}|\phi| - 2\pi i\tilde{\mathbb{Q}}\phi + \ldots, \tag{3.28}$$

где наблюдаемые $\mathbb{G}$ и $\mathbb{Q}$ равны

$$\tilde{\mathbb{G}} = gTD(i0), \tag{3.29}$$

$$\tilde{\mathbb{Q}} = Q - \frac{g}{2\pi}T\sum_{\omega_n>0}\operatorname{Im} D(i\omega_n). \tag{3.30}$$

Здесь величина

$$Q = q + \frac{i\langle\dot{\Phi}\rangle}{2E_c} = q - \frac{1}{2E_c}\frac{\partial\Omega[q}{\partial q} \tag{3.31}$$

есть средний заряд на островке. Отметим, что при наличии туннелирования между островком и резервуарами средний заряд отличается от наблюдаемой $\tilde{\mathbb{Q}}$. Отметим, что наблюдаемая $\tilde{\mathbb{G}}$, определённая согласно выражению (3.29), впервые рассматривалась в работе [334]. Наблюдаемая $\tilde{\mathbb{Q}}$, определённая согласно выражению (3.30), была впервые предложена в работе [335].

Фоновое поле Φ_0 с целым числом намоток

Оказывается, что наблюдаемые (3.29)-(3.30) напрямую не связаны с никакими измеряемыми в эксперименте величинами. Для того, чтобы найти наблюдаемые, которые связаны с величинами, определяемыми в эксперименте, рассмотрим фоновое поле с целым числом намоток: $\Phi_0 = \omega_m\tau$. Заметим, что это фоновое поле является частным случаем инстантонного решения (3.20) с $W = m$ и параметрами z_α равными нулю. Формально такое фоновое поле может быть компенсировано переопределением поля Φ, по которому идет интегрирование. Несмотря на это, определим формально эффективное действие $\mathcal{S}_{\rm tot}[\Phi_0]$

как действие, получаемое при формальном разложении по степеням Φ_0 или, что тоже самое, по степеням ω_m [6]. Если при этом аналитически продолжить дискретные мацубаровские частоты ω_m на действительную ось, то полученное таким образом эффективное действие будет описывать отклик на изменение граничных условий.

Классическое действие равно

$$\mathcal{S}[\Phi_0] = \frac{g}{2}|m| - 2\pi i q m + \frac{\pi^2}{\beta E_c} m^2. \tag{3.32}$$

Естественно ожидать, что эффективное действие будет иметь вид уравнения (3.32), в котором затравочные параметры g, q и E_c заменятся на наблюдаемые. В низшем порядке по ω_m находим

$$\mathcal{S}_{\rm tot}[m] = -\frac{\mathbb{G}}{2}|m| - 2\pi i \mathbb{Q} m + \ldots \tag{3.33}$$

Здесь наблюдаемые $\mathbb{G}$ и $\mathbb{Q}$ определены следующим образом

$$\mathbb{G} = 4\pi \,\mathrm{Im}\, \frac{\partial K^R(\omega)}{\partial \omega}, \tag{3.34}$$

$$\mathbb{Q} = Q + \mathrm{Re}\, \frac{\partial K^R(\omega)}{\partial \omega}. \tag{3.35}$$

Функция $K^R(\omega)$ – это запаздывающая функция частоты ω, которая соответствует мацубаровской функции

$$K(i\omega_n) = -\frac{g}{4\beta} \int_0^\beta d\tau_1 d\tau_2\, e^{i\omega_n(\tau_1-\tau_2)}\ \alpha(\tau_1-\tau_2)\ \left\langle e^{i\Phi(\tau_1)-i\Phi(\tau_2)} \right\rangle. \tag{3.36}$$

Определенные таким образом наблюдаемые отличаются от наблюдаемых (3.29)-(3.30). Как будет показано ниже, наблюдаемые (3.34)-(3.35) соответствуют физическим величинам, характеризующим одноэлектронный транзистор. С другой стороны, наблюдаемые (3.29)-(3.30) более удобны для численного эксперимента. Оба набора наблюдаемых дают информацию о поведении действия Амбегаокара-Эккерна-Шона в пределе нулевой температуры.

[6] Ситуация, которая здесь возникает, может быть проиллюстрирована следующим простым примером. Рассмотрим величину $\exp(i2\pi nm)$ с целыми n и m. Конечно, она равна единице. Однако, если мы формально разложим ее в ряд по m, то найдем $1+i2\pi nm+\ldots$. Таким образом, из члена линейного по m можно узнать, чему равно n. Конечно, на самом деле эта процедура подразумевает, что делается продолжение с целых значений m на всю действительную ось.

Запаздывающая функция $K^R(\omega)$ может быть выражена через запаздывающую функцию $D^R(\omega)$, которая получается аналитическим продолжением из мацубаровской функции $D(i\omega_n)$. В приложении B.1 приведены детали вывода общего соотношения:

$$K^R(\omega) = g\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{d\epsilon_1 d\epsilon_2}{4\pi^3}\ \epsilon_2 \frac{f_B(\epsilon_2) - f_B(\epsilon_1)}{\epsilon_1 - \epsilon_2 + \omega + i0^+} \operatorname{Im} D^R(\epsilon_1), \tag{3.37}$$

где $f_B(\epsilon) = [\exp(\beta\epsilon) - 1]^{-1}$ обозначает функцию распределения Бозе-Эйнштейна. Таким образом, оба набора наблюдаемых (3.29)-(3.30) и (3.34)-(3.35) определяются зависимостью от частоты корреляционной функции (3.27). Для дальнейшего удобно выразить физические наблюдаемые (3.34)-(3.35) напрямую через запаздывающую функцию $D^R(\omega)$:

$$\mathbb{G} \ = \ g\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{d\epsilon}{\pi}\ \epsilon \frac{\partial f_B(\epsilon)}{\partial \epsilon}\ \operatorname{Im} D^R(\epsilon), \tag{3.38}$$

$$\mathbb{Q} \ = \ Q + g\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{d\epsilon}{4\pi^2}\ \frac{\partial \epsilon f_B(\epsilon)}{\partial \epsilon}\ \operatorname{Re} D^R(\epsilon). \tag{3.39}$$

Отметим, что величина $\mathbb{Q}$, определённая соотношением (3.35) или, эквивалентно (3.39), впервые была предложена в работе [336].

3.3.3 Линейный отклик

В этом разделе будет показана связь между физическими наблюдаемыми (3.34)-(3.35), с одной стороны, и кондактансом G и антисимметризованной (квантовой) частью токового шума S_I одноэлектронного транзистора, с другой стороны, соответственно.

Кондактанс одноэлектронного транзистора

При приложении разности потенциалов между правым и левым резервуарами $V = V_r - V_l$ туннельная часть $\mathcal{H}_T^{(l,r)}$ гамильтониана (3.2) становится явно зависящей от времени [337]

$$\mathcal{H}_T^{(s)} = X^{(s)} e^{-ieV_s t} + X^{(s)\dagger} e^{ieV_s t}, \qquad X_s = \sum_{k\alpha} t_{k\alpha}^{(s)} a_k^{(s)\dagger} d_\alpha. \tag{3.40}$$

Оператор тока (I_s), который течет из резервуара s в островок, может быть записан в виде:

$$\mathcal{I}_s = e\frac{d}{dt}\sum_k a_k^{(s)\dagger} a_k^{(s)} = -ieX^{(s)} e^{-ieV_s t} + h.c. \tag{3.41}$$

В низшем порядке по $1/N_{\rm ch}^{(s)}$ находим

$$I_s = -i \int\limits_{-\infty}^{t} dt' \langle [\mathfrak{I}^{(\alpha)}(t), \mathcal{H}_T^{(s)}(t')] \rangle = -2e \operatorname{Im} K_s^R(-eV_s). \tag{3.42}$$

Здесь запаздывающая функция $K_s^R(\omega)$ определена как

$$K_s^R(\omega) = i \int\limits_0^{\infty} dt\, e^{i\omega t} \langle [X^{(s)}(t), X^{(s)\dagger}(0)] \rangle. \tag{3.43}$$

Повторяя вывод аналогичный выводу действия Амбегаокара-Эккерна-Шона из гамильтониана (3.2), можно показать, что запаздывающей функции $K_s^R(\omega)$ соответствует мацубаровская функция

$$K_s(i\omega_n) = -\frac{g_s}{4\beta} \int\limits_0^{\beta} d\tau_1 d\tau_2 e^{i\omega_n(\tau_1-\tau_2)} \alpha(\tau_1-\tau_2) D(\tau_{21}). \tag{3.44}$$

Сравнивая полученное выражение с выражением (3.36), находим, что $K_s(i\omega_n) = (g_s/g)K(i\omega_n)$, и, соответственно, $K_s^R(\omega) = (g_s/g)K^R(\omega)$. Потенциалы на левом и правом резервуарах определяются условием непрерывности тока: $I = I_l = -I_r$. Таким образом, мнимая часть запаздывающей функции $K^R(\omega)$ определяет зависимость тока I через одноэлектронный транзистор от напряжения V с помощью системы уравнений

$$I = -\frac{2eg_l}{g} \operatorname{Im} K^R(-eV_l) = \frac{2eg_r}{g} \operatorname{Im} K^R(-eV_r), \qquad V = V_r - V_l. \tag{3.45}$$

Заметим, что при наличии конечного напряжения между левым и правым резервуарами наведенный заряд начинает зависеть от напряжения V: $q = (C_g V_g + C_l V_l + C_r V_r)/e$. В режиме линейного отклика, т.е. малой разности потенциалов, находим, что $I = GV$, где кондактанс одноэлектронного транзистора равен [299, 304]

$$G = \frac{e^2}{h} \frac{g_l g_r}{(g_l+g_r)^2} \mathbb{G}. \tag{3.46}$$

Здесь $\mathbb{G}$ определяется выражением (3.34), или, эквивалентно, (3.38). Таким образом, с точностью до постоянного множителя $g_l g_r/(g_l+g_r)^2$ кондактанс одноэлетронного транзистора G совпадает с физической наблюдаемой $\mathbb{G}$, определяющей отклик одноэлектронного транзистора на изменение граничных условий.

Квантовый шум тока

Аналогично выражению (3.42), действительная часть запаздывающей функции $K_s^R(\omega)$ может быть представлена в виде

$$\operatorname{Re} K_s^R(-eV_\alpha) = \frac{i}{2e^2} \int\limits_{-\infty}^{t} dt' \langle [\mathcal{I}_s(t), \mathcal{I}_s(t')] \rangle. \tag{3.47}$$

Поэтому физическая наблюдаемая $\mathbb{Q}$, определённая выражением (3.35) или, эквивалентно, (3.39), может быть записана через корреляционную функцию токов:

$$\mathbb{Q} = Q - i\frac{(g_l + g_r)^2}{2g_l g_r} \lim_{V\to 0} \frac{\partial}{\partial V} \int\limits_{-\infty}^{0} dt \langle [\mathcal{I}(0), \mathcal{I}(t)] \rangle. \tag{3.48}$$

Таким образом, оказывается, что разница между физической наблюдаемой $\mathbb{Q}$ и средним зарядом на островке выражается через антисимметризованную корреляционную функцию токов – величину, которая последнее время привлекает значительное внимание [338]. Если определить несимметризованный коррелятор тока (см., например [339])

$$S_I(\omega, V) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} dt\, e^{-i\omega t} \langle \mathcal{I}(t) \mathcal{I}(0) \rangle, \tag{3.49}$$

то выражение (3.48) можно переписать в виде

$$\mathbb{Q} = Q + \frac{(g_l + g_r)^2}{g_l g_r} \lim_{V\to 0} \frac{\partial}{\partial V} \fint \frac{d\omega}{2\pi} \frac{S_I(\omega, V)}{\omega}. \tag{3.50}$$

Выражения (3.46) и (3.50) показывают, что физические наблюдаемые (3.34) и (3.35), введенные изначально как формальные величины, получаемые из отклика действия Амбегаокара-Эккерна-Шона на изменение граничных условий, связаны с физическими величинами, которые могут быть измерены в экспериментах в одноэлектронном транзисторе.

3.3.4 Обсуждение результатов

В этом разделе в дополнение к хорошо известным в теории одноэлектронного транзистора физическим наблюдаемым (3.29) и (3.38), последняя из которых соответствует кондактансу одноэлектронного транзистора, были предложены новые физические наблюдаемые (3.30) и (3.39). Наблюдаемые (3.29) и (3.30) не имеют прямого физического смысла, но удобны для численных расчётов, так как их определение не требует аналитического продолжения с мацубаровских частот. Физическая наблюдаемая (3.39), определяемая средним зарядом на островке и несимметризованым коррелятором тока, аналогична холловской проводимости в целочисленном квантовом эффекте Холла, в то время как кондактанс (3.39) соответствует диссипативной проводимости.

Измерение физической наблюдаемой $\mathbb{Q}$ требует, согласно выражению (3.50), измерения несимметризованного коррелятора тока S_I наряду с измерением среднего заряда. Недавно, следуя теоретическому предложению по измерению несимметризованного коррелятора токов [340], в экспериментах была продемонстрирована принципиальная возможность измерения величины S_I, в том числе и в одноэлектронном транзисторе [341, 342, 343]. Тем не менее, использование величины S_I для экспериментального определения наблюдаемой $\mathbb{Q}$ кажется маловероятным так, как для этого требуются измерения в широком интервале частот.

Заметим, что, согласно своему определению, без учета квантовых флуктуаций фазы, наблюдаемая $\mathbb{Q}$ совпадает с зарядом $q = C_g V_g/e$, наведённым затвором. По аналогии с наблюдаемой $\mathbb{G}$, которая является кондактансом одноэлектронного транзистора, естественно связать $\mathbb{Q}$ с затворной ёмкостью одноэлектронного транзистора:

$$\mathbb{C}_g = C_g \frac{\partial \mathbb{Q}}{\partial q}. \tag{3.51}$$

Как и в случае с кондактансом $\mathbb{G}$, отличие затворной ёмкости $\mathbb{C}_g$ от геометрической C_g, связано с наличием кулоновского взаимодействия на островке. Оказалось, что при периодическом изменении потенциала затвора, $V_g(t) = V_g + U_\omega \cos \omega_g t$, именно затворная ёмкость $\mathbb{C}_g$ определяет скорость диссипации энергии: $P \propto \omega_g^2 |U_\omega|^2 \mathbb{C}_g^2/\mathbb{G}$ [344]. Таким образом, для экспериментального определения физических наблюдаемых $\mathbb{G}$ и $\mathbb{Q}$ требуется провести в одном и том же одноэлектронном транзисторе транспортные измерения при постоянном во времени потенциале затвора и измерения действительной части импеданса при нулевом транспортном напряжении, но при наличии осциллирующего во времени потенциала затвора. Такой способ измерения наблюдаемой $\mathbb{Q}$ по затворной ёмкости $\mathbb{C}_g$ выглядит более простым, чем измерения несимметризованного коррелятора токов S_I в широком интервале частот.

3.4 Режим слабой связи, $g \gg 1$

3.4.1 Введение

В этом разделе будет рассмотрен режим слабой связи в действии Амбегаокара-Эккерна-Шона, $g \gg 1$, что соответствует сильному туннелированию между островком и резервуарами. В рамках теории возмущений по $1/g$ и непертурбативного подхода, учитывающего наличие инстантонов, будет вычислена зависимость физических наблюдаемых от температуры и напряжения на затворе.

3.4.2 Теория возмущений

В режиме слабой связи, $g \gg 1$, флуктуации поля Φ около тривиального решения $\Phi = 0$ малы и могут учитываться по теории возмущений по $1/g$. В квадратичном приближении действие Амбегаокара-Эккерна-Шона принимает вид

$$\mathcal{S}^{(2)} = g \sum_{\omega_n > 0} \left(n + \frac{2\pi^2 T}{g E_c} n^2 \right) \Phi_n \Phi_{-n}. \tag{3.52}$$

Используя выражение для $\mathcal{S}^{(2)}$, находим в низшем порядке по $1/g$ следующее выражение для корреляционной функции $D(i\omega_n)$:

$$D(i\omega_n) = \beta \left[1 - \frac{2}{g} \sum_{s>0} \frac{1}{s + 2\pi^2 T s^2/(g E_c)} \right] \delta_{n,0} + \frac{2E_c(1-\delta_{n,0})}{|\omega_n|(|\omega_n| + gE_c/\pi)}. \tag{3.53}$$

Далее, выполняя аналитическое продолжение на действительные частоты, получаем выражение для запаздывающего коррелятора: [7]

$$D^R(\omega) = \beta \left[1 - \frac{2}{g} \ln \frac{g E_c e^{\gamma_E}}{2\pi^2 T} \right] \lim_{\eta \to 0} \frac{\eta}{\omega + \eta + i0^+} - \frac{2\omega E_c}{(\omega + i0^+)^2 (\omega + i g E_c/\pi)}. \tag{3.54}$$

Интегрируя по энергии в правых частях выражений (3.38) и (3.39), находим: [8]

$$\mathbb{G}(T) = g - 2 \ln \frac{g E_c e^{\gamma_E + 1}}{2\pi^2 T}, \quad \mathbb{Q}(T) = q. \tag{3.55}$$

Результат (3.55) для кондактанса одноэлектронного транзистора соответствует логарифмической перенормировке (3.23). Этот результат справедлив при температурах $T \gg$

[7] Здесь использовано удобное представление δ-символа Кронекера: $\delta_{n,0} = \lim_{\eta\to 0} \eta(i\omega_n + \eta)^{-1}$.

[8] Здесь использовалось соотношение $\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+\pi^2 z^2} \frac{x^2}{\operatorname{sh}^2 x} = \frac{1}{2|z|} - 1 + |z|\psi'(1+|z|)$, где $\psi(z)$ обозначает дигамма-функцию Эйлера (логарифмическую производную гамма-функции).

$gE_c e^{-g/2}/(\pi^2 D_\Omega)$. Результат для физической наблюдаемой $\mathbb{Q}$ является тривиальным – эта величина совпадает с наведенным зарядом. Можно показать, что такой ответ остается справедливым во всех порядках разложения по $1/g$ в секторе с нулевым числом намоток $W = 0$. Для того, чтобы увидеть зависимость $\mathbb{Q}$ от температуры, необходимо учитывать непертурбативные эффекты, т.е. вклады от квантовых флуктуаций в секторах с ненулевым числом намоток.

3.4.3 Инстантонный вклад

Выражение (3.22) определяет одноинстантонный вклад в термодинамический потенциал. Интегрируя по нулевым модам τ_0 и λ, получим более простое выражение [313, 331]

$$\Omega_{\text{inst}} = -\frac{g^2}{\pi^2} E_c e^{-g/2} \ln \frac{E_c}{2\pi^2 T} \cos 2\pi q. \tag{3.56}$$

Следуя определению (3.31), находим выражение для одноинстантонной поправки к среднему заряду на островке

$$Q(T) = q - \frac{g^2}{\pi} e^{-g/2} \ln \frac{E_c}{2\pi^2 T} \sin 2\pi q. \tag{3.57}$$

Для того, чтобы найти одноинстантонную поправку к наблюдаемым $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{G}$, необходимо найти соответствующую поправку к корреляционной функции $D(i\omega_n)$. Рассмотрим среднее от некоторого оператора $\mathcal{O}[\Phi]$. В квазиклассическом приближении, контролируемом условием $g \gg 1$, достаточно вычислить значение оператора $\mathcal{O}[\Phi]$ на инстантонном решении Φ_W, а в действии учесть гауссовы флуктуации около этого инстантонного решения. Тогда получим следующее общее выражение

$$\langle \mathcal{O} \rangle_{\text{inst}} = \sum_{W=\pm 1} \int\limits_0^\beta d\tau_0 \int\limits_0^\beta \frac{d\lambda}{\lambda^2} \, \Big[\mathcal{O}[\Phi_W] - \langle \mathcal{O} \rangle_0\Big] \, g(\lambda) D_\Omega \, \exp\left\{ -\frac{g(\lambda)}{2} + \frac{2(\lambda - 2\beta)}{\lambda \beta E_c(\lambda)} + 2\pi i q W \right\}. \tag{3.58}$$

Подчеркнем, что классическое значение $\mathcal{O}[\Phi_{\pm 1}]$, вообще говоря, зависит от нулевых мод: положения τ_0 и размера λ инстантона/антиинстантона. Для корреляционной функции $D(i\omega_n)$ находим, что

$$\int\limits_0^\beta d\tau_1 d\tau_2 \, e^{i\omega_n(\tau_1 - \tau_2)} \left(e^{-i\Phi_W(\tau_1) + i\Phi_W(\tau_2)} - 1 \right) = \beta \left\{ -\left(\frac{\lambda}{\beta}\right) \delta_{n,0} + \left(1 - \frac{\lambda}{\beta}\right)^{(|n|-1)} \left(\frac{\lambda}{\beta}\right)^2 \Theta(nW) \right\}. \tag{3.59}$$

Здесь $\Theta(x)$ обозначает функцию Хевисайда, причем $\Theta(0) = 0$. Подставляя этот результат в уравнение (3.58) и интегрируя по нулевым модам τ_0 и λ, получим выражение для одноинстантонной поправки в корреляционную функцию $D(i\omega_n)$:

$$D_{\rm inst}(i\omega_n) = -\frac{g^2 E_c}{\pi^2 T^2} e^{-g/2} \left[\delta_{n,0} \cos 2\pi q - \frac{2\pi^2 T^2 (1-\delta_{n,0})}{|\omega_n|(|\omega_n| + 2\pi T)} e^{2\pi i q \,\mathrm{sgn}\, n} \right]. \tag{3.60}$$

Производя аналитическое продолжение, находим

$$D^R_{\rm inst}(\omega) = -\frac{g^2 E_c}{\pi^2 T^2} e^{-g/2} \left[\cos 2\pi q \lim_{\eta\to 0} \frac{\eta}{\omega + \eta + i0^+} + \frac{2\pi^2 \omega T^2}{(\omega + i0^+)^2(\omega + i2\pi T)} e^{i2\pi q} \right]. \tag{3.61}$$

Наконец, используя выражения (3.38) и (3.39), получаем следующие ответы для одноинстантонных вкладов в физические наблюдаемые:

$$\mathbb{G}_{\rm inst} = -\frac{g^3 E_c}{6T} e^{-g/2} \cos 2\pi q, \tag{3.62}$$

$$\mathbb{Q}_{\rm inst} = Q(T) - \frac{g^3 E_c}{24\pi T} e^{-g/2} \sin 2\pi q. \tag{3.63}$$

Напомним, что выражение для $Q(T)$ приведено в (3.57). Выражение (3.62) для одноинстантонной поправки в кондактанс одноэлектронного транзистора было впервые получено в работе [314]. Выражение (3.63) было впервые получено в работе [345]. Выражения (3.62) и (3.63) справедливы при выполнении условия $g \gg 1$ и не слишком низких температурах $T \gg g^3 E_c e^{-g/2}$.

3.4.4 Зависимость физических наблюдаемых от температуры

Собирая пертурбативные (3.55) и непертурбативные (3.57), (3.62)-(3.63) вклады, получаем следующий ответ для зависимости физических наблюдаемых от температуры и наведённого заряда

$$\mathbb{G}(T, q) = g - 2\ln\frac{g E_c e^{\gamma+1}}{2\pi^2 T} - \frac{g^3 E_c}{6T} e^{-g/2} \cos 2\pi q, \tag{3.64}$$

$$\mathbb{Q}(T, q) = q - \frac{g^3 E_c}{24\pi T} \left[1 + \frac{24 T}{g E_c} \ln \frac{E_c}{2\pi^2 T} \right] e^{-g/2} \sin 2\pi q. \tag{3.65}$$

Отметим, что амплитуда осцилляций физической наблюдаемой $\mathbb{Q}$ с наведённым зарядом q параметрически больше, чем амплитуда осцилляций в среднем заряде Q. Таким образом, в режиме слабой связи основной вклад в $\mathbb{Q}$ дается несимметризованным коррелятором тока S_I. Полученные результаты (3.64) и (3.65) полностью аналогичны результатам, полученным в предыдущей главе для инстантонных поправок к диссипативной σ'_{xx} и холловской σ'_{xy} проводимости.

Выражения (3.64) и (3.65), описывающие зависимость физических наблюдаемых от температуры и наведенного заряда, можно интерпретировать как решения дифференциальных уравнений, похожих на уравнения ренормализационной группы. Для этого, сначала удобно представить уравнения (3.64)-(3.65) в виде

$$\mathbb{G}(T) = g(T) - Dg^2(T)e^{-g(T)/2}\cos 2\pi q, \tag{3.66}$$

$$\mathbb{Q}(T) = q - \frac{D}{4\pi}g^2(T)e^{-g(T)/2}\sin 2\pi q, \tag{3.67}$$

где численный коэффициент $D = (\pi^2/3)e^{-\gamma_E-1} \approx 0.68$, а $g(T) = g - 2\ln[gE_c/(6DT)]$. Заметим, что разница в предэкспоненциальном множителе между g^2 и $g^2(T)$ не видна в нашем приближении, но естественно предположить, что всё выражается через $g(T)$ (см. раздел 2.2.5).

Для наблюдаемых $\tilde{\mathbb{G}}$ и $\tilde{\mathbb{Q}}$, определённых в выражениях (3.29) и (3.30), получаются аналогичные результаты с численной константой $D = 2\exp(-\gamma_E)$ и заменой зарядовой энергии E_c на $(6/\pi^2)E_c$.

С той точностью, с которой мы работаем, выражения (3.66)-(3.67) можно записать как решения следующей системы уравнений

$$\frac{d\mathbb{G}}{d\ln\beta} = -2 - D\,\mathbb{G}^2\,e^{-\mathbb{G}/2}\cos 2\pi\mathbb{Q}, \qquad \frac{d\mathbb{Q}}{d\ln\beta} = -\frac{D}{4\pi}\,\mathbb{G}^2\,e^{-\mathbb{G}/2}\sin 2\pi\mathbb{Q}, \tag{3.68}$$

которая вместе с начальными условиями, $\mathbb{G}(T = gE_c/6D) = g$ и $\mathbb{Q}(T = gE_c/6D) = q$ определяет температурную зависимость физических наблюдаемых $\mathbb{G}$ и $\mathbb{Q}$. Отметим, что к уравнениям (3.68) относятся все те же замечания, что обсуждались в разделе 2.3.2.

3.4.5 Вольт-амперная характеристика

Выражения (3.54) и (3.61) с помощью общего соотношения (3.37) позволяют найти частотную зависимость корреляционной функции $K^R(\omega)$ при $|\omega| \ll \sqrt{g}E_c$. Она имеет вид

$$\begin{aligned} K^R(\omega) = K^R(0) \quad &+ \quad \frac{i\omega g}{4\pi}\left[1 - \frac{2}{g}\ln\frac{egE_c}{2\pi^2 T} + \frac{2}{g}\psi\left(1 - \frac{i\omega}{2\pi T}\right)\right] \\ &- \quad \frac{g^3 E_c}{2\pi^2}e^{-g/2}e^{i2\pi q}\Big[\psi\left(1\right) - \psi\left(1 - \frac{i\omega}{2\pi T}\right)\Big]. \end{aligned} \tag{3.69}$$

Отметим, что результат (3.69) впервые был получен в работе [345]. Выражение для тока находится из решения уравнений (3.45). Учитывая, что в выражении (3.69) пертурбативная и инстантонная поправки предполагаются малыми, находим

$$I(V) = I_0(V,T) + I_c(V,T)\cos 2\pi q(V) + I_s(V,T)\sin 2\pi q(V), \tag{3.70}$$

где $q(V) = [C_g V_g + (C_r g_l - C_l g_r)V/g]/e$ и

$$I_0(V,T) = \frac{e^2}{h}\frac{g_l g_r}{g} V \left[1 - \frac{2}{g}\ln\frac{egE_c}{2\pi^2 T} + \frac{2}{g^2}\sum_{s=r,l} g_s \operatorname{Re}\psi\left(1 - \frac{ig_s V}{2\pi T g}\right)\right], \tag{3.71}$$

$$I_c(V,T) = \frac{e^2}{h}\frac{g_l g_r}{g}\frac{2g^2 E_c}{\pi} e^{-g/2}\sum_{s=r,l}\operatorname{Im}\psi\left(1 - \frac{ig_s V}{2\pi T g}\right), \tag{3.72}$$

$$I_s(V,T) = \frac{e^2}{h}\frac{g_l g_r}{g}\frac{2g^2 E_c}{\pi} e^{-g/2}\operatorname{Re}\left[\psi\left(1 - \frac{ig_r V}{2\pi T g}\right) - \psi\left(1 - \frac{ig_l V}{2\pi T g}\right)\right]. \tag{3.73}$$

Выражения (3.71)-(3.73) справедливы при $g_{l,r}|V|/g \ll E_c$. Выражение вида (3.70) для вольт-амперной характеристики одноэлектронного транзистора в режиме слабого туннелирования между островком и резервуарами было впервые получено в работе [305]. Функции $I_c(V)$ и $I_s(V)$ были найдены только в пределе $|V_{l,r}| \ll 2\pi T$ и, к тому же, неверно: в них отсутствовал большой множитель E_c/T и была неправильная степень кондактанса g в предэкспоненте [9].

При $g_{l,r}|V|/g \ll 2\pi T$ находим, что $I = (e^2/h)GV$ с кондактансом G, определяемым выражениями (3.46) и (3.64). В другом предельном случае $g_{l,r}|V|/g \gg 2\pi T$, из выражений (3.71)-(3.73) находим

$$I_0(V,T) = \frac{e^2}{h}\frac{g_l g_r}{g} V \left[1 - \frac{2}{g}\ln\frac{egE_c}{\pi V} + \frac{2}{g^2}\ln\frac{g_l^{g_l} g_r^{g_r}}{g^g}\right], \tag{3.74}$$

$$I_c(V,T) = -\frac{e^2}{h}\frac{g_l g_r}{g} 2g^2 E_c e^{-g/2}\left(1 - \frac{g^2 T}{g_l g_r V}\right), \tag{3.75}$$

$$I_s(V,T) = \frac{e^2}{h}\frac{g_l g_r}{g}\frac{2g^2 E_c}{\pi} e^{-g/2}\left(\ln\frac{g_r}{g_l} + \frac{\pi^2}{3}\frac{(g_l - g_r)g^3 T^2}{g_l^2 g_r^2 V^2}\right). \tag{3.76}$$

Из выражений (3.74)-(3.76) следует, что вклад в дифференциальный кондактанс dI/dV, пропорциональный $\cos 2\pi q(V)$ ($\sin 2\pi q(V)$), подавляется на больших напряжениях $g_{l,r}|V|/g \gg 2\pi T$, как V^{-2} (V^{-3}). Это затрудняет наблюдение осцилляций дифференциального кондактанса с напряжением на затворе в режиме больших напряжений между резервуарами.

3.4.6 Обсуждение результатов

Выражения (3.64) и (3.65), описывающие зависимость физических наблюдаемых $\mathbb{G}$ и $\mathbb{Q}$ от температуры, аналогичны выражениям (2.100) для квантовых холловских осцилляций

[9] По-видимому, это связано с тем, что в работе [305] не были учтены а) инстантонные решения с ненулевым значением параметра z и б) гауссовы флуктуации около инстантонного решения.

диссипативной и холловской проводимости. Осцилляции $\mathbb{G}$ и $\mathbb{Q}$ при изменении наведённого заряда q являются проявлением кулоновской блокады в режиме сильной связи островка с резервуарами, $g \gg 1$. В режиме $g \gtrsim 1$ осцилляции кондактанса $\mathbb{G}$ с изменением потенциала на затворе и осцилляции дифференциального кондактанса dI/dV с изменением разности потенциалов между резервуарами наблюдались экспериментально в работах [346, 347]. Сравнение экспериментальных данных с теорией затруднено необходимостью определения большого числа параметров: g_l, g_r, C_l, C_r, и C_g. Качественно, выражения (3.71)-(3.73) согласуются с экспериментальными данными работ [346, 347]. Однако, для детального количественного сравнения требуется обобщить теорию на ситуацию, когда разность потенциалов V может быть порядка gE_c.

3.5 Режим сильной связи, $g \ll 1$

3.5.1 Введение

В этом разделе будет рассмотрен режим сильной связи действия Амбегаокара-Эккерна-Шона, $g \ll 1$, что соответствует слабому туннелированию между островком и резервуарами. С помощью отображения действия Амбегаокара-Эккерна-Шона на модель Бозе-Кондо будет вычислена зависимость физических наблюдаемых от температуры и наведённого заряда вблизи его полуцелого значения.

3.5.2 Эффективное действие в окрестности точки вырождения

Следуя работе [302], для описания одноэлектронного транзистора вблизи точки вырождения, $q = k + 1/2$, где, напомним, k – целое число, достаточно рассмотреть состояния гамильтониана $\mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_c$ (см. (3.2)) с $Q = k$ и $Q = k + 1$. Гамильтониан (3.2), спроектированный на эти два состояния, имеет вид [302]

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_c + \mathcal{H}_T^{(l)} + \mathcal{H}_T^{(r)}, \tag{3.77}$$

где

$$\mathcal{H}_c = E_c(k-q)^2 + \frac{\Delta}{2} - \Delta S^z, \qquad \mathcal{H}_T^{(s)} = \sum_{k\alpha} t_{k\alpha}^{(s)} a_k^{(s)\dagger} d_\alpha S^+ + \text{h.c.} \tag{3.78}$$

Здесь введены следующие обозначения $\Delta = E_c(2k + 1 - 2q)$, $\boldsymbol{S}$ обозначает оператор псевдоспина 1/2, а $S^\pm = S^x \pm iS^y$.

Удобное для работы представление спиновых операторов через фермионные операторы $\bar{\psi}$ и ψ было предложено А.А. Абрикосовым. Соответствующие фермионы называются псевдофермионами, так как имеют ограничение, что в каждом состоянии может находится только один псевдофермион [348, 349]. После интегрирования по электронным степеням свободы в главном порядке по $1/N_{\mathrm{ch}}^{(s)}$ получается эффективное действие, описывающее одноэлектронный транзистор вблизи точки вырождения, $|\Delta| \ll E_c$, в режиме слабого туннелирования, $g \ll 1$, и низких температур, $T \ll E_c$:

$$\mathcal{S} = \int\limits_0^\beta d\tau \bar{\psi} \left(\partial_\tau - \eta + \frac{\Delta}{2} \boldsymbol{\sigma}_z \right) \psi + \frac{g}{4} \int\limits_0^\beta d\tau_1 d\tau_2 \alpha(\tau_1 - \tau_2) [\bar{\psi}(\tau_1) \boldsymbol{\sigma}_- \psi(\tau_1)][\bar{\psi}(\tau_2) \boldsymbol{\sigma}_+ \psi(\tau_2)] + \\ + \beta E_c (k-q)^2 + \beta \frac{\Delta}{2}. \tag{3.79}$$

Здесь $\boldsymbol{\sigma}_j$, $j = x, y, z$, обозначают матрицы Паули, $\boldsymbol{\sigma}_\pm = (\boldsymbol{\sigma}_x \pm i \boldsymbol{\sigma}_y)/2$, а ядро $\alpha(\tau)$ определено в уравнении (3.15). Для удобной работы с псевдофермионами введен химический потенциал η так, что предел $\eta \to -\infty$ подразумевается в конце всех вычислений. Такая процедура гарантирует проектирование на физический сектор теории, в котором число псевдофермионов равно 1. Напомним [348, 349], что статистическая сумма для гамильтониана (3.77) получается из статистической суммы для эффективного действия (3.79) следующим образом:

$$Z = \lim_{\eta \to -\infty} \frac{\partial}{\partial e^{\beta\eta}} Z_{\mathrm{pf}}. \tag{3.80}$$

Среднее от оператора $\langle \mathcal{O} \rangle$ для гамильтониана (3.77) определяется выражением

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \lim_{\eta \to -\infty} \left[\frac{Z_{\mathrm{pf}}}{Z} \frac{\partial}{\partial e^{\beta\eta}} \langle \mathcal{O} \rangle_{\mathrm{pf}} + \langle \mathcal{O} \rangle_{\mathrm{pf}} \right], \tag{3.81}$$

где $\langle \dots \rangle_{\mathrm{pf}}$ обозначает среднее по отношению к эффективному действию (3.79).

Отметим, что ядро $\alpha(\tau)$ в эффективном действии (3.79) совпадает с ядром в диссипативной части (3.14) действия Амбегаокара-Эккерна-Шона. [10] Сопоставление этих двух эффективных действий показывает, что оператор $\bar{\psi}(\tau) \boldsymbol{\sigma}_\pm \psi(\tau)$ есть результат проекции оператора $\exp(\pm i \Phi(\tau))$ на состояния изолированного островка с зарядом $Q = k$ и $Q = k+1$.

Ниже в этом разделе эффективное действие (3.79) будет применено для вычисления физических наблюдаемых (3.34) и (3.35) в режиме слабого туннелирования между островком и резервуарами.

[10] Интересно отметить, что эффективное действие (3.79) появилось впервые в работе А.И. Ларкина и В.И. Мельникова [350], где Δ имело смысл магнитного поля, действующего на локализованный спин, а диссипативное ядро $\alpha(\tau)$ появлялось из-за рассеяния на нем парамагнонов. В настоящее время эффективное действие (3.79) называется действием для модели Бозе-Кондо [351, 352].

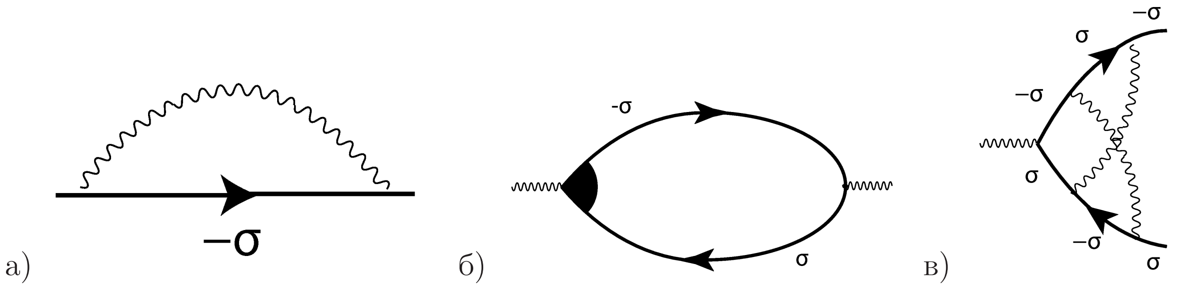

Рисунок 3.6: а) Собственно энергетическая часть псевдофермионной функции Грина в самосогласованном приближении. б) Диаграмма для псевдофермионной поперечной восприимчивости, которая определяет корреляционную функцию $D(i\omega_n)$. в) Низшая по g поправка к вершинной функции $\Gamma(i\epsilon_n)$. Сплошная линия обозначает псевдофермионную функцию Грина $G(i\epsilon_n)$, волнистая кривая обозначает $\alpha(i\omega_n)$, а закрашенный треугольник соответствует вершинной функции $\Gamma(i\epsilon_n)$.

3.5.3 Главное логарифмическое приближение

Для вычисления физических наблюдаемых необходимо вычислить корреляционнцю функцию $D^R(\omega)$. Ниже они будут вычислены в главном логарифмическом приближении, которое соответствует однопетлевой ренормализационной группе работ [351, 352].

Эффективное действие (3.79) определяет псевдофермионную функцию Грина при $g = 0$ как

$$G_{0\pm}^{-1}(i\epsilon_n) = i\epsilon_n + \eta \mp \frac{\Delta}{2}, \tag{3.82}$$

где, напомним, $\epsilon_n = \pi T(2n+1)$. Точная псевдофермионная функция Грина может быть записана через собственно энергетическую часть $\Sigma_\pm$:

$$G_{\pm}^{-1}(i\epsilon_n) = i\epsilon_n + \eta \mp \frac{\Delta}{2} - \Sigma_\pm(i\epsilon_n). \tag{3.83}$$

Собственно энергетическую часть удобно параметризовать следующим образом:

$$\Sigma_\pm(i\epsilon_n) = (i\epsilon_n + \eta)[1 - \gamma(i\epsilon_n)] \mp [1 - \gamma_s(i\epsilon_n)]\frac{\Delta}{2}, \tag{3.84}$$

так что точная псевдофермионная функция Грина становится равной

$$G_{\pm}^{-1}(i\epsilon_n) = (i\epsilon_n + \eta)\gamma(i\epsilon_n) \mp \gamma_s(i\epsilon_n)\frac{\Delta}{2}. \tag{3.85}$$

Главное логарифмическое приближение соответствует вычислению диаграммы для собственно энергетической части, изображенной на рисунке 3.6а, в самосогласованном приближении. Это соответствует решению уравнения

$$\Sigma_\pm(i\epsilon_n) = -\frac{gT}{4\pi}\sum_{\omega_l}\frac{|\omega_l|}{i\omega_l + i\epsilon_n + \eta \pm \frac{\Delta}{2} - \Sigma_\mp(i\omega_l + i\epsilon_n)}. \tag{3.86}$$

Напомним, что в теории (3.79) отсутствует перенормировка псевдофермионного взаимодействия $\alpha(\tau_{12})$, что связано с отсутствием псевдофермионных петель в теории, так как их вклад исчезает в пределе $\eta \to -\infty$ [348, 349].

С логарифмической точностью γ и γ_s зависят от одной переменной $x = \ln \Lambda / \max\{|\Delta|\gamma_s/\gamma, |i\epsilon_n|\}$, где Λ – это высокоэнергетическая обрезка порядка E_c. Тогда уравнение (3.86) приводит к следующим уравнениям

$$\gamma(x) = 1 + \frac{g}{4\pi^2} \int\limits_0^x \frac{dy}{\gamma(y)}, \qquad \gamma_s(x) = 1 - \frac{g}{4\pi^2} \int\limits_0^x \frac{dy\, \gamma_s(y)}{\gamma^2(y)}, \tag{3.87}$$

решения которых имеют вид [350]

$$\gamma(x) = \gamma_s^{-1}(x) = \left(1 + \frac{g}{2\pi^2} x\right)^{1/2}. \tag{3.88}$$

Используя (3.80), находим, что статистическая сумма определяется псевдофермионной функцией Грина

$$Z = e^{\beta E_c (k-q)^2} e^{\beta\Delta/2} \lim_{\eta \to -\infty} e^{-\beta\eta} \sum_{\epsilon_n, \sigma = \pm} e^{i\epsilon_n 0^+} G_\sigma(i\epsilon_n). \tag{3.89}$$

С помощью выражений (3.88) получаем

$$Z = 2 e^{\beta E_c (k-q)^2} e^{\beta\Delta/2} \operatorname{ch} \frac{\beta\bar{\Delta}}{2}. \tag{3.90}$$

Здесь $\bar{\Delta} = \Delta/\gamma^2$ определяет перенормированную (за счет виртуальных переходов электронов с островка в резервуары и обратно) щель между основным и возбужденным состояниями, а величина

$$\gamma = \left(1 + \frac{g}{2\pi^2} \ln \frac{\Lambda}{\max\{|\bar{\Delta}|, T\}}\right)^{1/2}. \tag{3.91}$$

Средний заряд на островке связан с намагниченностью $M = \langle S_z \rangle$ следующим образом:

$$Q(T) = k + \frac{1}{2} - M. \tag{3.92}$$

Вычисляя намагниченность из статистической суммы, находим

$$M(T) = \frac{1}{2\gamma^2} \operatorname{th} \frac{\beta\bar{\Delta}}{2}. \tag{3.93}$$

Отметим, что выражение (3.93) было впервые получено в работе [304] с помощью другого подхода. При $T = 0$ выражение для среднего заряда принимает вид

$$Q(T = 0) = k + \frac{1}{2} - \frac{\operatorname{sgn} \bar{\Delta}}{1 + \frac{g}{2\pi^2} \ln \frac{\Lambda}{|\bar{\Delta}|}} \tag{3.94}$$

и совпадает с результатом, полученным в работе [302]. Интересной особенностью этого результата является отличие среднего заряда островка от целого числа при $\bar{\Delta} \neq 0$. Физически это связано с наличием электронных переходов между островком и резервуаром при ненулевом значении g.

Корреляционная функция $D(i\omega_n)$ связана с псевдофермионной поперечной восприимчивостью, которая изображена на рисунке 3.6б. Так как псевдофермионное взаимодействие связывает $\boldsymbol{\sigma}_-$ и $\boldsymbol{\sigma}_+$, то легко видеть, что первая поправка к вершинной функции $\Gamma(i\epsilon_n)$ пропорциональна $g^2 \ln(\Lambda/\max\{T,|\bar{\Delta}|\})$ (см. Рис. 3.6в). Поэтому в главном логарифмическом приближении, которое учитывает все вклады вида $g^m \ln^m(\Lambda/\max\{T,|\bar{\Delta}|\})$, можно не учитывать отличие вершинной функции от единицы. Полагая $\Gamma(i\epsilon_n) = 1$, получаем

$$D(i\omega_n) = -\frac{1}{2\operatorname{ch}\beta\bar{\Delta}/2}\lim_{\eta\to-\infty}\frac{\partial}{\partial e^{\beta\eta}}T\sum_{\epsilon_m}G_-(i\epsilon_m)G_+(i\epsilon_m+i\omega_n) = -\frac{\operatorname{th}\beta\bar{\Delta}/2}{\gamma^2}\frac{1}{i\omega_n-\bar{\Delta}}. \tag{3.95}$$

После аналитического продолжения на действительные частоты находим, что

$$D^R(\omega) = -\frac{\operatorname{th}\beta\bar{\Delta}/2}{\gamma^2}\frac{1}{\omega-\bar{\Delta}+i0^+}. \tag{3.96}$$

3.5.4 Зависимость физических наблюдаемых от температуры

Используя результат (3.96), можно легко вычислить интегралы в выражениях (3.29)-(3.30) и (3.38)-(3.39). Для обоих физических наблюдаемых $\tilde{\mathbb{Q}}$ и $\mathbb{Q}$ получается одно и тоже выражение:

$$\tilde{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q} = Q + \frac{1-\gamma^2}{2\gamma^2}\operatorname{th}\frac{\beta\bar{\Delta}}{2} = k + \frac{1}{e^{\beta\bar{\Delta}}+1}. \tag{3.97}$$

Выражения (3.97) впервые были получены в работах [336, 335]. Для физических наблюдаемых $\tilde{\mathbb{G}}$ и $\mathbb{G}$ ответы получаются разные:

$$\tilde{\mathbb{G}} = \frac{\bar{g}T}{\bar{\Delta}}\operatorname{th}\frac{\bar{\Delta}}{2T}, \tag{3.98}$$

$$\mathbb{G} = \frac{\bar{g}}{2}\frac{\bar{\Delta}}{T\operatorname{sh}(\bar{\Delta}/T)}, \tag{3.99}$$

где $\bar{g} = g/\gamma^2$. Отметим, что результат (3.99) совпадает с ответом для кондактанса одноэлектронного транзистора, полученного впервые в работе [304]. Напомним, что выражения (3.97)-(3.99) были получены в предположении, что выполнены условия $g \ll 1$ и $T, |\Delta| \ll E_c$.

Выражения (3.97)-(3.99) показывают, что при $T \to 0$ наблюдаемые $\tilde{\mathbb{G}}$ и $\mathbb{G}$ стремятся к нулю, а $\tilde{\mathbb{Q}}$ и $\mathbb{Q}$, в отличие от среднего заряда на островке, становятся независимой от

g и целочисленно квантуются при всех значениях напряжения на затворе кроме точек вырождения $q = k + 1/2$. Таким образом, выражения (3.97)-(3.99) показывают, что одноэлектронный транзистор при $T \to 0$ ведет себя эффективно как изолированный островок.

Заметим, что согласно (3.97) при $T \ll \bar{\Delta}$ наблюдаемая $\mathbb{Q}$ имеет такую же температурную зависимость, как и для случая изолированного островка с щелью $\bar{\Delta}$, которая в этом режиме уже не зависит от температуры. При $\mathbb{Q} \neq k + 1/2$ из-за наличия конечной щели $\bar{\Delta}$ было бы естественно ожидать экспоненциальной зависимости наблюдаемых от температуры при $T \ll \bar{\Delta}$. Как видно из (3.98), это не так для $\tilde{\mathbb{G}}$. Более того, оказывается, что при учете вкладов в наблюдаемые, связанных с котуннелированием [292, 293] (см. Прил. B.2), возникают степенные поправки по температуре при $T \ll \bar{\Delta}$.

Стандартным образом выражения (3.97)-(3.99) могут быть использованы для написания уравнений ренормализационной группы, описывающих зависимость параметров g и Δ действия (3.79) от обрезки Λ на больших энергиях. Требуя независимости наблюдаемых $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{G}$ от величины Λ, найдем

$$\frac{dg}{d\ln\Lambda} = \frac{g^2}{2\pi^2}, \qquad \frac{d\ln\Delta}{d\ln\Lambda} = \frac{g}{2\pi^2}. \tag{3.100}$$

Отметим, что эти уравнения ренормализационной группы были получены впервые в работах [306, 307]. Уравнения (3.100) определяют характерный масштаб ξ в мнимом времени (корреляционную длину), которая равна $\xi = \Lambda^{-1}\exp(-2\pi^2/g)$. С помощью масштаба ξ удобно записать температурную зависимость максимальных значений кондактанса одноэлектронного транзистора и производной $\partial\mathbb{Q}/\partial q$, которые достигаются в точке вырождения $\mathbb{Q} = k + 1/2$:

$$\mathbb{G}_{\max}(T) = \pi^2\bigl(\ln\beta/\xi\bigr)^{-1}, \qquad \left[\frac{\partial\mathbb{Q}(T)}{\partial q}\right]_{\max} = \frac{\pi^2\beta E_c}{g}\bigl(\ln\beta/\xi\bigr)^{-1}. \tag{3.101}$$

Заметим, что производная $[\partial\mathbb{Q}(T)/\partial q]_{\max}$ расходится при $T \to 0$, что означает бесконечно узкий переход в точке вырождения между значениями $\mathbb{Q} = k$ и $\mathbb{Q} = k + 1$.

Рассмотрим теперь окрестность точки $\mathbb{G} = 0$ и $\mathbb{Q} = k + 1/2$. Ограничимся температурами $T \gg \bar{\Delta}$ в выражениях (3.97) - (3.99). В этом режиме зависимость наблюдаемых от температуры имеет одинаковый вид для определений (3.29)-(3.30) и (3.38)-(3.39) и может быть воспроизведена как решение уравнений, похожих на уравнения ренормализационной группы:

$$\frac{d\mathbb{G}}{d\ln\beta} = -\frac{\mathbb{G}^2}{\pi^2}, \qquad \frac{d\mathbb{Q}}{d\ln\beta} = \left(\mathbb{Q} - k - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{\mathbb{G}}{\pi^2}\right). \tag{3.102}$$

Уравнения (3.102) демонстрируют, что точка $\mathbb{G} = 0$ и $\mathbb{Q} = k + 1/2$ может быть интерпретирована как неустойчивая фиксированная точка теории, причем $\mathbb{G}$ играет роль маргинально иррелевантной переменной.

Полученные выше результаты показывают, что при $T \to 0$ наблюдаемая $\mathbb{G}$ обращается в нуль при всех значениях наведенного заряда q, а наблюдаемая $\mathbb{Q}$ целочисленно квантуется при всех значениях q, кроме полуцелых. Изучим подробнее механизм изменения $\mathbb{Q}$ на единицу в точке вырождения. Рассмотрим процесс в мнимом времени, в котором наведенный заряд увеличивается на единицу в момент $\tau = 0$, а в момент $\tau = \tau_0 > 0$ на единицу уменьшается, т. е. $q(\tau) = q + 1$ при $0 \leqslant \tau < \tau_0$ и $q(\tau) = q$ при $\tau_0 \leqslant \tau < \beta$. Вероятность такой конфигурации определяется свободной энергией $\delta F(\tau_0) = -T \ln D(\tau_0)$. Из выражения (3.95) следует, что

$$D(\tau) = \gamma^{-2} \frac{e^{-\tau\bar{\Delta}}}{1 + e^{-\beta\bar{\Delta}}}. \tag{3.103}$$

Вычислим разность энергий δE между состояниями с наведенным зарядом $q + 1$ и q, где $k \leqslant q < k + 1/2$, а состояние с наведенным зарядом $q + 1$ получается как предел конфигурации с $q(\tau)$ при $\tau_0 \to \beta$. С помощью (3.103) находим

$$\delta E = \frac{\bar{\Delta}}{1 + e^{-\beta\bar{\Delta}}} \left(1 + \frac{d \ln \gamma^2}{d \ln T}\right) - T \frac{d \ln \gamma^2}{d \ln T}. \tag{3.104}$$

Полезно сравнить разность энергий δE со скоростью туннелирования электронов с островка в резервуары (Γ_{10}) и обратно (Γ_{01}) [275]

$$\Gamma_{01/10} = \frac{g\bar{\Delta}}{4\pi\gamma^2} \left(\operatorname{cth} \frac{\bar{\Delta}}{2T} \pm 1\right). \tag{3.105}$$

В области низких температур или вдали от точки вырождения $T \ll |\bar{\Delta}|$ разность энергий $\delta E = \bar{\Delta}$ и поэтому переход из состояния с наведённым зарядом q в состояние с $q+1$ энергетически не выгоден. Скорости туннелирования в этой ситуации малы по сравнению с разностью энергий: $\delta E \gg \Gamma_{01/10}$. В области вблизи точки вырождения $|\bar{\Delta}| \ll \bar{g}T$ ситуация оказывается другой. Разность энергий между состояниями с наведённым зарядом $q + 1$ и q оказывается того же порядка, что и скорости туннелирования: $\Gamma_{01} = \Gamma_{10} = \pi\delta E$. В силу этого условия при $T \to 0$ в точке вырождения оказывается возможным изменить наведённый заряд на единицу с одновременным туннелированием электрона на островок.

3.5.5 Обсуждение результатов

Зависимость физических наблюдаемых $\mathbb{G}$ и $\mathbb{Q}$ от температуры удобно представить в виде диаграммы аналогичной диаграмме ренормгруппового потока в координатах $\mathbb{Q}$ – $\mathbb{G}$.

Для фиксированных значений затравочных параметров g, q и E_c зависимость $\mathbb{G}$ и $\mathbb{Q}$ от температуры представляется некоторой кривой. Схематично эта диаграмма представлена на рисунке 3.7. Она построена на основе выражений (3.102) в режиме сильной связи и выражений (3.68) в режиме слабой связи. Заметим, что строго говоря, на этой диаграмме область сильной связи вблизи точки $\mathbb{Q} = k+1/2$ и область слабой связи никак не связаны, так как отсутствуют результаты для температурной зависимости в промежуточной области $\mathbb{G} \sim 1$. На данный момент эта область может быть исследована только численно. [11] Однако, естественно предположить, что имеется гладкая интерполяция между результатами в слабой и сильной связи, так как физические наблюдаемые $\mathbb{G}$ и $\mathbb{Q}$ определены одинаковым образом во всей области параметров.

Заметим, что вид диаграммы потока, представленной на рисунке 3.7, не зависит от выбора физических наблюдаемых $\tilde{\mathbb{G}}$ и $\tilde{\mathbb{Q}}$ или $\mathbb{G}$ и $\mathbb{Q}$. Универсальной особенностью этой диаграммы является точка $\mathbb{Q} = k + 1/2$ и $\mathbb{G} = 0$, которую естественно назвать квантовой критической точкой, разделяющей две устойчивые точки при $\mathbb{Q} = k$, $\mathbb{G} = 0$ и $\mathbb{Q} = k + 1$, $\mathbb{G} = 0$. Последние описывают одноэлектронный транзистор в состоянии с целочисленным значением наблюдаемой $\mathbb{Q}$ при $T = 0$. Эта диаграмма показывает, что одноэлектронный транзистор с большим числом туннельных каналов так, что полный туннельный кондактанс $g \gg 1$, при $T \to 0$ будет эквивалентен изолированному островку – кондактанс $\mathbb{G}$ при $T = 0$ будет строго равен нулю.

В этой главе рассматривался случай одноэлектронного транзистора с большим количеством туннельных контактов, $N_{\mathrm{ch}}^{(l,r)} \gg 1$, между островком и резервуарами. Как отмечалось выше, действие, аналогичное действию Амбегаокара-Эккерна-Шона, может быть выведено и для случая конечного числа каналов $N_{\mathrm{ch}}^{(l,r)}$ произвольной прозрачности [318, 314]. Физическая наблюдаемая, аналогичная величине $\mathbb{Q}$, должна существовать и в этом случае. Вблизи точки вырождения, $\mathbb{Q} = k + 1/2$, как было показано в работе [302], одноэлектронный транзистор с конечным числом каналов эквивалентен N-канальной модели Кондо [353, 354, 355]. При этом в пределе нулевой температуры кондактанс в точке вырождения стремится к конечному значению. Поэтому в случае конечного числа каналов $N_{\mathrm{ch}}^{(l,r)}$ следует ожидать диаграммы, аналогичной изображенной на рисунке 2.4.

[11] Как было объяснено выше, для численных расчетов более удобны наблюдаемые $\tilde{\mathbb{G}}$ и $\tilde{\mathbb{Q}}$.

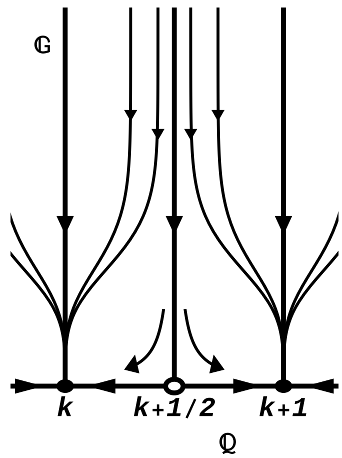

Рисунок 3.7: Схематическая диаграмма, иллюстрирующая зависимость физических наблюдаемых $\mathbb{G}$ и $\mathbb{Q}$ от температуры при разных значениях параметров g, q и E_c. Стрелки указывают направление, соответствующее понижению температуры.

3.6 Заключение

Главным выводом данной главы является существование в задаче о кулоновской блокаде в одноэлектронном транзисторе физической величины $\mathbb{Q}$, определяющей затворную ёмкость одноэлектронного транзистора $\mathbb{C}_g$, и рассмотренной впервые в диссертационной работе. Из-за наличия кулоновского взаимодействия $\mathbb{C}_g$ имеет нетривиальную зависимость от температуры и потенциала затвора (также как и кондактанс), и отличается от геометрической ёмкости затвора. Затворная ёмкость $\mathbb{C}_g$ совместно с кондактансом определяет зависимость от T и V_g диссипации энергии при приложении на затвор дополнительного слабо осциллирующего потенциала. Вычисления в режиме слабого туннелирования между островком и резервуарами, $g \ll 1$, показывают, что наблюдаемая $\mathbb{Q}$ целочисленно квантуется в пределе нулевой температуры при всех значениях V_g кроме $V_g = e(k+1/2)/C_g$, где k – целое число. Такое же поведение $\mathbb{Q}$ ожидается и в случае произвольного значения кондактансов туннельных контактов.

Глава 4

Спиновые корреляции в квантовых точках

4.1 Введение

В этой главе рассматривается одноэлектронный транзистор с островком достаточно малых размеров, так что необходимо учитывать дискретность одночастичных уровней энергии. Как хорошо известно, в этом случае электрон-электронное взамодействие помимо кулоновской блокады приводит ещё к явлению *мезоскопической стоунеровской неустойчивости*. В этой главе изучается, как спиновые корреляции, связанные с мезоскопической стоунеровской неустойчивостью, проявляются в термодинамических и транспортных свойствах рассматриваемой системы.

4.1.1 Межэлектронное взаимодействие в квантовых точках: универсальный гамильтониан

Будем называть *квантовой точкой* островок одноэлектронного транзистора достаточно малых размеров, так что для описания низкотемпературного электронного транспорта через островок небходимо учитывать дискретность одночастичных уровней энергии [1]. Изучение электронного транспорта через квантовую точку, связанную с резервуарами тун-

[1]Заметим, что, как правило, под квантовыми точками понимают островки одноэлектронного транзистора малых размеров в двумерном электронном газе. В трёхмерном случае такие островки обычно называют гранулами. Для единообразия мы любую систему, для описания которой важно учитывать дискретность одночастичного спектра, будем называть квантовой точкой независимо от её физической природы.

нельными контактами с кондактансами $g_l, g_r \ll 1$ при температурах $T \lesssim \delta$, где, напомним, δ – это среднее расстояние между одночастичными уровнями энергии, которая даёт информацию об одночастичном спектре. В отличие от строго периодической зависимости кондактанса одноэлектронного тразистора от напряжения V_g на затворе, которая должна иметь место в согласии с результатами предыдущей главы, в экспериментах с квантовыми точками в двумерном электронном газе при температурах $T \lesssim \delta$ наблюдаются как флуктуации значения кондактанса в максимумах кулоновских пиков, так и флуктуации расстояния между ними [356, 357, 358, 359, 360, 361, 362, 363]. Типичная экспериментальная картина представлена на рисунке 4.1.

Для режима промежуточных температур $g_{l,r}\delta \ll T \ll \delta$ флуктуации значений кондактанса в максимумах кулоновских пиков могут быть объяснены в рамках подхода кинетических уравнений [275] для гамильтониана (3.2) тем, что величины $\check{g}_{\alpha\alpha}^{(l,r)}$ (см. (3.6)), характеризующие вероятность туннелирования в одноэлектронное состояние α флуктуируют при изменении напряжения на затворе [364]. Эти флуктуации происходят из-за того, что изменение напряжения на затворе меняет потенциал, создающий квантовую точку в двумерном электронном газе, что приводит к изменению собственных функций и энергий одноэлектронной задачи.

Флуктуации расстояния между двумя соседними кулоновскими пиками в кондактансе при $T \ll \delta$ определяются тем, как меняется энергия основного состояния квантовой точки при изменении числа электронов на единицу. Для гамильтониана (3.2) легко показать [2], что расстояние между положениями максимумов двух соседних кулоновских пиков, соответствующих переходам от числа электронов $N-1$ к N и от N к $N+1$, для нечётного N не зависит от одночастичного спектра и пропорционально E_c. Для чётного значения N расстояние между положениями соседних кулоновских пиков флуктуирует с одночастичным спектром и в среднем равно $E_c + \delta$. Это приводит к бимодальному распределению для расстояний между положениями кулоновских пиков в отличии от наблюдаемого экспериментально одномодального распределения [358, 360, 362, 363].

В работе [366] отсутствие бимодальности в распределениях расстояний между положениями соседних кулоновских пиков было объяснено наличием (ферромагнитного) обменного взаимодействия, снимающего вырождение по спину и приводящего для некоторых

[2]Для квантовых точек правильной геометрии, в которых одночастичные уровни энергии вырождены из-за симметрии потенциала, создающего квантовую точку, естественно ожидать максимально возможного значения спина в основном состоянии по аналогии с правилом Хунда для атомных оболочек [365]. В ситуации, которая рассматривается в данной главе, когда дополнительное вырождение одночастичных уровней отсутствует, спин в основном состоянии равен 0 (1/2) для чётного (нечётного) числа электронов.

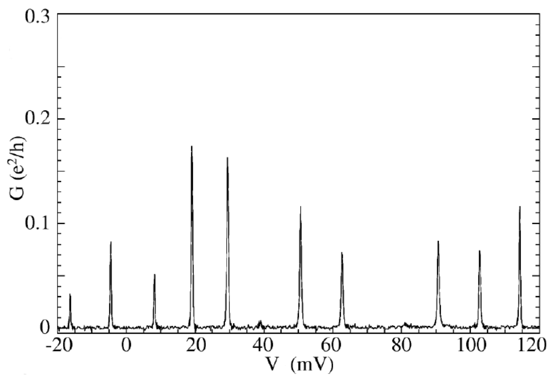

Рисунок 4.1: Зависимость кондактанса от напряжения на затворе при низких температурах $T/\delta \approx 0.05$. Рисунок из работы [363].

значений N к значению спина в основном состоянии большему, чем $1/2$ [367, 368]. В работах [369, 370] было показано, что наличие обменного взаимодействия приводит к тому, что вероятность значения спина в основном состоянии $S = 1$ превышает вероятность для $S = 0$.

В пределе $\delta/E_{\mathrm{Th}} \ll 1$, где, напомним, E_{Th} – это энергия Таулесса, можно показать [328], что электрон-электронное взаимодействие приводит к появлению в гамильтониане (3.2) двух дополнительных членов: обменного взаимодействия гейзенберговского типа [3] и взаимодействия в куперовском канале. В этом, так называемом, *универсальном гамильтониане* вместо полного набора матричных элементов межэлектронное взаимодействие характеризуется всего тремя параметрами: зарядовой энергией E_c, обменной энергией J [4] и энергией взаимодействия в куперовском канале J_c. Ещё одним важным свойством универсального гамильтониана – это существование точного аналитического решения. Спектр многочастичных возбуждений может быть найден с помощью метода анзаца Бете [371].

Учёт в рамках универсального гамильтониана достаточно слабого ферромагнитного обменного взаимодействия ($J \approx 0.4\delta$) для квантовых точек в двумерном электронном газе позволил при $T \lesssim \delta$ количественно объяснить [372, 373, 374, 375] статистику высот кулоновских пиков и статистику расстояний между соседними пиками, измеренную в экспериментах [360, 361].

Если обменное взаимодействие приводит к появлению ферромагнитных корреляций,

[3]Заметим, что это обменное взаимодействие является нульмерным аналогом взаимодействия в триплетном канале, подробно рассматривавшемся в главе 1.

[4]В пределе, $k_F L \gg 1$, где L – характерный размер квантовой точки, величина обменной энергии J связана с параметром F_t^0 (см. раздел 1.4.2) простым соотношением: $J = -F_t^0 \delta$.

то взаимодействие в куперовском канале приводит к появлению сверхпроводящих корреляций. Поэтому универсальный гамильтониан представляет удобную модель для изучения взаимного влияния ферромагнитных и сверхпроводящих корреляций [376, 377, 378, 379, 380, 381]. Для квантовых точек в двумерном электронном газе взаимодействие в куперовском канале обычно отталкивательное и поэтому не приводит к сверхпроводящим корреляциям. В трёхмерном случае, для металлических гранул малых размеров, взаимодействие в куперовском канале может быть притягательным и, как следствие, приводящим к сверхпроводящим корреляциям. Эти корреляции подавляются магнитным полем $B \gtrsim B_c = \Phi_0\sqrt{\delta}/(L^2\sqrt{E_{\mathrm{Th}}})$ [329], где L – характерный размер квантовой точки, а Φ_0 – квант магнитного потока.

Одним из важных преимуществ подхода универсального гамильтониана является то, что в пределе $E_{\mathrm{Th}}/\delta \to \infty$ параметры E_c, J и J_c, характеризующие межэлектронное взаимодействие, могут рассматриваться как заданные нефлуктуирующие величины. При конечном значении величины E_{Th}/δ, как это реализуется в экспериментах, параметры взаимодействия E_c, J и J_c флуктуируют вокруг своих средних значений. Кроме этого, появляются дополнительные матричные элементы взаимодействия флуктуирующие вокруг нулевых значений. Установлено, что эти флуктуации имеют порядок δ^2/E_{Th} [382].

Кроме флуктуаций матричных элементов взаимодействия необходимо учитывать еще два физических явления, приводящих к появлению дополнительных флуктуирующих членов по сравнению с универсальным гамильтонианом. Во-первых, при добавлении еще одного электрона в квантовую точку происходит перераспределение (скремблирование) заряда [5], которое приводит к появлению дополнительного электростатического взаимодействия. Флуктуации соответствующих матричных элементов оказываются порядка $\sqrt{\delta^3/E_{\mathrm{Th}}}$ [366]. Во-вторых, при изменении напряжения на затворе обычно меняется потенциал, создающий квантовую точку, что приводит к тому, что в одночастичном гамильтониане появляется флуктуирующий член с недиагональными матричными элементами порядка $\sqrt{\delta^3/E_{\mathrm{Th}}}$ [329]. Учёт поправок к универсальному гамильтониану, связанных с конечностью отношения E_{Th}/δ, приводит к более хорошему согласию между теорией и экспериментом для статистики расстояний между двумя соседними кулоновскими пиками [383, 384, 385].

При микроскопическом выводе универсального гамильтониана существенную роль играет отсутствие спин-орбитального взаимодействия. Например, для квантовой точки в двумерном электронном газе в пределе сильного спин-орбитального взаимодействия об-

[5] Для этого явления в англоязычной литературе принято название scrambling.

менное взаимодействие в универсальном гамильтониане становится изинговского типа [386]. В случае спин-орбитального взаимодействия промежуточной величины универсальный гамильтониан имеет более сложный вид: даже в пределе $\delta/E_{\mathrm{Th}} \ll 1$ в нём нельзя ограничиться средними значениями матричных элементов взаимодействия и необходимо учитывать их флуктуации [386, 387, 388, 389].

В заключение этого раздела заметим, что более детально с обсуждаемыми выше вопросами можно ознакомиться в обзорах [390, 329, 391].

4.1.2 Постановка задачи

Наличие в универсальном гамильтониане члена, описывающего обменное взаимодействие: $-J\boldsymbol{S}^2$ $(J > 0)$, где $\boldsymbol{S}$ – это оператор полного спина электронов в квантовой точке, приводит к возможности стоунеровского перехода из парамагнитного в ферромагнитное состояние при увеличении J. Для эквидистантного одночастичного спектра с расстоянием между уровнями, равным Δ, и фиксированного числа электронов N разность энергий основного состояния со спином $S+1$ (при этом $S_z = S+1$) и спином S (при этом $S_z = S$) равна $\Delta(2S+1) - J(2S+2)$. Каждый раз, когда эта разность обращается в нуль при увеличении отношения J/Δ, происходит переход из основного состояния со спином S в основное состояние со спином $S+1$. Получающаяся зависимость полного спина в основном состоянии от отношения J/Δ показана на рисунке 4.2. Как видно из рисунка, для чётного (нечётного) числа электронов при $J/\Delta < 1/2$ $(J/\Delta < 2/3)$ спин в основном состоянии равен 0 (1/2). Такое состояние квантовой точки естественно назвать парамагнитным, так как спин в основном состоянии равен минимально возможному значению, а в термодинамическом пределе, $N \to \infty$, спин на одну частицу равен нулю. При $J > \Delta(1-1/N)$ спин в основном состоянии равен максимально возможному значению $N/2$, т. е. квантовая точка находится в ферромагнитном состоянии. В термодинамическом пределе, $N \to \infty$, стоунеровский переход в ферромагнитное состояние происходит при $J/\Delta = 1$ $(F_t^0 = -1)$. В области $J/\Delta > 1/2$ для чётного числа электронов или $J/\Delta > 2/3$ для нечётного числа электронов при увеличении отношения J/Δ величина спина в основном состоянии последовательно возрастает (см. Рис. 4.2). Это явление, рассмотренное впервые в работе [328], называется *мезоскопической стоунеровской неустойчивостью.* Оно исчезает в термодинамическом пределе $N \to \infty$ или $\Delta \to 0$, так как в этом пределе при $J < \Delta$ спин в основном состоянии, который приходится на одну частицу, равен нулю. При $N \gg 1$ в области вблизи стоунеровской неустойчивости, $0 < \Delta - J \ll \Delta$, спин в основном состоянии может принимать большие значения $S \approx \Delta/[2(\Delta - J)] \gg 1$, приводя к большой энергии обменного

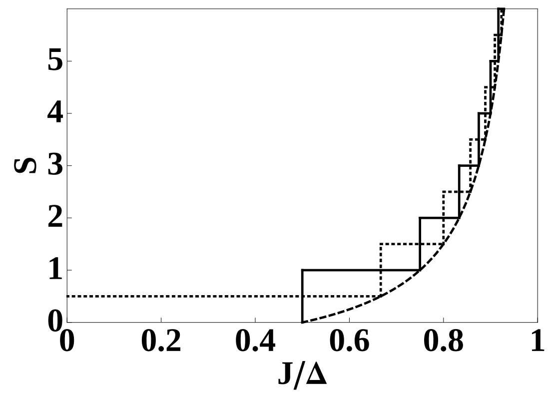

Рисунок 4.2: Зависимость спина в основном состоянии от отношения J/Δ для эквидистантного одночастичного спектра. Сплошные (штриховыые) линии соответствуют чётному (нечётному) числу электронов, пунктирная кривая соответствует зависимости $S = (2J-\Delta)/(2\Delta-2J)$.

расщепления $\mathcal{J} = 2JS \approx J\Delta/(\Delta - J) \gg \Delta$.

Для случайного одночастичного спектра значение спина в основном состоянии в интервале $0 < J < \delta$ является случайной величиной. Как уже упоминалось в предыдущем разделе, для квантовых точек в двумерном электронном газе наличие слабого обменного взаимодействия, $J \lesssim 0.5\delta$, может привести к тому, что для данной реализации одночастичных уровней энергии спин в основном состоянии станет равным 1 или 3/2 в зависимости от чётности числа электронов [369, 370, 367, 368]. По-видимому, из-за слабости обменного взаимодействия в квантовых точках в двумерном электронном газе, до сих пор во всех работах, известных автору, кроме работы [328] [6], исследовалось влияние обменного взаимодействия на основное состояние и на транспортные и термодинамические свойства при температурах $T \lesssim \delta$ [369, 370, 373, 374, 375, 376, 377, 378, 379, 380, 381, 386, 387, 392, 393]. В тоже время вблизи стоунеровской неустойчивости при $0 < \delta - J \ll \delta$ имеется широкий интервал температур $\delta \ll T \ll J_\star = J\delta/(\delta - J)$, в котором, с одной стороны, влияние флуктуаций одночастичных уровней энергии мало, а с другой стороны, можно ожидать проявления сильных спиновых корреляций, связанных с явлением мезоскопической стоунеровской неустойчивости.

В работе [328] в рамках подхода универсального гамильтониана было показано, что при высоких температурах $T \gg J_\star$ мезоскопическая стоунеровская неустойчивость проявляется в малых, зависящих от температуры поправках к восприимчивости Паули для

[6] В работах [388, 389] вычислялась динамическая спиновая вориимчивость на $\omega \gg \delta$ при нулевой температуре в случае наличия спин-орбитального взаимодействия.

ферми-жидкости. Также в работе [328] с помощью численных расчетов были получены оценки для среднего значения квадрата спина в основном состоянии при разных значениях J/δ. До настоящего времени в интервале температур $\delta \ll T \ll J_\star$ особенности термодинамических и транспортных свойств, связанных с явлением мезоскопической стоунеровской неустойчивости, исследованы не были. Конечно, для того, чтобы такое изучение имело смысл, интервал температур от δ до $J_\star$ должен быть достаточно широким. Такая ситуация может быть реализована в квантовых точках, выполненных в виде гранул из почти ферромагнитных материалов, например, таких как Pd с параметром $F_t^0 = -0.9$ [394] или редкоземельный сплав $\mathrm{YFe_2Zn_{20}}$, в котором $F_t^0 = -0.94$ [395] [7].

Выше явление мезоскопической стоунеровской неустойчивости обсуждалось в рамках универсального гамильтониана, который верен в пределе $E_{\mathrm{Th}}/\delta \to \infty$. Анализ влияния флуктуаций матричных элементов взаимодействия за рамками универсального гамильтониана на энергию основного состояния как функции полного спина, проведенный в работах [396, 397], указывает на возможность остановки развития стоунеровской неустойчивости при увеличении отношения J/δ и насыщения значения полного спина на величине порядка E_{Th}/δ.

Итак, *основной задачей*, которая решается в данной главе, является изучение того, как спиновые корреляции, связанные с явлением мезоскопической стоунеровской неустойчивости, проявляются в термодинамических и транспортных свойствах квантовых точек при таких температурах ($T \gg \delta$), когда влияние флуктуаций одночастичных уровней энергии обычно мало.

Материал данной главы организован следующим образом. В разделе 4.2 приведены необходимые сведения об универсальном гамильтониане и получены точные аналитические выражения для спиновой восприимчивости и туннельной плотности состояний. В разделе 4.3 рассматривается поведение продольной спиновой восприимчивости, усреднённой по реализациям одноэлектронных уровней энергии, с изменением температуры и магнитного поля. В разделе 4.4 изучается зависимость туннельной плотности состояний, усреднённой по реализациям одноэлектронного спектра, от энергии, температуры и магнитного поля. Завершается глава заключением (раздел 4.5).

[7] Например, для гранулы Pd радиуса 2.5 нм среднее расстояние между одночастичными уровнями $\delta \approx 10$ K, а величина $J_\star \approx 90$ K.

4.2 Универсальный гамильтониан

4.2.1 Введение

В этом разделе будут приведены необходимые сведения об универсальном гамильтониане, описывающем взаимодействующие электроны в квантовой точке в нульмерном пределе. С помощью метода Вея-Нормана-Колоколова для универсального гамильтониана будут точно вычислены спиновая восприимчивость и туннельная плотность состояний. В следующих разделах точные аналитические выражения для спиновой восприимчивости и туннельной плотности состояний будут проанализированы в разных предельных случаях с учётом флуктуаций одночастичных уровней энергии.

4.2.2 Универсальный гамильтониан

При выполнении условия $\delta/E_{\mathrm{Th}} \ll 1$, где, напомним, E_{Th} обозначает энергию Тауллеса, а δ среднее расстояние между одночастичными уровнями энергии, квантовая точка может описываться в нульмерном приближении с помощью, так называемого, универсального гамильтониана [328] [8]

$$H = H_0 + H_C + H_S. \tag{4.1}$$

Здесь гамильтониан невзаимодействующих электронов

$$H_0 = \sum_{\alpha,\sigma} \epsilon_{\alpha,\sigma} d^\dagger_{\alpha,\sigma} d_{\alpha,\sigma}, \tag{4.2}$$

где $\epsilon_{\alpha,\sigma} = \epsilon_\alpha + g_L \mu_B B\sigma/2$ обозначают одноэлектронные уровни энергии, расщепленные по спину ($\sigma = \pm 1$) магнитным полем B. Для квантовой точки в двумерном электронном газе в отсутствие спин-орбитального взаимодействия параллельное магнитное поле не влияет на орбитальное движение электронов [9]. В этом случае статистика одноэлектронных уровней энергии ϵ_α может описываться ортогональным классом симметрии (класс AI) либо унитарным классом симметрии (класс A) по классификации Вигнера-Дайсона [21, 22, 23, 24, 25, 26]. Последний случай реализуется при приложении слабого перпендикулярного магнитного поля $B_\perp \gtrsim B_c = \Phi_0\sqrt{\delta}/(L^2\sqrt{E_{\mathrm{Th}}})$. В трёхмерном случае для металлических гранул малых размеров в силу того, что кроссоверное поле B_c равно

[8] В этой главе не будет рассматриваться вклад в универсальный гамильтониан от взаимодействия в куперовском канале (см. обсуждение в разделе 4.1.1).

[9] Мы пренебрегаем влиянием параллельного магнитного поля на орбитальное движение, связанное с конечной толщиной двумерного газа.

нулю в пределе $\delta/E_{\mathrm{Th}} \to 0$, будем считать, что при наличии ненулевого магнитного поля статистика одноэлектронных уровней описывается унитарным классом симметрии.

Второй член в выражении (4.1) описывает зарядовое взаимодействие электронов на островке:

$$H_C = E_c\big(\hat{n} - q\big)^2, \qquad \hat{n} = \sum_{\alpha,\sigma} \hat{n}_{\alpha,\sigma} = \sum_{\alpha,\sigma} d^\dagger_{\alpha,\sigma} d_{\alpha,\sigma}. \tag{4.3}$$

Напомним, что $E_c = e^2/(2C)$ обозначает зарядовую энергию, где C полная ёмкость квантовой точки. Величина $q = C_g V_g/e$ представляет собой дополнительный заряд (в единицах заряда электрона), наведенный на островке при приложении напряжения V_g на затворе.

Последний член в гамильтониане (4.1)

$$H_S = -J\boldsymbol{S}^2 \tag{4.4}$$

описывает ферромагнитное ($J > 0$) обменное взаимодействие электронов на квантовой точке. Здесь

$$\boldsymbol{S} = \sum_{\alpha} \boldsymbol{s}_\alpha = \frac{1}{2} \sum_{\alpha\sigma\sigma'} d^\dagger_{\alpha,\sigma} \boldsymbol{\sigma}_{\sigma\sigma'} d_{\alpha,\sigma'} \tag{4.5}$$

обозначает оператор полного спина электронов на квантовой точке [10], а $\boldsymbol{\sigma}$ – это, как и в предыдущих главах, матрицы Паули.

4.2.3 Почти полное разделение спиновых и зарядовых корреляций

Для вычисления статистической суммы Z в большом каноническом ансамбле [11] и одночастичной мацубаровской функции Грина [12]

$$G_{\alpha,\sigma_1,\sigma_2}(\tau_1, \tau_2) = -\frac{1}{Z} \mathcal{T}_\tau \operatorname{Tr} d_{\alpha,\sigma_1}(\tau_1) d^\dagger_{\alpha,\sigma_2}(\tau_2) e^{-\beta H + \mu\beta\hat{n}}, \qquad Z = \operatorname{Tr} e^{-\beta H + \mu\beta\hat{n}}, \tag{4.6}$$

где $\mathcal{T}_\tau$ обозначает упорядочение в мнимом времени $0 \leqslant \tau \leqslant \beta$, а $d^\dagger_{\alpha,\sigma}(\tau)$ и $d_{\alpha,\sigma}(\tau)$ – операторы рождения и уничтожения в гейзенберговском представлении с гамильтонианом

[10]Заметим, что если считать индекс α нумерующим отдельный спин, то гамильтониан (4.4) описывает систему, в которой каждый спин взаимодействует со всеми остальными. Такая спиновая система называется системой Ван-дер-Ваальса [398, 399, 400, 401].

[11]Несмотря на то, что формально рассматривается задача об изолированной квантовой точке удобно ввести химический потенциал μ.

[12]Аналогичным образом можно было бы рассматривать функцию Грина в реальном времени. Так как в этой главе рассматривается равновесная ситуация, то оба подхода совершенно эквивалентны.

$H - \mu\hat{n}$. Удобно воспользоваться тем, что все три части: H_0, H_C и H_S, универсального гамильтониана коммутируют между собой. Воспользовавшись соотношениями

$$\begin{aligned} e^{\tau E_c(\hat{n}-q)^2} d_{\alpha,\sigma} e^{-\tau E_c(\hat{n}-q)^2} &= e^{-\tau E_c(2\hat{n}-2q+1)} d_{\alpha,\sigma}, \\ e^{\tau E_c(\hat{n}-q)^2} d^\dagger_{\alpha,\sigma} e^{-\tau E_c(\hat{n}-q)^2} &= d^\dagger_{\alpha,\sigma} e^{\tau E_c(2\hat{n}-2q+1)}, \end{aligned} \tag{4.7}$$

и следующим представлением для произвольной функции F от оператора полного числа частиц $\hat{n}$:

$$F(\hat{n}) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} F(k) \int\limits_{-\pi T}^{\pi T} \frac{d\phi_0}{2\pi T}\, e^{i\phi_0\beta(k-\hat{n})}, \tag{4.8}$$

получаем, что

$$G_{\alpha,\sigma_1,\sigma_2}(\tau_1,\tau_2) = \int\limits_{-\pi T}^{\pi T} \frac{d\phi_0}{2\pi T} \frac{\mathcal{Z}(\phi_0)}{Z} D(\tau_{12},\phi_0)\, \mathcal{G}_{\alpha,\sigma_1,\sigma_2}(\tau_1-\tau_2,\phi_0), \tag{4.9}$$

$$Z = \int\limits_{-\pi T}^{\pi T} \frac{d\phi_0}{2\pi T}\, D(0,\phi_0)\mathcal{Z}(\phi_0). \tag{4.10}$$

Здесь, так называемый пропагатор кулоновского бозона, имеет вид [402, 316, 403, 404, 405]

$$D(\tau,\phi_0) = e^{-E_c|\tau|(1-|\tau|/\beta)} \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{i\phi_0(\beta k+\tau)} e^{-\beta E_c(k-q+\tau/\beta)^2}. \tag{4.11}$$

Функция Грина $\mathcal{G}_{\alpha,\sigma_1,\sigma_2}(\tau,\phi_0)$ в правой части выражения (4.9) определена следующим образом

$$\mathcal{G}_{\alpha,\sigma_1,\sigma_2}(\tau,\phi_0) = \frac{1}{\mathcal{Z}(\phi_0)} \begin{cases} -\mathcal{K}_{\alpha,\sigma_1,\sigma_2}(-i\tau, -i\tau+i\beta), & \tau > 0, \\ \mathcal{K}_{\alpha,\sigma_1,\sigma_2}(-i\tau-i\beta, -i\tau), & \tau \leqslant 0, \end{cases} \tag{4.12}$$

где $\mathcal{Z}(\phi_0) = \operatorname{Tr}\exp(-\beta\mathcal{H})$, корреляционная функция

$$\mathcal{K}_{\alpha\sigma_1\sigma_2}(t_+,t_-) = \operatorname{Tr} e^{-it_+\mathcal{H}} d^\dagger_{\alpha,\sigma_2} e^{it_-\mathcal{H}} d_{\alpha,\sigma_1}, \tag{4.13}$$

а гамильтониан

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + H_S, \tag{4.14}$$

причём $\mathcal{H}_0$ определяется выражением (4.1), в котором $\epsilon_{\alpha,\sigma}$ заменено на $\tilde{\epsilon}_{\alpha,\sigma} = \epsilon_{\alpha,\sigma} - \mu + i\phi_0$ [13].

[13]Наличие мнимой части $i\phi_0\hat{n}$ в определении гамильтониана $\mathcal{H}$ не приводит к каким-либо трудностям.

Отметим, что в результате того, что все три составляющих универсального гамильтониана коммутируют друг с другом, удаётся почти полностью разделить зарядовые и спиновые степени свободы. Теперь необходимо решить задачу о электронах с обменным взаимодействием, в которой зарядовое взаимодействие проявляется в наличии мнимой части у химического потенциала равной $-i\phi_0$.

4.2.4 Преобразование Вея-Нормана-Колоколова

Используя тот факт, что $\mathcal{H}_0$ и H_S коммутируют, удобно воспользоваться представлением оператора эволюции в виде следующего функционального интеграла по векторному бозонному полю $\boldsymbol{\theta}$:

$$e^{\mp itJ\boldsymbol{S}^2} = \int \mathcal{D}[\boldsymbol{\theta}]\, e^{\pm\frac{i}{4J}\int\limits_0^t dt'\,\boldsymbol{\theta}^2} \prod_\alpha \mathcal{T} e^{i\int\limits_0^t dt'\,\boldsymbol{\theta}\boldsymbol{s}_\alpha}. \tag{4.15}$$

Здесь $\mathcal{T}$ обозначает временное упорядочение на отрезке $0 \leqslant t' \leqslant t$. Отметим, что наличие оператора временного упорядочения связано с тем, что операторы разных проекций спина не коммутируют друг с другом. С помощью (4.15) получаем [14]

$$\mathcal{K}_{\alpha,\sigma_1,\sigma_2}(t_+,t_-) = \prod_{p=\pm}\int \mathcal{D}[\boldsymbol{\theta}_p] e^{-\frac{ip}{4J}\int\limits_0^{t_p} dt'\,\boldsymbol{\theta}_p^2}\, \mathrm{Tr}\Big[e^{-it_+\mathcal{H}_0}\prod_\gamma \mathcal{A}_\gamma^{(+)} d^\dagger_{\alpha,\sigma_2} e^{it_-\mathcal{H}_0}\prod_\eta \mathcal{A}_\eta^{(-)} d_{\alpha,\sigma_1}\Big], \tag{4.16}$$

где использованы два векторных бозонных поля $\boldsymbol{\theta}_p$, $p=\pm$, и введено обозначение:

$$\mathcal{A}_\alpha^{(p)} = \mathcal{T}\exp\left(i\int\limits_0^{t_p} dt'\,\boldsymbol{\theta}_p\boldsymbol{s}_\alpha\right). \tag{4.17}$$

Именно наличие временного упорядочения в определении операторов $\mathcal{A}_\alpha^{(p)}$ делает решение задачи нетривиальным. Заметим, что в случае обменного взаимодействия изинговского типа временного упорядочения не возникает и задача в спиновом секторе может быть решена по аналогии с решением раздела 4.2.3 для зарядового сектора [405]. Для случая анизотропного обменного взаимодействия в работе [403] была построена теория возмущений около решения для обменного взаимодействия изинговского типа.

Для того, чтобы избежать работы с оператором временного упорядочения, удобно сделать преобразование Вея-Нормана-Колоколова [406, 407] от переменных $\boldsymbol{\theta_p}$ к новым пере-

[14] Мы не следим за правильностью нормировочных множителей, так как при вычислении функции Грина они сократятся. Для статистической суммы правильные нормировочные множители будут восстановлены сравнением с известными ответами в предельных случаях.

менным $\rho_p, \kappa_p^+, \kappa_p^-$ (см. Прил. Г.1) [15]:

$$\theta_p^z = \rho_p - 2\kappa_p^p \kappa_p^{-p}, \qquad \frac{\theta_p^x - ip\theta_p^y}{2} = \kappa_p^{-p}, \qquad \frac{\theta_p^x + ip\theta_p^y}{2} = -ip\dot{\kappa}_p^p + \rho_p \kappa_p^p - (\kappa_p^p)^2 \kappa_p^{-p}. \tag{4.18}$$

В новых переменных $\mathcal{T}$-упорядоченная экспонента становится равной произведению трёх обычных экспонент:

$$\mathcal{A}_\gamma^{(p)} = \exp\Big[p\hat{s}_\gamma^{-p}\kappa_p^p(t_p)\Big] \exp\left[i\hat{s}_\gamma^z \int\limits_0^{t_p} dt' \rho_p(t')\right] \exp\left[i\hat{s}_\gamma^p \int\limits_0^{t_p} dt' \kappa_p^{-p}(t') e^{-ip\int\limits_0^{t'} d\tau \rho_p(\tau)} dt'\right]. \tag{4.19}$$

Здесь $\hat{s}_\gamma^\pm = \hat{s}_\gamma^x \pm i\hat{s}_\gamma^y$, а поля κ_p^p удовлетворяют начальным условиям $\kappa_p^p(0) = 0$. Отметим, что выражения (4.18) и (4.19) справедливы для любого спинового оператора, а не только для оператора спина 1/2. До преобразования Вея-Нормана-Колоколова переменные $\boldsymbol{\theta}_p$ были действительными. При преобразовании необходимо сдвинуть контур интегрирования по $\boldsymbol{\theta}_p$ в комплексную плоскость. Такая процедура не нарушает сходимости вычисляемых интегралов. Для сохранения правильного числа степеней свободы (трёх) наложим следующие условия на новые переменные $\rho_p, \kappa_p^+, \kappa_p^-$: $\rho_p = -\overline{\rho_p}$ и $\kappa_p^+ = \overline{\kappa_p^-}$.

Для перехода к новым переменным в функциональном интеграле (4.16) необходимо вычислить якобиан преобразования (4.18), который оказывается равным (см. Прил. Г.1) [408]:

$$\mathcal{J}_{WNK} = \prod_{p=\pm} \exp\left(\frac{ip}{2}\int\limits_0^{t_p} dt\, \rho_p(t)\right). \tag{4.20}$$

В новых переменных выражение (4.16) для корреляционной функции $\mathcal{K}_{\alpha,\sigma_1,\sigma_2}(t_+, t_-)$ может быть записано следующим образом:

$$\mathcal{K}_{\alpha,\sigma_1,\sigma_2}(t_+, t_-) = \prod_{p=\pm} \int \mathcal{D}[\rho_p, \kappa_p^{\pm p}] e^{\frac{p}{4iJ}\int\limits_0^{t_p} dt(\rho_p^2 - 4ip\dot{\kappa}_p^p \kappa_p^{-p})} e^{\frac{ip}{2}\int\limits_0^{t_p} dt \rho_p(t)} \mathcal{C}_{\alpha,\sigma_1,\sigma_2}(t_+, t_-) \prod_{\gamma\neq\alpha} \mathcal{B}_\gamma(t_+, t_-). \tag{4.21}$$

[15] Это преобразование было предложено впервые в работе [406] для решения задачи о спине в заданном переменном во времени магнитном поле $\boldsymbol{\theta_p}$. Однако, для полного решения этой задачи необходимо найти выражения для $\rho_p, \kappa_p^+, \kappa_p^-$ при заданных значениях $\boldsymbol{\theta_p}$. В общем виде это сделать невозможно, так как требует решения уравнения Риккати. Независимо, в работе [407] преобразование (4.18) было использовано для случая, когда поле $\boldsymbol{\theta_p}$ динамическое (по нему производится функциональное интегрирование). В этом случае для перехода к новым переменным необходимо только вычисление якобиана этого преобразования. В дальнейшем преобразование Вея-Нормана-Колоколова было успешно применено для исследования динамики гейзенберговского ферромагнетика при низких температурах [408] и динамики спина в спиновом кластере (спиновая модель Ван-дер-Ваальса) [409, 410]. Также это преобразование было использовано при изучении локализации Андерсона в одномерной системе [411].

Величины $\mathcal{C}_{\alpha,\sigma_1,\sigma_2}$ и $\mathcal{B}_\gamma$ определяются через следы одночастичных операторов:

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_{\alpha\sigma_1\sigma_2} &= \mathrm{tr}\Big[e^{-i\hat{h}_\alpha t_+}\mathcal{A}_\alpha^{(+)}(t_+)d^\dagger_{\alpha,\sigma_2}e^{i\hat{h}_\alpha t_-}\mathcal{A}_\alpha^{(-)}(t_-)d_{\alpha,\sigma_1}\Big],\\ \mathcal{B}_\gamma &= \mathrm{tr}\Big[e^{-i\hat{h}_\gamma t_+}\mathcal{A}_\gamma^{(+)}(t_+)e^{i\hat{h}_\gamma t_-}\mathcal{A}_\gamma^{(-)}(t_-)\Big],\end{aligned} \tag{4.22}$$

где $\hat{h}_\alpha = \sum_\sigma \tilde{\epsilon}_{\alpha,\sigma}\hat{n}_{\alpha,\sigma}$. Выражение для $\mathcal{Z}$ может быть получено из уравнения (4.21) подстановкой величины $\mathcal{B}_\alpha$ вместо $\mathcal{C}_{\alpha,\sigma_1,\sigma_2}$:

$$\mathcal{Z} = \prod_{p=\pm}\int \mathcal{D}[\rho_p,\kappa_p^{\pm p}]e^{\frac{p}{4iJ}\int\limits_0^{t_p}dt(\rho_p^2-4ip\kappa_p^p\kappa_p^{-p})}e^{\frac{ip}{2}\int\limits_0^{t_p}dt\rho_p(t)}\prod_\gamma \mathcal{B}_\gamma(t_+,t_-). \tag{4.23}$$

Вычисляя следы одночастичных операторов с помощью соотношения $(\hat{s}_\gamma^\pm)^2=0$, справедливого для спина 1/2, находим, что

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_\gamma &= 1+e^{-2i\tilde{\epsilon}_\gamma(t_+-t_-)}+2e^{-i\tilde{\epsilon}_\gamma(t_+-t_-)}\cos\Big[\frac{1}{2}\sum_{p=\pm}\int\limits_0^{t_p}dt\tilde{\rho}_p(t)\Big]+\\ &+\prod_{p=\pm}e^{-ip\tilde{\epsilon}_\gamma t_p}\exp\Big[\frac{ip}{2}\int\limits_0^{t_p}dt\tilde{\rho}_p(t)\Big]\left[p\tilde{\kappa}_p^p(t_p)+i\int\limits_0^{t_{-p}}dt\,\tilde{\kappa}_{-p}^p(t)e^{ip\int\limits_0^t dt'\tilde{\rho}_{-p}(t')}\right].\end{aligned} \tag{4.24}$$

Здесь зеемановское расщепление учитывается введением переменных ($b=g_L\mu_B B$)

$$\tilde{\rho}_p(t)=\rho_p(t)-pb, \qquad \tilde{\kappa}_{\pm p}^p(t)=\kappa_{\pm p}^p(t)e^{\pm ibt}. \tag{4.25}$$

Аналогичные вычисления для $\mathcal{C}_{\alpha,\sigma_1,\sigma_2}$ приводят к следующим выражениям:

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_{\alpha\uparrow\uparrow} &= e^{-2i\tilde{\epsilon}_\alpha t_+}\sum_{p=\pm}e^{i\tilde{\epsilon}_\alpha t_p}e^{\frac{ip}{2}\int\limits_0^{t_p}dt\tilde{\rho}_p(t)},\\ \mathcal{C}_{\alpha\uparrow\downarrow} &= e^{-2i\tilde{\epsilon}_\alpha t_+}\Big[ie^{i\tilde{\epsilon}_\alpha t_+}e^{\frac{i}{2}\int\limits_0^{t_+}dt\tilde{\rho}_+(t)}\int\limits_0^{t_+}dt'\tilde{\kappa}_+^-(t')e^{-i\int\limits_0^{t'}d\tau\tilde{\rho}_+(\tau)}+e^{i\tilde{\epsilon}_\alpha t_-}\tilde{\kappa}_-^-(t')e^{-\frac{i}{2}\int\limits_0^{t_-}dt\tilde{\rho}_-(t)}\Big],\\ \mathcal{C}_{\alpha\downarrow\uparrow} &= e^{-2i\tilde{\epsilon}_\alpha t_+}\Big[-ie^{i\tilde{\epsilon}_\alpha t_-}e^{-\frac{i}{2}\int\limits_0^{t_-}dt\tilde{\rho}_-(t)}\int\limits_0^{t_-}dt'\tilde{\kappa}_-^+(t')e^{i\int\limits_0^{t'}d\tau\tilde{\rho}_-(\tau)}+e^{i\tilde{\epsilon}_\alpha t_+}\tilde{\kappa}_+^+(t')e^{\frac{i}{2}\int\limits_0^{t_+}dt\tilde{\rho}_+(t)}\Big],\\ \mathcal{C}_{\alpha\downarrow\downarrow} &= e^{-2i\tilde{\epsilon}_\alpha t_+}\sum_{p=\pm}e^{i\tilde{\epsilon}_\alpha t_p}e^{-\frac{ip}{2}\int\limits_0^{t_p}dt\tilde{\rho}_p(t)}\Big[1+ip\tilde{\kappa}_p^p(t_p)e^{ip\int\limits_0^{t_p}dt\tilde{\rho}_p(t)}\int\limits_0^{t_p}dt'\tilde{\kappa}_p^{-p}(t')e^{-ip\int\limits_0^{t'}d\tau\tilde{\rho}_p(\tau)}\Big].\end{aligned} \tag{4.26}$$

Отметим, что преобразование Вея-Нормана-Колоколова нарушает симметрию задачи относительного преобразования: $S_z\to -S_z$ и $b\to -b$. Например, как видно из (4.26), величина $\mathcal{C}_{\alpha\downarrow\downarrow}$ не может быть получена из $\mathcal{C}_{\alpha\uparrow\uparrow}$ изменением знака b. Конечно, в окончательных ответах, после взятия функционального интеграла по переменным $\rho_p,\kappa_p^+,\kappa_p^-$ симметрия восстанавливается.

4.2.5 Точное аналитическое выражение для спиновой восприимчивости

Оказывается, что функциональный интеграл по переменным $\rho_p, \kappa_p^+, \kappa_p^-$ в выражении (4.23) может быть вычислен точно. Делая вычисления аналогичные вычислениям работ [409, 410], находим (см. Прил. Г.2) статистическую сумму для гамильтониана $\mathcal{H}$:

$$\mathcal{Z} = \frac{1}{\sqrt{\pi\beta J}} e^{-\beta(b^2+J^2)/4J} \int\limits_{-\infty}^{\infty} dh\, \mathrm{sh}(h) \frac{\mathrm{sh}(bh/J)}{\mathrm{sh}(\beta b/2)} e^{-h^2/\beta J} \prod_{\gamma,\sigma} \left(1 + e^{-\beta\tilde{\epsilon}_\gamma - h\sigma}\right). \tag{4.27}$$

Подставляя (4.27) в выражение (4.10), получаем, что статистическая сумма для универсального гамильтониана (4.1) может быть записана в виде:

$$Z = \frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\pi J}} e^{-\beta(b^2+J^2)/4J} \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\beta E_c (n-q)^2} \int\limits_{-\pi/\beta}^{\pi/\beta} \frac{d\phi_0}{2\pi} e^{i\beta\phi_0 n} \int\limits_{-\infty}^{\infty} dh\, \mathrm{sh}(h) \frac{\mathrm{sh}(bh/J)}{\mathrm{sh}(\beta b/2)} e^{-h^2/\beta J} \times \\ \times \prod_{\sigma} e^{-\beta\Omega_0(\mu - i\phi_0 + h\sigma/\beta)}. \tag{4.28}$$

Переменная интегрирования h имеет смысл абсолютной величины вектора, равного $T\sum_{p=\pm} p \int_0^{t_p} dt\, \boldsymbol{\theta}_p(t)$ от векторного бозонного поля $\boldsymbol{\theta}$ [412]. Для интегрирования по переменным ϕ_0 и h воспользуемся следующим представлением для статистической суммы невзаимодействующих бесспиновых электронов в большом каноническом ансамбле:

$$e^{-\beta\Omega_0(\mu)} = \prod_{\gamma} \left(1 + e^{-\beta(\epsilon_\gamma - \mu)}\right) = \sum_{N=0}^{\infty} Z_N e^{\beta\mu N}. \tag{4.29}$$

Здесь статистическая сумма в каноническом ансамбле с N бесспиновыми электронами определяется интегралом Дарвина-Фаулера [413]:

$$Z_N \equiv \int\limits_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} e^{-i\theta N} \prod_{\gamma} \left(1 + e^{i\theta - \beta\epsilon_\gamma}\right). \tag{4.30}$$

Вычисляя интегралы по переменным ϕ_0 и h в выражении (4.28), получим представление в виде ряда для статистической суммы универсального гамильтониана:

$$Z = \sum_{n_\uparrow, n_\downarrow \in\mathbb{Z}} \frac{\mathrm{sh}\, \frac{\beta b(2m+1)}{2}}{\mathrm{sh}\, \frac{\beta b}{2}} Z_{n_\uparrow} Z_{n_\downarrow} e^{-\beta E_c (n-q)^2 + \beta\mu n + \beta J m(m+1)]}. \tag{4.31}$$

Здесь $n_\uparrow(n_\downarrow)$ – это число электронов с проекцией спина вверх (вниз), полное число электронов равно $n = n_\uparrow + n_\downarrow$, а $m = (n_\uparrow - n_\downarrow)/2$. В случае $m \geqslant 0$ ($m < 0$) полный спин

$S = m$ ($S = -m - 1$). Выражение (4.31) имеет прозрачный физический смысл. Величина $E_c(n-q)^2 - Jm(m+1)$ представляет энергию взаимодействия в состоянии с $n_\uparrow$ электронами с проекцией спина вверх и $n_\downarrow$ электронами с проекцией спина вниз. Множитель $\operatorname{sh}\left[\frac{\beta b(2m+1)}{2}\right] \Big/ \operatorname{sh}\left[\frac{\beta b}{2}\right] \equiv \sum_{S_z=-m}^{m} \exp(\beta b S_z)$ представляет статистическую сумму спина $S = m$ в присутствии зеемановского расщепления b.

Выражение (4.31) впервые было получено в работах [374, 392]. Интегральное представление (4.28), которое, как будет показано ниже, удобно для анализа при температурах $T \gg \delta$, было впервые получено в работе [414].

Из-за того, что оператор полного спина $\boldsymbol{S}$ коммутирует с универсальным гамильтонианом (4.1), зависимость спиновой восприимчивости от частоты имеет такой же вид как в случае спина в постоянном магнитном поле B, направленном вдоль оси z. Поперечная восприимчивость равна:

$$\chi_{+-}(\omega) = \frac{2g_L\mu_B M}{\omega - b + i0}, \qquad M = T\frac{\partial \ln Z}{\partial B}. \tag{4.32}$$

Дифференцируя выражение (4.31), получаем, что намагниченность M имеет следующий вид:

$$M = \frac{1}{Z}\sum_{n_\uparrow, n_\downarrow \in \mathbb{Z}} m B_m(m\beta b) \frac{\operatorname{sh}\frac{\beta b(2m+1)}{2}}{\operatorname{sh}\frac{\beta b}{2}} Z_{n_\uparrow} Z_{n_\downarrow} e^{-\beta E_c(n-q)^2 + \beta\mu n + \beta J m(m+1)]}, \tag{4.33}$$

где

$$B_m(x) = \frac{2m+1}{2m}\operatorname{cth}\left(\frac{2m+1}{2m}x\right) - \frac{1}{2m}\operatorname{cth}\frac{x}{2m} \tag{4.34}$$

обозначает функцию Бриллюэна. Продольная спиновая восприимчивость не зависит от частоты и равна

$$\chi_{zz} = \frac{\partial M}{\partial B}. \tag{4.35}$$

В дальнейшем (см. раздел 4.3), только продольная спиновая восприимчивость будет обсуждаться детально. При этом, как видно из выражений (4.32) и (4.35), поперечная восприимчивость может быть найдена из продольной интегрированием по магнитному полю.

4.2.6 Точное выражение для туннельной плотности состояний

Оказывается, что функциональный интеграл по переменным $\rho_p, \kappa_p^+, \kappa_p^-$ в выражении (4.21) также вычисляется точно. Проводя вычисления аналогичные вычислениям работы [409, 410], находим (см. Прил. Г.2):

$$\mathcal{K}_{\alpha\uparrow\uparrow} = e^{-2i\tilde{\epsilon}_{\alpha\uparrow}t_+} e^{\beta b/2} \frac{\sqrt{J^3}}{2\sqrt{\pi\beta}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} dh \, \mathrm{sh}(h) \sum_{p=\pm} e^{ipJt_p/4} e^{ip\tilde{\epsilon}_{\alpha\uparrow}t_p} \mathcal{W}\big(2h + ipJt_p, p\beta b/2, \beta J\big) \times \\ \times \prod_{\gamma\neq\alpha} \prod_{\sigma=\pm} \big(1 + e^{-\beta\tilde{\epsilon}_\gamma - \sigma h}\big) . \qquad (4.36)$$

Здесь было использовано, что $t_+ - t_- = -i\beta$, а функция $\mathcal{W}$ определена как

$$\mathcal{W}(x, y, z) = \frac{1}{4\,\mathrm{sh}\, y} \Big[\sum_{\sigma=\pm} \frac{\sigma\sqrt{\pi z}}{\mathrm{sh}\, y} \,\mathrm{erfi} \left(\frac{x - 2\sigma y}{2\sqrt{z}} \right) + 4e^{-y} \exp \left(\frac{x - 2y}{2\sqrt{z}} \right) \Big], \qquad (4.37)$$

где $\mathrm{erfi}(z) = (2/\sqrt{\pi}) \int\limits_0^z dt \, \exp(t^2)$ – функция ошибок от мнимого аргумента. Заметим, что выражение для $\mathcal{K}_{\alpha\downarrow\downarrow}$ может быть получено из уравнения (4.36) преобразованием $b \to -b$. С помощью выражений (4.9) и (4.11) получаем для $\tau > 0$, что

$$G_{\alpha,\uparrow\uparrow}(\tau) = \frac{1}{2Z} \frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\pi J}} e^{-J\tau/4} e^{(\beta-\tau)b/2} \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\beta E_c(n-q)^2 - E_c(2n-2q+1)\tau + i\phi_0\tau} \int\limits_{\pi/\beta}^{\pi/\beta} \frac{d\phi_0}{2\pi} e^{i\beta\phi_0 n} \times \\ \times \int\limits_{-\infty}^{\infty} dh \left[\prod_{\sigma=\pm} e^{-\beta\Omega_0(\mu - i\phi_0 + h\sigma/\beta)} \right] \Big\{ e^{J(2\tau-\beta)/4} e^{(1-\tau/\beta)h} \sum_{p=\pm} p\mathcal{W}\big(2ph + J\tau, \beta b/2, \beta J\big) - \\ - e^{-\beta b/2} e^{-h\tau/\beta} \sum_{p=\pm} p\mathcal{W}\big(2ph + J(\beta - \tau), -\beta b/2, \beta J\big) \Big\} G_\alpha^{(0)}(\tau, \mu - i\phi_0 + h/\beta), \quad (4.38)$$

где одночастичная мацубаровская функция Грина

$$G_\alpha^{(0)}(\tau, \mu) = -\frac{e^{(\epsilon_\alpha - \mu)\tau}}{1 + e^{\beta(\epsilon_\alpha - \mu)}}. \qquad (4.39)$$

Как и выше, интегрирование по ϕ_0 и h может быть выполнено с помощью представления

$$\prod_{\gamma\neq\alpha} \big(1 + e^{-\beta(\epsilon_\gamma - \mu)}\big) = \sum_{N=0}^{\infty} Z_N(\epsilon_\alpha) e^{\beta\mu N}, \qquad (4.40)$$

где $Z_N(\epsilon_\alpha)$ определяет каноническую статистическую сумму для N невзаимодействующих бесспиновых электронов при условии, что состояние α нельзя занимать, и выражается интегралом Дарвина-Фаулера [413] [16]:

$$Z_N(\epsilon_\alpha) \equiv \int\limits_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} e^{-i\theta N} \prod_{\gamma\neq\alpha} \big(1 + e^{i\theta - \beta\epsilon_\gamma}\big) . \qquad (4.41)$$

[16] Заметим, что отношение $[Z_N - Z_N(\epsilon_\alpha)]/Z_N$ определяет вероятность того, что состояние α заполнено. В пределе $N \to \infty$ это отношение стремится к функции Ферми-Дирака $f_F(\epsilon_\alpha)$. Величины $Z_N(\epsilon_\alpha)$ и Z_N удовлетворяют следующему тождеству: $Z_N = Z_N(\epsilon_\alpha) + e^{-\beta\epsilon_\alpha} Z_{N-1}(\epsilon_\alpha)$.

Интегрируя в выражении (4.38) по ϕ_0 и h и используя следующее общее соотношение между мацубаровской функцией Грина и туннельной плотностью состояний [415]

$$\nu_\sigma(\varepsilon) = -\frac{1}{\pi}\operatorname{ch}\frac{\beta\varepsilon}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} dt\, e^{i\varepsilon t}\sum_\alpha G_{\alpha\sigma\sigma}\left(it+\frac{\beta}{2}\right), \tag{4.42}$$

находим общее выражение для туннельной плотности состояний электронов с проекцией спина σ на квантовой точке, описываемой универсальным гамильтонианом (4.1):

$$\begin{aligned}\nu_\sigma(\varepsilon) = \frac{1+e^{-\beta\varepsilon}}{2Z}\sum_{\alpha,n_\uparrow,n_\downarrow}\frac{\operatorname{sh}\frac{\beta b(2m+1)}{2}}{\operatorname{sh}\frac{\beta b}{2}} Z_{n_\uparrow}Z_{n_\downarrow}e^{-\beta[E_c(n-q)^2-\mu n - Jm(m+1)]}\Biggl\{\left[\frac{Z_{n_\uparrow}(\epsilon_\alpha)}{Z_{n_\uparrow}}+\frac{Z_{n_\uparrow}(\epsilon_\alpha)}{(2m+1)Z_{n_\uparrow}}\right]\times \\ \times\Bigl[1-B_{-m-1}\left(\sigma(m+1)\beta b\right)\Bigr]\delta\Bigl(\varepsilon-\epsilon_{\alpha\sigma}+\mu-2E_c\Bigl(n-q+\frac{1}{2}\Bigr)+J\Bigl(m+\frac{3}{4}\Bigr)\Bigr)+ \\ +\left[\frac{Z_{n_\downarrow}(\epsilon_\alpha)}{Z_{n_\downarrow}}-\frac{Z_{n_\uparrow}(\epsilon_\alpha)}{(2m+1)Z_{n_\uparrow}}\right]\times \\ \times\Bigl[1+B_m\left(\sigma m\beta b\right)\Bigr]\delta\Bigl(\varepsilon-\epsilon_{\alpha\sigma}+\mu-2E_c\Bigl(n-q+\frac{1}{2}\Bigr)-J\Bigl(m+\frac{1}{4}\Bigr)\Bigr)\Biggr\}.\end{aligned} \tag{4.43}$$

Выражение (4.43) позволяет вычислить туннельную плотность состояний при заданном наборе одноэлектронных уровней энергии $\{\epsilon_\alpha\}$. Согласно (4.43), туннельная плотность состояний представляет сумму дельта-функций, соответствующих всем возможным процессам туннелирования электрона с энергией ε и спином σ на или с одноэлектронного уровня энергии $\epsilon_{\alpha\sigma}$. Множители $Z_n(\epsilon_\alpha)/Z_n$ учитывают вероятность того, что состояние α свободно. С помощью тождества $\sum_\alpha [Z_n - Z_n(\epsilon_\alpha)]/Z_n = n$ можно убедится, что выражение (4.43) удовлетворяет следующему правилу сумм:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\varepsilon\,\frac{\nu_\sigma(\varepsilon)}{1+\exp(\varepsilon/T)} = -\sigma T\frac{\partial \ln Z}{\partial b}+\frac{T}{2}\frac{\partial \ln Z}{\partial \mu}. \tag{4.44}$$

Результат (4.43) впервые был получен в работе [416]. Для случая нулевого магнитного поля, $b=0$, этот результат был впервые получен в работе [414]. В пределе $b=J=0$, выражение (4.43) переходит в результат для туннельной плотности состояний, найденный в работе [404].

4.3 Продольная спиновая восприимчивость

4.3.1 Введение

В этом разделе будет рассмотрено поведение продольной спиновой восприимчивости, усреднённой по реализациям одноэлектронных уровней энергии, с изменением магнитного поля и температуры в интервале $\delta \ll T \ll E_{\rm Th}$.

4.3.2 Влияние флуктуаций одночастичных уровней энергии на продольную спиновую восприимчивость

В дальнейшем величину

$$\chi(T, b) = T \frac{\partial^2 \ln Z}{\partial b^2}, \tag{4.45}$$

которая только множителем отличается от продольной спиновой восприимчивости (4.35), $\chi_{zz} = (g_L \mu_B)^2 \chi(T, b)$, будем называть просто спиновой восприимчивостью. При $T \gg \delta$ для её вычисления удобно пользоваться интегральным представлением (4.28) для статистической суммы. Интегрируя по ϕ_0 методом перевала, который оправдан в силу большого параметра $T/\delta \gg 1$ [402, 316], находим, что $Z = Z_C Z_S$, где

$$Z_C = \sqrt{\frac{\beta\Delta}{4\pi}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\beta E_c (n-q)^2 + \beta\mu_0 n - 2\beta\Omega_0(\tilde{\mu})}, \tag{4.46}$$

$$Z_S = \frac{1}{\sqrt{\pi\beta J}} e^{-\beta(J^2+b^2)/4J} \int\limits_{-\infty}^{\infty} dh\, \mathrm{sh}(h) \frac{\mathrm{sh}(bh/J)}{\mathrm{sh}(\beta b/2)} e^{-h^2/\beta J} \prod_\sigma e^{\beta[\Omega_0(\tilde{\mu}) - \Omega_0(\tilde{\mu} + h\sigma/\beta)]}. \tag{4.47}$$

Здесь $\tilde{\mu} = \mu + \mu_0$, а величина μ_0 определяется решением уравнения [17]

$$q = -2 \frac{\partial \Omega_0(\mu + \mu_0)}{\partial \mu}. \tag{4.48}$$

Таким образом, при $T \gg \delta$ зарядовая и спиновая часть задачи полностью разделяются. Статистическая сумма в отсутствие обменного взаимодействия и магнитного поля равна Z_C. Величина Z_S определяет вклад в статистическую сумму за счёт обменного взаимодействия и магнитного поля. Нормировка выбрана таким образом, что при $J = b = 0$ было $Z_S = 1$. В уравнении (4.46), величина

$$\Delta = -\left[\frac{\partial^2 \Omega_0(\tilde{\mu})}{\partial \tilde{\mu}^2}\right]^{-1} \tag{4.49}$$

[17] Можно найти, что $\mu_0 \approx \Delta(q + 2\partial\Omega_0(\mu)/\partial\mu)/2$, где Δ определена уравнением (4.49).

обозначает обратную термодинамическую плотность состояний на уровне Ферми для данной реализации одночастичных уровней энергии. Так как величина Z_C не зависит от магнитного поля и обменного взаимодействия, то она не влияет на спиновую восприимчивость. Функция $\beta\sum_\sigma[\Omega_0(\tilde\mu)-\Omega_0(\tilde\mu+h\sigma/\beta)]$ в выражении (4.47) является случайной функцией переменной h из-за флуктуаций одночастичной плотности состояний $\nu_0(E)=\sum_\alpha\delta(E+\tilde\mu-\epsilon_\alpha)$. Если выполняется условие $h^2\ll\exp(\beta\tilde\mu)$, то

$$\beta\sum_\sigma\Big[\Omega_0(\tilde\mu)-\Omega_0(\tilde\mu+h\sigma/\beta)\Big]=\frac{h^2}{\beta\delta}-V(h), \tag{4.50}$$

где случайная функция

$$V(h)=-\int\limits_{-\infty}^{\infty}dE\delta\nu_0(E)\ln\left[1+\frac{\mathrm{sh}^2(h/2)}{\mathrm{ch}^2(\beta E/2)}\right]. \tag{4.51}$$

зависит от отклонения $\delta\nu_0(E)$ одночастичной плотности состояний $\nu_0(E)$ от среднего значения $1/\delta=\overline{1/\Delta}$ [18].

С помощью уравнения (4.51) выражение (4.47) может быть записано в следующем виде:

$$Z_S=\frac{1}{\sqrt{\pi J\beta}}\frac{\Xi(b/J,\beta J_\star)}{\mathrm{sh}(\beta b/2)}\exp\left(-\beta\frac{J^2+b^2}{4J}\right),\qquad \Xi(x,y)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}dh\,\mathrm{sh}(xh)e^{h-h^2/y-V(h)}. \tag{4.52}$$

Здесь, напомним, $J_\star=J\delta/(\delta-J)$ обозначает перенормированную обменную энергию. Около стоунеровской неустойчивости, $\delta-J\ll\delta$, величина полного спина в основном состоянии оказывается порядка $\delta/[2(\delta-J)]$ [328], и поэтому перенормированная обменная энергия существенно превышает обменную энергию J. В дальнейшем в этой главе, условие $\delta-J\ll\delta$ будет всегда считаться выполненным.

Если пренебречь $V(h)$ в уравнении (4.52), то типичное значение h, определяющее интеграл, будет порядка $\max\{\sqrt{y},y,yx\}$. Тогда выражение (4.51) справедливо, если выполняются следующие условия: $\beta J_\star\max\{1,1/\sqrt{\beta J_\star},b/J\}\ll\exp(\beta\tilde\mu)$.

Хорошо известно [417], что несмотря на негауссову статистику одночастичной плотности состояний $\nu_0(E)$, функция типа $V(h)$, которая при $\max\{|h|,T\}\gg\delta$ определяется большим количеством одночастичных уровней энергии (порядка $\max\{|h|,T\}/\delta\gg1$), является гауссовой случайной величиной. Её статистика полностью определяется парной корреляционной функцией $C(h_1,h_2)=\overline{V(h_1)V(h_2)}$. Существует точное соотношение (см. Прил. Г.3):

$$C(h_1,h_2)=L(h_1+h_2)+L(h_1-h_2)-2L(h_1)-2L(h_2). \tag{4.53}$$

[18] Заметим, что величины δ и $\overline{\Delta}$ отличаются на величину порядка $\delta^2/T^2\ll1$ (см. (4.62)), чем в дальнейшем будет пренебрегаться.

При $T \gg \delta$ поведение функции $L(h)$ зависит от значения аргумента:

$$L(h) = \frac{h^2}{\pi^2 \boldsymbol{\beta}} \begin{cases} c_3 h^2/24, & |h| \ll 1, \\ \ln(|h|/2) + c_2 - 3/2, & |h| \gg 1. \end{cases} \tag{4.54}$$

Здесь параметр $\boldsymbol{\beta} = 2$ для унитарного класса симметрии (класс A) и $\boldsymbol{\beta} = 1$ для ортогонального класса симметрии (класс AI). Численная константа c_2 определена в уравнении (2.103), а

$$c_3 = \int\limits_0^\infty \frac{d\omega}{\omega^2} \left\{ \frac{1}{3} - \frac{\omega \operatorname{cth} \omega - 1}{\operatorname{sh}^2 \omega} \right\} \approx 0.37. \tag{4.55}$$

Несмотря на то, что $V(h)$ – это гауссова случайная величина, точное вычисление $\overline{\ln \Xi(x,y)}$ для произвольных значений x и y представляет сложную нерешенную математическую задачу (см., например [418]). Разложение величины $\overline{\ln \Xi(x,y)}$ до первого порядка по корреляционной функции C даёт:

$$\begin{aligned} \overline{\ln \Xi(x,y)} = \ln \Xi_0(x,y) + \frac{1}{4} \sum_\sigma \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{\sqrt{\pi}} e^{-u^2} \Bigg\{ \Big[\sigma \operatorname{cth} \frac{xy}{2} + 1 \Big] \Big[L\big(y(1+x\sigma) + 2u\sqrt{y}\big) - \\ - L\big(y(1+x\sigma) + u\sqrt{2y}\big) \Big] - L\big(u\sqrt{2y}\big) - \frac{1}{2\operatorname{sh}^2(xy/2)} \Big[L\big(y(1+x\sigma) + u\sqrt{2y}\big) - \\ - L\big(y + u\sqrt{2y}\big) - L\big(yx\sigma + u\sqrt{2y}\big) + L\big(u\sqrt{2y}\big) \Big] \Bigg\}, \end{aligned} \tag{4.56}$$

где

$$\Xi_0(x,y) = \sqrt{\pi y}\, e^{y(1+x^2)/4} \operatorname{sh} \frac{xy}{2}. \tag{4.57}$$

Провести точное интегрирование по u в уравнении (4.56) невозможно, так как известны только аналитические выражения (4.54) для асимптотического поведения функции L. Рассмотрение областей параметров x и y, в которых аргументы функций L в выражении (4.56) либо малы, либо велики по сравнению с единицей, приводит к диаграмме на рисунке 4.3. Поведение $\overline{\ln \Xi(x,y)}$ в каждой из обозначенных на этом рисунке областей имеет свои особенности.

Область I: $J_\star \max\{1, b/J\} \ll T$

В области I, $\max\{y, xy\} \ll 1$, аргументы всех функций L в правой части уравнения (4.56) много меньше единицы. Производя интегрирование по u с помощью выражения (4.54),

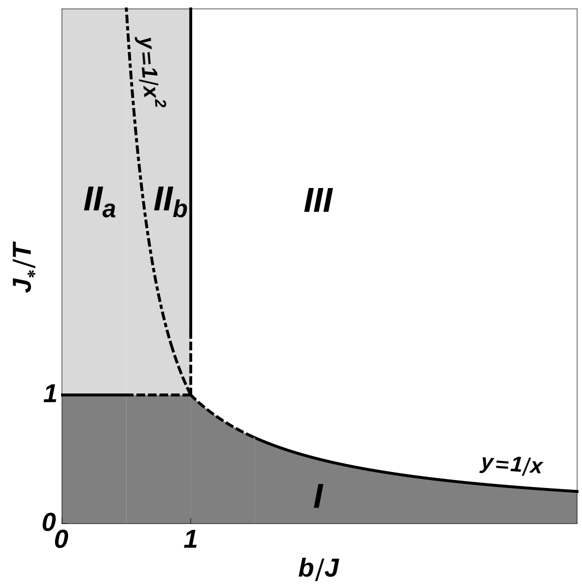

Рисунок 4.3: Различные области поведения спиновой восприимчивости на плоскости безразмерных параметров b/J и $J_\star/T$. Напомним, что предполагается выполнение условия $T \gg \delta$.

находим

$$\overline{\ln \Xi(x,y)} = \ln \Xi_0(x,y) + \frac{c_2}{96\boldsymbol{\beta}\pi^2}\Big[30y^2 + 12y^3 + 12x^2y^3(1+y/2) - x^4y^6/6\Big]. \tag{4.58}$$

Используя уравнения (4.45) и (4.52), получаем следующее выражение для средней спиновой восприимчивости в области I ($J_\star \max\{1, b/J\} \ll T$) [19]:

$$\overline{\chi(T,b)} = \frac{J_\star}{2J\delta}\left\{1 + \frac{J_\star}{6T} + \frac{c}{\boldsymbol{\beta}}\frac{J_\star^2}{T^2}\Big[1 + \frac{J_\star}{2T}\Big] - \frac{J_\star^3 b^2}{120T^3J^2}\Big[1 + \frac{10c}{\boldsymbol{\beta}}\frac{J_\star^2}{T^2}\Big]\right\}, \tag{4.59}$$

где $c = c_3/2\pi^2 \approx 0.02$. Выражение (4.59) представляет собой спиновую восприимчивость Паули ($J_\star/2J\delta$), усиленную обменным взаимодействием, с малыми поправками, зависящими от температуры и магнитного поля. Поправки, связанные с флуктуациями одночастичных уровней энергии, оказываются малы. Отметим, что результат (4.59) впервые был получен в работах [414, 416].

Выражение (4.59) может быть получено более физически прозрачным способом. Так как в области I типичное значение переменной h в интеграле в уравнении (4.52) много

[19] Спиновая восприимчивость при $b = 0$ изучалась впервые в работе [328], где при $T \gg J_\star$ был получен следующий ответ: $\overline{\chi_{KAA}(T,0)} = [(J_\star/(2J\delta)][2/3 + \sqrt{\pi J_\star/(36T)} + c_{KAA}J_\star/T]$, $c_{KAA} = (4-\pi)/6 + ((8/\pi^2)\ln 2 - 0.3712)/(6\boldsymbol{\beta})$, который не совпадает с выражением (4.59). На наш взгляд причина такого расхождения состоит в том, что в работе [328] для области $J_\star \ll T$, где типичная величина $|h|$ много меньше единицы, было использовано асимптотическое выражение для $L(h)$ при $|h| \gg 1$.

меньше единицы, то случайную функцию $V(h)$ можно разложить в ряд по h:

$$V(h) \approx \left(\frac{1}{\Delta} - \frac{1}{\delta}\right) T h^2, \qquad |h| \ll 1. \tag{4.60}$$

Затем, производя интегрирование по h в выражении (4.52), находим, что

$$Z_S = \frac{\sqrt{\mathcal{J}}}{\sqrt{J}} \frac{\mathrm{sh}[\mathcal{J} b/(2JT)]}{\mathrm{sh}(b/2T)} e^{(\mathcal{J}-J)(J^2+b^2)/4J^2T}, \tag{4.61}$$

где $\mathcal{J} = J\Delta/(\Delta - J)$ обозначает перенормированное обменное взаимодействие для данной реализации одночастичных уровней энергии. При $T \gg \delta$ флуктуации Δ малы и гауссовы, причём (см. Прил. Г.3)

$$\overline{(\Delta - \delta)^2} = \frac{c}{\boldsymbol{\beta}} \frac{\delta^4}{T^2}. \tag{4.62}$$

Для того, чтобы избежать стоунеровской неустойчивости перенормированная обменная энергия $\mathcal{J}$ должна быть положительной при данной реализации одночастичных уровней энергии. Так как рассматривается режим вблизи стоунеровской неустойчивости, $J_\star \gg \delta \gtrsim J$, то для выполнения условия $\mathcal{J} > 0$ флуктуации Δ должны удовлетворять условию:

$$\overline{\left(\frac{1}{\Delta} - \frac{1}{\delta}\right)^2} \ll \overline{\left(\frac{1}{\mathcal{J}}\right)^2}. \tag{4.63}$$

Используя уравнение (4.62), находим, что условие (4.63) эквивалентно условию $T \gg J_\star$. Если это условие выполнено, что происходит в области I, флуктуации одночастичных уровней энергии малы и не могут привести к стоунеровской неустойчивости. Разлагая выражение (4.61) до четвёртого порядка по b и усредняя по флуктуациям с помощью соотношения $\overline{\mathcal{J}^n} = J_\star^n[1 + n(n+1)cJ_\star^2/(2\boldsymbol{\beta}T^2)]$, опять получаем результат (4.59).

Область II: $\delta \ll T \ll J_\star$ **и** $b \ll J$

В области II, $y \gg 1$ и $x \ll 1$, аргументы всех функций L в уравнении (4.56) много больше единицы. Однако, поведение некоторых вкладов в интеграл по u в уравнении (4.56) разное в зависимости от того $x^2 y \gg 1$ или $x^2 y \ll 1$. Поэтому, удобно разделить область II на две части.

Область II_a*:* $\delta \ll T \ll J_\star$ *и* $b^2/J^2 \ll T/J_\star$

В области II_a интегрирование по u в уравнении (4.56) можно провести, разлагая функцию L до второго порядка по u или используя следующее асимптотическое представление

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{\sqrt{\pi}} e^{-u^2} L(zu) \approx \frac{z^2}{2\boldsymbol{\beta}\pi^2}\left[\ln\frac{z}{4} + c_2 - \frac{1+\gamma_E}{2}\right], \tag{4.64}$$

верное для $z \gg 1$. Тогда получаем, что

$$\overline{\ln \Xi(x,y)} = \ln \Xi_0(x,y) + \frac{1}{2\boldsymbol{\beta}\pi^2}\Big[xy \operatorname{cth}\frac{xy}{2} - \frac{x^2y^2}{4\operatorname{sh}^2(xy/2)}(\ln 2y + \gamma_E)\Big]. \tag{4.65}$$

Используя уравнения (4.52) и (4.65), находим среднюю спиновую восприимчивость в области II_a ($b^2/J^2 \ll T/J_\star \ll 1$):

$$\overline{\chi(T,b)} = \frac{T}{b^2}\Big[1 - \frac{J_\star^2 b^2}{4J^2T^2\operatorname{sh}^2(J_\star b/2JT)}\Big] + \frac{T}{2\boldsymbol{\beta}\pi^2}\frac{\partial^2}{\partial b^2}\left[\frac{J_\star b}{JT}\operatorname{cth}\frac{J_\star b}{2TJ} - \frac{J_\star^2 b^2\Big(\ln(2J_\star/T) + \gamma_E\Big)}{4J^2T^2\operatorname{sh}^2(J_\star b/2JT)}\right]. \tag{4.66}$$

В пределе очень слабых магнитных полей, $b \ll JT/J_\star$, можно пренебречь слабой зависимостью спиновой восприимчивости от магнитного поля. Тогда, из уравнения (4.66) получаем следующий результат для средней спиновой восприимчивости в нулевом магнитном поле:

$$\overline{\chi(T,0)} = \frac{(J_\star/J)^2}{12T}\left\{1 + \frac{1}{\boldsymbol{\beta}\pi^2}\left[\ln\frac{2J_\star}{T} + \gamma_E + 2\right]\right\}. \tag{4.67}$$

Этот результат справедлив до тех пор, пока оправдано разложение $\overline{\ln \Xi(x,y)}$ по степеням парной корреляционной функции $C(h_1,h_2)$. Можно проверить (см. Прил. Г.4), что такое разложение контролируется малым параметром $J_\star/(\boldsymbol{\beta}\pi^2 T) \ll 1$. Поэтому, строго говоря, результат (4.67) справедлив при температурах, удовлетворяющих условию $1 \ll J_\star/T \ll \boldsymbol{\beta}\pi^2$. Как видно из выражения (4.67), флуктуации одночастичных уровней энергии вблизи стоунеровской неустойчивости, $\delta - J \ll \delta$, увеличивают среднюю спиновую восприимчивость.

При больших магнитных полях, $JT/J_\star \ll b \ll J\sqrt{T/J_\star}$, средняя спиновая восприимчивость равна

$$\overline{\chi(T,b)} = \frac{T}{b^2}\left[1 - \frac{J_\star^2 b^2}{J^2T^2}\Big(1 + \frac{1}{2\boldsymbol{\beta}\pi^2}\frac{J_\star^2 b^2}{J^2T^2}\Big)e^{-J_\star b/JT}\right]. \tag{4.68}$$

Как видно, спиновая восприимчивость подавлена по сравнению с восприимчивостью (4.67) в нулевом магнитном поле. При этом вклад, связанный с флуктуациями одночастичных уровней энергии, экспоненциально мал: $\propto \exp(-J_\star b/JT)$.

Область II_b: $\delta \ll T \ll J_\star$ и $J_\star/T \ll b^2/J^2 \ll 1$

Рассмотрим теперь область промежуточных магнитных полей: $1/y \ll x^2 \ll 1$. Производя интегрирование по u в уравнении (4.56) аналогично тому, как это было сделано выше, находим, что

$$\overline{\ln \Xi(x,y)} = \ln \Xi_0(x,y) + \frac{x^2y^2}{\boldsymbol{\beta}\pi^2}\left(\ln x - \frac{3}{2}\right)e^{-xy}. \tag{4.69}$$

Отсюда, для средней спиновой восприимчивости в области II$_b$ ($T/J_\star \ll b^2/J^2 \ll 1$) получаем следующий ответ:

$$\overline{\chi(T,b)} = \frac{J_\star}{2J\delta}\left\{1 - \frac{2J_\star}{T}e^{-J_\star b/JT} + \frac{2J_\star}{\boldsymbol{\beta}\pi^2 T}\left(\ln\frac{b}{J} - \frac{3}{2}\right)e^{-J_\star b/JT}\right\}. \tag{4.70}$$

Заметим, что результаты (4.67), (4.68) и (4.70) впервые были получены в работе [416].

Область III: $\delta \ll T \ll bJ_\star/J$ **и** $J \ll b$

Так же как это было в области II, в области III ($y \gg 1/x$ и $x \gg 1$) аргументы всех функций L в уравнении (4.56), как правило, много больше единицы. Для вычисления интеграла по u в уравнении (4.56) можно разложить все функции L по u в ряд до второго порядка, кроме функции $L(u\sqrt{2y})$. В последнем случае интегрирование по u проводится с помощью соотношения (4.64). Тогда получаем, что

$$\overline{\ln \Xi(x,y)} = \ln \Xi_0(x,y) + \frac{y}{2\boldsymbol{\beta}\pi^2}\left(\ln\frac{xy}{2} + c_2\right). \tag{4.71}$$

Средняя спиновая восприимчивость в области III ($T/J_\star \ll b/J$ и $J \ll b$) принимает вид

$$\overline{\chi(T,b)} = \frac{J_\star}{2J\delta}\left(1 - \frac{1}{\boldsymbol{\beta}\pi^2}\frac{J^2}{b^2}\right). \tag{4.72}$$

Здесь не выписаны члены экспоненциально малые по магнитному полю. Спиновая восприимчивость (4.72) представляет собой восприимчивость Паули, усиленную обменным взаимодействием, с малыми поправками из-за флуктуаций одночастичных уровней энергии. Малость флуктуационных поправок указывает на то, что разложение до первого порядка $\overline{\ln \Xi(x,y)}$ по степеням парной корреляционной функции $C(h_1,h_2)$ оправдано во всей области III. Отметим, что если игнорировать флуктуационную поправку, то результат (4.72) совпадает с результатом вычисления спиновой восприимчивости для $T = 0$ в работе [376]. Результ (4.72) впервые был получен в работе [416].

4.3.3 Качественное объяснение влияния флуктуаций одночастичных уровней энергии на спиновую восприимчивость

Спиновая восприимчивость в нулевом магнитном поле

Происхождение логарифма в выражении (4.67) имеет простой физический смысл. Несмотря на то, что результат (4.67) был получен при температурах $T \gg \delta$, рассмотрим предел

$T = 0$. Тогда, переход между основными состояниями со спином S и $S+1$ происходит при выполнении условия

$$E_{S+1} - E_S = J(2S+2), \tag{4.73}$$

где E_S обозначает одночастичный вклад в энергию основного состояния для данной реализации одночастичных уровней энергии. Разность энергий $E_{S+1} - E_S$ можно записать в виде

$$E_{S+1} - E_S = \delta(2S+1) + \Delta E_{2S}, \tag{4.74}$$

где ΔE_{2S} – это флуктуация полосы энергии, в которой в среднем находится $2S$ уровней. Величина ΔE_{2S} может быть оценена как

$$\Delta E_{2S} = \delta\, \Delta n_{2S}. \tag{4.75}$$

Здесь Δn_{2S} – это уже флуктуация числа уровней в полосе энергии, в которой в среднем находится $2S$ уровней. Тогда, из выражения (4.74) вблизи стоунеровской неустойчивости находим

$$S = \frac{\delta}{2(\delta - J)}\Big[1 - \Delta n_{2S}\Big]. \tag{4.76}$$

Отсюда для средней спиновой восприимчивости при низких температурах получаем

$$\overline{\chi(T,0)} = \frac{\overline{S(S+1)}}{3T} \sim \frac{J_\star^2}{12TJ^2}\Big[1 + \overline{(\Delta n_{J_\star/J})^2}\Big]. \tag{4.77}$$

Из теории случайных матриц хорошо известно [417], что

$$\overline{(\Delta n_{2S})^2} = \frac{2}{\boldsymbol{\beta}\pi^2}\Big[\ln 2S + \text{ const}\Big]. \tag{4.78}$$

В итоге получаем следующую оценку для средней спиновой восприимчивости при $T \ll \delta$:

$$\overline{\chi(T,0)} \sim \frac{J_\star^2}{12TJ^2}\Big[1 + \frac{2}{\boldsymbol{\beta}\pi^2}\Big(\ln\frac{J_\star}{J} + \text{const}\Big)\Big]. \tag{4.79}$$

Как видно, оценка (4.79), полученная из качественных соображений для $T \ll \delta$, напоминает результат (4.67), справедливый при высоких температурах $T \gg \delta$. Обратим внимание, что между ними есть отличие в два раза в множителе перед логарифмом. Это отличие связано с тем, что качественные аргументы соответствуют взятию интеграла по h в уравнении (4.52) методом перевала. При таком вычислении не учитываются вклады типа $L(u\sqrt{2y})$ в уравнении (4.56).

Спиновая восприимчивость в сильном магнитном поле, $b \gg J$

Результат (4.72) может быть также получен из простых физических рассуждений. Рассмотрим как и выше случай нулевой температуры, $T = 0$. Тогда, разность между одночастичными вкладами в энергию основного состояния в уравнении (4.73) может быть записана как

$$E_{S+1} - E_S = \delta(2S+1) - b + \Delta E_{2S}. \tag{4.80}$$

Отсюда вблизи стоунеровской неустойчивости находим, что

$$S = \frac{1}{2(\delta - J)}\Big[b - \delta\,\Delta n_{2S}\Big]. \tag{4.81}$$

Решая это уравнение относительно S, получаем следующую оценку для восприимчивости:

$$\overline{\chi(T,b)} \sim \frac{\partial \overline{S}}{\partial b} = \frac{J_\star}{2J\delta}\left[1 + \frac{J_\star^2}{2\delta^2}\frac{d^2\overline{(\Delta n_z)^2}}{dz^2}\right]\Bigg|_{z=J_\star b/J\delta}. \tag{4.82}$$

С учётом формулы (4.78) полученное выражение в точности совпадает с результатом (4.72). Этот факт указывает на то, что результат (4.72) остаётся верным и при $T = 0$, если магнитное поле $b \gg J, \delta$.

4.3.4 Обсуждение результатов

Как уже отмечалось, результат (4.67) справедлив, строго говоря, если выполнено условие $1 \ll J_\star/T \ll \boldsymbol{\beta}\pi^2$. Однако, приведённые выше качественные аргументы и более детальные вычисления (см. Прил. Г.4) для $\overline{\chi(T,0)}$ указывают, что результат (4.67) верен в более широкой области температур. Можно ожидать, что при $J_\star \gg T \gg \delta$ средняя спиновая восприимчивость в нулевом магнитном поле может быть записана в виде

$$\overline{\chi(T,0)} = \frac{(J_\star/J)^2}{12T}\left\{1 + \frac{1}{\boldsymbol{\beta}\pi^2}\left[\ln\frac{J_\star}{T} + f\Big(\frac{J_\star}{\boldsymbol{\beta}\pi^2 T}\Big)\right]\right\}, \tag{4.83}$$

где функция $f(x)$ равна постоянной в обоих предельных случаях малых ($x \ll 1$) и больших ($x \gg 1$) аргументов. В частности, выражение (4.67) означает, что $f(x) = \gamma_E + 2 + \ln 2 + \cdots$ при $x \ll 1$.

На рисунке 4.4 представлено сравнение средней спиновой восприимчивости для нулевой температуры и нулевого магнитного поля, оценённой из выражения (4.67) с $T = \delta$, с результатами численного расчёта работы [328].

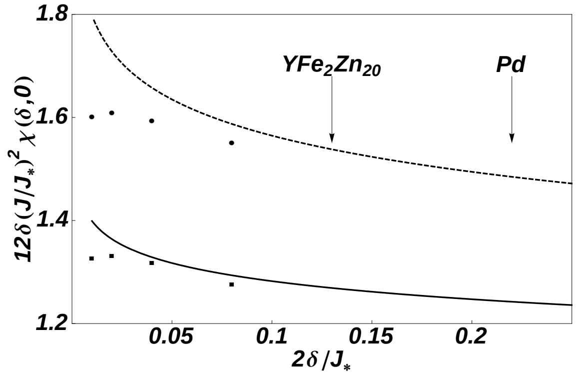

Рисунок 4.4: Сравнение между средней спиновой восприимчивостью при низких температурах и нулевом магнитном поле, оценённой из теоретического результата (4.67) с $T = \delta$ (сплошная кривая для $\boldsymbol{\beta} = 2$ и штриховая кривая для $\boldsymbol{\beta} = 1$), и из численного расчёта работы [328] (квадраты для $\boldsymbol{\beta} = 2$ и круги для $\boldsymbol{\beta} = 1$).

В области I (см. Рис. 4.3) мезоскопическая стоунеровская неустойчивость проявляется в виде малых, зависящих от температуры и магнитного поля поправок к спиновой восприимчивости Паули, усиленной обменным взаимодействием. Влияние флуктуаций одночастичных уровней энергии на спиновую восприимчивость мало. В областях II_b и III мезоскопическая стоунеровская неустойчивость подавляется магнитным полем. Спиновая восприимчивость имеет вид восприимчивости Паули, усиленной обменным взаимодействием, с малыми поправками из-за наличия флуктуаций одночастичных уровней энергии. Заметим, чтобы подавить проявление мезоскопической стоунеровской неустойчивости, требуется маленькое магнитное поле $b \sim (J/J_\star)T \ll J, T$. Это связано с тем, что по аналогии с обменным усилением g-фактора в ферми-жидкости характерная величина зеемановского расщепления определяется величиной $J_\star b/J$, а не просто b как в одночастичной задаче. В области II_a мезоскопическая стоунеровская неустойчивость проявляется в том, что средняя спиновая восприимчивость ведёт себя согласно закону Кюри. При этом флуктуации одночастичных уровней энергии приводят к тому, что квадрат эффективного спина в законе Кюри логарифмически зависит от температуры.

Отметим, что в этом разделе вычислялась средняя спиновая восприимчивость. При этом флуктуации спиновой восприимчивости из-за флуктуаций одночастичных уровней энергии не обсуждались. Можно ожидать, что во всех областях, кроме области II_a, флуктуации спиновой восприимчивости малы. В области II_a относительная флуктуация $(\overline{\chi^2} - (\overline{\chi})^2)/(\overline{\chi})^2$ оказывается порядка $(\ln J_\star/T)/(\boldsymbol{\beta}\pi^2)$. Это указывает на то, что в области II_a флуктуации спиновой восприимчивости достаточно существенны и, поэтому, имеет смысл вычисление всей функции распределения для спиновой восприимчивости.

4.4 Туннельная плотность состояний

4.4.1 Введение

В этом разделе будет рассматриваться поведение туннельной плотности состояний, усреднённой по реализациям одноэлектроных уровней энергии, с изменением магнитного поля и температуры в интервале $\delta \ll T \ll E_{\mathrm{Th}}$. Так как влияние обменного взаимодействия наиболее выражено вблизи стоунеровской неустойчивости, $\delta - J \ll \delta$, то именно этот режим будет изучаться в этом разделе.

4.4.2 Туннельная плотность состояний в магнитном поле без учёта флуктуаций одночастичных уровней энергии

Для туннельной плотности состояний можно выделить те же самые области различного поведения, что и для спиновой восприимчивости (см. Рис. 4.3). Как это обсуждалось в предыдущем разделе, флуктуации одночастичных уровней энергии существенны, только в области II_a. Поэтому ниже сначала будет обсуждаться поведение туннельной плотности состояний без учёта флуктуаций. Влияние флуктуаций будет учтено отдельно.

Учитывая, что для температур $\delta \ll T \ll \mu$, одночастичная функция Грина (4.39) может быть записана в следующем виде:

$$\sum_{\alpha} G_{\alpha}^{(0)}(\tau, \mu) = -\frac{\pi T}{\delta \, \sin(\pi T \tau)}, \tag{4.84}$$

можно провести интегрирование по ϕ_0, h и t в выражении (4.42), определяющим туннельную плотность состояний через мацубаровскую функцию Грина (4.38), и получить [20]

$$\begin{aligned}\frac{\nu_\sigma(\varepsilon)}{\nu_0} = & \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\beta E_c (n-q)^2} \sum_{p=\pm} \Biggl\{ f_F\Bigl(p\varepsilon - 2p\Omega_n^{-p}\Bigr) + \frac{\sqrt{\pi\beta} J e^{\sigma\beta b/4} e^{-\beta J_\star b^2/4J^2} e^{-\beta J_\star/4}}{8\sqrt{J_\star}\,\mathrm{ch}(\beta b/4)\,\mathrm{sh}(J_\star \beta b/2J)} \sum_{s=\pm} s \\ & \times \Biggl[\mathrm{erfi}\Bigl(\frac{\sqrt{\beta J_\star}(sb - J)}{2J}\Bigr) f_F\Bigl(p\varepsilon - 2p\Omega_n^{-p} + \frac{\sigma b}{2}\Bigr) - \mathbb{F}\Bigl(\beta(p\varepsilon - 2p\Omega_n^{-p} + \sigma b/2), sb/2J, \sqrt{\beta J_\star}\Bigr)\Biggr] \Biggr\} \\ & \times \Biggl[\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\beta E_c (n-q)^2} \Biggr]^{-1} . \end{aligned} \tag{4.85}$$

[20]При интегрировании по t использовалось соотношение $\int\limits_{-\infty}^{\infty} dt e^{izt}/\,\mathrm{ch}(\pi t) = 1/\,\mathrm{ch}(z/2)$.

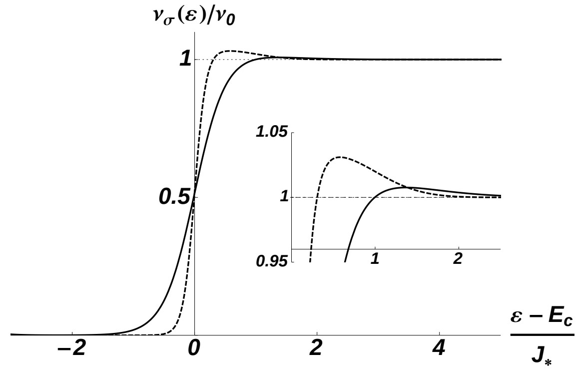

Рисунок 4.5: Туннельная плотность состояний в случае кулоновской долины. Сплошная (штриховая) кривая соответствует значениям параметров $J/\delta = 0.92$, $\delta/T = 0.35$, и $J_\star/T = 3.95$ ($J/\delta = 0.92$, $\delta/T = 0.95$, и $J_\star/T = 10.70$).

Здесь $\nu_0 = 1/\delta$ обозначает среднюю плотность состояний невзаимодействующих электронов на одну проекцию спина, $\Omega_n^p = E_c(n - q + p/2)$, а функция

$$\mathbb{F}(x, y, z) = \frac{1}{2} e^{-x/2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} dt \, \frac{e^{ixt}}{\operatorname{ch}(\pi t)} \operatorname{erfi}\bigl(z(y - it)\bigr). \tag{4.86}$$

Выражение (4.85) описывает зависимость туннельной плотности состояний от энергии, температуры и магнитного поля вблизи стоунеровской неустойчивости, $J_\star \gg J$. Оно получено в предположении, что $\delta \ll T \ll \mu$ и $\beta J_\star \max\{1, 1/\sqrt{\beta J_\star}, b/J\} \ll \exp(\beta\tilde{\mu})$ [21]. В выражении (4.85) не учтено влияние флуктуаций одночастичных уровней энергии.

Как видно из уравнения (4.85), в случае слабых магнитных полей, $b \lesssim J$, зависимость туннельной плотности состояний от магнитного поля очень слабая. Поэтому ниже отдельно будут рассмотрены случай нулевого магнитного поля ($b = 0$) и случай относительно сильных магнитных полей ($b \gg J$).

Туннельная плотность состояний в нулевом магнитном поле

Раскладывая выражение в квадратных скобках в правой части уравнения (4.85) до первого порядка по b, получаем следующий результат для туннельной плотности состояний

[21] Напомним, что последнее условие возникает при интегрировании по h.

в нулевом магнитном поле:

$$\frac{\nu_\sigma(\varepsilon)}{\nu_0} = \sum_{n,p=\pm} e^{-\beta E_c(n-q)^2} \left[\left(1+\frac{J}{2J_\star}\right) f_F(p\varepsilon - 2p\Omega_n^{-p}) - \frac{J}{2J_\star} \mathcal{F}\left(\frac{p\varepsilon - 2p\Omega_n^p}{J_\star}, \beta J_\star\right)\right] \times$$
$$\times \left[\sum_n e^{-\beta E_c(n-q)^2}\right]^{-1}. \qquad (4.87)$$

Здесь функция $\mathcal{F}(x,y)$ определена как

$$\mathcal{F}(x,y) = \frac{1}{2} e^{-y/4} e^{yx/2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} dt\, \frac{e^{iyxt-yt^2}}{\operatorname{ch}(\pi t)}. \qquad (4.88)$$

Используя при $y \ll 1$ асимптотическое выражение

$$\mathcal{F}(x,y) = f_F(-yx)\left[1 - \frac{y}{2\operatorname{ch}^2(yx/2)}\right], \qquad (4.89)$$

находим туннельную плотность состояний при высоких температурах $T \gg J_\star$:

$$\frac{\nu_\sigma(\varepsilon)}{\nu_0} = \sum_{n,p=\pm} e^{-\beta E_c(n-q)^2} f_F(p\varepsilon - 2p\Omega_n^{-p}) \left[1 + \frac{\beta J}{4\operatorname{ch}^2(\frac{p}{2}\varepsilon - p\Omega_n^{-p})}\right] \left[\sum_n e^{-\beta E_c(n-q)^2}\right]^{-1}. \quad (4.90)$$

Полезно сравнить выражение (4.90) с результатом работы [404] для туннельной плотности состояний в отсутствие обменного взаимодействия. Как и ожидается в режиме высоких температур, $T \gg J_\star$, влияние обменного взаимодействия на туннельную плотность состояний мало. Интересно отметить, что поправка из-за обменного взаимодействия оказывается всего лишь порядка J/T, в то время как для спиновой восприимчивости (см. (4.59)) соответствующая поправка имеет порядок $J_\star/T$.

В режиме промежуточных температур, $\delta \ll T \ll J_\star$, туннельная плотность состояний определяется выражением (4.87), в котором для $\mathcal{F}(x,y)$ можно использовать асимптотическое выражение при $y \gg 1$ (см. Прил. Г.5):

$$\mathcal{F}(x,y) = \frac{1}{2}\operatorname{sgn}\left(\cos\frac{\pi x}{2}\right) e^{-\frac{y}{4}(x-1)^2 + \frac{y}{\pi^2}\cos^2\frac{\pi x}{2}} \left[1 - \operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{y}}{\pi}\left|\cos\frac{\pi x}{2}\right|\right)\right] + e^{\frac{y}{2}(x-|x|)} \times$$
$$\times \sum_{m \geqslant 0} (-1)^m e^{-y|x|m + ym(m+1)} \Theta(|x| - 2m - 1). \qquad (4.91)$$

Здесь, напомним, $\Theta(x)$ обозначает функцию Хевисайда ($\Theta(0) \equiv 0$), а $\operatorname{erf}(z) = (2/\sqrt{\pi})\int\limits_0^z \exp(-t^2) dt$ – функция ошибок.

На первый взгляд, согласно уравнению (4.91), при изменении аргумента x для фиксированного значения y функция $\mathcal{F}(x,y)$ имеет осцилляции с периодом 4. Однако, это не

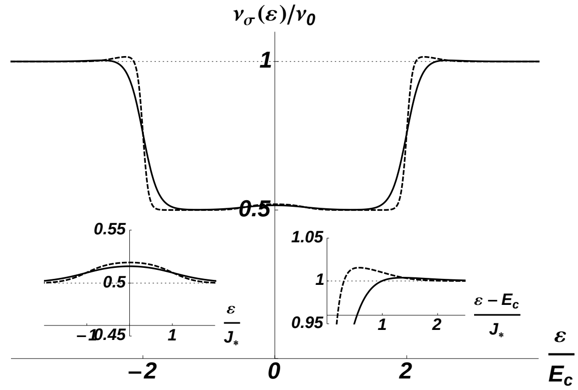

Рисунок 4.6: Туннельная плотность состояний в случае кулоновского пика. Значения параметров такие же как на рисунке 4.5.

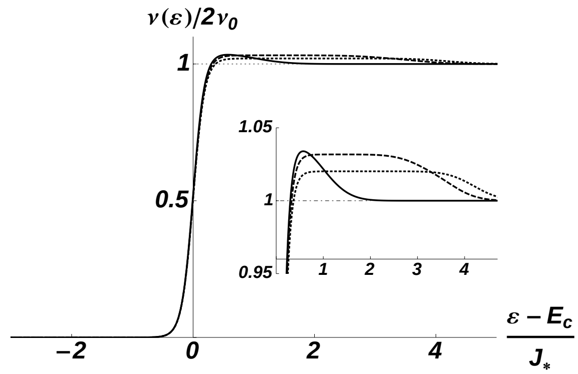

Рисунок 4.7: Туннельная плотность состояний $\nu(\varepsilon) = \nu_\uparrow(\varepsilon) + \nu_\downarrow(\varepsilon)$ в случае кулоновской долины для значений магнитного поля $b = 0$ (сплошная кривая), $b = 2.75J$ (штриховая кривая) и $b = 3.25J$ (пунктирная кривая). Значения остальных параметров: $J/\delta = 0.92$, $\delta/T = 0.95$, и $J_\star/T = 10.7$.

так. При $y \gg 1$ функция $\mathcal{F}(x, y)$ монотонна и близка к функции $1/(1 + \exp(-y(x-1)))$. Линейная комбинация двух фермиевских функций (обычной и сдвинутой по энергии на $J_\star$) в выражении (4.87) приводит к появлению максимума в туннельной плотности состояний. Высота максимума может быть оценена как $[\nu_\sigma(\varepsilon)/\nu_0]_{\max} - 1 \sim J/J_\star$. Такая дополнительная немонотонность туннельной плотности состояний связана с дополнительными электронными корреляциями, вызванными обменным взаимодействием.

Для $T \ll E_c$ немонотонное поведение туннельной плотности состояний показано на рисунке 4.5 для кулоновской долины (целое значение q) и на рисунке 4.6 для кулоновского пика (полуцелое значение q).

Заметим, что результат (4.87) впервые был получен в работе [414].

Туннельная плотность состояний в магнитном поле $b \gg J$

В нулевом магнитном поле в режиме $J < \delta \ll T \ll J_\star$ на поведение туннельной плотности состояний существенное влияние оказывает обменное взаимодействие. Рассмотрим теперь как в этом же режиме ($J < \delta \ll T \ll J_\star$) на туннельную плотность состояний влияет относительно сильное магнитное поле $b \gg J$. Используя для функции $\mathbb{F}(x, y, z)$ асимптотическое выражение при $z \gg 1$ и $y \gg 1$ [22]

$$\mathbb{F}(x, y, z) \approx \frac{1}{zy\sqrt{\pi}} e^{z^2(y-1/2)^2} \mathcal{F}(2y - x/z^2, z^2), \tag{4.92}$$

получим из уравнения (4.85) следующий результат для туннельной плотности состояний

$$\frac{\nu_\sigma(\varepsilon)}{\nu_0} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\beta E_c(n-q)^2} \sum_{p=\pm} \Biggl\{ f_F\bigl(p\varepsilon - 2p\Omega_n^{-p}\bigr) + \frac{J^2}{2J_\star(b-J)} \frac{e^{\sigma\beta b/4}}{\operatorname{ch}(\beta b/4)} \Bigl[f_F\bigl(p\varepsilon - 2p\Omega_n^{-p} + \sigma b/2\bigr) \\ - \mathcal{F}\bigl((p\varepsilon - 2p\Omega_n^{p} - J_\star b/J)/J_\star, \beta J_\star\bigr) \Bigr] \Biggr\} \Biggl[\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\beta E_c(n-q)^2} \Biggr]^{-1}. \tag{4.93}$$

Как следует из выражения (4.93), немонотонное поведение туннельной плотности состояний, вызванное наличием обменного взаимодействия, сохраняется в присутствии магнитного поля. На рисунке 4.7 представлена зависимость полной туннельной плотности состояний $\nu(\varepsilon) = \nu_\uparrow(\varepsilon) + \nu_\downarrow(\varepsilon)$ от энергии при разных магнитных полях для случая кулоновской долины. При этом магнитное поле приводит к двум эффектам. Во-первых, оно уменьшает высоту максимума: $[\nu(\varepsilon)/2\nu_0]_{\max} - 1 \sim J\delta/(J_\star b)$. Во-вторых, ширина максимума линейно растёт при увеличении магнитного поля ($\sim J_\star b/J$). Заметим, что, как следует из выражения (4.93), различие между $\nu_\uparrow(\varepsilon)$ и $\nu_\downarrow(\varepsilon)$ мало.

Отметим, что выражение (4.93) впервые было получено в работе [416].

4.4.3 Влияние флуктуаций одночастичных уровней энергии на туннельную плотность состояний

Для того, чтобы понять физическую причину появления максимума в туннельной плотности состояний и учесть влияние флуктуаций одночастичных уровней энергии, рассмотрим случай кулоновской долины при $T = 0$. Начнём со случая нулевого магнитного поля. Рассмотрим туннелирование электрона со спином вверх в квантовую точку в основном состоянии со спином S (см. Рис. 4.8). Такое туннелирование будет возможно, если энергия электрона ε превышает пороговую энергию $\mathcal{E}_1 = E_{S+1/2} - E_S - J(S + 3/4)$. Здесь, как и

[22] Заметим, что асимптотический результат (4.92) работает удовлетворительно уже при $y \gtrsim 2$.

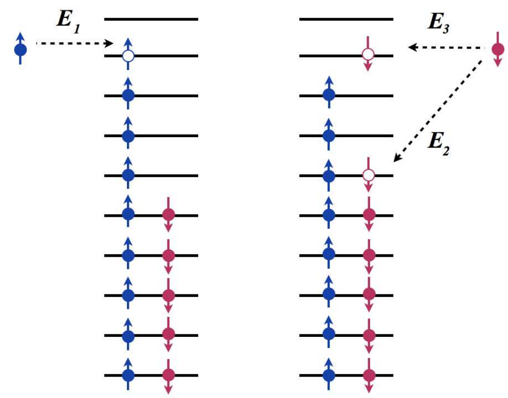

Рисунок 4.8: Схематическое изображение туннелирования электрона со спином ↑ (левый рисунок) и со спином ↓ (правый рисунок) на квантовую точку с конечным значением спина в основном состоянии.

раньше, E_S обозначает одночастичный вклад в энергию основного состояния со спином S. Электрон со спином вниз может протуннелировать в квантовую точку, если его энергия больше пороговой энергии $\mathcal{E}_2 = E_{S-1/2} - E_S + J(S+1/4)$. Поэтому, в интервале энергий $\mathcal{E}_1 < \varepsilon < \mathcal{E}_2$ возможно туннелирование только электронов со спином ↑. При очень больших энергиях туннелирование не должно зависеть от того какой знак у проекции спина электрона. Естественно ввести характерную энергию $\mathcal{E}_3 = E_{S+1/2} - E_S + J(S+1/4)$ такую, что для энергий $\varepsilon > \mathcal{E}_3$ нет различия в туннелировании электронов со спином ↑ и ↓. Аналогично оценкам раздела 4.3.3 находим $\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1 \approx J - \Delta E_{2S-1}$ и $\mathcal{E}_3 - \mathcal{E}_2 \approx 2JS + \Delta E_{2S-1}$. Для того, чтобы определить поведение туннельной плотности состояний удобно использовать правило сумм (4.44). В случае кулоновской долины и нулевой температуры, интеграл $\int d\varepsilon\, \nu_\sigma(\varepsilon)$ не зависит от значения обменного взаимодействия J. Получающаяся зависимость туннельной плотности состояний от энергии при $T = 0$ показана на рисунке 4.9. Относительную высоту максимума в туннельной плотности состояний можно оценить как $(\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1)/(2(\mathcal{E}_3 - \mathcal{E}_2)) \approx 1/(4S)$. Если пренебречь влиянием флуктуаций одночастичных уровней энергии, то вблизи стоунеровской неустойчивости, $J_\star \gg J$, относительная высота максимума становится порядка $J/(2J_\star)$. Эта оценка находится в полном согласии с аналитическим результатом (4.87), полученным для $\delta \ll T \ll J_\star$. В этом температурном интервале, подавление туннельной плотности состояний в интервале энергий $\mathcal{E}_1 < \varepsilon < \mathcal{E}_2$ (см. Рис. 4.9) замыто температурой, так как $\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1 \ll T$.

Приведённые выше качественные оценки могут быть подтверждены прямым вычислением туннельной плотности состояний для нулевой температуры в случае кулоновской долины. Для $T = 0$ из выражения (4.43) в случае основного состояния со спином S и в нулевом магнитном поле находим, что

$$\nu_\sigma(\varepsilon) = \frac{1}{2}\sum_{\epsilon_\alpha > \epsilon_{\frac{q}{2}-S}} \delta\Big(\varepsilon - \epsilon_\alpha + \mu - E_c - J(S+1/4)\Big) -$$
$$- \frac{1}{4S+2}\sum_{\epsilon_\alpha > \epsilon_{\frac{q}{2}+S}} \delta\Big(\varepsilon - \epsilon_\alpha + \mu - E_c - J(S+1/4)\Big) +$$
$$+ \frac{S+1}{2S+1}\sum_{\epsilon_\alpha > \epsilon_{\frac{q}{2}+S}} \delta\Big(\varepsilon - \epsilon_\alpha + \mu - E_c + J(S+3/4)\Big). \qquad (4.94)$$

Используя тот факт, что $\epsilon_{\frac{q}{2}+S+1} = E_{S+1/2} - E_S$ и $\epsilon_{\frac{q}{2}-S+1} = E_{S-1/2} - E_S$, получаем

$$\int\limits_{\mathcal{E}_1}^{\mathcal{E}_2} d\varepsilon \frac{\nu_\sigma(\varepsilon)}{\nu_0} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2S+1}\right)(\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1), \quad \int\limits_{\mathcal{E}_2}^{\mathcal{E}_3} d\varepsilon \frac{\nu_\sigma(\varepsilon)}{\nu_0} = \left(1 + \frac{1}{4S+2}\right)(\mathcal{E}_3 - \mathcal{E}_2) \qquad (4.95)$$

в согласии со схематическим изображением туннельной плотности состояний на рисунке 4.9.

Влияние флуктуаций одночастичных уровней энергии на туннельную плотность состояний можно оценить на основе качественных соображений, изложенных выше. При нулевой температуре относительная высота максимума в туннельной плотности состояний равна $1/(4S)$ для данной реализации уровней. Их флуктуации приводят к тому, что в среднем относительная высота будет равна $\overline{1/(4S)} \approx [1 + \overline{(\Delta n_{2S})^2}]J/(2J_\star)$ (см. (4.76)). Учитывая уравнение (4.78) и обсуждение после уравнения (4.79), можно ожидать, что относительная высота максимума в туннельной плотности состояний будет равна $[1 + (1/\boldsymbol{\beta}\pi^2)\ln(J_\star/T)]J/(2J_\star)$. Также как и в случае спиновой восприимчивости, флуктуации одночастичных уровней энергии усиливают влияние обменного взаимодействия и приводят к логарифмической зависимости высоты максимума от температуры. При этом ширина области максимума соответствующим образом уменьшается и становится порядка $J_\star/[1 + (1/\boldsymbol{\beta}\pi^2)\ln(J_\star/T)]$. Таким образом, в противоположность обычной ситуации флуктуации одночастичных уровней энергии делают максимум в туннельной плотности состояний более резким.

В случае наличия магнитного поля $b \gg J$, если не учитывать флуктуации одночастичных уровней энергии, типичное значение спина S в основном состоянии имеет порядок $J_\star b/J\delta$. Поэтому, ширина максимума в туннельной плотности состояний, которая оценивается как JS линейно растёт с магнитным полем ($\sim J_\star b/\delta$). Относительная высота максимума оценивается как $1/4S \sim J\delta/J_\star b$. Эти оценки находятся в согласии с результатами

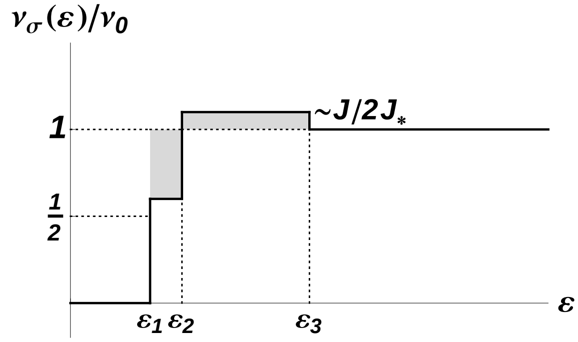

Рисунок 4.9: Схематическое изображение туннельной плотности состояний при нулевой температуре. Закрашенные участки имеют равную площадь.

раздела 4.4.2. Как было объяснено в разделе 4.3.2, магнитное поле $b \gg J$ сильно подавляет влияние флуктуаций одночастичных уровней энергии на спиновую восприимчивость. Аналогичная картина верна для туннельной плотности состояний: флуктуации уровней приводят к поправкам к результату (4.93) порядка $(\delta/b)\ln(J_\star b/J\delta) \ll 1$.

4.4.4 Обсуждение результатов

Для того, чтобы экспериментально проверить результаты, полученные в этом и предыдущем разделах, необходимо исследовать квантовые точки, выполненные в виде гранул из материалов близких к стоунеровской неустойчивости. Список таких веществ, называющихся почти ферромагнитными, включает в себя Pd или Pt с примесями Co или Ni [419, 420, 421], сплавы переходных металлов с атомами Fe или Mn [422, 423], гранулы Fe с атомами Co [424], и новые редкоземельные сплавы, например, YFe_2Zn_{20} [395]. В последнем материале отношение $J/(\delta - J)$ равно приблизительно 16, что приводит к спину в основном состояний равном 10.

Для экспериментальной проверки результатов для спиновой восприимчивости, полученных в разделе 4.3, необходимо измерять полную намагниченность и электронный парамагнитный резонанс. Чувствительность современной аппаратуры не позволяет измерять интересующий магнитный сигнал, соответствующий спину равному 10, для одной гранулы размером в несколько нанометров. Необходимо проводить измерения на образцах с большим количеством гранул (до 10^{18}). С точки зрения спиновой восприимчивости, конкурирующим с мезоскопической стоунеровской восприимчивостью эффектом, является вклад от магнитных примесей, например атомов Fe. Хорошо известно [394], что одна такая примесь в почти ферромагнитном материале создаёт эффективный спин, $S_{\rm imp}$, примерно равный

10. Однако, температурная зависимость вклада магнитных примесей в восприимчивость $\chi_{\mathrm{imp}} \sim S_{\mathrm{imp}}^2/(T \ln T/T_0)$ отличается от результата (4.67). Здесь температура T_0 определяется взаимодействием между электронами и примесью [350]. Возможно, что недавно обнаруженные особенности в магнитных свойствах Pd гранул [425, 426, 427] могут быть связаны с явлением мезоскопической стоунеровской неустойчивости.

Для экспериментальной проверки результатов раздела 4.4 для туннельной плотности состояний можно измерять нелинейные вольт-амперные характеристки в одноэлектронном транзисторе, где островком является гранула из почти ферромагнитного материала. При разности потенциалов $V \gg T$ между резевуарами зависимость дифференциального кондактанса $dI(V)/dV$ будет фактически совпадать с зависимостью $\nu(\varepsilon = eV)$, так как в приближении последовательного туннелирования [275]

$$I(V) = \frac{e}{h} \frac{g_l g_r}{g_l + g_r} \int d\varepsilon \big[f_F(\varepsilon) - f_F(\varepsilon + eV) \big] \frac{\nu(\varepsilon)}{\nu_0}. \tag{4.96}$$

В этом случае, величина немонотонного изменения $dI(V)/dV$, связанного с обменным взаимодействием, будет порядка $7-15\,\%$ и должна уменьшаться при приложении магнитного поля.

Развитый в этой главе подход для аналитического вычисления спиновой восприимчивости и туннельной плотности состояний для универсального гамильтониана с изотропным (гейзенберговским) обменным взаимодействием может быть применён и для более сложных случаев. Например, с помощью развитого подхода можно вычислить спиновую восприимчивость и туннельную плотность состояний для случая анизотропного XXZ обменного взаимодействия [428]. Эта модель интересна тем, что описывает кроссовер от случая изотропного обменного взаимодействия, для которого существует мезоскопическая стоунеровская неустойчивость, к случаю изинговского обменного взаимодействия, при котором мезоскопической стоунеровской неустойчивости нет [328]. Также развитый подход может быть применён для изучения такого кроссовера от гейзенберговского к изинговскому обменному взаимодействию в случае спин-орбитального взаимодействия [386, 388, 387]. Также развитый подход может быть использован для изучения взаимного влияния сверхпроводимости и ферромагнетизма в квантовых точках с притяжением в куперовском канале [379, 380, 381].

4.5 Заключение

В этой главе в рамках универсального гамильтониана (нульмерного приближения) для квантовой точки с прямым и обменным взаимодействиями аналитически решена задача об одновременном учете в спиновой восприимчивости и туннельной плотности состояний зарядовых и спиновых корреляций, зеемановского расщепления и флуктуаций одночастичных уровней энергии. Одним из самых важных результатов этой главы является точное аналитическое выражение для туннельной плотности состояний электронов в квантовой точке. Вблизи стоунеровской неустойчивости, $\delta - J \ll \delta$, найден широкий интервал температур $\delta \ll T \ll J_\star$, в котором явление мезоскопической стоунеровской неустойчивости проявляется в законе Кюри для спиновой восприимчивости с квадратом эффективного спина, логарифмически зависящем от температуры, и в дополнительном немонотонном поведении туннельной плотности состояний как функции энергии.

Заключение

Из представленного цикла исследований, основные результаты которого изложены в 14 научных работах, список которых приводится в приложении, могут быть сделаны следующие выводы:

1. Поведение сильно-коррелированных неупорядоченных электронных систем со спиновыми и изоспиновыми степенями свободы, в которых амплитуды взаимодействия между электронами с разными проекциями спина и изоспина имеют различные значения, качественно отличается от случая однодолинной системы.

2. В двухдолинной сильно-коррелированной неупорядоченной электронной системе металлическое поведение сопротивления изменяется на диэлектрическое поведение при достаточно низких температурах только при наличии как зеемановского, так и междолинного расщеплений.

3. В двухдолинной сильно-коррелированной неупорядоченной электронной системе при низких температурах возможно существование двух максимумов в температурной зависимости сопротивления вблизи перехода металл-изолятор.

4. В двумерной взаимодействующей неупорядоченной электронной системе в структурах с двойной квантовой ямой и общими рассеивателями электронный транспорт при достаточно низких температурах оказывается таким же как в двух независимых квантовых ямах.

5. В двухпетлевом приближении переход металл-изолятор в системе двумерных взаимодействующих электронов с полностью поляризованными спинами отсутствует.

6. В системе электронов с полностью поляризованными спинами наличие межэлектронного взаимодействия оставляет в силе хорошо известное для модели невзаимодействующих электронов качественное объяснение целочисленного квантования холловской проводимости.

7. Температурная зависимость времени сбоя фазы в критической области перехода между плато в режиме целочисленного квантового эффекта Холла в спин-поляризованной электронной неупорядоченной системе с короткодействующим межэлектронным взаимодействием определяется критическим индексом, зависящим

только от аномальной размерности амплитуды электрон-электронного взаимодействия в критической точке для невзаимодействующих электронов.

8. В двумерной неупорядоченной спин-поляризованной электронной системе с кулоновским взаимодействием в перпендикулярном магнитном поле предсказаны осцилляции теплоёмкости с магнитным полем, которые отличны от осцилляций де Гааза и связаны с наличием делокализованных состояний.

9. В одноэлектронном транзисторе, наряду с появлением температурной зависимости кондактанса, перенормировки приводят также к возникновению температурной зависимости у затворной ёмкости, делая её отличной от геометрической ёмкости затвора. Заряд, соответствующий затворной ёмкости одноэлектронного транзистора, целочисленно квантуется при нулевой температуре.

10. Вблизи порога стоунеровской неустойчивости явление мезоскопической стоунеровской неустойчивости в квантовых точках можно наблюдать в широком интервале температур, изучая логарифмическую температурную зависимость квадрата эффективного спина в законе Кюри для спиновой восприимчивости и дополнительное немонотонное поведение дифференциального кондактанса в зависимости от приложенного напряжения.

Приложения

A Приложения к главе 1

A.1 Перенормировка члена $\mathcal{S}_F$ с помощью процедуры фонового поля

В этом приложении будут представлены детали вывода уравнения (1.26) с помощью процедуры фонового поля [110]. Представим матрицу Q в виде произведения "быстрого" (Q) и "медленного" ($Q_0 = T_0^{-1}\Lambda T_0$) полей:

$$Q \to T_0^{-1} Q T_0. \tag{A.1}$$

Матричные элементы $(T_0)_{nm}^{\alpha\beta}$ медленного поля T_0 становятся тривиальными, если индекс $|n|$ или $|m|$ превышает $N'_M \ll N_M$: $(T_0)_{nm}^{\alpha\beta} = \delta_{nm}^{\alpha\beta}$. Эффективное действие для медленного поля Q_0 определяется стандартным образом:

$$\exp \mathcal{S}_{\text{eff}}[Q_0] = \int \mathcal{D}[Q] \exp \mathcal{S}[T_0^{-1} Q T_0]. \tag{A.2}$$

Для нахождения однопетлевой перенормировки амплитуд взаимодействия Γ_{ab} достаточно считать медленное поле Q_0 постоянным в пространстве. Тогда находим

$$\mathcal{S}[T_0^{-1} Q T_0] = \mathcal{S}[Q_0] + \mathcal{S}[Q] + O_t^{(1),1} + O_t^{(1),2} + O_t^{(2),1} + O_t^{(2),2} + Q_\eta, \tag{A.3}$$

где

$$\begin{aligned}
O_t^{(1),1} &= -\frac{\pi T}{2} \int d\boldsymbol{r} \sum_{\alpha n; ab} \Gamma_{ab} \operatorname{tr} I_n^\alpha t_{ab} \delta Q \operatorname{tr} I_{-n}^\alpha t_{ab} Q_0, \\
O_t^{(1),2} &= -\frac{\pi T}{2} \int d\boldsymbol{r} \sum_{\alpha n; ab} \Gamma_{ab} \operatorname{tr} I_n^\alpha t_{ab} \delta Q \operatorname{tr} A_{-n;ab}^\alpha \delta Q, \\
O_t^{(2),1} &= -\frac{\pi T}{2} \int d\boldsymbol{r} \sum_{\alpha n; ab} \Gamma_{ab} \operatorname{tr} I_n^\alpha t_{ab} Q_0 \operatorname{tr} A_{-n;ab}^\alpha \delta Q, \\
O_t^{(2),2} &= -\frac{\pi T}{4} \int d\boldsymbol{r} \sum_{\alpha n; ab} \Gamma_{ab} \operatorname{tr} A_{n;ab}^\alpha \delta Q \operatorname{tr} A_{-n;ab}^\alpha \delta Q, \\
O_\eta &= 4\pi T z \int d\boldsymbol{r} \operatorname{tr} A_\eta \delta Q.
\end{aligned} \tag{A.4}$$

Здесь $\delta Q = Q - \Lambda$ и

$$A_\eta = T_0[\eta, T_0^{-1}], \quad A_{n;ab}^\alpha = T_0[I_n^\alpha t_{ab}, T_0^{-1}]. \tag{A.5}$$

Эффективное действие $\mathcal{S}_{\text{eff}}[Q_0]$ может быть получено разложением величины $\mathcal{S}[T_0^{-1}QT_0]$ в ряд по A_η и $A^\alpha_{n;ab}$ [109]. Однопетлевое приближение соответствует разложению по A_η до первого порядка, а по $A^\alpha_{n;ab}$ до второго. Тогда, получаем

$$\mathcal{S}_{\text{eff}}[Q_0] = \mathcal{S}[Q_0] + \langle O_t^{(2),1}\rangle + \langle O_t^{(2),2}\rangle + \frac{1}{2}\langle \bigl[O_t^{(1),1}\bigr]^2\rangle + \frac{1}{2}\langle O_t^{(1),1} O_t^{(1),2}\rangle + \frac{1}{2}\langle \bigl[O_t^{(1),2}\bigr]^2\rangle + \langle O_\eta\rangle, \quad \text{(A.6)}$$

где среднее $\langle \dots \rangle$ вычисляется для действия $\mathcal{S}_\sigma + \mathcal{S}_F$ (см. (1.2)-(1.3)). Каждый член в правой стороне уравнения (A.6) содержит вклады, которые не возможно записать только через матрицу Q_0. Однако, все такие вклады в сумме сокращаются. Ниже выписываются только такие вклады, которые выражаются через матрицу Q_0. Разлагая δQ в ряд по W, согласно уравнению (1.12), и производя усреднения с помощью выражения (1.13), получаем

$$\mathcal{S}_{\text{eff}}[Q_0] = -\frac{\pi T}{4} \int d\boldsymbol{r} \sum_{\alpha n;ab} \Gamma'_{ab} \operatorname{tr} I_n^\alpha t_{ab} Q \operatorname{tr} I_{-n}^\alpha t_{ab} Q + 4\pi T z' \int d\boldsymbol{r} \operatorname{tr} \eta Q, \qquad \text{(A.7)}$$

где

$$\Gamma'_{ab} = \Gamma_{ab} + \delta\Gamma_{ab}^{(2),1} + \delta\Gamma_{ab}^{(2),2} + \delta\Gamma_{ab}^{(1),1;1} + \delta\Gamma_{ab}^{(1),1;2} + \delta\Gamma_{ab}^{(1),2;2} + \delta\Gamma_{ab}^{\eta} \qquad \text{(A.8)}$$

и аналогично для z'. Здесь вклады в Γ'_{ab} от каждого члена в правой стороне уравнения (A.6) имеют вид:

$$\begin{aligned}
\delta\Gamma_{ab}^{(2),1} &= \frac{32\pi T}{\sigma_{xx}^2} \sum_{cd;ef} \bigl[\mathcal{C}^{ab}_{cd;ef}\bigr]^2 \Gamma_{cd}\Gamma_{ef} \int \frac{d^2\boldsymbol{p}}{(2\pi)^2} \sum_{\omega_m>0} D_p(\omega_m) D_p^{(cd)}(\omega_m),\\
\delta\Gamma_{ab}^{(2),2} &= -\frac{1}{8\sigma_{xx}} \sum_{cd;ef} \bigl[\operatorname{sp}(t_{cd}t_{ef}t_{ab})\bigr]^2 \Gamma_{cd} \int \frac{d^2\boldsymbol{p}}{(2\pi)^2} D_p(0),\\
\delta\Gamma_{ab}^{(1),1;1} &= \frac{32\pi T}{\sigma_{xx}^2} \sum_{cd;ef} \bigl[\Gamma_{ab}\mathcal{C}^{ab}_{cd;ef}\bigr]^2 \sum_{\omega_m>0} \int \frac{d^2\boldsymbol{p}}{(2\pi)^2} \bigl[D_p^{(cd)}(\omega_m) D_p^{(ef)}(\omega_m) - D_p^2(\omega_m)\bigr],\\
\delta\Gamma_{ab}^{(1),1;2} &= -\frac{64\pi T}{\sigma_{xx}^2} \sum_{cd;ef} \bigl[\mathcal{C}^{ab}_{cd;ef}\bigr]^2 \Gamma_{ab}\Gamma_{cd} \int \frac{d^2\boldsymbol{p}}{(2\pi)^2} \sum_{\omega_m>0} D_p^{(ab)}(\omega_m) D_p^{(ef)}(\omega_m),\\
\delta\Gamma_{ab}^{(1),2;2} &= \frac{32\pi T}{\sigma_{xx}^2} \sum_{cd;ef} \bigl[\Gamma_{ef}\mathcal{C}^{ab}_{cd;ef}\bigr]^2 \sum_{\omega_m>0} \int \frac{d^2\boldsymbol{p}}{(2\pi)^2} D_p^{(cd)}(\omega_m) \bigl[D_p^{(ef)}(\omega_m) - D_p(\omega_m)\bigr],
\end{aligned} \qquad \text{(A.9)}$$

и $\delta\Gamma^\eta_{ab} = 0$ Собирая все вклады, получаем уравнение (1.26). Единственные ненулевые вклады в перенормировку z равны

$$\begin{aligned}
\delta z^{(1),2;2} &= \frac{64\pi T}{\sigma_{xx}^2} \sum_{cd} \Gamma_{cd} \sum_{\omega_m>0} \int \frac{d^2\boldsymbol{p}}{(2\pi)^2} D_p(\omega_m) \bigl[D_p(\omega_m) - D_p^{(cd)}(\omega_m)\bigr],\\
\delta z^{\eta} &= \frac{64\pi T}{\sigma_{xx}^2} \sum_{cd} \Gamma_{cd} \int \frac{d^2\boldsymbol{p}}{(2\pi)^2} \sum_{\omega_m>0} D_p(\omega_m) D_p^{(cd)}(\omega_m).
\end{aligned} \qquad \text{(A.10)}$$

В сумме уравнения (A.10) приводят к следующему ответу

$$z' = z + \frac{64\pi T}{\sigma_{xx}^2} \sum_{cd} \Gamma_{cd} \int \frac{d^2\boldsymbol{p}}{(2\pi)^2} \sum_{\omega_m > 0} D_p^2(\omega_m), \tag{A.11}$$

который совпадает с уравнением (1.24).

A.2 Связь физических наблюдаемых с перенормированными величинами

В этом приложении будет показана связь физических наблюдаемых с перенормированными параметрами действия. Для простоты вычислений сделаем это на примере электронов полностью поляризованных по спину (случай, рассмотренный в разделе 1.5). Запишем $\tilde{\sigma}_{xx}$ в виде

$$\frac{\Omega_d}{\tilde{\sigma}_{xx}} = \lambda^{-\epsilon} t(\lambda) Z_t(t(\lambda)), \tag{A.12}$$

где безразмерная величина $t(\lambda)$ определяет перенормированный параметр $\tilde{\sigma}_{xx}$ на длине λ: $\tilde{\sigma}_{xx}(\lambda) = \lambda^{\epsilon}\Omega_d/t(\lambda)$. Требуя, чтобы выражение (1.117) для наблюдаемой величины σ'_{xx} не содержало расходимостей при $\epsilon \to 0$, находим

$$Z_t^{-1} = 1 - \frac{8t}{\epsilon} - \frac{2a_2 t^2}{\epsilon}. \tag{A.13}$$

Уравнение ренормализационной группы для перенормированной величины t получается из требования независимости $\tilde{\sigma}_{xx}$ от масштаба λ:

$$\lambda \frac{dt}{d\lambda} = -\frac{\epsilon t}{1 + t\frac{d\ln Z_t}{dt}} = -\epsilon t + 8t^2 + 4a_2 t^3 \tag{A.14}$$

Теперь с помощью выражения (1.117) выразим $\tilde{\sigma}_{xx}$ через наблюдаемую величину σ'_{xx}:

$$\frac{\Omega_d}{\tilde{\sigma}_{xx}} = h'^{\epsilon} t' Z_t(t'), \tag{A.15}$$

где $t' = 4\Omega_d/(h'^{\epsilon}\sigma'_{xx})$. Требуя независимости $\tilde{\sigma}_{xx}$ от масштаба $1/h'$, получаем уравнение ренормализационной группы для физической наблюдаемой σ'_{xx}:

$$-h' \frac{dt'}{dh'} = -\epsilon t' + 8t'^2 + 4a_2 t'^3. \tag{A.16}$$

Сравнение выражений (A.14) и (A.16), а также (A.12) и (A.15), показывает, что физическая наблюдаемая σ'_{xx} есть ничто иное как перенормированная величина $\tilde{\sigma}_{xx}/4$ на масштабе $\lambda = 1/h'$. Отметим, что в отличие от выражения (A.13), величина Z_t в уравнении (A.15) может содержать и конечные в пределе $\epsilon \to 0$ вклады.

A.3 Анализ однопетлевых уравнений ренормализационной группы

В этом приложении в рамках однопетлевых уравнений ренормализационной группы (1.27) представлен анализ на устойчивость ситуации, когда совпадают все Γ_{ab} кроме Γ_{00}. Представим γ_{ab} в виде $\gamma_{ab} = \gamma + \eta_{ab}$ для $(ab) \neq (00)$ и $\gamma_{00} = \gamma_{00} + \eta_{00}$, где все отклонения η_{ab} являются малыми. Тогда линеаризуя уравнения (1.27), получим

$$\begin{aligned} \frac{d\eta_{ab}}{dy} &= \frac{1}{\pi\sigma_{xx}}\left[(17\gamma-\gamma_{00})\eta_{ab} - \sum_{cd}\bigl(\gamma+\frac{1}{4}\,\mathrm{sp}[t_{ab}t_{cd}]^2\bigr)\eta_{cd}\right], \qquad (ab)\neq(00), \\ \frac{d\eta_{00}}{dy} &= -\frac{1}{\pi\sigma_{xx}}\left[(15\gamma+\gamma_{00})\eta_{00} + (1+\gamma_{00})\sum_{cd}\eta_{cd}\right]. \end{aligned} \tag{A.17}$$

Удобно ввести следующие переменные $\mu_{ab} = \sum_{cd\neq(00)} \mathrm{sp}[t_{ab}t_{cd}]^2\eta_{cd}/4$ и $\mu_{00} = \sum_{cd\neq(00)}\eta_{cd}$. Заметим, что величина μ_{00} представляет собой проекцию 16-мерного вектора $\{\eta_{ab}\}$ на направление $\boldsymbol{e} = \{0, 1, \dots, 1\}$. Теперь для каждого из $(ab) \neq (00)$ находим

$$\frac{d}{dy}\begin{pmatrix}\eta_{ab}\\ \mu_{ab}\\ \eta_{00}\\ \mu_{00}\end{pmatrix} = \frac{1}{\pi\sigma_{xx}}\begin{pmatrix} 17\gamma-\gamma_{00} & -1 & -1-\gamma & -\gamma \\ -16 & 17\gamma-\gamma_{00} & 1+\gamma & 1+\gamma \\ 0 & 0 & -(15\gamma+2\gamma_{00}+1) & -1-\gamma_{00} \\ 0 & 0 & -15(1+\gamma) & 2\gamma-\gamma_{00}+1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\eta_{ab}\\ \mu_{ab}\\ \eta_{00}\\ \mu_{00}\end{pmatrix}. \tag{A.18}$$

Нижний правый блок размера 2x2 матрицы в уравнении (A.18) представляет собой линеаризованные однопетлевые уравнения ренормализационной группы (1.27) в ситуации, когда все η_{ab}, кроме η_{00}, одинаковы. Поведение величин η_{ab} с $(ab) \neq (00)$ в направлениях, перпендикулярных плоскости, натянутой на векторы $\boldsymbol{e}$ и $\boldsymbol{e}_0 = \{1, 0, \dots, 0\}$, характеризуется двумя собственными числами $\lambda_\pm = 17\gamma - \gamma_{00} \pm 4$, оба из которых положительны при достаточно больших значениях γ. Это означает, что в рамках уравнения (A.18) малые величины η_{ab} такие, что $\eta_{00} = \mu_{00} = 0$, будут возрастать при увеличении масштаба y.

A.4 Вычисление средних в уравнении (1.112)

В этом приложении представлены детали вычисления средних в уравнении (1.112). Первое среднее равно

$$\langle O_1^{(4)}\rangle = \frac{2}{\sigma_{xx}}\left(\int_p D_p(0)\right)^2 + \frac{2(\kappa^2\Gamma_{00})^2}{\sigma_{xx}}\left(\sum_{m>0}\int_p DD_p^{(00)}(\omega_m)\right)^2 = 8\frac{\Omega_d^2 h_0^{2\epsilon}}{\sigma_{xx}\epsilon^2}(1+\ln^2\alpha), \tag{A.19}$$

где, для краткости, введены следующие обозначения $\kappa^2 = 32\pi T/\sigma_{xx}$, $D^n D_p^{(00)}(\omega_m) \equiv D_p^n(\omega_m) D_p^{(00)}(\omega_m)$, и $\int_p \equiv \int d^2\boldsymbol{p}/(2\pi)^2$. Затем,

$$\langle O_1^{(3)} S_{\text{int}}^{(3)}\rangle = \frac{8\kappa^2\Gamma_{00}}{\sigma_{xx}} \int\limits_{p,q} \sum_{k>0} D_q(\omega_k)\left[D_{p+q}(0)D_p(\omega_k) - \kappa^2\Gamma_{00}\sum_{m>0} D_q^{(00)}(\omega_k)D_{p+q}(\omega_{k+m})D_p^{(00)}(\omega_m)\right] =$$
$$= 2\frac{\Omega_d^2 h_0^{2\epsilon}}{\sigma_{xx}\epsilon}\left(4S_0 + 4A_{00}^0\right) = 16\frac{\Omega_d^2 h_0^{2\epsilon}}{\sigma_{xx}\epsilon^2}\Big[-(1+\ln^2\alpha) + \epsilon(1+\zeta(3)/2)\Big], \tag{A.20}$$

Следующее среднее равно

$$\Big\langle O_1^{(2)}(S_{\text{int}}^{(4)} + S_0^{(4)} + \frac{1}{2}(S_{\text{int}}^{(3)})^2))\Big\rangle = -\frac{4\kappa^2\Gamma_{00}}{\sigma_{xx}} \int\limits_{p,q} \sum_{k>0}\Bigg[D_{p+q}(0)D_q(\omega_k)D_p(\omega_k) -$$
$$-\kappa^2\Gamma_{00}\sum_{m>0} D_p^{(00)}(\omega_m)D_q^{(00)}(\omega_k)D_{p+q}^2(\omega_{k+m}) - \kappa^2\Gamma_{00}\sum_{m>0}\left(1 - \frac{16\Gamma_{00}\omega_m}{\sigma_{xx}}D_p^{(00)}(\omega_m)\right)\times$$
$$\times DD_q^{(00)}(\omega_k)D_{p+q}^2(\omega_{k+m})\Bigg] = 2\frac{\Omega_d^2 h_0^{2\epsilon}}{\sigma_{xx}\epsilon}\Big(-2S_0 - 2D_1 - 2T_{01} - 2A_{1,0}^0\Big) =$$
$$= 4\frac{\Omega_d^2 h_0^{2\epsilon}}{\sigma_{xx}\epsilon^2}\left[2(1+\ln^2\alpha) - \epsilon\left(2 + \zeta(3) + \pi^2/3\right)\right]. \tag{A.21}$$

Далее,

$$\langle O_2^{(6)}\rangle = -\frac{4}{\sigma_{xx}d}\int\limits_{p,q} p^2\Bigg\{D_p(0)D_q(0)D_{p+q}(0) - (\kappa^2\Gamma_{00})^2\sum_{k,m>0}\Big[4D^2D_p^{(00)}(\omega_m)\hat{S}_m DD_q^{(00)}(\omega_k) +$$
$$+ D_p(\omega_{k+m})DD_q^{(00)}(\omega_m)DD_{p+q}^{(00)}(\omega_k) + 2DD_p^{(00)}(\omega_{k+m})DD_q^{(00)}(\omega_m)D_{p+q}(\omega_k)\Big]\Bigg\} =$$
$$= 2\frac{\Omega_d^2 h_0^{2\epsilon}}{\sigma_{xx}\epsilon}\left[S_1 + 4\left(\frac{2\ln\alpha}{\epsilon} + B_1\right) + C_{01} + 2C_{00}\right] = 4\frac{\Omega_d^2 h_0^{2\epsilon}}{\sigma_{xx}\epsilon^2}\Big[16\ln\alpha - 2 + \frac{\epsilon}{2}\Big(-4\ln\alpha -$$
$$-\frac{\pi^2}{3} + \frac{\pi^2}{2}\ln 2 + \frac{\pi^4}{12} + \frac{11\zeta(3)}{2} + \frac{\pi^2}{3}\ln^2 2 - \frac{1}{3}\ln^4 2 - 7\zeta(3)\ln 2 - 8\,\mathrm{li}_4\Big(\frac{1}{2}\Big)\Big)\Big]. \tag{A.22}$$

Здесь оператор $\hat{S}_m$ действует только на частоту ω_k, согласно правилу $\hat{S}_m f(\omega_k) = f(\omega_k) + f(\omega_{k+m})$. Пятое среднее равно

$$\langle O_2^{(5)} S_{\text{int}}^{(3)}\rangle = -\frac{16\kappa^2\Gamma_{00}}{\sigma_{xx}d}\int\limits_{p,q}\Bigg\{\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q})\sum_{k>0} D_{p+q}^{(00)}(0)D_p^2(\omega_k)D_q(\omega_k) - \kappa^2\Gamma_{00}p^2\sum_{k,m>0} D_{p+q}^{(00)}(\omega_m)\times$$
$$\times\Big[D_p^2(\omega_{k+m})DD_q^{(00)}(\omega_k) + D^2D_p^{(00)}(\omega_{k+m})D_q(\omega_k)\Big] + \kappa^2\Gamma_{00}\,(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q})\sum_{k,m>0}\times$$
$$\times\Big[DD_p^{(00)}(\omega_m)\hat{T}_m DD_{p+q}^{(00)}(\omega_k)D_q(\omega_{k+m}) + D_{p+q}^{(00)}(\omega_m)D^2D_p^{(00)}(\omega_{k+m})D_q(\omega_{k+2m})\Big]\Bigg\} =$$

$$= 2\frac{\Omega_d^2 h_0^{2\epsilon}}{\sigma_{xx}\epsilon}\Big(-4S_{00} - 4A_{01}^1 - 4H_0 - 4C_0 - 4A_0\Big) = 4\frac{\Omega_d^2 h_0^{2\epsilon}}{\sigma_{xx}\epsilon^2}\Big[-8\ln\alpha + 4 +$$
$$+ \frac{\epsilon}{2}\Big(4\ln^2\alpha + 20\ln\alpha - 12 + 4\zeta(3) + \frac{4\pi^2}{3} - 4A_0 + 4C_0^{'}\Big)\Big], \tag{A.23}$$

где оператор $\hat{T}_m$ действует только на частоту ω_k согласно правилу $\hat{T}_m f(\omega_k) = f(\omega_k) - f(\omega_{k+m})$. Результат для следующего среднего равен

$$\langle O_2^{(4)} S_0^{(4)}\rangle = \frac{8(\kappa^2\Gamma_{00})^2}{\sigma_{xx} d}\int\limits_{p,q} p^2 \sum_{k,m>0}\Big\{3D^3 D_p^{(00)}(\omega_m)\hat{S}_m D_q^{(00)}(\omega_k) + 3D^2 D_p^{(00)}(\omega_m)\hat{S}_m D D_q^{(00)}(\omega_k) -$$
$$- \frac{32\Gamma_{00}\omega_k}{\sigma_{xx}} D^2 [D_p^{(00)}]^2(\omega_m)\hat{T}_m\left[D_p(\omega_m)D_q^{(00)}(\omega_k) + DD_q^{(00)}(\omega_k)\right]\Big\} =$$
$$= 2\frac{\Omega_d^2 h_0^{2\epsilon}}{\sigma_{xx}\epsilon}\Big(-3T_{10}^0 - 3T_{11}^0 - \frac{12\ln\alpha}{\epsilon} - 6B_1 - 2T_{20}^0 + 2T_{21}^0 - 4T_{10}^1 + 4B_2\Big) =$$
$$= 4\frac{\Omega_d^2 h_0^{2\epsilon}}{\sigma_{xx}\epsilon^2}\Big[4(\ln\alpha - 1)^2 - 2 + \frac{\epsilon}{2}\Big(\frac{2}{\alpha} - 2\ln^2\alpha + \ln\alpha + \frac{44}{3}\Big)\Big]. \tag{A.24}$$

Наконец,

$$\langle O_2^{(4)}(S_{\text{int}}^{(4)} + \frac{1}{2}(S_{\text{int}}^{(3)})^2)\rangle = \frac{16(\kappa^2\Gamma_{00})^2}{\sigma_{xx} d}\int\limits_{p,q}(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q})\sum_{k>0} k D_{p+q}(0) D_p^2(\omega_k) D_q^2(\omega_k) +$$
$$+ \frac{16\kappa^2\Gamma_{00}}{\sigma_{xx} d}\int\limits_{p,q} p^2 \sum_{k>0}\Big[-2\kappa^2\Gamma_{00} k D_{p+q}(0) D_p^3(\omega_k) D_q(\omega_k) - D_p^3(\omega_k) D_q(\omega_k)\Big] +$$
$$+ \frac{16(\kappa^2\Gamma_{00})^2}{\sigma_{xx} d}\int\limits_{p,q}(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q})\sum_{k,m>0}\Big[2(1 - \kappa^2\Gamma_{00} m D_q(\omega_k)) D_{p+q}^{(00)}(\omega_m) D_p^2(\omega_{k+m}) D D_q^{(00)}(\omega_k) -$$
$$- DD_q^{(00)}(\omega_k) DD_p^{(00)}(\omega_m) D_{p+q}(\omega_{k+m})\Big] - \frac{16(\kappa^2\Gamma_{00})^2}{\sigma_{xx} d}\int\limits_{p,q} p^2 \sum_{k,m>0}\Big\{(1 - \kappa^2\Gamma_{00} m \times$$
$$\times D_{p+q}^{(00)}(\omega_m))\Big[(2 + \hat{T}_m - \kappa^2\Gamma_{00} k \hat{T}_m D_p^{(00)}(\omega_k)) D^3 D_p^{(00)}(\omega_k) D_q(\omega_{k+m}) + \frac{1}{2} D_q(\omega_k) \times$$
$$\times D_p^3(\omega_{k+m})(3D_q^{(00)}(\omega_k) + D_p^{(00)}(\omega_{k+m}))\Big] + \frac{3}{2} D_q^{(00)}(\omega_m) D_{p+q}^{(00)}(\omega_k) D_p^3(\omega_{k+m}) +$$
$$+ (1 + \hat{T}_m - 2\kappa^2\Gamma_{00} k \hat{T}_m D_p^{(00)}(\omega_k)) D_{p+q}^{(00)}(\omega_m) D^2 D_p^{(00)}(\omega_k) D_q(\omega_{k+m}) -$$
$$- \kappa^2\Gamma_{00} k \hat{T}_m D [D_p^{(00)}(\omega_m)]^2 DD_q^{(00)}(\omega_k) D_{p+q}(\omega_{k+m})\Big\} =$$
$$= 2\frac{\Omega_d^2 h_0^{2\epsilon}}{\sigma_{xx}\epsilon}\Big(4S_{11} + 4S_{01} + \frac{2}{\epsilon} + 8A_{01} + 8A_{11} - 4C_{11} +$$
$$+ 4T_{02} + 4A_{10} + 2T_{12} + 2A_1 + 3T_{01} + 3A_{11}^1 + \alpha T_{10}^0 - T_{02} + H_1 + 3D_2 + 4C_1 +$$
$$+ 8A_2 + 8A_{00} - 4A_3\Big) = 4\frac{\Omega_d^2 h_0^{2\epsilon}}{\sigma_{xx}\epsilon^2}\Big[-4\ln^2\alpha - 4 + \frac{\epsilon}{2}\Big(-\frac{2}{\alpha} - 2\ln^2\alpha - 25\ln\alpha +$$

$$+\frac{55}{2}-2\zeta(3)-\frac{8}{3}\pi^2+12\ln^2 2-44\ln 2-4C_0'+4A_0+16\boldsymbol{G}-8\,\mathrm{li}_2\Big(\frac{1}{2}\Big)\Big]. \tag{A.25}$$

Вычисление интегралов в выражениях (A.19) - (A.25)

Для вычисления интегралов при $T=0$ в выражениях (A.19) - (A.25) будет использовано стандартное представление интегралов по импульсу через фейнмановские переменные x_1, x_2 и x_3 [11]. Все интегралы в (A.19) - (A.25) разделены на семь разных групп: интегралы типов A, B, C, D, H, S и T. Введём следующие обозначения: $x_{ij}=x_i+x_j$, $x_ix_j=x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1$, $\alpha=1+\gamma_s$, и

$$\int[]=\int_0^1 dx_1\int_0^1 dx_2\int_0^1 dx_3\;\delta(x_1+x_2+x_3-1). \tag{A.26}$$

Интегралы A - типа. Начнем с вычисления интегралов A - типа. Рассмотрим интеграл

$$X^{\nu}_{\nu,\eta}=-\frac{2^{1+\nu}(-\kappa^2\Gamma_{00})^{2+\mu}}{\sigma_{xx}d^{\nu}}\int_{pq}p^{2\nu}\sum_{k,m>0}m^{\mu}D^{(00)}_{p+q}(\omega_m)DD^{(00)}_{p}(\omega_k)D^{1+\mu+\eta}_{q}(\omega_{k+m}). \tag{A.27}$$

Здесь три индекса μ, ν и η принимают значения $0,1$. Используя представление Фейнмана [11], находим

$$X^{\nu}_{\nu,\eta}=-\frac{2^{1+\nu}(-\kappa^2\Gamma_{00})^{2+\mu}}{\sigma_{xx}d^{\nu}}\int_{pq}p^2\int_0^\infty dm\;m^{\mu}\int_0^\infty dk\,\frac{\Gamma(\mu+\eta+4)}{\Gamma(\mu+\eta+1)}\int_\alpha^1 dz\int[]\;x_2x_3^{\mu+\eta}\times$$
$$\times\left[h_0^2+q^2x_{12}+p^2x_{13}+2\mathbf{p}\cdot\boldsymbol{q}x_1+\kappa^2zm(\alpha x_1+x_3)+\kappa^2zk(zx_2+x_3)\right]^{-\mu-\eta-4}. \tag{A.28}$$

Делая сдвиг $\boldsymbol{q}\to\boldsymbol{q}-\boldsymbol{p}x_1/x_{12}$, можно проинтегрировать по $\omega_k,\omega_m,\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{q}$. Получаем, что

$$X^{\nu}_{\nu,\eta}=\frac{2\Omega_d^2h_0^{2\epsilon}}{\sigma_{xx}\epsilon}A^{\nu}_{\mu,\eta},\qquad A^{\nu}_{\mu\eta}=\int_\alpha^1 dz\int[]\frac{x_2x_3^{1+\mu+\eta}(x_1+x_2)^{\nu}(x_ix_j)^{-1-\nu-\epsilon/2}}{(zx_2+x_3)(\alpha x_1+x_3)^{1+\mu}}. \tag{A.29}$$

Кроме интегралов с тремя индексами необходимо рассмотреть интегралы, в которых есть только два или один индекс:

$$A_{\nu\mu}=\int_\alpha^1 dz(z-\alpha)^{1+\nu-\mu}\int[]\frac{x_1^{\mu}x_2^{2+\nu-\mu}x_3^{\mu}(x_1+x_3)^{1-\mu}(x_ix_j)^{-2-\epsilon/2}}{(\alpha x_1+x_3)^{1+\nu}(zx_2+x_3)},$$
$$A_0=\int_\alpha^1 dz(z-\alpha)\int[]\frac{x_2^2x_1(x_ix_j)^{-2-\epsilon/2}}{(x_3+zx_2)(zx_2+\alpha x_1+2x_3)}, \tag{A.30}$$
$$A_1=\int_\alpha^1 dz(z-\alpha)^2\int[]\frac{x_2^3(x_1+x_3)(x_2+x_3)(2zx_2+2\alpha x_1+3x_3)(x_ix_j)^{-2-\epsilon/2}}{(zx_2+x_3)(\alpha x_1+x_3)^2(zx_2+\alpha x_1+2x_3)^2},$$

$$
\begin{aligned}
A_2 &= \int\limits_{\alpha}^{1} dz(z-\alpha)(1-z)\int[]\frac{x_2^3(x_1+x_3)(x_ix_j)^{-2-\epsilon/2}}{(zx_2+x_3)(\alpha x_1+x_3)(zx_2+\alpha x_1+2x_3)},\\
A_3 &= \int\limits_{\alpha}^{1} dz(z-\alpha)\int[]\frac{x_2^2(x_1+x_3)(x_ix_j)^{-2-\epsilon/2}}{(\alpha x_1+zx_2+2x_3)(zx_2+x_3)}.
\end{aligned}
\tag{A.31}
$$

Вычисление интегралов в пределе $\epsilon\to 0$ достаточно длинное, но не вызывает затруднение. Ниже приведены окончательные ответы для всех интегралов, кроме A_0, так как этот интеграл сокращается в конечном ответе для (1.112):

$$
\begin{aligned}
&A_{00}^0 = -\frac{\ln^2\alpha}{\epsilon/2}+\zeta(3), \quad A_{10}^0 = -\frac{\ln^2\alpha+\ln\alpha}{\epsilon/2}-\frac{\ln^2\alpha}{2}+\frac{\pi^2}{6}+\zeta(3),\\
&A_{01}^1 = \frac{\ln\alpha}{\epsilon/2}-\frac{\ln^2\alpha}{2}-2\ln\alpha-\frac{\pi^2}{3}+1, \quad A_{11}^1 = \frac{\ln\alpha}{\epsilon/2}-\frac{\ln^2\alpha}{2}-2\ln\alpha-\frac{\pi^2}{3},\\
&A_{00} = \frac{\ln\alpha}{\epsilon/2}+\frac{\ln^2\alpha}{2}+2\ln\alpha+\frac{\pi^2}{3}-1, \quad A_{11} = \frac{\ln\alpha+2}{\epsilon/2}+\frac{\ln^2\alpha}{2}+3\ln\alpha+\frac{\pi^2}{2},\\
&A_{10} = -\frac{1}{\alpha}-\frac{2\ln\alpha+3}{\epsilon/2}-\ln^2\alpha-5\ln\alpha-\frac{2\pi^2}{3}+3, \quad A_{01} = -\ln\alpha-\frac{\pi^2}{6}+1,\\
&A_1 = -\frac{2}{\alpha}+\frac{2\ln^2\alpha+4\ln\alpha}{\epsilon/2}-3\ln^2\alpha+8\ln2\ln\alpha-\frac{17}{2}\ln\alpha+4K_1(\alpha)+8J_3^{'}(\alpha)-\\
&\quad -\pi^2-2\zeta(3)-6\ln^2 2+10\ln 2-\frac{1}{2},\\
&A_2 = -\frac{\ln^2\alpha+2\ln\alpha}{\epsilon/2}-2\ln\alpha-3\ln2\ln\alpha-J_1(\alpha)-K_1(\alpha)-2J_3^{'}(\alpha)+A_0-\frac{\pi^2}{6}+1+\\
&\quad +\zeta(3)+3\ln^2 2-3\ln 2-3\,\mathrm{li}_2(1/2), \qquad A_3 = A_0-2\,\mathrm{li}_2\,(1/2)+\frac{\pi^2}{6}.
\end{aligned}
\tag{A.32}
$$

Здесь,

$$
\begin{aligned}
K_1(\alpha) &= \int\limits_{\alpha}^{1} dz\int[]\frac{x_2(x_1(x_2+x_3)+x_3^2)(x_ix_j)^{-2-\epsilon/2}}{(zx_2+x_3)(\alpha x_1+zx_2+2x_3)},\\
J_3^{'}(\alpha) &= \alpha\int\limits_{\alpha}^{1}\frac{dz}{z}\int[]\frac{x_2(x_1(x_2+x_3)+x_3^2)(x_ix_j)^{-2-\epsilon/2}}{(\alpha x_1+zx_2+2x_3)^2}.
\end{aligned}
\tag{A.33}
$$

Интегралы B - типа. Интегралы B - типа определены как

$$
B_\mu = \int\limits_{\alpha}^{1}\frac{dz}{z^\mu}\int[]\frac{x_1^{\mu-1}x_2x_3^{-\mu-\epsilon/2}(x_1+x_2)^{-\mu-\epsilon/2}}{(\alpha x_2+zx_3+x_1)}.
\tag{A.34}
$$

Вычисления в пределе $\epsilon\to 0$ дают

$$
B_1 = \frac{\ln\alpha}{\epsilon/2}+\frac{\ln^2\alpha}{2}+\ln\alpha, \qquad B_2 = -\frac{1}{\alpha}+\frac{\ln^2\alpha}{\epsilon/2}+\frac{2\ln\alpha}{\epsilon/2}-2\ln\alpha-2.
\tag{A.35}
$$

Интегралы C - типа. Интегралы C - типа содержат две дополнительные переменные интегрирования и определяются следующим образом:

$$C_{\mu\nu} = \int\limits_{\alpha}^{1} dzdy \int [] \frac{x_1^{\mu} x_2 x_3 (x_2 + x_3)^{1-\mu} (x_i x_j)^{-2-\epsilon/2}}{(zx_3 + x_1)(yx_2 + x_1)^{\nu}(zx_3 + yx_2)^{1-\nu}} \tag{A.36}$$

и

$$C_{\nu} = \int\limits_{\alpha}^{1} dz(1-z)^{\nu} \int\limits_{\alpha}^{1} dy \int [] \frac{x_2^{2-\nu} x_3^{1+\nu} (x_1 + x_2)^{\nu} (x_i x_j)^{-2-\epsilon/2}}{(zx_3 + x_1)(yx_2 + x_1)^{\nu}(zx_3 + yx_2 + 2x_1)}. \tag{A.37}$$

Вычисления в пределе $\epsilon \to 0$ приводят к следующим результатам:

$$\begin{aligned}
C_{00} &= \frac{\ln\alpha}{\epsilon/2} - \frac{\ln^2\alpha}{2} - 2\ln\alpha + \frac{\pi^2}{4}\ln 2 - \frac{\pi^2}{6} + \frac{15}{4}\zeta(3) - \frac{\pi^4}{24} - \frac{\pi^2}{6}\ln^2 2 + \frac{1}{6}\ln^4 2 + \\
&+ \frac{7}{2}\zeta(3)\ln 2 + 4\,\mathrm{li}_4(\frac{1}{2}), \quad C_{01} = \frac{2\ln\alpha}{\epsilon/2} - \ln^2\alpha - 4\ln\alpha - 2 - \zeta(3), \\
C_{11} &= \zeta(3), \quad C_0 = \frac{\ln\alpha}{\epsilon/2} - \frac{\ln^2\alpha}{2} - 2\ln\alpha - 1 - \zeta(3) - C_0', \\
C_1 &= 4\ln 2\ln\alpha + 2J_1(\alpha) - C_0' - 2 - \frac{\zeta(3)}{2} - 4\ln 2 - \frac{\pi^2}{6} + 4\boldsymbol{G}.
\end{aligned} \tag{A.38}$$

Здесь,

$$\begin{aligned}
J_1(\alpha) &= \int\limits_{\alpha}^{1} dz \int [] \frac{x_1(x_1 + x_3)(x_2 + x_3)(x_i x_j)^{-2-\epsilon/2}}{(zx_1 + x_3)(zx_1 + \alpha x_2 + 2x_3)}, \\
C_0' &= \int\limits_{\alpha}^{1} dzdy \int [] \frac{x_1 x_2^2 (x_i x_j)^{-2-\epsilon/2}}{(x_3 + yx_2)(zx_1 + yx_2 + 2x_3)}.
\end{aligned} \tag{A.39}$$

Интегралы D - типа. Интегралы D - типа определяются как

$$D_{\nu} = \int [] \frac{x_3^{\nu}(x_1 + x_2)^{\nu-1}(x_i x_j)^{-\nu-\epsilon/2}}{(\alpha x_1 + x_3)(\alpha x_2 + x_3)}. \tag{A.40}$$

В пределе $\epsilon \to 0$ получаем

$$D_1 = -\ln^2\alpha - \frac{\pi^2}{6}, \qquad D_2 = -2\ln\alpha. \tag{A.41}$$

Интегралы H - типа. Интегралы H - типа определяются как

$$H_{\nu} = \int\limits_{\alpha}^{1} dz(z-\alpha)^{2\nu} \int [] \frac{x_2^{2+\nu}(x_1 + x_3)(x_i x_j)^{-2-\epsilon/2}}{(\alpha x_1 + zx_2)(zx_2 + x_3)}. \tag{A.42}$$

В пределе $\epsilon \to 0$ находим

$$H_0 = -\ln\alpha + 1, \qquad H_1 = -\ln\alpha. \tag{A.43}$$

Интегралы S - типа. Интегралы S - типа определены как

$$S_{\mu\nu} = \int [] \frac{x_1^{\mu} x_2^{1+\nu-\mu}((2-\nu-\mu)x_1 + x_3)(x_i x_j)^{-2-\epsilon/2}}{(x_2+x_3)^{1+\nu}}, \tag{A.44}$$

$$S_{\nu} = \int [] (x_1+x_2)^{-1+2\nu}(x_i x_j)^{-1-\nu-\epsilon/2}. \tag{A.45}$$

В пределе $\epsilon \to 0$ находим

$$S_{00} = -\frac{2}{\epsilon} + 2, \quad S_{01} = -\frac{2}{3\epsilon} + \frac{8}{9}, \quad S_{11} = -\frac{1}{3\epsilon} + \frac{1}{9}, \quad S_0 = -\frac{2}{\epsilon} + 2, \quad S_1 = -\frac{4}{\epsilon} + 2. \tag{A.46}$$

Интегралы T - типа. Интегралы T - типа определены как

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu}^{\eta} &= \frac{(1-\alpha)^{\eta}}{\alpha^{\mu}} \int [] \frac{x_1^{2-\eta} x_2^{\mu+\eta-1} x_3^{-1-\mu-\epsilon/2}(x_1+x_2)^{-2-\epsilon/2}}{(\alpha x_2 + \nu\alpha x_3 + x_1)}, \\ T_{\mu\nu} &= \int [] \frac{x_1^{2\nu-2}(x_1+x_2)^{-\nu-\epsilon}(x_1+x_3+(\alpha+\mu)x_2)}{x_3^{\nu+\epsilon/2}(\alpha x_2 + (1+\mu)x_3 + x_1)(x_1+x_3+\alpha x_2)}. \end{aligned} \tag{A.47}$$

В пределе $\epsilon \to 0$ имеем

$$\begin{aligned} &T_{10}^{0} = -\frac{1}{\alpha} + 1, \quad T_{11}^{0} = -\frac{1}{\alpha} + \frac{2}{\epsilon} + \ln\alpha + 1, \quad T_{20}^{0} = \frac{1}{6\alpha^2} - \frac{1}{3\alpha} - \ln\alpha - \frac{11}{12}, \\ &T_{21}^{0} = \frac{1}{6\alpha^2} + \frac{2}{3\alpha} + \frac{\ln\alpha + 5/2}{\epsilon} + \frac{\ln^2\alpha}{2} + 4\ln\alpha + \frac{17}{12}, \quad T_{10}^{1} = -\frac{1}{\alpha} - 2\ln\alpha - 2, \\ &T_{01} = \frac{\ln\alpha}{\epsilon/2} - \frac{\ln^2\alpha}{2}, \quad T_{02} = \frac{2}{\epsilon}, \\ &T_{12} = -\frac{3\ln\alpha + 11/2}{\epsilon/2} + \frac{3\ln^2\alpha}{2} + \frac{9\ln\alpha}{2} - 4\ln 2\ln\alpha + \frac{\pi^2}{6} - 4\,\mathrm{li}_2\left(\frac{1}{2}\right) - 12\ln 2 + \frac{27}{4}. \end{aligned} \tag{A.48}$$

Б Приложения к главе 2

Б.1 Нулевые моды

В этом приложении представлен анализ связи нулевых мод флуктуаций около инстантона с его степенями свободы, описываемых матрицами R и $\mathcal{T}_0$ в уравнении (2.22). Запишем инстантонное решение в виде $Q_{\text{inst}}(\xi_i) = U_{\text{inst}}^{-1}(\xi_i)\Lambda U_{\text{inst}}(\xi_i)$, где $U_{\text{inst}} = R\,\mathcal{T}_0$ и ξ_i обозначает параметры z_0, λ и элементы матрицы $\mathcal{T}_0$. При малом изменении параметров $\xi_i \to \xi_i + \varepsilon_i$ инстантонное решение может быть записано в форме уравнения (2.22): $Q_{\text{inst}}(\xi_i + \varepsilon_i) = U_{\text{inst}}^{-1}(\xi_i)\mathcal{V}_\varepsilon U_{\text{inst}}(\xi_i)$, где в линейном порядке по ε_i матрица $\mathcal{V}_\varepsilon$ имеет вид

$$\mathcal{V}_\varepsilon = \Lambda - \varepsilon_i \left[U_{\text{inst}} \frac{\partial}{\partial \xi_i} U_{\text{inst}}^{-1}, \Lambda\right] = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 2\varepsilon_i \left[U_{\text{inst}} \frac{\partial}{\partial \xi_i} U_{\text{inst}}^{-1}\right]^{\alpha\beta}_{n_1 n_2} \\ -2\varepsilon_i \left[U_{\text{inst}} \frac{\partial}{\partial \xi_i} U_{\text{inst}}^{-1}\right]^{\alpha\beta}_{n_2 n_1} & -\mathbf{1} \end{pmatrix}. \tag{Б.1}$$

Сравнивая это выражение с уравнением (2.22), можно связать изменение параметров инстантона с матричными полями $w, w^\dagger$:

$$w^{\alpha\beta}_{n_1 n_2} = 2\varepsilon_i \left[U_{\text{inst}} \frac{\partial}{\partial \xi_i} U_{\text{inst}}^{-1}\right]^{\alpha\beta}_{n_1 n_2}, \qquad \left[w^\dagger\right]^{\alpha\beta}_{n_2 n_1} = -2\varepsilon_i \left[U_{\text{inst}} \frac{\partial}{\partial \xi_i} U_{\text{inst}}^{-1}\right]^{\alpha\beta}_{n_2 n_1}. \tag{Б.2}$$

Раскладывая матрицу $\mathcal{T}_0$ около единичной матрицы, $\mathcal{T}_0 = 1 + i\,t$, а матрицу R около $R(\lambda, z_0)$:

$$R(\lambda + \delta\lambda, z_0 + \delta z_0) = R(\lambda, z_0) + \delta\lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} R + \delta z_0 \frac{\partial}{\partial z_0} R, \tag{Б.3}$$

находим, что выражение для w имеет следующий вид

$$w^{\alpha\beta}_{n_1 n_2} = 2i\left[RtR^{-1}\right]^{\alpha\beta}_{n_1 n_2} + 2\delta\lambda \left[R \frac{\partial}{\partial \lambda} R^{-1}\right]^{\alpha\beta}_{n_1 n_2} + 2\delta z_0 \left[R \frac{\partial}{\partial z_0} R^{-1}\right]^{\alpha\beta}_{n_1 n_2}. \tag{Б.4}$$

Расписывая явно правую часть выражения (Б.4), можно получить соотношения, приведённые в таблице 2.1.

Б.2 Детали вычисления отношения Z_{+1}/Z_0

В этом приложении представлены детали вывода выражения (2.31) для отношения Z_{+1}/Z_0.

Действие для флуктуаций около инстантона в квадратичном приближении

Раскладывая действие (2.1), в котором член $\mathcal{S}_F$ определяется выражением (2.30) с матрицей Q, представленной в виде (2.22) с $\mathcal{T}_0 = 1$, до второго порядка по W, находим следующее

Таблица 4.1: Вклады $\delta\mathcal{S}_1$, $\delta\mathcal{S}_2^{(0)}$ и $\delta\mathcal{S}_2^{(1)}$ в действие для флуктуаций около инстантона в квадратичном приближении.

$$
\begin{aligned}
\delta\mathcal{S}_2^{(0)} = & - \frac{\sigma_{xx}}{4}\int d\eta d\theta \sum_{\alpha,\beta>1}\sum_{n_1\cdots n_4}\delta_{n_{12},n_{34}}\times w^{\alpha\beta}_{n_1n_2}\Big[(O^{(0)}+\kappa^2 z n_{12})\delta_{n_1n_3}+\kappa^2\Gamma_{00}\delta^{\alpha\beta}\Big]w^{\dagger\beta\alpha}_{n_4n_3}\\
\delta\mathcal{S}_2^{(1)} = & - \frac{\sigma_{xx}}{4}\int d\eta d\theta \sum_{\alpha>1}\Bigg\{\sum_{n_1n_2}{}''\Big[w^{1\alpha}_{n_1n_2}(O^{(0)}+\kappa^2 z n_{12})w^{\dagger\alpha 1}_{n_2n_1}+w^{\alpha 1}_{n_1n_2}(O^{(0)}+\kappa^2 z n_{12})w^{\dagger 1\alpha}_{n_2n_1}\Big]+\\
& + \sum_{n_1}{}' w^{1\alpha}_{n_1,-1}(O^{(0)}+\kappa^2 z(n_1+1))w^{\dagger\alpha 1}_{-1,n_1}+\sum_{n_2}{}' w^{\alpha 1}_{0n_2}(O^{(0)}-\kappa^2 z n_2)w^{\dagger 1\alpha}_{n_20}+\\
& + \sum_{n_1} w^{\alpha 1}_{n_1,-1}\Big(O^{(1)}+\kappa^2 z(n_1+1)-\kappa^2\Gamma_{00}e_0^2\Big(2|e_1|^2+\gamma_s^{-1}\Big)\Big)w^{\dagger 1\alpha}_{-1,n_1}+\\
& + \sum_{n_2} w^{1\alpha}_{0n_2}\Big(O^{(1)}-\kappa^2 z n_2-\kappa^2\Gamma_{00}e_0^2\Big(2|e_1|^2+\gamma_s^{-1}\Big)\Big)w^{\dagger\alpha 1}_{n_20}\Bigg\}+\\
& + \frac{\sigma_{xx}}{4}\kappa^2\Gamma_{00}\int d\eta d\theta\sum_{\alpha>1}\Bigg\{\sum_{n_1,n_2}{}'' e_0\Big[\bar{e}_1 w^{1\alpha}_{n_1+1,n_2}w^{\dagger\alpha 1}_{n_2n_1}+e_1 w^{1\alpha}_{n_1n_2}w^{\dagger\alpha 1}_{n_2,n_1+1}-\\
& - \bar{e}_1 w^{\alpha 1}_{n_1,n_2-1}w^{\dagger 1\alpha}_{n_2n_1}-e_1 w^{\alpha 1}_{n_1n_2}w^{\dagger 1\alpha}_{n_2-1,n_1}\Big]+\\
& + \sum_{n_1}{}' e_0\Big[\bar{e}_1 w^{1\alpha}_{n_1+1,-1}w^{\dagger\alpha 1}_{-1,n_1}+e_1 w^{1\alpha}_{n_1,-1}w^{\dagger\alpha 1}_{-1,n_1+1}-e_1^2 w^{\alpha 1}_{n_1,-2}w^{\dagger 1\alpha}_{-1,n_1}-\bar{e}_1^2 w^{\alpha 1}_{n_1,-1}w^{\dagger 1\alpha}_{-2,n_1}\Big]-\\
& - \sum_{n_2}{}' e_0\Big[\bar{e}_1 w^{\alpha 1}_{0,n_2-1}w^{\dagger 1\alpha}_{n_2,0}+e_1 w^{\alpha 1}_{0,n_2}w^{\dagger 1\alpha}_{n_2-1,0}-e_1^2 w^{1\alpha}_{1,n_2}w^{\dagger\alpha 1}_{n_2,0}-\bar{e}_1^2 w^{1\alpha}_{0,n_2}w^{\dagger\alpha 1}_{n_2,1}\Big]\Bigg\}\\
\delta\mathcal{S}_1 = & - \frac{\sigma_{xx}}{2}\kappa^2\Gamma_{00}\int d\eta d\theta\Bigg\{e_0^2(\bar{e}_1 w^{11}_{0,-2}+e_1 w^{\dagger 11}_{-2,0}-\bar{e}_1 w^{11}_{1,-1}-e_1 w^{\dagger 11}_{-1,1})+\\
& + e_0(1-2e_0^2)(\bar{e}_1 w^{11}_{0,-1}+e_1 w^{\dagger 11}_{-1,0})\Bigg\}
\end{aligned}
$$

действие для флуктуаций w и $w^\dagger$ около инстантона

$$\delta\mathcal{S} = \delta\mathcal{S}_1+\delta\mathcal{S}_2^{(0)}+\delta\mathcal{S}_2^{(1)}+\delta\mathcal{S}_2^{(2)}. \tag{Б.5}$$

Различные вклады $\delta\mathcal{S}_1$, $\delta\mathcal{S}_2^{(0)}$, $\delta\mathcal{S}_2^{(1)}$, $\delta\mathcal{S}_2^{(2)}$ представлены в таблицах 4.1 и 4.2. Для краткости использованы обозначения $\kappa^2 = 8\pi T/\sigma_{xx}$ и $n_{12} = n_1 - n_2$. Заметим, что вклад для флуктуаций около тривиального решения $Q = \Lambda$ получается обращением в нуль функций e_0 и e_1, и замены всех операторов $O^{(a)}$ на $O^{(0)}$.

Линейные по w и $w^\dagger$ члены, выписанные в таблице 4.1, могут быть записаны в виде

Таблица 4.2: Вклад $\delta\mathbb{S}_2^{(2)}$ в действие для флуктуаций около инстантона в квадратичном приближении.

$$
\begin{aligned}
\delta\mathbb{S}^{(2)} &= -\frac{\sigma_{xx}}{4}\int d\eta d\theta\Bigg\{\sum_{n_1\cdots n_4}{}'''' w^{11}_{n_1n_2}\Big((O^{(0)}+\kappa^2 zn_{12})\delta_{n_1n_3}\delta_{n_2n_4}+\kappa^2\Gamma_{00}\delta_{n_{12},n_{34}}\Big)w^{\dagger 11}_{n_4n_3}+\\
&+ \sum_{n_1}{}' w^{11}_{n_1,-1}\Big(O^{(1)}+\kappa^2 z(n_1+1)+\kappa^2\Gamma_{00}-\kappa^2\Gamma_{00}e_0^2\Big(2|e_1|^2+\gamma_s^{-1}\Big)\Big)w^{\dagger 11}_{-1,n_1}+\\
&+ \sum_{n_2}{}' w^{11}_{0n_2}\Big(O^{(1)}-\kappa^2 zn_2+\kappa^2\Gamma_{00}-\kappa^2\Gamma_{00}e_0^2\Big(2|e_1|^2+\gamma_s^{-1}\Big)\Big)w^{\dagger 11}_{n_20}+\\
&+ w^{11}_{0,-1}\Big(O^{(2)}+\kappa^2 z(1+\gamma_s)-2\kappa^2\Gamma_{00}e_0^2\Big(3|e_1|^2+\gamma_s^{-1}\Big)\Big)w^{\dagger 11}_{-1,0}\Bigg\}+\\
&+ \frac{\sigma_{xx}}{4}\kappa^2\Gamma_{00}\int d\eta d\theta\Bigg\{\sum_{n_1,n_2}{}''\Big[e_0\bar{e}_1 w^{11}_{n_1+1,n_2}w^{\dagger 11}_{n_2n_1}+e_0e_1w^{11}_{n_1n_2}w^{\dagger 11}_{n_2,n_1+1}-\\
&- e_0\bar{e}_1 w^{11}_{n_1,n_2-1}w^{\dagger 11}_{n_2n_1}-e_0e_1w^{11}_{n_1n_2}w^{\dagger 11}_{n_2-1,n_1}\Big]-\\
&- \sum_{n_1\cdots n_3}{}'''\Big[w^{11}_{n_1n_2}(\bar{e}_1\delta_{n_{12},n_3+1}-e_0\delta_{n_{12},n_3})w^{\dagger 11}_{-1,n_3}+w^{11}_{n_3,-1}(e_1\delta_{n_{12},n_3+1}-e_0\delta_{n_{12},n_3})w^{\dagger 11}_{n_2n_1}\Big]-\\
&- \sum_{n_2\cdots n_4}{}'''\Big[w^{11}_{n_3n_2}(\bar{e}_1\delta_{n_{32},-n_4}+e_0\delta_{n_{32},1-n_4})w^{\dagger 11}_{n_4,0}+w^{11}_{0,n_4}(e_1\delta_{n_{32},-n_4}+e_0\delta_{n_{32},1-n_4})w^{\dagger 11}_{n_2n_3}\Big]-\\
&- e_0\sum_{n_1}{}'\Big[\bar{e}_1^2 w^{11}_{n_1,-2}w^{\dagger 11}_{-1,n_1}+e_1^2 w^{11}_{n_1,-1}w^{\dagger 11}_{-2,n_1}-2\bar{e}_1 w^{11}_{n_1+1,-1}w^{\dagger 11}_{-1,n_1}-2e_1w^{11}_{n_1,-1}w^{\dagger 11}_{-1,n_1+1}\Big]+\\
&+ e_0\sum_{n_2}{}'\Big[\bar{e}_1^2 w^{11}_{1,n_2}w^{\dagger 11}_{n_2,0}+e_1^2 w^{11}_{0,n_2}w^{\dagger 11}_{n_2,1}-2\bar{e}_1 w^{11}_{0,n_2-1}w^{\dagger 11}_{n_2,0}-2e_1w^{11}_{0,n_2}w^{\dagger 11}_{n_2-1,0}\Big]-\\
&- (1-2e_0^2)\sum_{n_1}{}'\Big[w^{11}_{n_1,-1}w^{\dagger 11}_{-n_1-1,0}+w^{11}_{0,-n_1-1}w^{\dagger 11}_{-1,n_1}\Big]+\\
&+ e_0(\bar{e}_1-e_1)\sum_{n_1}{}'\Big[w^{11}_{n_1,-1}w^{\dagger 11}_{-n_1,0}-w^{11}_{0,-n_1}w^{\dagger 11}_{-1,n_1}\Big]+\\
&+ e_0(\bar{e}_1^2 w^{11}_{1,-1}w^{11}_{0,-1}+e_1^2 w^{\dagger 11}_{-1,1}w^{\dagger 11}_{-1,0}-\bar{e}_1^2 w^{11}_{0,-2}w^{11}_{0,-1}-e_1^2 w^{\dagger 11}_{-2,0}w^{\dagger 11}_{-1,0})+\\
&+ e_0^2\Big[e_1^2 w^{\dagger 11}_{-1,0}w^{\dagger 11}_{-1,0}+\bar{e}_1^2 w^{11}_{0,-1}w^{11}_{0,-1}\Big]\Bigg\}
\end{aligned}
$$

собственных функций $\Phi^{(a)}_{JM}$:

$$\begin{aligned}
\int d\eta d\theta \left(e_0^2\bar{e}_1 w^{11}_{0,-2} + e_0^2 e_1 w^{\dagger 11}_{-2,0}\right) &\propto \int d\eta d\theta \Big(\bar{\Phi}^{(1)}_{2,1} w^{11}_{0,-2} + \Phi^{(1)}_{2,1} w^{\dagger 11}_{-2,0}\Big),\\
\int d\eta d\theta \left(e_0^2\bar{e}_1 w^{11}_{1,-1} + e_0^2 e_1 w^{11}_{-1,1}\right) &\propto \int d\eta d\theta \Big(\bar{\Phi}^{(1)}_{2,1} w^{11}_{1,-1} + \Phi^{(1)}_{2,1} w^{\dagger 11}_{-1,1}\Big),\\
\int d\eta d\theta \left(e_0^3\bar{e}_1 w^{11}_{0,-1} + e_0^3 e_1 w^{\dagger 11}_{-1,0}\right) &\propto \int d\eta d\theta \Big(\bar{\Phi}^{(2)}_{2,1} w^{11}_{0,-1} + \Phi^{(2)}_{2,1} w^{\dagger 11}_{-1,0}\Big).
\end{aligned} \tag{Б.6}$$

Так как собственные энергии, отвечающие функциям $\Phi^{(1)}_{2,1}$ и $\Phi^{(2)}_{2,1}$, не равны нулю, то эти линейные члены приводят к поправкам к классическому действию порядка $O(T^2)$, которыми поэтому можно пренебречь. Последний линейный вклад оказывается пропорциональным $\delta\lambda/\lambda$:

$$\int d\eta d\theta \Big(e_0\bar{e}_1 w^{11}_{0,-1} + e_0 e_1 w^{\dagger 11}_{-1,0}\Big) \propto \int d\eta d\theta \Big(\bar{\Phi}^{(2)}_{1,-1} w^{11}_{0,-1} + \Phi^{(2)}_{1,-1} w^{\dagger 11}_{-1,0}\Big) \propto \frac{\delta\lambda}{\lambda}. \tag{Б.7}$$

Это означает неустойчивость флуктуаций, связанных с изменением размера инстантона. В дальнейшем, вычисляются поправки первого порядка по T к классическому действию от массивных мод, а линейный вклад (Б.7) учитывается уже при интегрировании по нулевым модам.

Регуляризация Паули-Вилларса

Для работы с расходимостями, возникающими после интегрирования по флуктуациям, удобно использовать регуляризацию Паули-Вилларса [246], в которой действие $\delta\mathcal{S}$ для квантовых флуктуаций заменяется на регуляризованное действие

$$\delta\mathcal{S}_{\text{reg}} = \delta\mathcal{S}_0 + \sum_{f=1}^{K} e_f \delta\mathcal{S}_f. \tag{Б.8}$$

Здесь $\delta\mathcal{S}_f$ для $f = 1, \dots, K$ определяется выражением для квадратичной по флуктуациям части $\delta\mathcal{S}$, в которой все операторы $O^{(a)}$ заменены на $O^{(a)} + M_f^2$. Массы Паули-Вилларса предполагаются большими, $M_f \gg 1$, а знакопеременные величины e_f $(f = 1, \dots, K)$ удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\sum_{f=1}^{K} e_f M_f^k = 0, \qquad 0 \leqslant k < K, \qquad \sum_{f=1}^{K} e_f \ln M_f = -\ln M_\lambda. \tag{Б.9}$$

Квантовые поправки к классическому действию

Вклад от интеграла по массивным флуктуациям в отношение Z_{+1}/Z_0 может быть представлен в виде

$$\left[\frac{Z_{+1}}{Z_0}\right]_{\text{mass}} = \exp\Big[-2\pi\sigma_{xx} + i\theta + \mathcal{S}_F^{\text{inst}} + \Delta\mathcal{S}_\sigma + \Delta\mathcal{S}_F\Big]. \tag{Б.10}$$

Здесь квантовые поправки $\Delta\mathcal{S}_\sigma$ и $\Delta\mathcal{S}_F$ выражаются через пропагаторы

$$\mathcal{G}_a(\omega) = \sum_{JM} \frac{|JM\rangle_{(a)(a)}\langle JM|}{E_J^{(a)} + \omega}, \quad \mathcal{G}_a^{(00)}(\omega) = \sum_{JM} \frac{|JM\rangle_{(a)(a)}\langle JM|}{E_J^{(a)} + (1+\gamma_s)\omega}, \tag{Б.11}$$

аналогичные пропагаторам (1.14) в плоской метрике. Раскладывая экспоненту с недиагональными членами из $\delta\mathcal{S}$ (см. таблицы 4.1 и 4.2) до второго порядка, в пределе $T \to 0$ и $N_r \to 0$ находим

$$\Delta\mathcal{S}_\sigma = 2\,\mathrm{tr}[\ln\mathcal{G}_1(0) - \ln\mathcal{G}_0(0)] - \mathrm{tr}[\ln\mathcal{G}_2(0) - \ln\mathcal{G}_0(0)] - 2\gamma_s \int_0^\infty d\omega\,\mathrm{tr}[\mathcal{G}_1(\omega) - \mathcal{G}_0(\omega)] +$$
$$+ 2\gamma_s^2 \int_0^\infty d\omega\,\omega\,\mathrm{tr}[\bar{e}_1\mathcal{G}_0^{(00)}(\omega)e_1\mathcal{G}_1(\omega) + e_0\mathcal{G}_0^{(00)}(\omega)e_0\mathcal{G}_1(\omega) - \mathcal{G}_0^{(00)}(\omega)\mathcal{G}_0(\omega)] \tag{Б.12}$$

и

$$\Delta\mathcal{S}_F = 2\kappa^2 z\Bigg\{\mathrm{tr}\Big[(1+\gamma_s+\gamma_s^2)(\mathcal{G}_1(0) - \mathcal{G}_0(0)) - \frac{1+\gamma_s}{2}(\mathcal{G}_2(0) - \mathcal{G}_0(0))\Big] +$$
$$+ \mathrm{tr}\Big[-(1+\gamma_s)(2\gamma_s|e_1|^2+1)e_0^2\mathcal{G}_1(0) + (3\gamma_s|e_1|^2+1)e_0^2\mathcal{G}_2(0) - 2\gamma_s^2 e_0^2\mathcal{G}_1(0)\Big] -$$
$$- \gamma_s^3 \int_0^\infty d\omega\,\omega\,\mathrm{tr}\Big[\bar{e}_1\mathcal{G}_0^{(00)}(\omega)e_1\mathcal{G}_1^2(\omega) + e_0\mathcal{G}_0^{(00)}(\omega)e_0\mathcal{G}_1^2(\omega) - \mathcal{G}_0^{(00)}(\omega)\mathcal{G}_0^2(\omega)\Big] +$$
$$+ \gamma_s^2 \int_0^\infty d\omega\,\omega\,\mathrm{tr}\Big[\bar{e}_1\mathcal{G}_0^{(00)}(\omega)e_1 + e_0\mathcal{G}_0^{(00)}(\omega)e_0\Big]\mathcal{G}_1(\omega)e_0^2(2\gamma_s|e_1|^2+1)\mathcal{G}_1(\omega) +$$
$$+ 2\gamma_s^2 \int_0^\infty d\omega\,\mathrm{tr}\Big[e_0^2\mathcal{G}_1(\omega)e_0^2\mathcal{G}_1(\omega)\Big] + 5\gamma_s^2 \int_0^\infty d\omega\quad\mathrm{tr}\Big[e_0e_1\mathcal{G}_1(\omega)e_0\bar{e}_1\mathcal{G}_1(\omega)\Big] -$$
$$- \gamma_s^2 \int_0^\infty d\omega\,\mathrm{tr}\Big[e_0e_1\mathcal{G}_0(\omega)e_0\bar{e}_1\mathcal{G}_0(\omega)\Big] - \gamma_s^2 \int_0^\infty d\omega\,\omega\,\mathrm{tr}\Big[e_0\mathcal{G}_0^{(00)}(\omega)e_0\mathcal{G}_1^2(\omega)\Big] +$$
$$+ 4\gamma_s^3 \int_0^\infty d\omega\,\omega\,\mathrm{tr}\Big[e_0e_1\mathcal{G}_1(\omega)e_0\mathcal{G}_0^{(00)}(\omega)\bar{e}_1\mathcal{G}_1(\omega)\Big]\Bigg\}. \tag{Б.13}$$

Таблица 4.3: Ненулевые матричные элементы, необходимые для вычисления $\Delta\mathcal{S}_\sigma$ и $\Delta\mathcal{S}_F$ $({}_{(a)}\langle J,M|f|M',J'\rangle_{(b)} = \int d\eta d\theta\, \Phi^{(a)}_{J,M}(\eta,\theta) f(\eta,\theta)\bar{\Phi}^{(b)}_{J',M'}(\eta,\theta))$.

${}_{(0)}\langle J,M|\bar{e}_1|M-1,J\rangle_{(1)} = \sqrt{\frac{J+M}{2(2J+1)}}$	${}_{(0)}\langle J,M+1|e_0\bar{e}_1|M,J+1\rangle_{(0)} = -\sqrt{\frac{(J-M)(J-M+1)}{4(2J+1)(2J+3)}}$
${}_{(0)}\langle J,M|e_0|M,J\rangle_{(1)} = -\sqrt{\frac{J-M}{2(2J+1)}}$	${}_{(1)}\langle J,M-1|e_0 e_1|M,J-1\rangle_{(1)} = \frac{\sqrt{(J-M)(J-M-1)}}{2(2J-1)}$
${}_{(1)}\langle J,M|e_0^2|M,J-1\rangle_{(1)} = -\frac{\sqrt{(J-M-1)(J+M)}}{2(2J-1)}$	${}_{(1)}\langle J,M|e_0^2|M,J\rangle_{(1)} = \frac{1}{2}\left[1+\frac{2M+1}{4J^2-1}\right]$
${}_{(1)}\langle J,M|e_0^2|M,J+1\rangle_{(1)} = -\frac{\sqrt{(J+M+1)(J-M)}}{2(2J+1)}$	${}_{(1)}\langle J,M-1|e_0 e_1|M,J+1\rangle_{(1)} = \frac{\sqrt{(J+M)(J+M+1)}}{2(-2J-1)}$
${}_{(0)}\langle J,M|e_0|M,J+1\rangle_{(1)} = \sqrt{\frac{J+M+1}{2(2J+1)}}$	${}_{(1)}\langle J,M-1|e_0 e_1|M,J\rangle_{(1)} = \frac{\sqrt{(J-M)(J+M+1)}}{4J^2-1}$
${}_{(2)}\langle J,M|e_0^2|M,J\rangle_{(2)} = \frac{1}{2}\frac{M+1}{J(J+1)}$	${}_{(0)}\langle J,M|e_0\bar{e}_1|M-1,J-1\rangle_{(0)} = \sqrt{\frac{(J+M-1)(J+M)}{4(2J-1)(2J+1)}}$
${}_{(0)}\langle J,M|\bar{e}_1|M-1,J+1\rangle_{(1)} = \sqrt{\frac{J-M+1}{2(2J+1)}}$	${}_{(2)}\langle J,M|e_0^4|M,J\rangle_{(2)} = \frac{(M+1)(3M-J(J+1)(M-3))-J^2(J+1)^2}{2J(J+1)(2J-1)(2J+3)}$
$\sum\limits_{M=-J}^{J-1} {}_{(1)}\langle J,M|e_0^2|e_1|^2|M,J\rangle_{(1)} = \frac{J}{3}$	$\sum\limits_{M=-J-1}^{J-1} {}_{(2)}\langle J,M|e_0^2|e_1|^2|M,J\rangle_{(2)} = \frac{2J+1}{6}$

Используя выражения для матричных элементов, приведённые в таблице 4.3, находим

$$\Delta\mathcal{S}_\sigma = 2(1+\gamma_s)D^{(1)} - D^{(2)} + 2\gamma_s\Big(H^{(1)}\ln(1+\gamma_s) - H^{(2)} + \gamma_s H^{(3)}\Big), \quad \Delta\mathcal{S}_F = 2\kappa^2 z^2\sum_{i=1}^{9} B^{(i)}, \tag{Б.14}$$

где величины $D^{(r)}$, $H^{(i)}$ и $B^{(i)}$ определены следующим образом:

$$D^{(r)} = \sum_{J=1}^{\infty}(2J+r-1)\ln E_J^{(r)} - \sum_{J=0}^{\infty}(2J+1)\ln E_J^{(0)}, \qquad H^{(1)} = \sum_{J=0}^{\infty}\sum_{J_1=J}^{J+1}\frac{J_1(E_J^{(0)}-E_{J_1}^{(1)})}{E_J^{(0)}-(1+\gamma_s)E_{J_1}^{(1)}},$$

$$H^{(2)} = \sum_{J=0}^{\infty}\sum_{J_1=J}^{J+1}\frac{J_1(E_J^{(0)}-E_{J_1}^{(1)})\ln E_J^{(0)}}{E_J^{(0)}-(1+\gamma_s)E_{J_1}^{(1)}}, \qquad H^{(3)} = \sum_{J=0}^{\infty}\sum_{J_1=J}^{J+1}\frac{J_1 E_{J_1}^{(1)}\ln E_{J_1}^{(1)}}{E_J^{(0)}-(1+\gamma_s)E_{J_1}^{(1)}}, \tag{Б.15}$$

и

$$\begin{aligned}
B^{(1)} &= (1+\gamma_s+\gamma_s^2)(Y^{(1)}-Y^{(0)}) - \frac{1+\gamma_s}{2}(Y^{(2)}-Y^{(0)}),\\
B^{(2)} &= -\frac{(1+\gamma_s)(2\gamma_s+1)}{6}Y^{(1)} + \frac{1+\gamma_s}{2}Y^{(2)} - \gamma_s^2 Y^{(1)},\\
B^{(3)} &= -\gamma_s^3\sum_{J=0}^{\infty}\sum_{J_1=J}^{J+1} J_1 K_{\gamma_s}(E_J^{(0)},E_{J_1}^{(1)}) + \gamma_s^3\sum_{J=0}^{\infty}(2J+1)K_{\gamma_s}(E_J^{(0)},E_J^{(0)}),\\
B^{(4)} &= \frac{\gamma_s^2}{2}\left(\frac{2\gamma_s}{3}+1\right)\sum_{J=0}^{\infty}\sum_{J_1=J}^{J+1} J_1 K_{\gamma_s}(E_J^{(0)},E_{J_1}^{(1)}),
\end{aligned} \tag{Б.16}$$

$$
\begin{aligned}
B^{(5)} &= 2\gamma_s^2 \sum_{J=1}^{\infty} \left[\frac{J(6J^2-1)}{3(4J^2-1)} \frac{1}{E_J^{(1)}} + \frac{J(J+1)}{3(2J+1)} L(E_J^{(1)}, E_{J+1}^{(1)}) \right], \\
B^{(6)} &= \frac{5\gamma_s^2}{3} \sum_{J=1}^{\infty} \left[\frac{J}{4J^2-1} \frac{1}{E_J^{(1)}} + 2\frac{J(J+1)}{2J+1} L(E_J^{(1)}, E_{J+1}^{(1)}) \right], \\
B^{(7)} &= -\frac{\gamma_s^2}{3} \sum_{J=0}^{\infty} (J+1) L(E_J^{(1)}, E_{J+1}^{(1)}), \qquad B^{(8)} = -\frac{\gamma_s^2}{2} \sum_{J=0}^{\infty} \sum_{J_1=J}^{J+1} J_1 K_{\gamma_s}(E_J^{(0)}, E_{J_1}^{(1)}), \\
B^{(9)} &= -\frac{\gamma_s^3}{3} \sum_{J=0}^{\infty} \frac{(2J+1)^2+2}{2J+1} F_{\gamma_s}(E_J^{(0)}, E_J^{(1)}, E_{J+1}^{1)}).
\end{aligned} \tag{Б.17}
$$

Здесь для краткости введены следующие функции:

$$
\begin{gathered}
Y^{(s)} = \sum_{J=1}^{\infty} \frac{2J+(s-1)^2}{E_J^{(r)}}, \qquad K_\alpha(x,y) = \frac{x}{(x-\alpha y)^2} \ln \frac{x}{\alpha y} - \frac{1}{x-\alpha y}, \\
L(x,y) = \frac{\ln x - \ln y}{x-y}, \qquad F_\alpha(x,y,z) = \frac{1}{y-z} \left[\frac{y}{x-\alpha y} \ln \frac{x}{\alpha y} - \frac{z}{x-\alpha z} \ln \frac{x}{\alpha z} \right].
\end{gathered} \tag{Б.18}
$$

Регуляризованные выражения

Рассмотрим функцию $\Phi^{(\Lambda)}(p) = \sum_{J=p}^{\Lambda} 2J \ln(J^2-p^2)$. Тогда, согласно уравнению (Б.8), регуляризованная функция $\Phi_{\text{reg}}^{(\Lambda)}(p)$ имеет вид

$$
\Phi_{\text{reg}}^{(\Lambda)}(p) = \sum_{f=1}^{K} e_f \sum_{J=p}^{\Lambda} 2J \ln(J^2-p^2+M_f^2) + \sum_{J=p+1}^{\Lambda} 2J \ln(J^2-p^2). \tag{Б.19}
$$

С помощью $\Phi_{\text{reg}}^{(\Lambda)}(p)$ регуляризованное выражение для $D^{(r)}$ может быть записано в виде

$$
D_{\text{reg}}^{(r)} = \lim_{\Lambda\to\infty} \left[\Phi_{\text{reg}}^{(\Lambda)}\left(\frac{1+r}{2}\right) - \Phi_{\text{reg}}^{(\Lambda)}\left(\frac{1}{2}\right) \right]. \tag{Б.20}
$$

Предполагая, что массы Паули-Вилларса M_f удовлетворяют условию $\Lambda \gg M_f \gg 1$, получаем

$$
\Phi_{\text{reg}}^{(\Lambda)}(p) = -2\Lambda(\Lambda+1)\ln\Lambda + \Lambda^2 - \frac{\ln e\Lambda}{3} + 4\sum_{J=1}^{\Lambda} J\ln J + \frac{1-6p}{3}\ln M_\lambda + 2p^2 - 2\sum_{J=1}^{2p}(J-p)\ln J. \tag{Б.21}
$$

Отсюда, находим, что

$$
D_{\text{reg}}^{(1)} = -\ln M_\lambda + \frac{3}{2} - 2\ln 2, \qquad D_{\text{reg}}^{(2)} = -2\ln M_\lambda + 4 - 3\ln 3 - \ln 2. \tag{Б.22}
$$

Аналогичные вычисления приводят к следующим результатам для $H^{(i)}_{\rm reg}$:

$$H^{(1)}_{\rm reg} = -\frac{1+\gamma_s}{\gamma_s^2}\left[2\ln M_\lambda + 1 - \psi\left(\frac{3\gamma_s+1}{\gamma_s}\right) - \psi\left(-\frac{1}{\gamma_s}\right)\right],$$
$$H^{(2)}_{\rm reg} = -\lim_{\Lambda\to\infty}\Phi^{(\Lambda)}_{\rm reg}\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1+\gamma_s}{\gamma_s^2}\Big[2\ln M_\lambda + 1 + 2\ln^2 M_\lambda + 4\gamma_S + g\big(-1-\gamma_s^{-1}\big) + g\big(2+\gamma_s^{-1}\big)\Big],$$
$$H^{(3)}_{\rm reg} = -\frac{1}{\gamma_s}\lim_{\Lambda\to\infty}\Phi^{(\Lambda)}_{\rm reg}(1) - \frac{2\ln M_\lambda + 1}{\gamma_s^3} - \frac{1+\gamma_s}{\gamma_s^3}\Big[2\ln^2 M_\lambda + 4\gamma_S + g\left(-\gamma_s^{-1}\right) + g\left(2+\gamma_s^{-1}\right) +$$
$$+ \frac{2\gamma_s^2\ln 2}{1+2\gamma_s}\Big]. \tag{Б.23}$$

Здесь $\gamma_S \approx -0.0728$ – постоянная Стилтьеса, а функция $g(z)$ определена уравнением (2.38). Окончательно получаем

$$\exp\Delta\mathcal{S}^{\rm reg}_\sigma = \frac{27}{128\pi}D(\gamma_s)\exp\left[4f(\gamma_s)\ln M_\lambda e^{\gamma_E}\right], \tag{Б.24}$$

где функция $D(\gamma_s)$ определяется выражением (2.37).

При вычислении поправки $\Delta\mathcal{S}^{\rm reg}_\sigma$ требовалось определить число, а не только коэффициент перед $\ln M_\lambda$. При вычислении квантовой поправки $\Delta\mathcal{S}^{\rm reg}_F$ достаточно определить лишь коэффициент перед логарифмом от M_λ, чтобы убедиться в перенормировке $\mathcal{S}_F$. С логарифмической точностью в выражениях (Б.17) можно использовать функцию $K_{\gamma_s}(x,x)$ вместо функций $K_{\gamma_s}(x,y)$ и $F_{\gamma_s}(x,y,z)$, а также функцию $L(x,x)$ вместо функции $L(x,y)$. Рассмотрим функцию $Y^{(\Lambda)}(p) = \sum_{J=p}^{\Lambda} 2J/(J^2-p^2)$, тогда вычисляя регуляризованную функцию $Y^{(\Lambda)}_{\rm reg}$, определённую аналогично уравнению (Б.19), находим

$$Y^{(\Lambda)}_{\rm reg}(p) = 2\ln M_\lambda + 2\gamma_E - \sum_{J=1}^{2p}\frac{1}{J}. \tag{Б.25}$$

Отсюда получаем, что

$$Y^{(s)}_{\rm reg} = \lim_{\Lambda\to\infty} Y^{(\Lambda)}_{\rm reg}\left(\frac{1+s}{2}\right) = 2\ln M_\lambda + 2\gamma_E - 1 - \sum_{J=2}^{s+1}\frac{1}{J} \tag{Б.26}$$

и

$$B^{(1)} = 0, \quad B^{(2)} = -\frac{2\gamma_s(1+4\gamma_s)}{3}\ln M_\lambda, \quad B^{(3)} = 0, \quad B^{(4)} = -\frac{2\gamma_s+3}{3}\left(\ln(1+\gamma_s)-\gamma_s\right)\ln M_\lambda,$$
$$B^{(5)} = \frac{4\gamma_s^2}{3}\ln M_\lambda, \quad B^{(6)} = \frac{5\gamma_s^2}{3}\ln M_\lambda, \quad B^{(7)} = -\frac{\gamma_s^2}{3}\ln M_\lambda, \quad B^{(8)} = \left(\ln(1+\gamma_s)-\gamma_s\right)\ln M_\lambda,$$
$$B^{(9)} = \frac{2\gamma_s}{3}\left(\ln(1+\gamma_s)-\gamma_s\right)\ln M_\lambda. \tag{Б.27}$$

В результате находим

$$\Delta \mathcal{S}_F^{\rm reg} = \frac{32}{3\sigma_{xx}} \pi T \Gamma_{00} (\ln M_\lambda e^{\gamma_E - 1/2} + \mathrm{const}). \tag{Б.28}$$

С помощью выражений, приведенных в таблицах 4.1 и 4.2, можно проверить, что в квадратичном действии $\delta\mathcal{S}_2$ остаются только генераторы нулевых мод из $[U(N)/U(N-1) \times U(1)] \times [U(N)/U(N-1) \times U(1)] \times U(1)$, соответствующие матрице U со следущими ненулевыми матричными элементами: $U^{1\beta}_{0n_1}$ и $U^{1\beta}_{-1,n_2}$. Поэтому с помощью уравнений (Б.24) и (Б.28) находим для произвольного инстантонного решения (2.17), что

$$\left[\frac{Z_{+1}}{Z_0}\right]_{\rm mass} = \frac{27}{128\pi} D(\gamma_s) e^{-2\pi\sigma_{xx}(M_\lambda) + i\theta + \mathcal{S}'_{F,\rm inst}}, \tag{Б.29}$$

где $\sigma_{xx}(M_\lambda)$ и $\mathcal{S}'_{F,\rm inst}$ определены выражениями (2.33) и (2.31), соответственно.

Интегрирование по нулевым модам

Как уже упоминалось выше, интегрирование по нулевым модам инстантона должно производиться точно. С помощью таблицы 2.1 находим, что

$$\frac{Z_{+1}}{Z_0} = \mathcal{A}_{\rm inst} \int dx_0 dy_0 \int \frac{d\lambda}{\lambda^3} \int \mathcal{D}[U] \left[\frac{Z_{+1}}{Z_0}\right]_{\rm mass}. \tag{Б.30}$$

Здесь

$$\mathcal{A}_{\rm inst} = \langle e_0^4 \rangle \langle |e_1|^4 \rangle \langle e_0^2 |e_1|^2 \rangle \left(\langle e_0^2 \rangle \langle |e_1|^2 \rangle \right)^{2N-2} \langle 1 \rangle^{-2N+1} \pi^{-2N} \tag{Б.31}$$

где среднее $\langle f \rangle$ определено согласно соотношению

$$\langle f \rangle = \sigma_{xx} \int\limits_{-1}^{1} d\eta \int\limits_{0}^{2\pi} d\theta f(\eta, \theta). \tag{Б.32}$$

Вычисляя объём пространства $[U(N)/U(N-1) \times U(1)] \times [U(N)/U(N-1) \times U(1)] \times U(1)$ с помощью соотношения (см., например [176])

$$\mathrm{Vol} \left[\frac{U(N)}{U(1) \times U(N-1)} \right] = \frac{\pi^{N-1}}{\Gamma(N)}, \tag{Б.33}$$

получаем в пределе $N \to 0$ выражение (2.31).

Б.3 Однопетлевые поправки в регуляризации Паули-Вилларса

В этом приложении представлены результаты вычисления однопетлевых поправок к физическим наблюдаемым в регуляризации Паули-Вилларса.

Перенормировка σ_{xx}

Для нахождения однопетлевой перенормировки σ_{xx} необходимо вычислить средние в выражении (2.14). Вычисление в стереографических координатах даёт в пределе нулевой температуры $T \to 0$ следующий результат:

$$\sigma'_{xx} = \sigma_{xx} + 4\gamma_s \int\limits_0^\infty d\omega \int\limits_{-1}^{1} d\eta \int\limits_0^{2\pi} d\theta \langle \eta\theta | O^{(0)} \mathcal{G}_0(\omega) | \eta'\theta' \rangle \langle \eta'\theta' | \mathcal{G}_0(\omega) \mathcal{G}_0^{(00)}(\omega) | \eta\theta \rangle. \tag{Б.34}$$

Интегрируя по переменным η, θ и ω, и вводя согласно уравнению (Б.8) регуляризацию Паули-Вилларса, получим:

$$\sigma'_{xx} = \sigma_{xx} - 4f(\gamma_s) \left[\sum_{f=1}^{K} \hat{e}_f \sum_{J=0}^{\infty} \frac{E_J^{(0)}}{(E_J^{(0)} + M_f^2)^2} + \sum_{J=1}^{\infty} \frac{1}{E_J^{(0)}} \right] \sum_{M=-J}^{J} \Phi_{JM}^{(0)}(\eta', \theta') \bar{\Phi}_{JM}^{(0)}(\eta', \theta'). \tag{Б.35}$$

Учитывая, что полиномы Якоби $P_{J-M}^{M,M}(\eta)$ пропорциональны полиномам Гегенбаура $C_{J-M}^{M+1/2}(\eta)$, и используя следующее соотношение [429]

$$\begin{aligned} C_J^{\lambda}(\cos\phi\cos\phi' + z\sin\phi\sin\phi') &= \frac{\Gamma(2\lambda-1)}{\Gamma^2(\lambda)} \sum_{M=0}^{J} \frac{2^{2M}\Gamma(J-M+1)}{\Gamma(J+M+2\lambda)} \Gamma^2(M+\lambda) \times \\ &\times (2M+2\lambda-1)\sin^M\phi \sin^M\phi' C_{J-M}^{M+\lambda}(\cos\phi) C_{J-M}^{M+\lambda}(\cos\phi') C_M^{\lambda-1/2}(z) \end{aligned} \tag{Б.36}$$

с параметрами $z = 1$ и $\lambda = 1/2$, находим, что

$$\sigma'_{xx} = \sigma_{xx} \left(1 - \frac{2f(\gamma_s)}{\pi\sigma_{xx}} \ln M e^{\gamma_E} \right) \tag{Б.37}$$

в согласии с уравнениями (2.35).

Перенормировка Γ_{00} и z

Вычисляя средние в выражении (1.11), получаем

$$z' = z \left(1 + \frac{2\pi\gamma_s}{\sigma_{xx}} \operatorname{tr} \mathcal{G}_0^{(00)}(0) \right) \tag{Б.38}$$

Используя регуляризацию Паули-Вилларса, получаем, что

$$z' = z \left(1 + \frac{\gamma_s}{\pi\sigma_{xx}} \ln M e^{\gamma_E - 1/2} \right) \tag{Б.39}$$

в согласии с уравнениями (2.35). Перенормировка Γ'_{00} находится из условия $z' + \Gamma'_{00} = \mathrm{const}$.

Б.4 Вычисление величины $\langle \mathcal{S}'_{F,\text{inst}}\rangle_U$ в уравнении (2.50)

В этом приложении представлены детали вывода результата (2.51). Запишем величину $\langle \mathcal{S}'_{F,\text{inst}}\rangle_U$ в уравнении (2.50) в следующем виде:

$$\langle \mathcal{S}'_{F,\text{inst}}\rangle_U = \frac{8\pi^3\lambda^2 T}{N^2}\Gamma_{00}(M_\lambda)\mathcal{M}_1 \operatorname{tr}\eta\Lambda, \qquad \mathcal{M}_1 = \int\limits_{M_\lambda}^{\infty} \frac{dM}{2\pi M}\frac{\Gamma_{00}(M)}{\Gamma_{00}(M_\lambda)}\left(1-\frac{M_\lambda}{M}\right). \tag{Б.40}$$

Пренебрегая в подынтегральном выражении для $\mathcal{M}_1$ последним членом в скобках, который не приводит к логарифмической расходимости, получаем, что $\mathcal{M}_1$ удовлетворяет уравнению

$$M_\lambda \frac{d\mathcal{M}_1}{dM_\lambda} - \frac{1}{\pi\sigma_{xx}}\mathcal{M}_1 = -\frac{1}{2\pi}. \tag{Б.41}$$

Используя выражения (2.34), это уравнение можно переписать в следующем виде

$$-\frac{2f(\gamma_s)}{\pi}\frac{\partial\mathcal{M}_1}{\partial\sigma_{xx}} - \frac{\gamma_s(1+\gamma_s)}{\pi\sigma_{xx}}\frac{\partial\mathcal{M}_1}{\partial\sigma_{xx}} - \frac{1}{\pi\sigma_{xx}}\mathcal{M}_1 = -\frac{1}{2\pi}. \tag{Б.42}$$

При $\sigma_{xx} \gg 1$ решение уравнения (Б.42) можно искать в виде ряда по $1/\sigma_{xx}$:

$$\mathcal{M}_1 = \sigma_{xx} m_1(\gamma_s) + m_0(\gamma_s) + \sigma_{xx}^{-1} m_{-1}(\gamma_s) + \dots \tag{Б.43}$$

Подставляя разложение (Б.43) в уравнение (Б.42), находим выражение (2.52) для функции $m_1(\gamma_s)$.

Б.5 Усреднение операторов $\mathcal{K}_1$ и $\mathcal{K}_2$ по $U(N)\times U(N)$-вращениям

В этом приложении представлен вывод результатов для усреднения операторов $\mathcal{K}_1$ и $\mathcal{K}_2$ по $U(N)\times U(N)$-вращениям.

Корреляционная функция $\mathcal{K}_1$

Аналогично выражению (2.80) корреляционная функция $\mathcal{K}_1$ может быть выражена через точные одночастичные функции Грина $G_{R,A}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$:

$$\mathcal{K}_1(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,E,\omega) = \frac{\delta^2}{\pi^2}\Big\langle \operatorname{Im} G^R_{E+\omega}(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_1)\operatorname{Im} G^R_E(\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{r}_2) - \operatorname{Im} G^R_{E+\omega}(\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{r}_1)\operatorname{Im} G^R_E(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2)\Big\rangle. \tag{Б.44}$$

Отсюда, стандартным образом (см., например [37]), находим, что

$$\mathcal{K}_1 = \frac{\nu_\star^2\delta^2}{4}\left\langle \operatorname{tr}\Lambda_n^\alpha Q(\boldsymbol{r}_1)\operatorname{tr}\Lambda_m^\beta Q(\boldsymbol{r}_2) + \operatorname{tr}\Lambda_n^\alpha Q(\boldsymbol{r}_1)\Lambda_m^\beta Q(\boldsymbol{r}_2)\right\rangle. \tag{Б.45}$$

Здесь $\langle \dots \rangle$ означает усреднение с действием для нелинейной сигма-модели (2.2) и (2.4). Пары (n, α) и (m, β) должны быть все разными, так как корреляционная функция $\mathcal{K}_1(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, 0, 0)$ определяется двумя разными состояниями. Как и при выводе выражения (2.81) предполагалось, что расстояние $|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|$ превышает длину свободного пробега l, так что усредненные функции Грина между любыми двумя разными точками экспоненциально малы. С другой стороны, можно считать, что расстояние $|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|$ мало с точки зрения масштабов нелинейной сигма-модели и, как следствие, пространственные аргументы матриц Q в выражении (Б.45) совпадают, так что $\mathcal{K}_1 = (\nu_\star^2 \delta^2/4) \langle O_+[Q] \rangle$. Здесь, операторы

$$O_\pm[Q] = \operatorname{tr} \Lambda_n^\alpha Q(\boldsymbol{r}_1) \operatorname{tr} \Lambda_m^\beta Q(\boldsymbol{r}_2) \pm \operatorname{tr} \Lambda_n^\alpha Q(\boldsymbol{r}_1) \Lambda_m^\beta Q(\boldsymbol{r}_2). \tag{Б.46}$$

Для того, чтобы получить $U(N) \times U(N)$ инвариантное выражение для корреляционной функции $\mathcal{K}_1$, необходимо произвести глобальное вращение матрицы Q: $Q(\boldsymbol{r}) \to U^{-1} Q(\boldsymbol{r}) U$, где матрица U имеет ненулевые матричные элементы $U_{n_1 n_3}^{\alpha_1 \alpha_3}$ и $U_{n_2 n_4}^{\alpha_2 \alpha_4}$. Для вычисления среднего $\langle O_\pm[U^{-1} Q U] \rangle_U$ удобно воспользоваться следующими результатами [430]:

$$\langle (U^{-1})_{n_1 n_3}^{\alpha_1 \alpha_3} U_{n_5 n_7}^{\alpha_5 \alpha_7} \rangle_U = V_1 \delta_{n_1 n_7}^{\alpha_1 \alpha_7} \delta_{n_3 n_5}^{\alpha_3 \alpha_5}, \tag{Б.47}$$

$$\begin{aligned} \langle (U^{-1})_{n_1 n_3}^{\alpha_1 \alpha_3} U_{n_5 n_7}^{\alpha_5 \alpha_7} (U^{-1})_{n_9 n_{11}}^{\alpha_9 \alpha_{11}} U_{n_{13} n_{15}}^{\alpha_{13} \alpha_{15}} \rangle_U = V_{1,1} \left[\delta_{n_1 n_7}^{\alpha_1 \alpha_7} \delta_{n_3 n_5}^{\alpha_3 \alpha_5} \delta_{n_9 n_{15}}^{\alpha_9 \alpha_{15}} \delta_{n_{11} n_{13}}^{\alpha_{11} \alpha_{13}} + \delta_{n_1 n_{15}}^{\alpha_1 \alpha_{15}} \delta_{n_3 n_{13}}^{\alpha_3 \alpha_{13}} \delta_{n_5 n_{11}}^{\alpha_5 \alpha_{11}} \delta_{n_7 n_9}^{\alpha_7 \alpha_9} \right] + \\ + V_2 \left[\delta_{n_1 n_{15}}^{\alpha_1 \alpha_{15}} \delta_{n_7 n_9}^{\alpha_7 \alpha_9} \delta_{n_3 n_5}^{\alpha_3 \alpha_5} \delta_{n_{11} n_{13}}^{\alpha_{11} \alpha_{13}} + \delta_{n_1 n_7}^{\alpha_1 \alpha_7} \delta_{n_9 n_{15}}^{\alpha_9 \alpha_{15}} \delta_{n_3 n_{13}}^{\alpha_3 \alpha_{13}} \delta_{n_5 n_{11}}^{\alpha_5 \alpha_{11}} \right], \end{aligned} \tag{Б.48}$$

где коэффициенты V_1, $V_{1,1}$ и V_2 даны в таблице 4.4, а $\delta_{n_1 n_3}^{\alpha_1 \alpha_3} \equiv \delta_{n_1 n_3} \delta^{\alpha_1 \alpha_3}$. Аналогичные соотношения выполняются для матричных элементов $U_{n_2 n_4}^{\alpha_2 \alpha_4}$. Усреднение по $U_{n_1 n_3}^{\alpha_1 \alpha_3}$ и $U_{n_2 n_4}^{\alpha_2 \alpha_4}$ выполняется независимо.

Вычисляя среднее $\langle O_\pm[U^{-1} Q U] \rangle_U$, находим $U(N) \times U(N)$ инвариантный результат:

$$O_\pm[Q] = \frac{2N \pm 1}{2N^2 (N \pm 1)} \left\{ \operatorname{tr} (\Lambda Q)^2 \pm (\operatorname{tr} \Lambda Q)^2 \right\} \pm \frac{(2N-1) \mp 2N}{N(N \pm 1)}. \tag{Б.49}$$

Корреляционная функция $\mathcal{K}_2$

Заменяя в выражении (2.81) матрицу Q на $U^{-1} Q U$, получаем, что

$$\mathcal{K}_2(\{\boldsymbol{r}_j\}, 0, 0, 0, 0) = \frac{\nu_\star^4 \delta^4}{16} \langle R_1[Q] + R_2[Q] \rangle, \tag{Б.50}$$

где

$$\begin{aligned} R_1[Q] &= \left\langle \operatorname{tr} \left[\Lambda_n^\alpha U^{-1} Q(\boldsymbol{r_1}) U \Lambda_m^\beta U^{-1} Q(\boldsymbol{r_4}) U \right] \operatorname{tr} \left[\Lambda_k^\gamma U^{-1} Q(\boldsymbol{r_2}) U \Lambda_l^\sigma U^{-1} Q(\boldsymbol{r_3}) U \right] \right\rangle_U, \\ R_2[Q] &= \left\langle \operatorname{tr} \left[\Lambda_n^\alpha U^{-1} Q(\boldsymbol{r_1}) U \Lambda_m^\beta U^{-1} Q(\boldsymbol{r_4}) U \Lambda_k^\gamma U^{-1} Q(\boldsymbol{r_2}) U \Lambda_s^\sigma U^{-1} Q(\boldsymbol{r_3}) U \right] \right\rangle_U. \end{aligned} \tag{Б.51}$$

Таблица 4.4: Коэффициенты V_j, необходимые для усреднения по унитарной группе $U(N)$.

$V_1 = \frac{1}{N}$,

$V_{1,1} = \frac{N}{N(N^2-1)}$, $\quad V_2 = -\frac{1}{N(N^2-1)}$,

$V_{1,1,1} = \frac{N^2-2}{N(N^2-1)(N^2-4)}$, $\quad V_{2,1} = -\frac{N}{N(N^2-1)(N^2-4)}$, $\quad V_3 = \frac{2}{N(N^2-1)(N^2-4)}$,

$V_{1,1,1,1} = \frac{6-8N^2+N^4}{N^2(N^2-1)(N^2-4)(N^2-9)}$, $\quad V_{2,1,1} = \frac{N(4-N^2)}{N^2(N^2-1)(N^2-4)(N^2-9)}$, $\quad V_{2,2} = \frac{6+N^2}{N^2(N^2-1)(N^2-4)(N^2-9)}$,

$V_{3,1} = \frac{2N^2-3}{N^2(N^2-1)(N^2-4)(N^2-9)}$, $\quad V_4 = -\frac{5N}{N^2(N^2-1)(N^2-4)(N^2-9)}$

Для вычисления средних от матриц U удобно воспользоваться диаграммной техникой работы [431]. В результате вычислений получаем, что

$$\begin{gathered}
R_1[Q] = \sum_{p=\pm}\Big\{V_{2,2}(\operatorname{tr} Q_p)^4 + (4V_4 + 2V_{2,1,1}) \operatorname{tr} Q_p^2 (\operatorname{tr} Q_p)^2 + (2V_{2,2} + V_{1,1,1,1}) \operatorname{tr} Q_p^2 \operatorname{tr} Q_p^2 + \\
+ 8V_{3,1} \operatorname{tr} Q_p^3 \operatorname{tr} Q_p + (4V_{2,1,1} + 2V_4) \operatorname{tr} Q_p^4 - 4V_1 V_{2,1} (\operatorname{tr} Q_p)^2 \operatorname{tr} A_p - 4V_1 V_{1,1,1} \operatorname{tr} Q_p^2 \operatorname{tr} A_p - \\
- 8V_1 V_{2,1} \operatorname{tr}(A_p Q_p^2) - 8V_1 V_3 \operatorname{tr} Q_p \operatorname{tr} A_p Q_p + 2(V_{1,1}^2 + V_2^2)(\operatorname{tr} A_p)^2 + 4V_{1,1} V_2 \operatorname{tr} A_p^2 + \\
+ V_{1,1}^2 \operatorname{tr} Q_p^2 \operatorname{tr} Q_{-p}^2 + 2V_2 V_{1,1} \operatorname{tr} Q_p^2 (\operatorname{tr} Q_{-p})^2 + V_2^2 (\operatorname{tr} Q_p)^2 (\operatorname{tr} Q_{-p})^2\Big\},
\end{gathered} \tag{Б.52}$$

и

$$\begin{gathered}
R_2[Q] = \sum_{p=\pm}\Big\{V_4(\operatorname{tr} Q_p)^4 + (4V_{3,1} + 2V_{2,2}) \operatorname{tr} Q_p^2 (\operatorname{tr} Q_p)^2 + 4(V_4 + V_{2,1,1}) \operatorname{tr} Q_p^3 \operatorname{tr} Q_p + \\
+ (V_4 + 2V_{2,1,1}) \operatorname{tr} Q_p^2 \operatorname{tr} Q_p^2 + (V_{2,2} + V_{1,1,1,1} + 4V_{3,1}) \operatorname{tr} Q_p^4 - 4V_1 V_3 (\operatorname{tr} Q_p)^2 \operatorname{tr} A_p - \\
- 4V_1 V_{2,1} \operatorname{tr} Q_p^2 \operatorname{tr} A_p - 4V_1(V_3 + V_{1,1,1}) \operatorname{tr}(A_p Q_p^2) - 8V_1 V_{2,1} \operatorname{tr} Q_p \operatorname{tr} A_p Q_p + \\
+ 2V_2^2 \operatorname{tr} Q_p \operatorname{tr} Q_{-p} \operatorname{tr} A_p + 4V_2 V_{1,1} \operatorname{tr} Q_p \operatorname{tr} B_p + 2V_{1,1}^2 \operatorname{tr} B_p Q_p + 2V_{1,1} V_2 (\operatorname{tr} A_p)^2 + \\
+ (V_{1,1}^2 + V_2^2) \operatorname{tr} A_p^2\Big\}.
\end{gathered} \tag{Б.53}$$

Здесь

$$\begin{gathered}
Q_p = \frac{1+p\Lambda}{2} Q \frac{1+p\Lambda}{2}, \qquad A_p = \frac{1+p\Lambda}{2} Q \frac{1-p\Lambda}{2} Q \frac{1+p\Lambda}{2}, \\
B_p = \frac{1+p\Lambda}{2} Q \frac{1-p\Lambda}{2} Q \frac{1-p\Lambda}{2} Q \frac{1+p\Lambda}{2}.
\end{gathered} \tag{Б.54}$$

Коэффициенты $V_{j_1,\ldots,j_m}$ введены по аналогии с коэффициентами в уравнениях (Б.47) и (Б.48). Например, $V_{j_1,\ldots,j_m}$ возникает при усреднении произведения $j = j_1 + \ldots + j_m$ матричных элементов матрицы U и j матричных элементов матрицы U^{-1}, как коэффициент при вкладе, соответствующем m "циклам" длины $j_1, \dots j_m$, соответственно. Используя выражения для коэффициентов V_j из таблицы 4.4, можно выразить операторы R_1 и R_2 через $U(N) \times U(N)$ инвариантные операторы (2.85). В результате получается выражение (2.84).

Б.6 Собственные операторы

В этом разделе представлена связь между операторами (2.85) и собственными относительно ренормализационной группы операторами P_4, $P_{3,1}$, $P_{2,2}$, $P_{2,1,1}$, $P_{1,1,1,1}$, P_2, и $P_{1,1}$. Для определения явных выражений для собственных операторов удобно использовать однопетлевую перенормировку операторов методом фонового поля [34, 261, 36]. Для этого поле Q разделяется на быструю и медленную (Q_0) части (см. (А.1)), затем быстрая часть раскладывается до второго порядка по W (см. (2.22) с $\mathcal{T}_0 = R = 1$), и, наконец, получившиеся выражения усредняются по W с помощью уравнения (1.13) (в отсутствие взаимодействия, $\Gamma_{ab} = 0$). В итоге находим

$$\langle O_j[T_0^{-1} Q T_0] \rangle \to O_j[Q_0] - \frac{1}{\pi\sigma} \left[\sum_l \mathcal{A}_{jl} O_l[Q_0] + a_j \right] \ln \frac{L}{l}. \tag{Б.55}$$

Здесь последовательность операторов O_j соответствует последовательности операторов в уравнениях (2.85). Коэффициенты $\mathcal{A}_{jl}$ составляют матрицу

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 4N & 0 & 4 & 1 & 0 & 16N & 0 \\ 0 & 4N & 4 & 1/2 & 2 & 0 & 8N^2 \\ 3 & 3 & 4N & 0 & 0 & 8 & 16N \\ 8 & 4 & 0 & 4N & 0 & 32+16N^2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 4N & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2N & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 2N \end{pmatrix}, \tag{Б.56}$$

и $a_j = \{0, 0, 0, 0, 0, 8N^2, 0\}^T$. Собственные значения матрицы $\mathcal{A}$, равные

$$\boldsymbol{\zeta} = \{-6 + 4N, -2 + 4N, 4N, 2 + 4N, 6 + 4N, -1 + 2N, 1 + 2N\}, \tag{Б.57}$$

в точности отвечают аномальным размерностям собственных операторов P_4, $P_{3,1}$, $P_{2,2}$, $P_{2,1,1}$, $P_{1,1,1,1}$, P_2, и $P_{1,1}$, вычисленных в однопетлевом приближении [34, 36, 258, 259, 260]. Диагонализуя матрицу $\mathcal{A}$ как $\mathcal{A} = \mathcal{V}\boldsymbol{\zeta}\mathcal{V}^{-1}$, собственные операторы можно найти как $P_\zeta = \sum_s \mathcal{V}^{-1}_{\zeta s} (O_s + a_s/\zeta)$. Это приводит к следующим явным выражениям для собственных операторов:

$$\begin{pmatrix} P_4 \\ P_{3,1} \\ P_{2,2} \\ P_{2,1,1} \\ P_{1,1,1,1} \\ P_2 \\ P_{1,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{6} & \frac{1}{32} & \frac{1}{24} & \frac{(-2+N)^2}{(-10+4N)} & \frac{2-8N+3N^2}{15-6N} & \frac{2(-2+N)^2N^2}{15-16N+4N^2} \\ \frac{3}{8} & -\frac{3}{8} & 0 & -\frac{3}{32} & \frac{3}{8} & -\frac{3(-2+N)^2}{(-6+4N)} & -\frac{3(-2+N^2)}{(-3+2N)} & -\frac{6(-2+N)^2N^2}{3-8N+4N^2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{8} & \frac{1}{6} & \frac{4N^3}{-1+4N^2} & \frac{8-20N^2}{-3+12N^2} & \frac{8N^4}{-1+4N^2} \\ -\frac{3}{8} & \frac{3}{8} & 0 & -\frac{3}{32} & \frac{3}{8} & -\frac{3(2+N)^2}{6+4N} & \frac{3(-2+N^2)}{3+2N} & -\frac{6N^2(2+N)^2}{3+8N+4N^2} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{6} & \frac{1}{32} & \frac{1}{24} & \frac{(2+N)^2}{10+4N} & \frac{2+8N+3N^2}{15+6N} & \frac{2N^2(2+N)^2}{15+16N+4N^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{2N^2}{1-2N} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{2N^2}{1+2N} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} O_4 \\ O_{2,1,1} \\ O_{3,1} \\ O_{2,2} \\ O_{1,1,1,1} \\ O_2 \\ O_{1,1} \\ O_0 \end{pmatrix}. \tag{Б.58}$$

Как видно, операторы $O_\pm$, определённые в уравнении (Б.49), совпадают с собственными операторами $P_{1,1}$ и P_2, соответственно.

B Приложения к главе 3

B.1 Аналитическое продолжение функции $K(i\omega_n)$

В этом приложении будут представлены детали аналитического продолжения корреляционной функции $K(i\omega_n)$ (ур. (3.36)) на действительные частоты (ур. (3.37)). Выражение

$$K(i\omega_n) = -\frac{g}{4\pi} T \sum_{\omega_m} |\omega_m + \omega_n| D(i\omega_m), \tag{B.1}$$

с помощью соотношений

$$|\omega_m| = \int \frac{d\epsilon}{\pi} \frac{i\omega_m}{\epsilon + i\omega_m}, \qquad D(i\omega_m) = \int \frac{d\epsilon}{\pi} \frac{\operatorname{Im} D^R(\epsilon)}{\epsilon - i\omega_m}, \tag{B.2}$$

может быть представлено в виде

$$K(i\omega_n) = \frac{g}{4\pi} \int \frac{d\epsilon_1 d\epsilon_2}{\pi^2} \frac{\epsilon_2 \operatorname{Im} D^R(\epsilon_1)}{\epsilon_1 + \epsilon_2 + i\omega_n} T \sum_{\omega_m} \left[\frac{1}{\epsilon_1 - i\omega_m} + \frac{1}{\epsilon_2 + i\omega_m + i\omega_n} \right]. \tag{B.3}$$

Вычисляя стандартную сумму по ω_m, находим

$$K(i\omega_n) = \frac{g}{4\pi} \int \frac{d\epsilon_1 d\epsilon_2}{\pi^2} \frac{\epsilon_2 \operatorname{Im} D^R(\epsilon_1)}{\epsilon_1 - \epsilon_2 + i\omega_n} [f_B(\epsilon_2) - f_B(\epsilon_1)]. \tag{B.4}$$

Полученное выражение стандартным образом продолжается на действительные частоты, что приводит к ур. (3.37).

B.2 Вычисление физических наблюдаемых до второго порядка по g включительно

В этом приложении будут представлены детали вычисления физических наблюдаемых до второго порядка по $g \ll 1$.

Прямое вычисление корреляционной функции $D(i\omega_n)$ до первого порядка по g даёт

$$D(i\omega_n) = -\frac{\operatorname{th}(\beta\Delta/2)}{i\omega_n - \Delta} \left[1 - \frac{g}{\pi} \frac{\beta Y(\Delta)}{\operatorname{sh}(\beta\Delta)} \right] + \frac{g}{\pi} \operatorname{th} \frac{\beta\Delta}{2} \frac{\partial}{\partial\Delta} \frac{Y(\Delta)}{i\omega_n - \Delta} - \frac{g}{4\pi} \frac{|\omega_n|}{(i\omega_n - \Delta)^2}. \tag{B.5}$$

Этот результат может быть представлен в виде

$$D(i\omega_n) = -\frac{\operatorname{th}(\beta\bar{\Delta}/2)}{\gamma_1^2} \frac{1}{i\omega_n - \bar{\Delta}_1} - \frac{g}{4\pi} \frac{|\omega_n|}{(i\omega_n - \Delta)^2}, \tag{B.6}$$

где $\bar{\Delta}_1 = \Delta - gY(\Delta)/\pi$ и $\gamma_1^{-2} = \partial\bar{\Delta}_1/\partial\Delta$. Соответственно для запаздывающей функции находим, что

$$D^R(\epsilon) = -\frac{\operatorname{th}(\beta\bar{\Delta}_1/2)}{\gamma_1^2} \frac{1}{\epsilon - \bar{\Delta}_1 + i0^+} + \frac{g}{4\pi} \frac{i\epsilon}{(\epsilon - \Delta + i0^+)^2}. \tag{B.7}$$

С помощью соотношения

$$\operatorname{Re}\lim_{\omega\to 0}\frac{\partial K^R(\omega)}{\partial\omega}=-\frac{g}{2\pi^2}\int d\epsilon\,\operatorname{Im}D^R(\epsilon)\frac{\partial Y(\epsilon)}{\partial\epsilon},\qquad Y(\epsilon)=T\sum_{\omega_n>0}\frac{\omega_n\epsilon}{\omega_n^2+\epsilon^2},\tag{B.8}$$

получаем

$$\operatorname{Re}\lim_{\omega\to 0}\frac{\partial K^R(\omega)}{\partial\omega}=-\frac{g}{2\pi}\frac{\operatorname{th}(\beta\bar\Delta_1/2)}{\gamma_1^2}\frac{\partial Y(\bar\Delta_1)}{\partial\bar\Delta_1}+\frac{g^2}{32\pi^2}\frac{\partial}{\partial\Delta}\left(\Delta\frac{\partial}{\partial\Delta}\Delta\operatorname{cth}\frac{\beta\Delta}{2}\right).\tag{B.9}$$

Используя общее соотношение

$$\frac{\partial Q}{\partial g}=\frac{\partial}{\partial\Delta}\int\frac{d\epsilon}{2\pi^2}Y(\epsilon)\operatorname{Im}D^R(\epsilon),\tag{B.10}$$

находим, что

$$\frac{\partial Q}{\partial g}=\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial\Delta}\left[\frac{\operatorname{th}(\beta\bar\Delta_1/2)}{\gamma_1^2}Y(\bar\Delta_1)\right]-\frac{g}{32\pi^2}\frac{\partial^2}{\partial\Delta^2}\left(\Delta^2\operatorname{cth}\frac{\beta\Delta}{2}\right).\tag{B.11}$$

Отсюда получаем выражение для среднего заряда Q справедливое до второго порядка разложения по g:

$$Q=k+\frac{1}{1+e^{\beta\Delta}}+\frac{g}{2\pi}\frac{\partial}{\partial\Delta}\left[\operatorname{th}\frac{\beta\Delta}{2}\left(Y-\frac{g}{2\pi}\frac{\partial Y^2}{\partial\Delta}-\frac{g}{2\pi}\frac{\beta Y^2}{\operatorname{sh}\beta\Delta}\right)\right]$$
$$-\frac{g^2}{64\pi^2}\frac{\partial^2}{\partial\Delta^2}\left(\Delta^2\operatorname{cth}\frac{\beta\Delta}{2}\right).\tag{B.12}$$

Объединяя полученные выше выражения для Q и $\operatorname{Re}K^R(\omega)$, находим выражение второго порядка для $\mathbb{Q}$:

$$\mathbb{Q}=k+\frac{1}{1+e^{\beta\bar\Delta_2}}+\frac{g^2}{64\pi^2}\Delta\frac{\partial^2}{\partial\Delta}\left(\Delta\operatorname{cth}\frac{\beta\Delta}{2}\right),\tag{B.13}$$

где $\bar\Delta_2=\Delta-gY(\bar\Delta_1)/\pi$ представляет перенормированную щель, вычисленную до второго порядка по g включительно.

Аналогичные вычисления приводят к следующим выражениям для других физических наблюдаемых:

$$\mathbb{G}=\frac{g}{2\gamma_1^2}\frac{\beta\bar\Delta_1}{\operatorname{sh}\beta\bar\Delta_1}-\frac{g^2}{4\pi^2}\Big[1+\frac{\partial}{\partial\Delta}\frac{\beta\Delta^2}{2\pi}\operatorname{Im}\psi'\left(1+\frac{i\beta\Delta}{2\pi}\right)\Big],\tag{B.14}$$

и

$$\tilde{\mathbb{Q}}=k+\frac{1}{1+e^{\beta\bar\Delta_2}}-\frac{g^2\Delta}{64\pi^2}\frac{\partial^2}{\partial\Delta^2}\left(\Delta\operatorname{cth}\frac{\beta\Delta}{2}\right)+\frac{g^2}{8\pi^3}\beta\bar\Delta_1\operatorname{th}\frac{\beta\bar\Delta_1}{2}\operatorname{Im}\psi'\left(1+\frac{i\beta\Delta}{2\pi}\right),$$
$$\tilde{\mathbb{G}}=\frac{g}{2\gamma_1^2}\frac{\operatorname{th}\beta\bar\Delta_1/2}{\beta\bar\Delta_1/2}.\tag{B.15}$$

Г Приложения к главе 4

Г.1 Преобразование Вея-Нормана-Колоколова

В этом приложении будет продемонстрировано как нелинейное преобразование (4.18) возникает в общем методе Вея-Нормана [406], а также будет вычислен якобиан (4.20) этого преобразования [411]. Для зависящего от времени гамильтониана $H(t)$ матрица эволюции $U(t)$, являющаяся решением уравнения

$$i\frac{dU}{dt} = H(t)U(t), \qquad U(0) = 1, \tag{Г.1}$$

может быть представлена в виде произведения k штук экспоненциальных операторов [406]. Число k равно размерности алгебры Ли, которая определяется гамильтонианом $H(t)$. Общий формализм построения оператора эволюции в виде произведения экспоненциальных операторов известен в литературе как метод Вея-Нормана. В рассматриваемом случае $H(t) = -\boldsymbol{\theta}(t)\boldsymbol{s}$, а матрица эволюции $U(t)$ есть упорядоченная во времени экспонента (4.17). Решение уравнения (Г.1) может быть представлено в виде

$$U(t) = \exp(f_-(t)s^-)\exp(f_z(t)s^z)\exp(f_+(t)s^+). \tag{Г.2}$$

Здесь, $s^\pm = s^x \pm is^y$ и s^z как раз являются генераторами группы $SU(2)$. Функции $f_-(t)$, $f_z(t)$ и $f_+(t)$ удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$i\dot{f}_- = -\frac{1}{2}\theta^+ + \theta^z f_- + \frac{1}{2}\theta^- f_-^2, \qquad i\dot{f}_z = -\theta^z - \theta^- f_-, \qquad i\dot{f}_+ = -\frac{1}{2}\theta^- e^{-f_z} \tag{Г.3}$$

с начальными условиями $f_-(0) = f_z(0) = f_+(0) = 0$. Решение системы уравнений (Г.3) зависит от решения уравнения Риккати (первое уравнение в (Г.3)). Вводя новые функции $\kappa^+(t) = f_-(t)$, $\kappa^-(t) = -i\dot{f}_+(t)\exp[f_z(t)]$ и $\rho(t) = -i\dot{f}_z(t)$, получаем из (Г.2) представление Колоколова (4.19) для упорядоченной по времени экспоненты. Начальное условие $f_-(0) = 0$ приводит к условию $\kappa^+(0) = 0$, а начальные условия $f_z(0) = f_+(0) = 0$ выполняются автоматически для любых $\kappa^-(t)$ и $\rho(t)$.

Для того, чтобы вычислить якобиан преобразования Вея-Нормана-Колоколова, рассмотрим его дискретный вариант. Разделим интервал $(0,t)$ на $N \to \infty$ частей длины $\Delta \to 0$ так, что $t = N\Delta$. Далее, пусть $\boldsymbol{\theta}_j = \boldsymbol{\theta}(t_j)$, $\kappa_j^\pm = \kappa^\pm(t_j)$ и $\rho_j = \rho(t_j)$, где $t_j = j\Delta$ с $j = 0,\ldots,N$. Тогда решение уравнения (Г.1) может быть записано в виде $U(t) = \prod_{j=0}^N \exp(i\Delta\boldsymbol{\theta}_j\boldsymbol{s})$. Отсюда, используя (4.19), находим дискретный вариант преобразования Вея-Нормана-Колоколова (см. (4.18) с $p = +$):

$$\theta_j^- = \kappa_j^-, \quad \theta_j^+ = -i\frac{\kappa_j^+ - \kappa_{j-1}^+}{\Delta} + \rho_j\frac{\kappa_j^+ + \kappa_{j-1}^+}{2} - \kappa_{j-1}^+\kappa_j^-\kappa_j^+, \quad \theta_j^z = \rho_j - \kappa_j^-(\kappa_j^+ + \kappa_{j-1}^+). \tag{Г.4}$$

Преобразования (Г.4) делаются с учётом начального условия $\kappa_0^+ = 0$. Якобиан преобразования (Г.4) равен

$$\mathcal{J}_N = \prod_{j=1}^{N} \left(-\frac{i}{\Delta} + \frac{\rho_j + (\kappa_j^+ - \kappa_{j-1}^+)\kappa_j^-}{2} \right). \tag{Г.5}$$

В пределе $N \to \infty$ и $\Delta \to 0$ якобиан $\mathcal{J}_N$ переходит в выражение (4.20).

Г.2 Вывод точных выражений для статистической суммы и туннельной плотности состояний

В этом приложении представлен вывод выражения (4.27) для статистической суммы $\mathcal{Z}$ и выражения (4.36) для корреляционной функции $\mathcal{K}_{\alpha\uparrow\uparrow}$. При вычислении функциональных интегралов будем следовать работе [409].

Вывод выражения (4.27) для статистической суммы $\mathcal{Z}$

Для того, чтобы выполнить интегрирование по полям κ_p^p и κ_{-p}^p в выражении (4.23), представим его в следующем виде [23]:

$$\mathcal{Z} = \prod_{p=\pm} \int \mathcal{D}[\rho_p, \kappa_p^{\pm p}] e^{-\frac{ip}{4J} \int\limits_0^{t_p} dt (\rho_p^2 - 4ip\dot{\kappa}_p^p \kappa_p^{-p} - 2J\rho_p(t))} \left(\prod_\gamma \oint\limits_{|z_\gamma|=1} \frac{idz_\gamma}{2\pi z_\gamma^2} \right) e^{-\sum\limits_\gamma z_\gamma \mathcal{B}_\gamma(t_+, t_-)}. \tag{Г.6}$$

Теперь интеграл по полям $\kappa_p^{\pm p}$ в правой части уравнения (Г.6) становится гауссовым. Для его вычисления рассмотрим двухточечную корреляционную функцию

$$\langle \kappa_p^q(t_p) \kappa_p^s(t) \rangle_0 \equiv \frac{\int \mathcal{D}[\kappa_p^{\pm p}] \kappa_p^q(t_p) \kappa_p^s(t) e^{-\int\limits_0^{t_p} dt \dot{\kappa}_p^p \kappa_p^{-p}/J}}{\int \mathcal{D}[\kappa_p^{\pm p}] e^{-\int\limits_0^{t_p} dt \dot{\kappa}_p^p \kappa_p^{-p}/J}}, \tag{Г.7}$$

где $q, s = \pm p$. Для её нахождения разобьём интервал $(0, t_p)$ на $N \to \infty$ частей длины $\Delta = t_p/N \to 0$ так, что $t_j = j\Delta$, где $j = 0, \dots, N$. Тогда получаем ($t = n\Delta$):

$$\langle \kappa_{p,N}^p \kappa_{p,n}^{-p} \rangle_0 = \frac{\left(\prod_{j=1}^N \int d\kappa_{p,j}^p d\kappa_{p,j}^{-p} \right) \kappa_{p,N}^p \kappa_{p,n}^{-p} e^{-\boldsymbol{\kappa}_p^p \boldsymbol{\Gamma}^{-1} \boldsymbol{\kappa}_p^{-p}}}{\left(\prod_{j=1}^N \int d\kappa_{p,j}^p d\kappa_{p,j}^{-p} \right) e^{-\boldsymbol{\kappa}_p^p \boldsymbol{\Gamma}^{-1} \boldsymbol{\kappa}_p^{-p}}}, \tag{Г.8}$$

[23]Здесь используется следующее тождество $x = -\oint_{|z|=1} dz\, e^{-zx}/(2\pi i z^2)$.

где $\kappa_{p,j}^{\pm p} = \kappa_p^{\pm p}(t_j)$, $\boldsymbol{\kappa}_p^{\pm p} = (\kappa_{p,0}^{\pm p}, \ldots, \kappa_{p,N}^{\pm p})$, а матрица $\mathbf{\Gamma}$ имеет треугольный вид [24]:

$$\mathbf{\Gamma} = J \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}. \tag{Г.9}$$

Обращая матрицу $\mathbf{\Gamma}$, находим, что

$$\langle \kappa_p^p(t_p)\kappa_p^{-p}(t)\rangle_0 = J\Theta(t_p - t), \tag{Г.10}$$

где функция Хевисайда $\Theta(x)$ определена так, что $\Theta(0) = 1$. Остальные двухточечные функции равны нулю. С помощью выражения (Г.10) можно показать, что для произвольной функции $f(t)$ и неотрицательного k выполняется соотношение:

$$\left\langle \left(\kappa_p^p(t_p) \int\limits_0^{t_p} dt\, f(t)\kappa_p^{-p}(t) \right)^k \right\rangle_0 = \frac{\int d\varkappa_p d\bar{\varkappa}_p\, e^{-|\varkappa_p|^2/J} \left(\varkappa_p \int\limits_0^{t_p} dt\, f(t)\bar{\varkappa}_p\right)^k}{\int d\varkappa_p d\bar{\varkappa}_p\, e^{-|\varkappa_p|^2/J}}. \tag{Г.11}$$

Таким образом, функциональный интеграл

$$\left[\prod_{p=\pm} \int \mathcal{D}[\kappa_p^{\pm p}] e^{-\int\limits_0^{t_p} dt \dot{\kappa}_p^p \kappa_p^{-p}/J}\right] \exp\left\{ v \prod_{p=\pm} e^{\frac{ip}{2}\int\limits_0^{t_p} dt \tilde{\rho}_p(t)} \left[ip\tilde{\kappa}_p^p(t_p) - \int\limits_0^{t_{-p}} dt\, \tilde{\kappa}_{-p}^p(t) e^{ip\int\limits_0^t dt' \tilde{\rho}_{-p}(t')} \right] \right\}, \tag{Г.12}$$

который необходимо вычислить, может быть заменён на обычный интеграл по комплексным переменным $\varkappa_p$ и $\bar{\varkappa}_p$, соответствующим κ_p^p и κ_p^{-p}:

$$\left[\prod_{p=\pm} \int \frac{d\varkappa_p d\varkappa_p^*}{\pi} e^{-|\varkappa_p|^2/J}\right] \exp\left\{ v \prod_{p=\pm} e^{\frac{ip}{2}\int\limits_0^{t_p} dt \tilde{\rho}_p(t)} \left[ipe^{ibt_p}\varkappa_p - \varkappa_{-p}^* \int\limits_0^{t_{-p}} dt\, e^{ip\int\limits_0^t dt' \rho_{-p}(t')} \right] \right\}. \tag{Г.13}$$

Интегрируя по переменным $\varkappa_p$ и $\bar{\varkappa}_p$ в выражении (Г.13), получаем

$$J^2 \left[1 + iJv \left(\prod_{p=\pm} e^{\frac{ip}{2}\int\limits_0^{t_p} dt \rho_p} \right) \left(\sum_{p=\pm} pe^{\frac{ipb}{2}(t_+ - t_-)} \int\limits_0^{t_p} dt\, e^{-ip\int\limits_0^t dt' \rho_p(t')} \right) \right]^{-1}. \tag{Г.14}$$

[24] Здесь используется тот факт, что κ_p^p удовлетворяет начальному условию $\kappa_{p,0}^p = 0$.

Отсюда находим, что выражение (Г.6) может быть записано в виде:

$$\mathcal{Z} = J^2 \left(\prod_{p=\pm} \int \mathcal{D}[\rho_p] e^{-\frac{ip}{4J}\int\limits_0^{t_p} dt\rho_p^2 + \frac{ip}{2}\int\limits_0^{t_p} dt\rho_p(t)} \right) \left(\prod_\gamma \oint\limits_{|z_\gamma|=1} \frac{idz_\gamma}{2\pi z_\gamma^2} \right) e^{-w-2v\cos\left[\frac{1}{2}\sum\limits_{p=\pm}\int\limits_0^{t_p} dt\tilde{\rho}_p(t)\right]} \times$$

$$\times \int\limits_0^\infty dy\, e^{-y} \exp\left[-iJy \left(\prod_{p=\pm} e^{\frac{ip}{2}\int\limits_0^{t_p} d t\rho_p} \right) \left(v \sum_{p=\pm} p e^{\frac{ipb}{2}(t_+-t_-)} \int\limits_0^{t_p} dt\, e^{-ip\int\limits_0^t dt'\rho_p(t')} \right) \right], \qquad (\text{Г}.15)$$

где

$$w = \sum_\gamma z_\gamma \left[1 + e^{-2i\tilde{\epsilon}_\gamma(t_+-t_-)}\right], \qquad v = \sum_\gamma z_\gamma e^{-i\tilde{\epsilon}_\gamma(t_+-t_-)}. \qquad (\text{Г}.16)$$

Для того, чтобы преобразовать уравнение (Г.15) к более стандартной форме, удобно ввести новые переменные

$$\xi_p(t) = ip \int\limits_0^t dt' \rho_p(t') + \xi_p(0). \qquad (\text{Г}.17)$$

Здесь $\xi_p(0)$ – произвольная константа. Тогда величина $\mathcal{Z}$ может быть записана как

$$\mathcal{Z} = J^2 \left(\prod_\gamma \oint\limits_{|z_\gamma|=1} \frac{idz_\gamma}{2\pi z_\gamma^2} \right) \int\limits_0^\infty dy\, e^{-y-w} \left[\prod_{p=\pm} \int \mathcal{D}[\xi_p] \exp\left(ip \int\limits_0^{t_p} dt\, \mathcal{L}_p + \frac{\xi_p(t_p) - \xi_p(0)}{2} \right) \right] \times$$

$$\times \exp\left\{ -2v \operatorname{ch}\left(\sum_{p=\pm} \frac{p}{2} [\xi_p(t_p) - \xi_p(0) - ibt_p] \right) \right\}. \qquad (\text{Г}.18)$$

Функциональный интеграл по ξ_p в выражении (Г.18) имеет вид интеграла Фейнмана-Каца, причём величина

$$\mathcal{L}_p = \frac{1}{4J}\dot{\xi}_p^2 - Jyv \left(\prod_{q=\pm} e^{\frac{\xi_q(t_q) + pq\xi_q(0) + ipbqt_q}{2}} \right) e^{-\xi_p} \qquad (\text{Г}.19)$$

играет роль лагранжиана. Удобно перейти от переменных ξ_p к новым переменным

$$\tilde{\xi}_p(t) = \xi_p(t) - \frac{1}{2} \sum_{q=\pm} \left[\xi_q(t_q) + pq\xi_q(0) + ipbqt_q \right]. \qquad (\text{Г}.20)$$

Тогда выражение для величины $\mathcal{Z}$ примет такой же вид как выражение (Г.18) с учётом следующих замен: $\xi_p(t_p) \to \tilde{\xi}_p(t_p)$, $\xi_p(0) \to \tilde{\xi}_p(0)$, $\mathcal{L}_p \to \tilde{\mathcal{L}}_p$, где

$$\tilde{\mathcal{L}}_p = \frac{1}{4J}\dot{\tilde{\xi}}_p^2 - \frac{J}{4} e^{-\tilde{\xi}_p}. \qquad (\text{Г}.21)$$

Заметим, что новые переменные $\tilde{\xi}_p$ не зависят от неопределённых констант $\xi_p(0)$ и удовлетворяют следующим условиям

$$\sum_{p=\pm} \tilde{\xi}_p(t_p) + 2\ln 4yv = 0, \qquad \sum_{p=\pm} p[\tilde{\xi}_p(0) + ibt_p] = 0. \qquad (\text{Г}.22)$$

Ниже для краткости будем опускать знак тильды у новых переменных $\tilde{\xi}_p$. Переписывая выражение (Г.18) через матричные элементы одномерной квантовой механики с гамильтонианом

$$H_J = -J\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{J}{4}e^{-\xi}, \tag{Г.23}$$

получаем

$$\mathcal{Z} = \left(\prod_\gamma \oint_{|z_\gamma|=1} \frac{idz_\gamma}{2\pi z_\gamma^2}\right) \int_0^\infty \frac{J^2 dy}{4yv}\, e^{-y-w} \left(\prod_{p=\pm} \int d\xi_p d\xi_p'\, e^{-\xi_p'/2}\right) \delta\left(\sum_{p=\pm} \xi_p + 2\ln 4yv\right) \times$$
$$\times \delta\left(\sum_{p=\pm} p[\xi_p' + ibt_p]\right) e^{-2v\,\mathrm{ch}\,[(\xi_+-\xi_-)/2]} \langle \xi_+|e^{-iH_J t_+}|\xi_+'\rangle\langle\xi_-'|e^{iH_J t_-}|\xi_-\rangle. \tag{Г.24}$$

Собственные функции и энергии гамильтониана H_J параметризуются действительным числом ν:

$$\langle \nu|\xi\rangle = \frac{2}{\pi}\sqrt{\nu\,\mathrm{sh}\,(2\pi\nu)}K_{2i\nu}(e^{-\xi/2}), \qquad H_J|\nu\rangle = J\nu^2|\nu\rangle, \tag{Г.25}$$

где $K_{2i\nu}(z)$ – функция Мак-Дональда. Интегрируя в начале по y, а затем с помощью соотношения (см. формулу 6.794.11 на стр. 794 в [429])

$$\int_0^\infty d\nu\, \nu\,\mathrm{sh}\,(2\pi\nu)K_{2i\nu}(e^{-\xi_+/2})K_{2i\nu}(e^{-\xi_-/2})K_{2i\nu}(2v) = \frac{\pi^2}{16}e^{-\frac{1}{4v}e^{-\frac{\xi_++\xi_-}{2}}-2v\,\mathrm{ch}\,\frac{\xi_+-\xi_-}{2}} \tag{Г.26}$$

интегрируя по ξ_p, находим

$$\mathcal{Z} = \frac{2J^2}{\pi^2}\left(\prod_\gamma \oint_{|z_\gamma|=1} \frac{idz_\gamma}{2\pi z_\gamma^2}\right) \frac{e^{-w}}{v} \int_0^\infty d\nu\,\nu\,\mathrm{sh}\,(2\pi\nu)K_{2i\nu}(2v) \left(\prod_{p=\pm}\int d\xi_p'\, e^{-\xi_p'/2}K_{2i\nu}(e^{-\xi_p'/2})\right) \times$$
$$\times \delta\left(\sum_{p=\pm} p[\xi_p' + ibt_p]\right) e^{-iJ\nu^2(t_+-t_-)}. \tag{Г.27}$$

С помощью соотношения (см. формулу 6.521.3 на стр. 658 в [429])

$$\int_0^\infty dx\, xK_\nu(ax)K_\nu(bx) = \frac{\pi(ab)^{-\nu}(a^{2\nu}-b^{2\nu})}{2\sin(\pi\nu)(a^2-b^2)}, \tag{Г.28}$$

можно вычислить интеграл по ξ_+' и ξ_-'. Далее, используя следующее интегральное представление для функции Мак-Дональда

$$K_{2i\nu}(2d) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty dh\, e^{-2d\,\mathrm{ch}\,h + 2i\nu h}, \tag{Г.29}$$

можно вычислить интеграл по переменной ν. Наконец, интегрируя по переменным z_γ, находим

$$\mathcal{Z} = \frac{\sqrt{J^3}}{2\sqrt{\pi\beta}} e^{-\beta b^2/4J} \int\limits_{-\infty}^{\infty} dh\, \mathrm{sh}\,(h) \frac{\mathrm{sh}\,(bh/J)}{\mathrm{sh}\,(\beta b/2)} e^{-h^2/\beta J} \prod_{\gamma,\sigma} \left(1 + e^{-\beta\tilde{\epsilon}_\gamma - h\sigma}\right). \qquad (\Gamma.30)$$

В процессе вычислений величины $\mathcal{Z}$ были опущены нормировочные множители, зависящие от J и β. Для того, чтобы их восстановить, выражение (Г.30) можно сравнить с ответами, вычисленными непосредственно в случае только одного или двух одночастичных уровней энергии. Можно убедиться, что необходимо сделать такую замену: $\mathcal{Z} \to (2/J^2)\exp(-\beta J/4)\mathcal{Z}$, что приводит к выражению (4.27).

Вывод выражения (4.36) для корреляционной функции $\mathcal{K}_{\alpha\uparrow\uparrow}$

Из-за того, что величина $\mathcal{C}_{\alpha\uparrow\uparrow}$ не зависит от переменных $\kappa_p^{\pm p}$, интегрирование по ним в выражении (4.21) для корреляционной функции $\mathcal{K}_{\alpha\uparrow\uparrow}$ выполняется так же как выше для $\mathcal{Z}$. Тогда получаем, что

$$\mathcal{K}_{\alpha\uparrow\uparrow} = J^2 \left(\prod_{p=\pm} \int \mathcal{D}[\rho_p] e^{-\frac{ip}{4J}\int\limits_0^{t_p} dt\rho_p^2 + \frac{ip}{2}\int\limits_0^{t_p} dt\rho_p(t)}\right) \left(\prod_{\gamma\neq\alpha} \oint\limits_{|z_\gamma|=1} \frac{idz_\gamma}{2\pi z_\gamma^2}\right) e^{-w_\alpha - 2v_\alpha \cos\left[\frac{1}{2}\sum\limits_{p=\pm}\int\limits_0^{t_p} dt\tilde{\rho}_p(t)\right]} \times$$
$$\times \int\limits_0^{\infty} dy\, e^{-y} \exp\left[-iJy \left(\prod_{p=\pm} e^{\frac{ip}{2}\int\limits_0^{t_p} dt\rho_p}\right) \left(v\sum_{p=\pm} p e^{\frac{ipb}{2}(t_+ - t_-)} \int\limits_0^{t_p} dt\, e^{-ip\int\limits_0^t dt'\rho_p(t')}\right)\right] \times$$
$$\times\, e^{-2i\tilde{\epsilon}_\alpha t_+} \sum_{p=\pm} e^{i\tilde{\epsilon}_\alpha t_p} e^{\frac{ip}{2}\int\limits_0^{t_p} dt\tilde{\rho}_p(t)}, \qquad (\Gamma.31)$$

где

$$w_\alpha = \sum_{\gamma\neq\alpha} z_\gamma (1 + e^{-2i\tilde{\epsilon}_\gamma(t_+ - t_-)}), \qquad v_\alpha = \sum_{\gamma\neq\alpha} z_\gamma e^{-i\tilde{\epsilon}_\gamma(t_+ - t_-)}. \qquad (\Gamma.32)$$

Как и раньше, удобно перейти от переменных ρ_p к переменным $\tilde{\xi}_p$ и записать выражение для $\mathcal{K}_{\alpha\uparrow\uparrow}$ в следующем виде:

$$\mathcal{K}_{\alpha\uparrow\uparrow} = \left(\prod_{\gamma\neq\alpha} \oint\limits_{|z_\gamma|=1} \frac{idz_\gamma}{2\pi z_\gamma^2}\right) \int\limits_0^{\infty} \frac{J^2 dy}{4yv_\alpha} e^{-y - w_\alpha - 2i\tilde{\epsilon}_\alpha t_+} \left(\prod_{p=\pm} \int d\xi_p d\xi_p' e^{-\xi_p'/2}\right) \left(\sum_{p=\pm} e^{i\tilde{\epsilon}_\alpha t_p} e^{-\frac{ibt_p}{2}} e^{\frac{\xi_p - \xi_p'}{2}}\right) \times$$
$$\times\, \delta(\xi_+ + \xi_- + 2\ln 4yv_\alpha)\, \delta\left(\sum_{p=\pm} p[\xi_p' + ibt_p]\right) e^{-2v_\alpha \mathrm{ch}\,\frac{\xi_+ - \xi_-}{2}} \langle\xi_+| e^{-iH_J t_+} |\xi_+'\rangle \langle\xi_-'| e^{iH_J t_-} |\xi_-\rangle. \qquad (\Gamma.33)$$

Интегрируя по y и затем с помощью соотношения (Г.26) по ξ_p, получаем

$$\mathcal{K}_{\alpha\uparrow\uparrow} = e^{-2i\tilde{\epsilon}_\alpha t_+}\left(\prod_{\gamma\neq\alpha}\oint_{|z_\gamma|=1}\frac{idz_\gamma}{2\pi z_\gamma^2}\right)\frac{J^2}{2v_\alpha}e^{-w_\alpha}\int_0^\infty d\nu K_{2i\nu}(2v_\alpha)\sum_{p=\pm}\Bigg[e^{i\tilde{\epsilon}_{\alpha\downarrow}t_p}e^{ipJ\nu^2 t_{-p}}\times$$
$$\times\int d\nu_1 e^{-ipJ\nu_1^2 t_p}\langle\nu|e^{\xi/2}|\nu_1\rangle Q_{\nu\nu_1}\left(e^{\frac{ipb(t_+-t_-)}{4}}\right)\Bigg], \tag{Г.34}$$

где

$$Q_{\nu\nu_1}(z) = \frac{8z}{\pi^2}\left[\nu\nu_1\,\mathrm{sh}\,(2\pi\nu)\,\mathrm{sh}\,(2\pi\nu_1)\right]^{1/2}\int_0^\infty d\eta\,\eta^2 K_{2i\nu}(\eta/z)K_{2i\nu_1}(z\eta). \tag{Г.35}$$

Вычисляя интеграл (см. формулу 6.576.4 на стр. 676 в [429]), находим, что

$$Q_{\nu\nu_1}(z)=\frac{z^{-2-4i\nu}}{2}{}_2F_1\left(\frac{3}{2}+i\nu+i\nu_1,\frac{3}{2}+i\nu-i\nu_1,3;1-\frac{1}{z^4}\right)\prod_{\sigma,\sigma'=\pm}\Gamma\left(\frac{3}{2}+i\sigma\nu+i\sigma'\nu_1\right). \tag{Г.36}$$

Далее вычисление матричного элемента $\langle\nu|e^{\xi/2}|\nu_1\rangle$ с помощью следующего соотношения для функций Мак-Дональда

$$\frac{1}{\eta}K_{2i\nu}(\eta) = \frac{1}{4i\nu}\left[K_{2i\nu+1}(\eta) - K_{2i\nu-1}(\eta)\right], \tag{Г.37}$$

даёт

$$\langle\nu|e^{\xi/2}|\nu_1\rangle = \frac{1}{4}\left[\frac{\langle\nu-i/2|\nu_1\rangle}{\sqrt{\nu(\nu-\frac{i}{2})}}+\frac{\langle\nu+i/2|\nu_1\rangle}{\sqrt{\nu(\nu+\frac{i}{2})}}\right]. \tag{Г.38}$$

Используя выражения (Г.36) и (Г.38), а также представление (Г.29) для функции Мак-Дональда, можно вычислить интеграл по ν и ν_1 в (Г.31) и получить выражение (4.36).

Г.3 Корреляционная функция $C(h_1, h_2)$

В этом приложении представлен вывод ассимптотических результатов (4.54) для корреляционной функции (4.53), а также результата (4.62).

Одночастичая плотность состояний $\nu_0(E)$ имеет негауссову статистику. Однако, функция $V(h)$ является гауссовой случайной величиной [417], так как определяется большим числом ($\max\{|h|, T\}/\delta \gg 1$) одночастичных уровней энергии. Напомним, что двухточечная корреляционная функция одночастичной плотности состояний имеет следующий вид [417]

$$\langle\delta\nu_0(E)\delta\nu_0(E+\omega)\rangle = \frac{1}{\delta^2}\left[\delta\left(\frac{\omega}{\delta}\right) - R_{U/O}\left(\frac{\pi\omega}{\delta}\right)\right], \tag{Г.39}$$

где функция $R(x)$ для унитарного и ортогонального классов симметрии равна соответственно:

$$R_U(x) = \frac{\sin^2 x}{x^2}, \qquad R_O(x) = \frac{\sin^2 x}{x^2} + \left(\frac{d}{dx}\frac{\sin x}{x}\right)\int\limits_x^\infty \frac{\sin t}{t}dt. \tag{Г.40}$$

Используя уравнения (4.51) и (Г.39), получаем [25]

$$C(h_1,h_2) = T^2\int \frac{dEd\omega}{\delta^2} R_{U/O}\left(\frac{\pi T\omega}{\delta}\right)\left\{\ln\left[1+\frac{\operatorname{sh}^2(\frac{h_1}{2})}{\operatorname{ch}^2(\frac{E}{2})}\right]\ln\left[1+\frac{\operatorname{sh}^2(\frac{h_2}{2})}{\operatorname{ch}^2(\frac{E}{2})}\right]-\right.$$
$$\left.-\ln\left[1+\frac{\operatorname{sh}^2(\frac{h_1}{2})}{\operatorname{ch}^2(\frac{E+\omega/2}{2})}\right]\ln\left[1+\frac{\operatorname{sh}^2(\frac{h_2}{2})}{\operatorname{ch}^2(\frac{E-\omega/2}{2})}\right]\right\}. \tag{Г.41}$$

Если определить функции $C_{nm}(h_1,h_2) = d^{n+m}C(h_1,h_2)/(d^n h_1 d^m h_2)$ с целыми $n, m \geqslant 1$, то тогда можно проверить, что выполняется соотношение

$$C_{11}(h_1,h_2) = L_2(h_1+h_2) - L_2(h_1-h_2). \tag{Г.42}$$

Здесь функция $L_2(h)$ определена как

$$L_2(h) = 16T^2\operatorname{sh}^2\frac{h}{2}\int\limits_0^\infty \frac{d\omega}{\delta^2}R_{U/O}\left(\frac{2\pi T\omega}{\delta}\right)\left[\frac{\frac{h}{2}\operatorname{cth}\frac{h}{2}-1}{\operatorname{ch}h-1} - \frac{\frac{h}{2}\operatorname{cth}\frac{h}{2}-\omega\operatorname{cth}\omega}{\operatorname{ch}h-\operatorname{ch}2\omega}\right]. \tag{Г.43}$$

Используя условия $C(h_1,h_2) = C(h_2,h_1)$ и $C(h,0) = 0$, можно получить уравнение (4.53), в котором функция $L(h)$ связана с $L_2(h)$ соотношением $L_2(h) = L''(h)$.

Для оценки функции $L_2(h)$ при $T \gg \delta$ можно использовать асимптотическое выражение функции $R_{U/O}(x)$ при больших значениях аргумента: $R_{U/O}(x) = 1/\boldsymbol{\beta}x^2$ при $x \gg 1$. Тогда для $T \gg \delta$ находим, что

$$L_2(h) = \frac{4\operatorname{sh}^2(h/2)}{\boldsymbol{\beta}\pi^2}\int\limits_0^\infty \frac{d\omega}{\omega^2}\left[\frac{\frac{h}{2}\operatorname{cth}\frac{h}{2}-1}{\operatorname{ch}h-1} - \frac{\frac{h}{2}\operatorname{cth}\frac{h}{2}-\omega\operatorname{cth}\omega}{\operatorname{ch}h-\operatorname{ch}2\omega}\right]. \tag{Г.44}$$

При $|h| \ll 1$ правую часть уравнения (Г.44) можно разложить в ряд по h и найти

$$L_2(h) = \frac{c_3 h^2}{2\boldsymbol{\beta}\pi^2}, \tag{Г.45}$$

где численная константа c_3 определена выражением (4.55). Отсюда, интегрируя два раза по h, получаем выражение (4.54).

[25] При выводе используется соотношение $\int_{-\infty}^{\infty} R_{U/O}(x)dx = \pi$.

При $|h| \gg 1$ выражение (Г.44) можно переписать в следующем виде

$$L_2(h) \approx \frac{2\operatorname{sh}^2(h/2)}{\boldsymbol{\beta}\pi^2}\Bigg\{\int\limits_0^1 \frac{d\omega}{\omega^2}\Big[\frac{|h|-2}{2\operatorname{sh}^2(h/2)} - \frac{|h|-2\omega\operatorname{cth}\omega}{\operatorname{ch}(h)}\Big] + \int\limits_1^{|h|/2} \frac{d\omega}{\omega^2}\Big[\frac{|h|-2}{2\operatorname{sh}^2(h/2)} - \\ - 2\frac{|h|-2\omega\operatorname{cth}\omega}{e^{|h|}-e^{2\omega}}\Big] + \int\limits_{|h|/2}^{\infty} \frac{d\omega}{\omega^2}\Big[\frac{|h|-2}{2\operatorname{sh}^2(h/2)} - 2\frac{|h|-2\omega}{e^{|h|}-e^{2\omega}}\Big]\Bigg\} \approx \frac{2}{\boldsymbol{\beta}\pi^2}\ln\frac{|h|e^{c_2}}{2}, \qquad (\text{Г}.46)$$

где численная константа c_2 определена в уравнении (2.103). Отсюда, после интегрирования по h получается асимптотическое выражение (4.54) для функции $L(h)$ при $|h| \gg 1$.

Выражение (4.60) означает, что квадрат флуктуаций расстояния между одночастичными уровнями энергии Δ может быть представлен в виде: $\overline{(\Delta-\delta)^2}/\delta^2 = C_{22}(0,0)\delta^2/(4T^2)$. Как следует из уравнений (Г.42) и (Г.45), величина $C_{22}(0,0) = 2c_3/\boldsymbol{\beta}\pi^2$. Отсюда получается соотношение (4.62).

Г.4 Вычисление средней спиновой восприимчивости $\overline{\chi(T,0)}$ в области II_a

В этом приложении приведены детали вычисления средней спиновой восприимчивости $\overline{\chi(T,0)}$ в нулевом магнитном поле в главном логарифмическом приближении, которое учитывает члены с наибольшей степенью $\ln 2J_\star/T$ в каждом порядке разложения по $1/(\boldsymbol{\beta}\pi^2)$.

Определим величину $\Xi_{10}(x,y) = \partial\Xi(x,y)/\partial x$. Тогда при $\delta \ll T \ll J_\star$, что соответствует условию $y \gg 1$, имеет место следующее приближенное равенство:

$$\overline{\chi(T,0)} \approx \frac{(J_\star/J)^2}{3T}\frac{d}{dy}\overline{\ln\Xi_{10}(0,y)}. \qquad (\text{Г}.47)$$

Для вычисления среднего $\overline{\ln\Xi_{10}(0,y)}$ удобно использовать метод реплик. Для произвольного натурального числа n получаем следующее соотношение

$$\overline{\big[\Xi_{10}(0,y)\big]^n} = y^{\frac{3n}{2}}e^{\frac{ny}{4}}\prod_{j=1}^{n}\Big[\int\frac{du_j}{2}e^{-u_j^2}\big(1+\frac{2u_j}{\sqrt{y}}\big)\Big]\exp\Bigg[\frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{n}C\Big(\frac{y}{2}+\sqrt{y}u_j,\frac{y}{2}+\sqrt{y}u_k\Big)\Bigg]. \quad (\text{Г}.48)$$

Предполагая, что главный вклад в интеграл в выражении (Г.48) определяется областью $|u_j| \ll \sqrt{y}$, можно разложить двухточечную корреляционную функцию (4.53) в ряд по степеням переменных u_j и u_k. Тогда получим, что

$$C\Big(\frac{y}{2}+\sqrt{y}u_j,\frac{y}{2}+\sqrt{y}u_k\Big) \approx \frac{y^2\ln 2}{\boldsymbol{\beta}\pi^2} + \frac{1-a}{n}(u_j^2+u_k^2) + 2bu_ju_k + \frac{c}{n}(u_j+u_k) + \\ + \frac{y}{2\boldsymbol{\beta}\pi^2}(u_j-u_k)^2\ln(u_j-u_k)^2. \qquad (\text{Г}.49)$$

Здесь для удобства введены следующие обозначения:

$$a = 1 + \frac{ny}{2\boldsymbol{\beta}\pi^2}\left(\ln\frac{y}{16} + 3\right), \qquad b = \frac{y}{2\boldsymbol{\beta}\pi^2}\left(\ln y + 3\right), \qquad c = \frac{2ny^{3/2}}{\boldsymbol{\beta}\pi^2}\ln 2. \tag{Г.50}$$

Последний член в выражении (Г.49) может быть формально представлен как вклад от независимой гауссовой переменной $v(u) = v(-u)$ с корреляционной функцией

$$\overline{v(u_j)v(u_k)} = \frac{y}{2\boldsymbol{\beta}\pi^2}(u_j - u_k)^2\ln(u_j - u_k)^2. \tag{Г.51}$$

Тогда выражение (Г.48) можно переписать как

$$\overline{\left[\Xi_{10}(0,y)\right]^n} = y^{\frac{3n}{2}} e^{\frac{ny}{4} + \frac{n^2y^2\ln 2}{2\beta\pi^2}} \prod_{j=1}^{n}\left[\int \frac{du_j}{2} e^{-au_j^2 + cu_j}\left(1 + \frac{2u_j}{\sqrt{y}}\right)\right] e^{b\left(\sum_{j=1}^n u_j\right)^2} \overline{\prod_{j=1}^{n} e^{v(u_j)}}. \tag{Г.52}$$

Здесь последний сомножитель в правой части необходимо усреднить с помощью выражения (Г.51). Вводя новую переменную z, выражение (Г.52) можно представить в виде

$$\overline{\left[\Xi_{10}(0,y)\right]^n} = y^{\frac{3n}{2}} e^{\frac{ny}{4} + \frac{n^2y^2\ln 2}{2\beta\pi^2}} \int \frac{dz}{\sqrt{\pi}} e^{-z^2} \prod_{j=1}^{n}\left[\int \frac{du_j}{2} e^{-au_j^2 + (c+2z\sqrt{b})u_j}\left(1 + \frac{2u_j}{\sqrt{y}}\right)\right] \overline{\prod_{j=1}^{n} e^{v(u_j)}}. \tag{Г.53}$$

Заметим, что типичные значения переменных u_j, дающие главный вклад в интегралы в правой части уравнения (Г.53), оказываются порядка $(c+2z\sqrt{b})/a$. Поэтому удобно ввести новые переменные $x_j = u_j - (c + 2z\sqrt{b})/2a$. При выполнении условия $|c + 2z\sqrt{b}|/2a \ll \sqrt{y}$ пределы интегрирования для переменных x_j остаются такими же как и для переменных u_j. Учитывая тот факт, что корреляционная функция (Г.51) трансляционно инвариантна, находим [26]

$$\overline{\left[\Xi_{10}(0,y)\right]^n} = \frac{\pi^{n/2}y^{3n/2}e^{n(y+c^2/(a-nb))/4}}{2^n a^{(n-1)/2}(a-nb)^{1/2}} e^{\frac{n^2y^2\ln 2}{2\beta\pi^2}} \int \frac{dz}{\sqrt{\pi}} e^{-z^2}\left(1 - \frac{2z\sqrt{b(a-nb)} + c\sqrt{a}}{(a-nb)\sqrt{ay}}\right)^n \times \\ \times \overline{\left(\int \frac{dx}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2 + v(x/\sqrt{a})}\right)^n}. \tag{Г.54}$$

Отсюда в пределе $n \to 0$ получаем, что

$$\overline{\ln \Xi_{10}(0,y)} = \frac{y}{4}\left[1 + \frac{1}{\boldsymbol{\beta}\pi^2}\left(\ln y + 3\right)\right] + \overline{\ln \mathfrak{X}} + \int \frac{dz}{\sqrt{\pi}} e^{-z^2}\ln\left[1 + z\sqrt{2\ln y/(\boldsymbol{\beta}\pi^2)}\right], \tag{Г.55}$$

где

$$\mathfrak{X} = \int \frac{du}{\sqrt{\pi}} e^{-u^2 + v(u)}. \tag{Г.56}$$

[26] При выводе было учтено, что функция $v(x)$ является чётной.

Как уже обсуждалось выше, интеграл по z в уравнении (Г.55) ограничен условием $|z|\sqrt{\ln y/(\boldsymbol{\beta}\pi^2)} \ll 1$. В этом случае типичное значение переменной z, которое даёт основной вклад в интеграл, оказывается порядка единицы. Поэтому, наше предположение оказывается самосогласованным, если $\sqrt{\ln y/(\boldsymbol{\beta}\pi^2)} \ll 1$. В этом случае интеграл по z в уравнении (Г.55) оказывается пропорциональным величине $\ln y/\boldsymbol{\beta}\pi^2 \ll 1$ и им можно пренебречь по сравнению с первым членом.

Вычисление величины $\overline{\ln \mathcal{X}}$ в низшем порядке разложения по параметру $y/(\boldsymbol{\beta}\pi^2)$ даёт

$$\overline{\ln \mathcal{X}} = c_{x1}\frac{y}{\boldsymbol{\beta}\pi^2} + \dots, \qquad c_{x1} = (\ln 2 + \gamma - 2)/4 \approx -0.18. \tag{Г.57}$$

Подставляя это выражение в уравнение (Г.55), получаем выражение (4.67). В следующем порядке разложения по параметру $y/(\boldsymbol{\beta}\pi^2)$ находим

$$\overline{\ln \mathcal{X}} = c_{x1}\frac{y}{\boldsymbol{\beta}\pi^2} + c_{x2}\left(\frac{y}{\boldsymbol{\beta}\pi^2}\right)^2 + \dots, \tag{Г.58}$$

где

$$c_{x2} = -\frac{3}{8}\ln^2\left(2e^{\gamma-7/3}\right) - \frac{3\pi^2}{32} + \frac{19}{24} + \int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dudv}{4\pi\sqrt{3}}\,e^{-2(u^2+uv+v^2)/3}\,u^2\ln(u^2)\,v^2\ln(v^2) \approx -0.039. \tag{Г.59}$$

Выражение (Г.58) показывает, что, строго говоря, результат (4.67) справедлив при выполнении условия $1 \ll y \ll \boldsymbol{\beta}\pi^2$.

Г.5 Асимптотическое выражение для функции $\mathcal{F}(x,y)$ при $y \gg 1$

В этом приложении представлен вывод асимптотического выражения (4.91) для функции $\mathcal{F}(x,y)$ при $y \gg 1$. Будем считать, что выполняется условие $(2n+1) \leqslant |x| < (2n+3)$, где целое число $n \geqslant 0$. Тогда функция $\mathcal{F}(x,y)$ может быть записана в виде:

$$\mathcal{F}(x,y) = \frac{1}{2}e^{-y/4}e^{yx/2}e^{-yx^2/4}\left\{\widetilde{\mathcal{F}}(x,y) + 2\sum_{m=0}^{n}(-1)^m\exp\left[y\frac{(|x|-(2m+1))^2}{4}\right]\right\}. \tag{Г.60}$$

Здесь функция $\widetilde{\mathcal{F}}(x,y)$ определена как

$$\widetilde{\mathcal{F}}(x,y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} dt\,e^{-yt^2}\frac{\operatorname{ch}(\pi t)\cos(\pi x/2)}{\operatorname{sh}^2(\pi t)+\cos^2(\pi x/2)}, \tag{Г.61}$$

и для любого целого числа k удовлетворяет соотношениям $\widetilde{\mathcal{F}}(x+2k,y) = (-1)^{|k|}\widetilde{\mathcal{F}}(x,y)$ и $\widetilde{\mathcal{F}}(2k+1,y) = (-1)^{|k|}$. При $y \gg 1$ находим

$$\widetilde{\mathcal{F}}(x,y) = \frac{\operatorname{sgn}[\cos(\pi x/2)]}{y^{1/4}\sqrt{\cos(\pi x/2)}}\exp\left(\frac{y\cos^2(\pi x/2)}{2\pi^2}\right)W_{-\frac{1}{4},\frac{1}{4}}\left(\frac{y\cos^2(\pi x/2)}{\pi^2}\right), \tag{Г.62}$$

где $W_{\lambda,\mu}(z)$ обозначает функцию Уиттекера. Учитывая, что функция Уиттекера $W_{-1/4,1/4}(z)$ связана с функцией ошибок следующим соотношением:

$$W_{-\frac{1}{4},\frac{1}{4}}(z) = \sqrt{\pi} z^{1/4} e^{z/2} \Big[1 - \mathrm{erf}(\sqrt{z})\Big], \tag{Г.63}$$

находим при $y \gg 1$, что

$$\widetilde{\mathfrak{F}}(x,y) = \mathrm{sgn}[\cos(\pi x/2)] \exp\left(\frac{y\cos^2(\pi x/2)}{\pi^2}\right)\left[1 - \mathrm{erf}\left(\frac{\sqrt{y}|\cos(\pi x/2)|}{\pi}\right)\right]. \tag{Г.64}$$

Используя уравнения (Г.60) и (Г.64), получаем асимптотическое выражение (4.91).

Список публикаций

1. M. A. Baranov, I. S. Burmistrov, A. M. M. Pruisken, *Non-Fermi-liquid theory for disordered metals near two dimensions*, Phys. Rev. B 66, 075317 (2002).

2. A. M. M. Pruisken, I. S. Burmistrov, *The instanton vacuum of generalized CP^{N-1} models*, Ann. of Phys. (N.Y.) 316, 285 (2005).

3. A. M. M. Pruisken, M. A. Baranov, I. S. Burmistrov, *Non-Fermi liquid theory of the quantum Hall effects*, Письма в ЖЭТФ 82, 166 (2005).

4. A. M. M. Pruisken, I. S. Burmistrov, *Comment on "Topological oscillations of the magnetoconductance in disordered GaAs layers"*, Phys. Rev. Lett. 95, 189701 (2005).

5. I. S. Burmistrov, N. M. Chtchelkatchev, *Crossover behavior of disordered interacting two-dimensional electron systems in a parallel magnetic field*, Письма в ЖЭТФ 79, 775 (2006).

6. A. M. M. Pruisken, I. S. Burmistrov, *θ renormalization, electron-electron interactions and superuniversality in the quantum Hall regime*, Ann. of Phys. (N.Y.) 322, 1265 (2007).

7. A. M. M. Pruisken, I. S. Burmistrov, *Non-Fermi liquid criticality and super universality in the quantum Hall regime*, Письма в ЖЭТФ 87, 252 (2008).

8. I. S. Burmistrov, N. M. Chtchelkatchev, *Electronic properties in a two-dimensional disordered electron liquid: Spin-valley interplay*, Phys. Rev. B 77, 195319 (2008).

9. I. S. Burmistrov, A. M. M. Pruisken, *Coulomb blockade and super universality of the θ-angle*, Phys. Rev. Lett. **101**, 056801 (2008).

10. I. S. Burmistrov, A. M. M. Pruisken, *The problem of macroscopic charge quantization in the Coulomb blockade*, AIP Conference Proceedings **1134**, 101 (2009).

11. I. S. Burmistrov, A. M. M. Pruisken, *The problem of macroscopic charge quantization in single electron devices*, Phys. Rev. B **81**, 085428 (2010).

12. I. S. Burmistrov, Y. Gefen, M. N. Kiselev, *Spin and charge correlations in quantum dots: An exact solution*, Письма в ЖЭТФ **92**, 202 (2010).

13. I. S. Burmistrov, S. Bera, F. Evers, I. V. Gornyi, A. D. Mirlin, *Wave function multifractality and dephasing at metal-insulator and quantum Hall transitions*, Ann. of Phys. (N.Y) **326**, 1457 (2011).

14. I. S. Burmistrov, I. V. Gornyi, K. S. Tikhonov, *Disordered electron liquid in double quantum well heterostructures: Renormalization group analysis and dephasing rate*, Phys. Rev. B **84**, 075338 (2011).

Литература

[1] P. W. Anderson, *Absence of diffusion in certain random lattices*, Phys. Rev. **109**, 1492 (1958).

[2] N. F. Mott, W. D. Twose, *The theory of impurity conduction*, Adv. in Phys. **10**, 107 (1961).

[3] J. Fröhlich, F. Martinelli, E. Scoppola, T. Spencer, *Constructive proof of localization in the Anderson tight binding model*, Commun. Math. Phys. **101**, 21 (1985).

[4] D. J. Thouless, *Electrons in disordered systems and the theory of localization*, Phys. Rep. **13**, 93 (1974).

[5] E. Abrahams, P. W. Anderson, D. C. Licciardello, T. V. Ramakrishnan, *Scaling theory of localization: Absence of quantum diffusion in two dimensions*, Phys. Rev. Lett. **42**, 673 (1979).

[6] Л. П. Горьков, А. И. Ларкин, Д. Е. Хмельницкий, *Проводимость частицы в двумерном случайном потенциале*, Письма в ЖЭТФ **30**, 248 (1979).

[7] E. Abrahams, T. V. Ramakrishnan, *Scaling theory of localization and non-ohmic effects in two-dimensions*, J. Non-Cryst. Solids **35**, 15 (1980).

[8] F. Wegner, *Electrons in disordered systems. Scaling near the mobility edge*, Z. Phys. B **25**, 327 (1976).

[9] А. З. Паташинский, В. Л. Покровский, *Флуктуационная теория фазовых переходов*, Наука, Москва, 1975.

[10] D. J. Amit, *Field theory, renormalization group, and critical phenomena*, (World Scientific, 1984).

[11] J. Zinn-Justin, *Quantum field theory and critical phenomena*, (University Press, 1989).

[12] F. Wegner, *The mobility edge problem: continuous symmetry and a conjecture*, Z. Phys. B **35**, 207 (1979).

[13] L. Schäfer, F. Wegner, *Disordered system withn orbitals per site: Lagrange formulation, hyperbolic symmetry, and goldstone modes*, Z. Phys. B **38**, 113 (1980).

[14] К. Б. Эфетов, А. И. Ларкин, Д. Е. Хмельницкий, *Взаимодействие диффузионных мод в теории локализации*, ЖЭТФ **79**, 1120 (1980).

[15] K. Jüngling, R. Oppermann, *Effects of spin interactions in disordered electronic systems: Loop expansions and exact relations among local gauge invariant models*, Z. Phys. B **38**, 93 (1980).

[16] A. J. McKane, M. Stone, *Localization as an alternative to Goldstone's theorem*, Ann. Phys. (N.Y.) **131**, 36 (1981).

[17] К. Б. Эфетов, *Метод суперсимметрии в теории локализации*, ЖЭТФ **82**, 872 (1982).

[18] В. Л. Березинский, *Кинетика квантовой частицы в одномерном случайном потенциале*, ЖЭТФ **65**, 1251 (1973).

[19] P. A. Lee, T. V. Ramakrishnan, *Disordered electronic systems*, Rev. Mod. Phys. **57**, 287 (1985).

[20] K. B. Efetov, *Supersymmetry and theory of disordered metals*, Adv. Phys. **32**, 53 (1983); *Supersymmetry in Disorder and Chaos*, (Cambridge University Press, 1997).

[21] E. P. Wigner, *On a Class of Analytic Functions from the Quantum Theory of Collisions*, Ann. Math. **53**, 36 (1951).

[22] F. J. Dyson, *Statistical Theory of the Energy Levels of Complex Systems. I*, J. Math. Phys. **3**, 140 (1962).

[23] F. J. Dyson, *The Threefold Way. Algebraic Structure of Symmetry Groups and Ensembles in Quantum Mechanics*, J. Math. Phys. **3**, 1199 (1962).

[24] M. R. Zirnbauer, *Riemannian symmetric superspaces and their origin in random-matrix theory*, J. Math. Phys. **37**, 4986 (1996).

[25] A. Altland, M. R. Zirnbauer, *Nonstandard symmetry classes in mesoscopic normal-superconducting hybrid structures*, Phys. Rev. B **55**, 1142 (1997).

[26] P. Heinzner, A. Huckleberry, M. R. Zirnbauer, *Symmetry Classes of Disordered Fermions*, Commun. Math. Phys. **257**, 725 (2005).

[27] E. Brézin, S. Hikami, J. Zinn-Justin, *Generalized non-linear σ-models with gauge invariance*, Nucl. Phys. B **165**, 528 (1980).

[28] H. Levine, S.B. Libby, A.M.M. Pruisken, *Electron delocalization by a magnetic field in two dimensions*, Phys. Rev. Lett. **51**, 1915 (1983).

[29] A. M. M. Pruisken, *On localization in the theory of the quantized Hall effect: a two-dimensional realization of the θ-vacuum*, Nucl. Phys. B **235**, 277 (1984).

[30] A. M. M. Pruisken, in *The Quantum Hall Effect*, eds. R. E. Prange and S. M. Girvin (Springer, 1987), p. 117.

[31] A. P. Schnyder, S. Ryu, A. Furusaki, A. W. W. Ludwig, *Classification of topological insulators and superconductors in three spatial dimensions*, Phys. Rev. B **78**, 195125 (2008).

[32] A. P. Schnyder, S. Ryu, A. Furusaki, A. W. W. Ludwig, *Classification of Topological Insulators and Superconductors*, AIP Conf. Proc. **1134**, 10 (2009).

[33] A. Yu. Kitaev, *Periodic table for topological insulators and superconductors*, AIP Conf. Proc. **1134**, 22 (2009).

[34] F. Wegner, *Inverse participation ratio in $2+\epsilon$ dimensions*, Z. Phys. B **36**, 209 (1980).

[35] C. Castellani, L. Peliti, *Multifractal wavefunction at the localisation threshold*, J. Phys. A **19**, L429 (1986).

[36] В. Е. Кравцов, И. В. Лернер, *Неустойчивость однопараметрической ренормализационной группы в задаче локализации*, ЖЭТФ **88** 1281 (1985).

[37] A. D. Mirlin, *Statistics of energy levels and eigenfunctions in disordered systems*, Phys. Rep. **326**, 259 (2000).

[38] A. D. Mirlin, F. Evers, *Anderson Transitions*, Rev. Mod. Phys. **80**, 1355 (2008).

[39] *Special issue: 50 years of Anderson localization*, Int. J. Mod. Phys. B **24**, Nos. 12&13 (2010).

[40] F. Jendrzejewski, A. Bernard, K. Müller, P. Cheinet, V. Josse, M. Piraud, L. Pezzé, L. Sanchez-Palencia, A. Aspect, P. Bouyer, *Three-dimensional localization of ultracold atoms in an optical disordered potential*, Nature Phys. (2012); doi:10.1038/nphys2256.

[41] M. Lopez, J.-F. Clément, P. Szriftgiser, J. C. Garreau, D. Delande. *Experimental Test of Universality of the Anderson Transition*, Phys. Rev. Lett. **108**, 095701 (2012).

[42] D. J. Thouless, *Maximum metallic resistance in thin wires*, Phys. Rev. Lett. **39**, 1167 (1977).

[43] E. Abrahams, P. W. Anderson, T. V. Ramakrishnan, *Possible explanation of non-linear conductivity in thin-film metal wires*, Phys. Rev. Lett. **43**, 718 (1979).

[44] B. L. Altshuler, A. G. Aronov, D. E. Khmelnitsky, *Effects of electron-electron collisions with small energy transfers on quantum localisation*, J. Phys. C **15**, 7367 (1982).

[45] A. Schmid, *On the dynamics of electrons in an impure metal*, Z. Phys. B **271**, 251 (1974).

[46] Б. Л. Альтшулер, А. Г. Аронов, *Затухание одноэлектронных возбуждений в металлах*, Письма в ЖЭТФ **30**, 514 (1979).

[47] Ya. M. Blanter, *Electron-electron scattering rate in disordered mesoscopic systems*, **54**, 12807 (1996).

[48] L. Fleishman, P. W. Anderson, *Interactions and the Anderson transition*, Phys. Rev. B **21**, 2366 (1980).

[49] I. V. Gornyi, A. D. Mirlin, D. G. Polyakov, *Interacting electrons in disordered wires: Anderson localization and low-T transport*, Phys. Rev. Lett. **95**, 206603 (2005).

[50] D. M. Basko, I. L. Aleiner, B. L. Altshuler, *Metal–insulator transition in a weakly interacting many-electron system with localized single-particle states*, Ann. Phys. (N.Y.) **321**, 1126 (2006).

[51] Б. Л. Альтшулер, А. Г. Аронов, *К теории неупорядоченных металлов и сильнолегированных полупроводников*, ЖЭТФ **77**, 2028 (1979).

[52] B. L. Altshuler, A. G. Aronov, P. A. Lee, *Interaction effects in disordered Fermi systems in two dimensions*, Phys. Rev. Lett. **44**, 1288 (1980).

[53] G. Zala, B. N. Narozhny, I. L. Aleiner, *Interaction corrections at intermediate temperatures: Longitudinal conductivity and kinetic equation*, Phys. Rev. B **64** 214204 (2001).

[54] B. L. Altshuler, A. G. Aronov, in *Electron-Electron Interactions in Disordered Conductors*, ed. A.J. Efros and M. Pollack, Elsevier Science Publishers, North-Holland, 1985.

[55] W. L. McMillan, *Scaling theory of the metal-insulator transition in amorphous materials*, Phys. Rev. B **24**, 2739 (1981).

[56] А. М. Финкельштейн, *Влияние кулоновского взаимодействия на свойства неупорядоченных металлов*, ЖЭТФ **84**, 168 (1983).

[57] А. М. Финкельштейн, *О частотной и температурной зависимости проводимости вблизи перехода металл-изолятор*, Письма в ЖЭТФ **37**, 436 (1983).

[58] А. М. Финкельштейн, *Спиновые флуктуации в неупорядоченных системах вблизи перехода металл-изолятор*, Письма в ЖЭТФ **40**, 63 (1984).

[59] А. М. Финкельштейн, *О переходе металл-изолятор в неупорядоченной системе*, ЖЭТФ **86**, 367 (1984).

[60] C. Castellani, C. Di Castro, P. A. Lee, M. Ma, *Interaction-driven metal-insulator transitions in disordered fermion systems*, Phys. Rev. B **30**, 527 (1984).

[61] C. Castellani, C. Di Castro, P. A. Lee, M. Ma, S. Sorella, E. Tabet, *Spin fluctuations in disordered interacting electrons*, Phys. Rev. B **30**, 1596 (1984).

[62] A. M. Finkelstein, *Weak localization and Coulomb interaction in disordered systems*, Z. Phys. B **56**, 189 (1984).

[63] A. M. Finkelstein, *Electron liquid in disordered conductors*, vol. 14 of Soviet Scientific Reviews, ed. by I. M. Khalatnikov, Harwood Academic Publishers, London, (1990).

[64] D. Belitz, T. R. Kirkpatrick, *The Anderson-Mott transition*, Rev. Mod. Phys. **66**, 261 (1994).

[65] L. Dell'Anna, *Disordered d-wave superconductors with interactions*, Nucl. Phys. B **758**, 255 (2006).

[66] T. Ando, A. B. Fowler, F. Stern, *Electronic properties of two-dimensional systems*, Rev. Mod. Phys. **54**, 437 (1982).

[67] S. V. Kravchenko, G. V. Kravchenko, J. E. Furneaux, V. M. Pudalov, M. D'Iorio, *Possible metal-insulator transition at B=0 in two dimensions*, Phys. Rev. B **50**, 8039 (1994).

[68] S.V. Kravchenko, W.E. Mason, G.E. Bowker, J.E. Furneaux, V.M. Pudalov, M.D'Iorio, *Scaling of an anomalous metal-insulator transition in a two-dimensional system in silicon at B=0*, Phys. Rev. B **51**, 7038 (1995).

[69] D.A. Knyazev, O.E. Omel'yanovskii, V.M. Pudalov, I.S. Burmistrov, *Metal-insulator transition in two dimensions: Experimental test of the two-parameter scaling*, Phys. Rev. Lett. **100**, 046405 (2008).

[70] E. Abrahams, S. V. Kravchenko, M. P. Sarachik, *Metallic behavior and related phenomena in two dimensions*, Rev. Mod. Phys. **73**, 251 (2001).

[71] Е.Л. Шангина, В.Т. Долгополов, *Квантовые фазовые переходы в двумерных системах*, УФН **173**, 801 (2003).

[72] S.V. Kravchenko, M. P. Sarachik, *Metal-insulator transition in two-dimensional electron systems*, Rep. Prog. Phys **67**, 1 (2004).

[73] V. M. Pudalov, M. E. Gershenson, H. Kojima, *On the Electron-Electron Interactions in Two Dimensions*, Chapter 19 (pp.309-327) in: Fundamental Problems of Mesoscopic Physics. Interaction and Decoherence. Eds. I.V.Lerner, B.L.Altshuler, and Y.Gefen, Nato sci. series, Kluwer (2004).

[74] А. А. Шашкин, *Переходы металл-диэлектрик и эффекты электрон-электронного взаимодействия в двумерных электронных системах*, УФН **175**, 139 (2005).

[75] В.Ф. Гантмахер, В.Т. Долгополов, *Квантовые фазовые переходы "локализованные-делокализованные электроны"*, УФН **178**, 3 (2008).

[76] D. Simonian, S. V. Kravchenko, M. P. Sarachik, and V. M. Pudalov, *Magnetic field suppression of the conducting phase in two dimensions*, Phys. Rev. Lett. **79**, 2304 (1997).

[77] S. A. Vitkalov, K. James, B. N. Narozhny, M. P. Sarachik, T. M. Klapwijk, *In-plane magnetoconductivity of Si MOSFETs: A quantitative comparison of theory and experiment*, Phys. Rev. B **67**, 113310 (2003).

[78] V.M. Pudalov, M.E. Gershenson, H. Kojima, G. Brunthaler, A. Prinz, G. Bauer, *Interaction effects in conductivity of Si inversion layers at intermediate temperatures*, Phys. Rev. Lett. **91**, 126403 (2003).

[79] D. A. Knyazev, O. E. Omel'yanovskii, V. M. Pudalov, I. S. Burmistrov, *Critical behavior of transport and magnetotransport in 2D electron system in Si in the vicinity of the metal-insulator transtion*, Письма в ЖЭТФ **84**, 780 (2006).

[80] J. Yoon, C. C. Li, D. Shahar, D. C. Tsui, M. Shayegan, *Parallel magnetic field induced transition in transport in the dilute two-dimensional hole system in GaAs*, Phys. Rev. Lett. **84**, 4421 (2000).

[81] A. Punnoose, A. M. Finkelstein, *Metal-insulator transition in disordered two-dimensional electron systems*, Science **310**, 289 (2005).

[82] A. Punnoose, A. M. Finkelstein, *Dilute electron gas near the metal-insulator transition: Role of valleys in silicon inversion layers*, Phys. Rev. Lett. **88**, 016802 (2001).

[83] S. Anissimova, S. V. Kravchenko, A. Punnoose, A. M. Finkel'stein, T. M. Klapwijk, *Flow diagram of the metal-insulator transition in two dimensions*, Nature Phys. **3**, 707 (2007).

[84] A. Yu. Kuntsevich, N. N. Klimov, S. A. Tarasenko, N. S. Averkiev, V. M. Pudalov, H. Kojima, M. E. Gershenson, *Intervalley scattering and weak localization in Si-based two-dimensional structures*, Phys. Rev. B **75**, 195330 (2007).

[85] N. N. Klimov, D. A. Knyazev, O. E. Omelyanovskii, V. M. Pudalov, H. Kojima, M. E. Gershenson, *Interaction effects in conductivity of a two-valley electron system in high-mobility Si inversion layers*, Phys. Rev. B **78**, 195308 (2008).

[86] M. Shayegan, E. P. De Poortere, O. Gunawan, Y. P. Shkolnikov, E. Tutuc, and K. Vakili, *Two-dimensional electrons occupying multiple valleys in AlAs*, Phys. Stat. Sol.(b) **243**, 3629 (2006).

[87] O. Gunawan, Y. P. Shkolnikov, K. Vakili, T. Gokmen, E. P. De Poortere, M. Shayegan, *Valley susceptibility of an interacting two-dimensional electron system*, Phys. Rev. Lett. **97**, 186404 (2006).

[88] O. Gunawan, T. Gokmen, K. Vakili, M. Padmanabhan, E. P. De Poortere, M. Shayegan, *Spin-valley phase diagram of the two-dimensional metal-insulator transition*, Nature Phys. **3**, 388 (2007).

[89] I. S. Burmistrov, N. M. Chtchelkatchev, *Cross-over behavior of disordered interacting two-dimensional electron systems in a parallel magnetic field*, Письма в ЖЭТФ **84**, 775 (2006).

[90] T. J. Gramila, J. P. Eisenstein, A. H. MacDonald, L. N. Pfeiffer, K. W. West, *Mutual friction between parallel two-dimensional electron systems*, Phys. Rev. Lett. **66**, 1216 (1991).

[91] U. Sivan, P. M. Solomon, H. Shtrikman, *Coupled electron-hole transport*, Phys. Rev. Lett. **68**, 1196 (1992).

[92] M. P. Lilly, J. P. Eisenstein, L. N. Pfeiffer, K. W. West, *Coulomb drag in the extreme quantum limit*, Phys. Rev. Lett. **80**, 1714 (1998).

[93] R. Pillarisetty, Hwayong Noh, D. C. Tsui, E. P. De Poortere, E. Tutuc, M. Shayegan, *Frictional drag between two dilute two-dimensional hole layers*, Phys. Rev. Lett. **89**, 016805 (2002).

[94] M. Kellog, J. P. Eisenstein, L. N. Pfeiffer, K. W. West, *Vanishing Hall resistance at high magnetic field in a double-layer two-dimensional electron system*, Phys. Rev. Lett. **93**, 036801 (2004).

[95] E. Tutuc, M. Shayegan, D. A. Huse, *Counterflow measurements in strongly correlated GaAs hole bilayers: Evidence for electron-hole pairing*, Phys. Rev. Lett. **93**, 036802 (2004).

[96] J. P. Eisenstein, A. H. MacDonald, *Bose–Einstein condensation of excitons in bilayer electron systems*, Nature **432**, 691 (2004).

[97] G. S. Boebinger, H. W. Jiang, L. N. Pfeiffer, K. W. West, *Magnetic-field-driven destruction of quantum Hall states in a double quantum well*, Phys. Rev. Lett. **64**, 1793 (1990).

[98] A. Sawada, Z. F. Ezawa, H. Ohno, Y. Horikoshi, Y. Ohno, S. Kishimoto, F. Matsukura, M. Yasumoto, A. Urayama, *Phase transition in the $\nu = 2$ bilayer quantum Hall state*, Phys. Rev. Lett. **80**, 4534 (1999).

[99] V. S. Khrapai, E. V. Deviatov, A. A. Shashkin, V. T. Dolgopolov, F. Hastreiter, A. Wixforth, K. L. Campman, A. C. Gossard, *Canted antiferromagnetic phase in a double quantum well in a tilted quantizing magnetic field*, Phys. Rev. Lett. **84**, 725 (2000).

[100] G. M. Minkov, A. V. Germanenko, O. E. Rut, O. I. Khrykin, V. I. Shashkin, V. M. Daniltsev, *Inter-well transitions and negative magnetoresistance in double-quantum-well heterostructures*, Nanotechnology **11**, 406 (2000).

[101] I. R. Pagnossin, A. K. Meikap, T. E. Lamas, G. M. Gusev, J. C. Portal, *Anomalous dephasing scattering rate of two-dimensional electrons in double quantum well structures*, Phys. Rev. B **78**, 115311 (2008).

[102] G. M. Minkov, A. V. Germanenko, O. E. Rut, A. A. Sherstobitov, A. K. Bakarov, D. V. Dmitriev, *Dephasing and interwell transitions in double quantum well heterostructures*, Phys. Rev. B **82**, 165325 (2010).

[103] G. M. Minkov, A. V. Germanenko, O. E. Rut, A. A. Sherstobitov, A. K. Bakarov, D. V. Dmitriev, *Interaction correction to conductivity of* $Al_xGa_{1-x}As/GaAs$ *double quantum well heterostructures near the balance*, Phys. Rev. B **84**, 075337 (2011) .

[104] A. Kamenev, A. Levchenko, *Keldysh technique and non-linear* σ*-model: basic principles and applications*, Adv. Phys. **58**, 197 (2009).

[105] A. M. M. Pruisken, M. A. Baranov, B. Škorić, *(Mis-)handling gauge invariance in the theory of the quantum Hall effect. I. Unifying action and the* $\nu = 1/2$ *state*, Phys. Rev. B **60**, 16807 (1999).

[106] C. Castellani, C. Di Castro, *Effective Landau theory for disordered interacting electron systems: Specific-heat behavior*, Phys. Rev. B **34**, 5935 (1986).

[107] A. Kamenev, A. Andreev, *Electron-electron interactions in disordered metals: Keldysh formalism*, Phys. Rev. B **60**, 2218 (1999).

[108] A. M. M. Pruisken, M. A. Baranov, I. S. Burmistrov, *Non-Fermi liquid theory of the quantum Hall effects*, Письма в ЖЭТФ **82**, 166 (2005).

[109] M. A. Baranov, A. M. M. Pruisken, B. Škorić, *(Mis-)handling gauge invariance in the theory of the quantum Hall effect. II. Perturbative results*, Phys. Rev. B **60**, 16821 (1999).

[110] A.M. Polyakov, *Interaction of goldstone particles in two dimensions. Applications to ferromagnets and massive Yang-Mills fields*, Phys. Lett. B **59**, 79 (1975).

[111] Б. Л. Альтшулер, А. Г. Аронов, А. И. Ларкин, Д. Е. Хмельницкий, *Аномальное магнитосопротивление в полупроводниках*, ЖЭТФ **81**, 768 (1981).

[112] Б. Л. Альтшулер, А. Г. Аронов, *Магнетосопротивление тонких пленок в продольном магнитном поле и проволок*, Письма в ЖЭТФ **33**, 515 (1981).

[113] B. L. Altshuler, D. E. Khmel'nitzkii, A. I. Larkin, P. A. Lee, *Magnetoresistance and Hall effect in a disordered two-dimensional electron gas*, Phys. Rev. B **22**, 5142 (1982).

[114] I.S. Burmistrov, I.V. Gornyi, K.S. Tikhonov, *Disordered electron liquid in double quantum well heterostructures: Renormalization group analysis and dephasing rate*, Phys.Rev.B **84**, 075338 (2011).

[115] S. Brener, S. V. Iordanski, A. Kashuba, *Possible Jahn-Teller effect in Si inverse layers*, Phys. Rev. B **67**, 125309 (2003).

[116] M. O. Nestoklon, L. E. Golub, E. I. Ivchenko, *Spin and valley-orbit splittings in SiGe/Si heterostructures*, Phys. Rev. B **73**, 235334 (2006).

[117] I.S. Burmistrov, N.M. Chtchelkatchev, *Spin-valley interplay in two-dimensional disordered electron liquid*, Phys. Rev. B **77**, 195319 (2008).

[118] A. Punnoose, A. M. Finkel'stein, A. Mokashi, S. V. Kravchenko, *Test of scaling theory in two dimensions in the presence of valley splitting and intervalley scattering in Si-MOSFETs*, Phys. Rev. B **82**, 201308(R) (2010).

[119] A. Punnoose, *Renormalization group study of intervalley scattering and valley splitting in a two-valley system*, Phys. Rev. B **81**, 035306 (2010).

[120] A. Punnoose, *Renormalization group study of a two-valley system with spin-splitting*, Phys. Rev. B **82**, 115310 (2010).

[121] L.D. Landau, E.M. Lifshitz, *Quantum mechanics*, Course of Theoretical Physics, vol. 3, Pergamon, 1991.

[122] Lian Zheng, A. H. MacDonald, *Coulomb drag between disordered two-dimensional electron-gas layers*, Phys. Rev. B **48**, 8203 (1993).

[123] A. Kamenev, Y. Oreg, *Coulomb drag in normal metals and superconductors: Diagrammatic approach*, Phys. Rev. B **52**, 7516 (1995).

[124] K. Flensberg, B. Yu-Kuang-Hu, A.-P. Jauho, J.M. Kinaret, *Linear-response theory of Coulomb drag in coupled electron systems*, Phys. Rev. B **52**, 14761 (1995).

[125] I. V. Gornyi, A. G. Yashenkin, D. V. Khveshchenko, *Coulomb drag in double layers with correlated disorder*, Phys. Rev. Lett. **83**, 152 (1999).

[126] B. N. Narozhny, G. Zala, I. L. Aleiner, *Interaction corrections at intermediate temperatures: Dephasing time*, Phys. Rev. B 65, 180202 (2002).

[127] M. A. Baranov, I. S. Burmistrov, A. M. M. Pruisken, *Non-Fermi-liquid theory for disordered metals near two dimensions*, Phys. Rev. B **66**, 075317 (2002).

[128] S. Hikami, , Phys. Lett. B **98**, 208 (1981).

[129] S. Hikami, *Isomorphism and the β-function of the non-linear σ model in symmetric spaces*, Nucl. Phys. B **215**, 555 (1983).

[130] W. Bernreuther, F. J. Wegner, *Four-loop-order β-function for two-dimensional nonlinear sigma models*, Phys. Rev. Lett. **57**, 1383 (1986).

[131] Ю. А. Бычков, *Квантовая теория электропроводности металлов в сильных магнитных полях*, ЖЭТФ, **39**, 689 (1960).

[132] T. Ando, Y. Uemura, *Theory of quantum transport in a two-dimensional electron system under magnetic fields. I. Characteristics of level broadening and transport under strong fields*, J. Phys. Soc. Japan **36**, 959 (1974).

[133] T. Ando, *Theory of quantum transport in a two-dimensional electron system under magnetic fields. II. Single site approximation under strong fields*, J. Phys. Soc. Japan **36**, 1521 (1974).

[134] T. Ando, *Theory of quantum transport in a two-dimensional electron system under magnetic fields. III. Many-site approximation*, J. Phys. Soc. Japan **37**, 622 (1974).

[135] T. Ando, *Theory of quantum transport in a two-dimensional electron system under magnetic fields. IV. Oscillatory conductivity*, J. Phys. Soc. Japan **37**, 1233 (1974).

[136] T. Ando, Y. Matsumoto, Y. Uemura, *Theory of Hall effect in a two-dimensional electron system*, J. Phys. Soc. Japan **39**, 279 (1975).

[137] L. Smrčka, P. Středa, *Transport coefficients in strong magnetic field*, J. Phys. C: Solid State Phys. **10**, 2153 (1977).

[138] Э. М. Баскин, Л. И. Магрилл, М. В. Энтин, *Двумерная электрон-примесная система в сильном магнитном поле*, ЖЭТФ **75**, 723 (1978).

[139] K. von Klitzing, G. Dorda, M. Pepper, *New method for high-accuracy determination of the fine-structure constant based on quantized Hall resistance*, Phys. Rev. Lett. **45**, 494 (1980).

[140] D. C. Tsui, A. C. Gossard, *Resistance standard using qunatization of the Hall resistance of GaAs-Al$_x$Ga$_{1-x}$As heterostructures*, Appl. Phys. Lett. **38**, 550 (1981).

[141] D. C. Tsui, H.L. Störmer, A. C. Gossard, *Two-dimensional magnetotransport in the extreme quantum limit*, Phys. Rev. Lett. **48**, 1559 (1982).

[142] J. P. Eisenstein, H. L. Störmer, *The fractional quantum Hall effect*, Science **248**, 1510 (1990).

[143] R. B. Laughlin, *Quantized motion of three two-dimensional electrons in a strong magnetic field*, Phys. Rev. B **27**, 3383(1983).

[144] R. B. Laughlin, *Anomalous quantum Hall effect: An incompressible quantum fluid with fractionally charged excitations*, Phys. Rev. Lett. **50**, 1395 (1983).

[145] *The Quantum Hall Effect*, eds. R. E. Prange and S. M. Girvin (Springer, 1987).

[146] T. Chakraborty, P. Pietiläinen, *The Fractional Quantum Hall Effect: Properties of an Incompressible Quantum Fluid (Springer Series in Solid-State Sciences)*, (Springer, 1988).

[147] O. Heinonen (Ed.), *Composite Fermions*, (World Scientific,1998).

[148] H. Aoki, T. Ando, *Effect of localization on the hall conductivity in the two-dimensional system in strong magnetic fields*, Solid State Commun. **38**, 1079 (1981).

[149] R. E. Prange, *Quantized Hall resistance and the measurement of the fine-structure constant*, Phys. Rev. B **23**, 4802 (1981).

[150] R. B. Laughlin, *Quantized Hall conductivity in two dimensions*, Phys. Rev. B **23**, 5632 (1981).

[151] D. J. Thouless, *Localisation and the two-dimensional Hall effect*, J. Phys. C: Solid State Phys. **14**, 3475 (1981).

[152] B. I. Halperin, *Quantized Hall conductance, current-carrying edge states, and the existence of extended states in a two-dimensional disordered potential*, Phys. Rev. B **25**, 2185 (1982).

[153] D. J. Thouless, M. Kohmoto, M. P. Nightingale, M. den Nijs, *Quantized Hall Conductance in a Two-Dimensional Periodic Potential*, Phys. Rev. Lett. **49**, 405 (1982).

[154] J. E. Avron, R. Seiler, B. Simon, *Homotopy and Quantization in Condensed Matter Physics*, Phys. Rev. Lett. **51**, 51 (1983).

[155] А. А. Белавин, А. М. Поляков, *Метастабильные состояний двумерного изотропного ферромагнетика*, Письма в ЖЭТФ **22**, 503 (1975).

[156] И. Б. Хриплович, *Функции Грина в теориях с неабелевой калибровочной группой*, Ядер. Физ. **10**, 409 (1969).

[157] D. J. Gross, F. Wilczek, *Ultraviolet behavior of non-Abelian gauge theories*, Phys. Rev. Lett. **30**, 1343 (1973).

[158] H. D. Politzer, *Reliable perturbative results for strong interactions*, Phys. Rev. Lett. **30**, 1346 (1973).

[159] A. A. Belavin, A. M. Polyakov, A. S. Schwartz, Yu. S. Tyupkin, *Pseudoparticle solutions of the Yang-Mills equations*, Phys. Lett. B **59**, 85 (1975).

[160] C. G. Callan, Jr., R. Dashen, D. J. Gross, *The structure of the gauge theory vacuum*, Phys. Lett. B **63**, 334 (1976).

[161] R. Jackiw, C. Rebbi, *Vacuum periodicity in a Yang-Mills quantum theory*, Phys. Rev. Lett. **37**, 8 (1976).

[162] G. 't Hooft, *Symmetry breaking through Bell-Jackiw anomalies*, Phys. Rev. Lett. **37**, 8 (1976).

[163] G. 't Hooft, *Computation of the quantum effects due to a four-dimensional pseudoparticle*, Phys. Rev. D **14**, 3432 (1976).

[164] C. G. Callan, Jr., R. Dashen, D. J. Gross, *Towards a theory of the strong interactions*, Phys. Rev. D **17**, 2717 (1978).

[165] D. J. Gross, R. D. Pisarski, L. G. Yaffe, *QCD and instantons at finite temperature*, Rev. Mod. Phys. **53**, 43 (1981).

[166] А. И. Вайнштейн, В. И. Захаров, В. А. Новиков, М. А. Шифман, *Инстантонная азбука*, УФН **136**, 553 (1982).

[167] D. Diakonov, *Topology and confinement*, Nucl.Phys. Proc.Suppl. **195**, 5 (2009).

[168] E. Vicari, H. Panagopolous, *θ dependence of $SU(N)$ gauge theories in the presence of topological term*, Phys. Rep. **470**, 93150 (2009).

[169] S. Coleman, *Aspects of Symmetry*, University Press, (Cambridge, 1989).

[170] Д. Е. Хмельницкий, *О квантовании холловской проводимости*, Письма в ЖЭТФ **38**, 454 (1983).

[171] H. Levine, S. B. Libby, A. M. M. Pruisken, *Theory of the quantized Hall effect (I)*, Nucl. Phys. B **240**, 30 (1984).

[172] H. Levine, S. B. Libby, A. M. M. Pruisken, *Theory of the quantized Hall effect (II)*, Nucl. Phys. B **240**, 49 (1984).

[173] H. Levine, S. B. Libby, A. M. M. Pruisken, *Theory of the quantized Hall effect (III)*, Nucl. Phys. B **240**, 71 (1984).

[174] H. Levine, S. B. Libby, *Renormalization of the θ angle, the quantum Hall effect and the strong CP problem*, Phys. Lett. B **150**, 182 (1985).

[175] A.M.M. Pruisken, *Dilute instanton gas as the precursor of the integer quantum Hall effect*, Phys. Rev. B **32**, 2636 (1985).

[176] A. M. M. Pruisken, *Quasiparticles in the theory of the integral quantum Hall effect (I)*, Nucl. Phys. B **285**, 719 (1987).

[177] A. M. M. Pruisken, *Quasiparticles in the theory of the integral quantum Hall effect (II). Renormalization of the Hall conductance or instanton angle theta*, Nucl. Phys. B **290**, 61 (1987).

[178] В. Г. Книжник, А. Ю. Морозов, *О перенормировке топологического заряда*, Письма в ЖЭТФ **39**, 202 (1984).

[179] A. M. M. Pruisken, M. A. Baranov, M. Voropaev, *The large N theory exactly reveals the quantum Hall effect and theta-renormalization*, http://arxiv.org/abs/cond-mat/0101003.

[180] Wan Li, *Transport study on two-dimensional electrons with controlled short-range alloy disorder*, PhD Thesis, Princeton University 2007.

[181] A. M. M. Pruisken, *Universal singularities in the integral quantum Hall effect*, Phys. Rev. Lett. **61**, 1297 (1988).

[182] H. P. Wei, D. C. Tsui, M. A. Palaanen, A. M. M. Pruisken, *Experiments on delocalization and universality in the integral quantum Hall effect*, Phys. Rev. Lett. **61**, 1294 (1988).

[183] H. P. Wei, S. W. Hwang, D. C. Tsui, A.M.M. Pruisken, *New results on scaling in the integral quantum Hall effect*, Surf. Science **229**, 34 (1990).

[184] L. W. Engel, D. Shahar, Ç. Kurdak, D. C. Tsui, *Microwave frequency dependence of integer quantum Hall effect: Evidence for finite-frequency scaling*, Phys. Rev. Lett. **71**, 2638 (1993).

[185] L. W. Engel, D. Shahar, Ç. Kurdak, D. C. Tsui, *Observation of finite-frequency scaling in the integer quantum Hall effect*, Surf. Science **305**, 124 (1994).

[186] F. Hohls, U. Zeitler,R. J. Haug, R. Meisels, K. Dybko, F. Kuchar, *Dynamical Scaling of the Quantum Hall Plateau Transition*, Phys. Rev. Lett. **89**, 036802 (2002).

[187] F. Hohls, G. Sukhodub, R. J. Haug, *Dynamics of electronic transport in the integer quantum Hall regime*, Phys. Stat. Sol. B **245**, 309 (2008).

[188] S. Koch, R. J. Haug, K. v. Klitzing, K. Ploog, *Size-dependent analysis of the metal-insulator transition in the integral quantum Hall effect*, Phys. Rev. Lett. **67**, 883 (1991).

[189] S. Koch, R. J. Haug, K. v. Klitzing, K. Ploog, *Direct measurement of critical exponents in the quantum Hall regime*, Surf. Science **263**, 108 (1992).

[190] S. Koch, R. J. Haug, K. v. Klitzing, K. Ploog, *Experimental studies of the localization transition in the quantum Hall regime*, Phys. Rev. B **46**, 1596 (1992).

[191] W. Li, C. L. Vicente, J. S. Xia, W. Pan, D. C. Tsui, L. N. Pfeiffer, K. W. West, *Scaling in plateau-to-plateau transition: A direct connection of quantum Hall systems with the Anderson localization model*, Phys. Rev. Lett. **102**, 216801 (2009).

[192] H. P. Wei, L. W. Engel, D. C. Tsui, *Current scaling in the integer quantum Hall effect*, Phys. Rev. B **50**, 14609 (1994).

[193] Ed. Chow, H. P. Wei, *Experiments on inelastic scattering in the integer quantum Hall effect*, Phys. Rev. B **52**, 13749 (1995).

[194] H. Scherer, L. Schweitzer, F. J. Ahlers, L. Bliek, R. Losch W. Schlapp, *Current scaling and electron heating between integer quantum Hall plateaus in $GaAs/Al_xGa_{1-x}As$ heterostructures*, Semicond. Sci. Technol. **10**, 959 (1995).

[195] S. Koch, R. J. Haug, K. v. Klitzing, K. Ploog, *Experiments on scaling in $Al_xGa_{1-x}As/GaAs$ heterostructures under quantum Hall conditions*, Phys. Rev. B **43**, 6828 (1991).

[196] H. P. Wei, S. Y. Lin, D. C. Tsui, A.M.M. Pruisken, *Effect of long-range potential fluctuations on scaling in the integer quantum Hall effect*, Phys. Rev. B **45**, 3926 (1992).

[197] B. Karmakar, M. R. Gokhale, A. P. Shah, B. M. Arora, D. T. N. de Lang, A. de Visser, L. A. Ponomarenko, A. M. M. Pruisken, *The effects of macroscopic inhomogeneities on the magnetotransport properties of the electron gas in two dimensions*, Physica E 224, 187 (2004).

[198] L. A. Ponomarenko, D. T. N. de Lang, A. de Visser, V. A. Kubalchinskii, G. B. Galiev, H. Künzel, A. M. M. Pruisken, *The effect of carrier density gradients on magnetotransport data measured in Hall bar geometry*, Solid State Commun. 130, 705 (2004).

[199] A. M. M. Pruisken, D. T. N. de Lang, L. A. Ponomarenko, A. de Visser, *Universal scaling results for the plateau–insulator transition in the quantum Hall regime*, Sol. State Commun. **137**, 540 (2006).

[200] W. Li, G. A. Csathy, D. C. Tsui, L. N. Pfeiffer, K. W. West, *Scaling and universality of integer quantum Hall plateau-to-plateau transitions*, Phys. Rev. Lett. **94**, 206807 (2005).

[201] W. Li, J. S. Xia, C. Vicente, N. S. Sullivan, W. Pan D. C. Tsui, L. N. Pfeiffer, K. W. West, *Crossover from the nonuniversal scaling regime to the universal scaling regime in quantum Hall plateau transitions*, Phys. Rev. B **81**, 033305 (2010).

[202] M. Tsukada, *On the tail states of the Landau subbands in MOS structures under strong magnetic field*, J. Phys. Soc. Jpn. **41**, 1466 (1976).

[203] S. V. Iordansky, *On the conductivity of two-dimensional electron in a strong magnetic field*, Solid State Commun. **43**, 1 (1982).

[204] R. F. Kazarinov, S. Luryi, *Quantum percolation and quantization of Hall resistance in two-dimensional electron gas*, Phys. Rev. B **25**, 7626 (1982).

[205] R. E. Prange, R. Joynt, *Conduction in a strong field in two dimensions: The quantum Hall effect*, Phys. Rev. B **25**, 2943 (1982).

[206] S. A.Trugman, *Localization, percolation, and the quantum Hall effect*, Phys. Rev. B **27**, 7539 (1983).

[207] H. A. Fertig, *Semiclassical description of a two-dimensional electron in a strong magnetic field and an external potential*, Phys. Rev. B **38**, 996 (1988).

[208] Г. В. Мильников, И. М. Соколов, *О квазиклассической локализации в магнитном поле*, Письма в ЖЭТФ, **48**, 494 (1988).

[209] J. T. Chalker, P. D. Coddington, *Percolation, quantum tunneling and the integer quantum Hall effect*, J. Phys. C: Solid State Phys. **21**, 2665 (1988).

[210] B. Huckestein, *Scaling theory of the integer quantum Hall effect*, Rev. Mod. Phys. **67**, 357 (1995).

[211] R. B. Laughlin, *Levitation of extended-state bands in a strong magnetic field*, Phys. Rev. Lett. **52**, 2304 (1984).

[212] D. E. Khmelnitskii, *Quantum Hall effect and additional oscillations of conductivity in weak magnetic fields*, Phys. Lett. A **106**, 182 (1984).

[213] A. D. Mirlin, D. G. Polyakov, P. Wölfe, *Composite Fermions in a Long-Range Random Magnetic Field: Quantum Hall Effect versus Shubnikov–de Haas Oscillations*, Phys. Rev. Lett. **80**, 2429 (1998).

[214] F. Evers, A. D. Mirlin, D. G. Polyakov, P. Wölfe, *Semiclassical theory of transport in a random magnetic field*, Phys. Rev. B **60**, 8951 (1999).

[215] T. Ando, *Electron Localization in a Two-Dimensional System in Strong Magnetic Fields. III. Impurity-Concentration Dependence and Level-Mixing Effects*, J. Phys. Soc. Jpn. **53**, 3126 (1984).

[216] T. V. Shahbazyan, M. E. Raikh, *Weak Levitation of 2D Delocalized States in a Magnetic Field*, Phys. Rev. Lett. **75**, 304 (1995).

[217] V. Kagalovsky, B. Horovitz, Y. Avishai, *Landau-level mixing and extended states in the quantum Hall effect*, Phys. Rev. B **52**, 17044 (1995).

[218] F. D. M. Haldane, K. Yang, *Landau Level Mixing and Levitation of Extended States in Two Dimensions*, Phys. Rev. Lett. **78**, 298 (1997).

[219] M. M. Fogler, *Quasiclassical approach to the weak levitation of extended states in the quantum Hall effect*, Phys. Rev. B **57**, 11947 (1998).

[220] Th. Koschny, L. Schweitzer, *Levitation of quantum Hall critical states in a lattice model with spatially correlated disorder*, Phys. Rev. B **67**, 195307 (2003).

[221] Th. Koschny, L. Schweitzer, *Levitation of the quantum Hall extended states in the $B \to 0$ limit*, Phys. Rev. B **70**, 165301 (2004).

[222] V. V. Mkhitaryan, V. Kagalovsky, M. E. Raikh, *Weakly chiral networks and two-dimensional delocalized states in a weak magnetic field*, Phys. Rev. B **81**, 165426 (2010).

[223] M. D'Iorio, V. M. Pudalov, S. G. Semenchinsky, *Magnetic field induced transitions between quantized hall and insulator states in a dilute 2D electron gas*, Phys. Lett. A **150**, 422 (1990).

[224] V. T. Dolgopolov, G. V. Kravchenko, A. A. Shashkin, S. V. Kravchenko, *Metal-insulator transition in Si inversion layers in the extreme quantum limit*, Phys. Rev. B **46**, 13303 (1992).

[225] A. A. Shashkin, G. V. Kravchenko, V. T. Dolgopolov, *Floating up of the extended states of Landau levels in a two-dimensional electron gas in silicon MOSFET's*, Письма в ЖЭТФ **58**, 215 (1993).

[226] A. A. Shashkin, V. T. Dolgopolov, G. V. Kravchenko, *Insulating phases in a two-dimensional electron system of high-mobility Si MOSFET's*, Phys. Rev. B **49**, 14486 (1994).

[227] S. V. Kravchenko, W. Mason, J. E. Furneaux, V. M. Pudalov, *Global Phase Diagram for the Quantum Hall Effect: An Experimental Picture*, Phys. Rev. Lett. **75**, 910 (1995).

[228] S. C. Dultz, H. W. Jiang, W. J. Schaff, *Absence of floating delocalized states in a two-dimensional hole gas*, Phys. Rev. B **58**, R7532 (1998).

[229] M. Hilke, D. Shahar, S. H. Song, D. C. Tsui, Y. H. Xie, *Phase diagram of the integer quantum Hall effect in p-type germanium*, Phys. Rev. B **62**, 6940 (2000).

[230] M. Schneider, D. A. Bagrets, A. D. Mirlin, *Theory of the nonequilibrium electronic Mach-Zehnder interferom*, Phys. Rev. B **84**, 075401 (2011).

[231] S. N. Dinh, D. A. Bagrets, *Influence of Coulomb interaction on the Aharonov-Bohm effect in an electronic Fabry-Perot interferometer*, Phys. Rev. B **85**, 073403 (2012).

[232] I. P. Levkivskyi, E. V. Sukhorukov, *Energy relaxation at quantum Hall edge*, Phys. Rev. B **85**, 075309 (2012).

[233] A. M. M. Pruisken, M. A. Baranov, *Cracking Coulomb interactions in the quantum Hall regime*, Europhys. Lett. **31**, 543 (1995).

[234] A. M. M. Pruisken, B. Škorić, M. A. Baranov, *(Mis-)handling gauge invariance in the theory of the quantum Hall effect. III. The instanton vacuum and chiral-edge physics*, Phys. Rev. B **60**, 16838 (1999).

[235] B. Škorić, A. M. M. Pruisken, *The fractional quantum Hall effect: Chern-Simons mapping, duality, Luttinger liquids and the instanton vacuum*, Nucl. Phys. B **559**, 637 (1999).

[236] D-H. Lee, Z. Wang, *Effects of electron-electron interactions on the integer quantum Hall transitions*, Phys. Rev. Lett. **76**, 4014 (1996).

[237] S.-R. E. Yang, A. H. MacDonald, *Coulomb gaps in a strong magnetic field*, Phys. Rev. Lett. **70**, 4110 (1993).

[238] Ch. Sohrmann, *Interactions in the integer quantum Hall effect*, PhD Thesis, University of Warwick, 2007.

[239] R. A. Römer, Ch. Sohrmann, *Hartree-Fock interactions in the integer quantum Hall effect*, Phys. Stat. Sol. (b) **245**, 336 (2008).

[240] S.-R. E. Yang, A. H. MacDoanld, B. Huckestein, *Interactions, localization, and the integer quantum Hall effect*, Phys. Rev. Lett. **74**, 3229 (1995).

[241] V. M. Apalkov, M. E. Raikh, *Interplay of short-range interactions and quantum interference near the integer quantum Hall transition*, Phys. Rev. B **68**, 195312 (2003).

[242] Z. Wang, M. P. A. Fisher, S. M. Girvin, J. T. Chalker, *Short-range interactions and scaling near integer quantum Hall transitions*, Phys. Rev. B **61**, 8326 (2000).

[243] S. S. Murzin, A. G. M. Jansen, I. Claus, *Topological oscillations of the magnetoconductance in disordered GaAs layers*, Phys. Rev. Lett. **92**, 016802 (2004); S. S. Murzin, A. G. M. Jansen, *Murzin and Janssen reply*, Phys. Rev. Lett. **95**, 189702 (2005).

[244] М. И. Монастырский, *Топология калибровочных полей и конденсированных сред*, Москва: ПАИМС, 1995.

[245] A. M. M. Pruisken, I. S. Burmistrov, *The instanton vacuum of generalized CP^{N-1} models*, Ann. of Phys. (N.Y.) **316**, 285 (2005).

[246] W. Pauli, F. Villars, *On the invariant regularization in relativistic quantum theory*, Rev. Mod. Phys. **21**, 434 (1949).

[247] A. M. M. Pruisken, I. S. Burmistrov, *θ renormalization, electron-electron interactions and super universality in the quantum Hall regime*, Ann. of Phys. (N.Y.) **322**, 1265 (2007).

[248] T. R. Morris, D. A. Ross, C. T. Sachrajda, *Higher-order quantum corrections in the presence of an instanton background field*, Nucl Phys. B **255**, 115 (1985).

[249] T. R. Morris, D. A. Ross, C. T. Sachrajda, *Instanton calculus and the β- function in supersymmetric Yang-Mills theories*, Phys. Lett. B **158**, 223 (1985).

[250] T. R. Morris, D. A. Ross, C. T. Sachrajda, *Instantons and the renormalisation group in supersymmetric Yang-Mills theories*, Nucl. Phys. B **264**, 111 (1986).

[251] T. R. Morris, D. A. Ross, C. T. Sachrajda, *Instantons, the beta-function and renormalisation scheme dependence*, Phys. Lett. B **172**, 40 (1986).

[252] A. M. M. Pruisken, I. S. Burmistrov, *Non-Fermi liquid criticality and super universality in the quantum Hall regime*, Письма в ЖЭТФ **87**, 252 (2008).

[253] K. Slevin, T. Ohtsuki, *Critical exponent for the quantum Hall transition*, Phys. Rev. B **80**, 041304 (2009).

[254] A. M. M. Pruisken, I. S. Burmistrov, *Comment on "Scaling in plateau-plateau transition: A direct connection of quantum Hall systems with Anderson localization model"*, http://arxiv.org/abs/0907.0356 .

[255] E. Abrahams, P.W. Anderson, P.A. Lee, T.V. Ramakrishnan, *Quasiparticle lifetime in disordered two-dimensional metals*, Phys. Rev. B **24**, 6783 (1981).

[256] I. S. Burmistrov, S. Bera, F. Evers, I. V. Gornyi, A. D. Mirlin, *Wave function multifractality and dephasing at metal-insulator and quantum Hall transitions*, Ann. of Phys. (N.Y) **326**, 1457 (2011).

[257] S. Helgason, *Groups and geometric analysis (Integral Geometry, Invariant Differential Operators and Spherical Functions)*, (American Mathematical Society, 2000).

[258] D. Höf, F. Wegner, *Calculation of anomalous dimensions for the nonlinear sigma model*, Nucl. Phys. B **275**, 561 (1986).

[259] F. Wegner, *Anomalous dimensions for the nonlinear sigma-model, in* $2+\epsilon$ *dimensions (I)*, Nucl. Phys. B **280**, 193 (1987).

[260] F. Wegner, *Anomalous dimensions for the nonlinear sigma-model, in* $2+\epsilon$ *dimensions (II)*, Nucl. Phys. B **280**, 210 (1987).

[261] A.M.M. Pruisken, *Participation ratio in the nonlinear* σ*-model representation of localization*, Phys. Rev. B **31**, 416 (1985).

[262] F. W. Van Keuls, X. L. Hu, H. W. Jiang, A. J. Dahm, *Screening of the Coulomb interaction in two-dimensional variable-range hopping*, Phys. Rev. B **56**, 1161 (1997).

[263] Б. Л. Альтшулер, *Флуктуации остаточной проводимости неупорядоченных проводников*, Письма в ЖЭТФ **41**, 530 (1985).

[264] P. A. Lee, A. D. Stone, *Universal conductance fluctuations in metals*, Phys. Rev. Lett. **55**, 1622 (1985).

[265] Б. Л. Альтшулер, В. Е. Кравцов, И. В. Лернер, *Статистика мезоскопических флуктуаций и неустойчивость однопараметрического скейлинга*, ЖЭТФ **91**, 2276 (1986).

[266] M. H. Cohen, A.M.M. Pruisken, *Mesoscopic block models for macroscopic conductances*, Phys. Rev. B **49**, 4593 (1994).

[267] A. M. M. Pruisken, I. S. Burmistrov, *Comment on "Topological oscillations of the magnetoconductance in disordered GaAs layers"*, Phys. Rev. Lett. **95**, 189701 (2005).

[268] I. S. Burmistrov, *θ-renormalization, superuniversality, and electron-electron interactions in the theory of the quantum Hall effect*, PhD Thesis, University of Amsterdam, (PrintPartners Ipskamp, Enschede 2006).

[269] J. M. Rowell, L. Y. L. Shen, *Zero-bias anomalies in normal metal tunnel junstions*, Phys. Rev. Lett. **17**, 15 (1966).

[270] I. Giaever, H. R. Zeller, *Superconductivity of small tin particles measured by tunneling*, Phys. Rev. Lett. 20, 1504 (1968).

[271] H. R. Zeller, I. Giaever, *Tunneling, zero-bias anomalies, and small superconductors*, Phys. Rev. **181**, 789 (1969).

[272] J. Lambe, R. C. Jaklevic, Charge-quantization studies using a tunnel capacitor, Phys. Rev. Lett. **22**, 1371 (1969).

[273] F. Mezei, *Theory of electron tunneling via real intermediate states*, Phys. Rev. B **4**, 3775 (1971).

[274] Р. И. Шехтер, *Нулевые аномалии сопротивления туннельного контакта, содержащего металлические включения в оксидном слое*, ЖЭТФ **63**, 1410 (1972).

[275] И. О. Кулик, Р. И. Шехтер, *Кинетические явления и эффекты дискретности заряда в гранулированных средах*, ЖЭТФ **68**, 623 (1975).

[276] T. A. Fulton, G. J. Dolan, *Observation of single-electron charging effects in small tunnel junctions*, Phys. Rev. Lett. **59**, 109 (1987).

[277] P. Lafarge, H. Pothier, E. R. Williams, D. Esteve, C. Urbina, M. H. Devoret, *Direct observation of macroscopic charge quantization*, Z. Phys. B **85**, 327 (1991).

[278] L. J. Geerligs, V. F. Anderegg, P. Holweg, J.E. Mooij, H. Pothier, D. Esteve, C. Urbina, M. H. Devoret, *Frequency-locked turnstile device for single electrons*, Phys. Rev. Lett. **64**, 2691 (1990).

[279] H. Pothier, P. Lafarge, P. F. Orfila, C. Urbina, D. Esteve, M. H. Devoret, *Single electron pump fabricated with ultrasmall normal tunnel junctions*, Physica B **169**, 573 (1991).

[280] The special issue on "Single charge tunneling Z. Phys. B **85**, 317 (1991).

[281] *Single Charge Tunneling*, ed. by H. Grabert, M.H. Devoret (Plenum, New York, 1992).

[282] M. Bockrath, D. H. Cobden, P. L. McEuen, N. G. Chopra, A. Zettl, A. Thess, R. E. Smalley, *Single-electron transport in ropes of carbon nanotubes*, Science **275**, 1922 (1997).

[283] S. J. Tans, M. H. Devoret, H. Dai, A. Thess, R. E. Smalley, L. J. Geerligs, C. Dekker, *Individual single-wall carbon nanotubes as quantum wires*, Nature **386**, 474 (1997).

[284] Е. С. Солдатов, В. В. Ханин, А. С. Трифонов, С. П. Губин, В. В. Колесов, Д. Е. Преснов, С. А. Яковенко, Г. Б. Хомутов, А. Н. Коротков, *Молекулярный одноэлектронный транзистор, работающий при комнатной температуре*, УФН **168**, 217 (1998).

[285] P. L. McEuen, E. B. Foxman, U. Meirav, M. A. Kastner, Y. Meir, N. S. Wingreen, S. J. Wind, *Transport spectroscopy of a Coulomb island in the quantum Hall regime*, Phys. Rev. Lett. **66**, 1926 (1991).

[286] A. T. Johnson, L. P. Kouwenhoven, W. de Jong, N. C. van der Vaart, C. J. P. M. Harmans, C. T. Foxon, *Zero-dimensional states and single electron charging in quantum dots*, Phys. Rev. Lett. **69**, 1592 (1992).

[287] C. Stampfer, J. Guettinger, F. Molitor, D. Graf, T. Ihn, K. Ensslin, *Tunable Coulomb blockade in nanostructured graphene*, Appl. Phys. Lett. **92**, 012102, (2008).

[288] L. Kouwenhoven, C. M. Marcus, Quantum Dots, Phys. World 11, 35 (1998).

[289] L. P. Kouwenhoven, C. M. Marcus, P.L. McEuen, S. Tarucha, R.M. Westervelt, N.S. Wingreen, *Electron transport in quantum dots* in Nato ASI conference proceedings, ed. by L. P. Kouwenhoven, G. Schon, and L.L. Sohn (Kluwer, Dordrecht, 1997).

[290] W. G. van der Wiel, S. De Franceschi, J. M. Elzerman, T. Fujisawa, S. Tarucha, L. P. Kouwenhoven, *Electron transport through double quantum dots*, Rev. Mod. Phys. **75**, 1 (2002).

[291] R. Hanson, L. P. Kouwenhoven, J. R. Petta, S. Tarucha, L. M. K. Vandersypen, *Spins in few-electron quantum dots*, Rev. Mod. Phys. **79**, 1217 (2007).

[292] D. V. Averin, A. A. Odintsov, *Macroscopic quantum tunneling of the electric charge in small tunnel junctions*, Phys. Lett. A **140**, 251(1989).

[293] D. V. Averin, Yu.V. Nazarov, *Virtual electron diffusion during quantum tunneling of the electric charge*, Phys. Rev. Lett. **65**, 2446 (1990).

[294] L. I. Glazman, M. Pustilnik, *Coulomb blockade and Kondo effect in quantum dots* in New Directions in Mesoscopic Physics (Towards to Nanoscience, eds. R. Fazio, G. F. Gantmakher and Y. Imry (Kluwer, Dordrecht, 2003).

[295] C. Pasquier, Y. Meirav, F. I. B. Williams, D.C. Glattli, Y. Jin, and B. Etienne, *Quantum limitation on Coulomb blockade observedin a 2D electron system*, Phys. Rev. Lett. **70**, 69 (1993).

[296] P. Joyez, V. Bouchiat, D. Esteve, C. Urbina, M.H. Devoret, *Strong tunneling in single-electron transistor*, Phys. Rev. Lett. **79**, 1349 (1997).

[297] V. Ambegaokar, U. Eckern, G. Schön, *Quantum dynamics of tunneling between superconductors*, Phys. Rev. Lett. **48**, 1745 (1982).

[298] T.-L. Ho, *Effect of quantum voltage fluctuations on the resistance of normal junction*, Phys. Rev. Lett. **51**, 2060 (1983).

[299] E. Ben-Jacob, E. Mottola, G. Schön, *Quantum shot noise in tunnel junctions*, Phys. Rev. Lett. **51**, 2064 (1983).

[300] G. Schön, *Quantum shot noise in tunnel junctions*, Phys. Rev. B **32**, 4469 (1985).

[301] G. Schön, A.D. Zaikin, *Quantum coherent effects, phase transitions, and the dissipative dynamics of ultra small tunnel junctions*, Phys. Rep. **198**, 237 (1990).

[302] К. А. Матвеев, *Квантовые флуктуации заряда металлической частицы в условиях кулоновской блокады*, ЖЭТФ **99**, 1598 (1991).

[303] G. Göppert, H. Grabert, *Charge fluctutions in the single electron box*, Phys. Rev. B **63**, 125307 (2001).

[304] H. Schöller, G. Schön, *Mesoscopic quantum transport: Resonant tunneling in the presence of a strong Coulomb blockade*, Phys. Rev. B **50**, 18436 (1994).

[305] D. S. Golubev, J. König, H. Schoeller, G. Schön, A. D. Zaikin, *Strong electron tunneling through mesoscopic metallic grains*, Phys. Rev. B **56**, 15782 (1997).

[306] G. Falci, G. Schön, G. T. Zimanyi, *Tunneling in the electron box in the nonperturbative regime*, Physica B **203**, 409 (1994).

[307] G. Falci, G. Schön, G. T. Zimanyi, *Unified scaling theory of the electron box for arbitrary tunneling strength*, Phys. Rev. Lett. **74**, 3257 (1995).

[308] С. Е. Коршунов, *Когерентное и некогерентное туннелирование в джозефсоновском контакте с "периодической"диссипацией*, Письма в ЖЭТФ **45**, 342 (1987).

[309] С. А. Булгадаев, *О фазовой диаграмме джозефсоновского контакта с "периодической"диссипацией*, Письма в ЖЭТФ **45**, 486 (1987).

[310] S. A. Bulgadaev, *The influence of the anisotropy on the phase diagram of the one-dimensional N-vector model with a long-range interaction*, Phys. Lett. A **125**, 299 (1987).

[311] F. Guinea, G. Schön, *Dynamics and phase transitions of josephson junctions with dissipation due to quasiparticle tunneling*, J. Low Temp. Phys. **69**, 219 (1987).

[312] S. V. Panyukov, A. D. Zaikin, *Coulomb blockade and nonperturbative ground-state properties of ultrasmall tunnel junctions*, Phys. Rev. Lett. **67**, 3168 (1991).

[313] X. Wang, H. Grabert, *Coulomb charging at large conduction*, Phys. Rev. B **53**, 12621 (1996).

[314] A. Altland, L. I. Glazman, A. Kamenev, J. S. Meyer, *Inelastic electron transport in granular arrays*, Ann. Phys. (N.Y.) **321**, 2566 (2006).

[315] I. S. Beloborodov, K. B. Efetov, A. Altland, F. W. J. Hekking, *Quantum interference and Coulomb interaction in arrays of tunnel junctions*, Phys. Rev. B **63**, 115109 (2001).

[316] K. B. Efetov, A. Tschersich, *Coulomb effects in granular materials at not very low temperatures*, Phys. Rev. B **67**, 174205 (2003).

[317] I. S. Beloborodov, A. V. Lopatin, V. M. Vinokur, K. B. Efetov, *Granular electronic systems*, Rev. Mod. Phys. **79**, 469 (2007).

[318] Yu. V. Nazarov, *Coulomb blockade without tunnel junctions*, Phys. Rev. Lett. **82**, 1245 (1999).

[319] M. V. Feigelman, A. Kamenev, A. I. Larkin, M. A. Skvortsov, *Weak charge quantization on a superconducting island*, Phys. Rev. B **66**, 054502 (2002).

[320] S. L. Lukyanov, A. M. Tsvelik, A. B. Zamolodchikov, *Paperclip at $\theta = \pi$*, Nucl. Phys. B **719**, 103 (2005).

[321] S. L. Lukyanov, Ph. Werner, *Universal scaling behavior of the single electron box in the strong tunneling limit*, J. Stat. Mech. **P11002** (2006).

[322] M. H. Devoret, D. Esteve, H. Grabert, G.-L. Ingold, H. Pothier, C. Urbina, *Effect of the electromagnetic environment on the Coulomb blockade in ultrasmall tunnel junctions*, Phys. Rev. Lett. **64**, 1824 (1990).

[323] P. Joyez, D. Esteve, M. H. Devoret, *How is the Coulomb blockade suppressed in high-conductance tunnel junctions?*, Phys. Rev. Lett. **80**, 1956 (1998).

[324] S. M. Girvin, L. I. Glazman, M. Jonson, D. R. Penn, M. D. Stiles, *Quantum fluctuations and the single-junction Coulomb blockade*, Phys. Rev. Lett. **64**, 3183 (1990).

[325] G.-L. Ingold, Yu. V. Nazarov, *Charge tunneling rates in ultrasmall junctions*, in Single Charge Tunneling, ed. by H. Grabert and M. H. Devoret (Plenum, New York, 1992)

[326] S. A. Bulgadaev, *Topological quantization of current in quantum tunnel contacts*, Письма в ЖЭТФ **83**, 659 (2006).

[327] A. Kamenev, Yu. Gefen, *Differences between statistical mechanics and thermodynamics on the mesoscopic scale*, Phys. Rev. B **56**, 1025 (1997).

[328] I. L. Kurland, I. L. Aleiner, B. L. Altshuler, *Mesoscopic magnetization fluctuations for metallic grains close to the Stoner instability*, Phys. Rev. B **62**, 14886 (2000).

[329] I. L. Aleiner, P.W. Brouwer, L. I. Glazman, *Quantum effects in Coulomb blockade*, Phys. Rep. **358**, 309 (2002).

[330] W. Hofstetter, W. Zwerger, *Single-electron box and the helicity modulus of an inverse square XY model*, Phys. Rev. Lett. **78**, 3737 (1997);

[331] I. S. Beloborodov, A. V. Andreev, A. I. Larkin, *Two-loop approximation in the Coulomb blockade problem*, Phys. Rev. B **68**, 024204 (2003).

[332] D. J. Thouless in: R.Balian, R.Maynard, G.Toulouse (Eds), *Ill-condensed Matter*, North-Holland/World Scientific, 1978, p.1.

[333] G. 't Hooft, *Topology of the gauge condition and new confinement phases in non-abelian gauge theories*, Nucl. Phys. **B** 190, 455 (1981).

[334] S. Drewes, D. P. Arovas, S. Renn, *Quantum phase transitions in dissipative tunnel junctions*, Phys. Rev. B **68**, 165345 (2003).

[335] I. S. Burmistrov, A. M. M. Pruisken, *The problem of "macroscopic charge quantization" in single electron devices*, Phys. Rev. B **81**, 085428 (2010).

[336] I. S. Burmistrov, A. M.M. Pruisken, *Coulomb blockade and super universality of the theta-angle*, Phys. Rev. Lett. **101**, 056801 (2008).

[337] G. D. Mahan, *Many-particle physics*, Plenum Press, N.Y. (1990).

[338] Ya. M. Blanter, *Recent advances of studies of current noise*, in CFN lectures on functional nanostructures, vol. 2 (eds. M. Vojta, Ch. Röthig, G. Schön), Springer (2011).

[339] Y. Imry, *Introduction to Mesoscopic Physics* (Oxford University, New York, 1997).

[340] G. B. Lesovik, R. Loosen, *On the detection of finite frequency current fluctuations*, Письма в ЖЭТФ **65**, 280 (1997).

[341] R. Deblock, E. Onac, L. Gurevich, L. P. Kouwenhoven, *Detection of quantum noise from an electrically driven two-level system*, Science **301**, 203 (2003).

[342] E. Onac, F. Balestro, B. Trauzettel, C. F. J. Lodewijk, L. P. Kouwenhoven, *Shot-noise detection in a carbon nanotube quantum dot*, Phys. Rev. Lett. **96**, 026803 (2006).

[343] W. W. Xue, Z. Ji, F. Pan, J. Stettenheim, M. P. Blencowe, A. J. Rimberg, *Measurement of quantum noise in a single-electron transistor near the quantum limit*, Nature Phys. **5**, 660 (2009).

[344] Ya. I. Rodionov, I. S. Burmistrov, A. S. Ioselevich, *Charge relaxation resistance in the Coulomb blockade problem*, Phys. Rev. B **80**, 035332 (2009).

[345] I. S. Burmistrov, A. M. M. Pruisken, *The problem of macroscopic charge quantization in the Coulomb blockade*, AIP Conference Proceedings **1134**, 101 (2009).

[346] D. Chouvaev, L. S. Kuzmin, D. S. Golubev, A. D. Zaikin, *Strong tunneling and Coulomb blockade in a single-electron transistor*, Phys. Rev. B **59**, 10599 (1999).

[347] L. Bitton, D. B. Gutman, R. Berkovits, A. Frydman, *Coexistence of Coulomb blockade and zero bias anomaly in a strongly coupled nanodot*, Phys. Rev. Lett. **106**, 016803 (2011).

[348] А. А. Абрикосов, *О рассеянии электронов в металле на магнитных примесных атомах и особенностях поведения сопротивления*, Physics **2**, 21 (1965).

[349] Ю. А. Изюмов, Ю. Н. Скрябин, *Статистическая механика магнитноупорядоченных систем*, Москва, Наука, (1987).

[350] А. И. Ларкин, В. И. Мельников, *Магнитные примеси в почти магнитном металле*, ЖЭТФ **61**, 1232 (1971).

[351] L. Zhu, Q. Si, *Critical local-moment fluctuations in the Bose-Fermi Kondo model*, Phys. Rev. B **66**, 024426 (2002).

[352] G. Zaránd, E. Demler, *Quantum phase transitions in the Bose-Fermi Kondo model*, Phys. Rev. B **66**, 024427 (2002).

[353] P. Nozières, A. Blandin, *Kondo effect in real metals*, J. Phys. (Paris) **41**, 193 (1980).

[354] A. M. Tsvelik, P. B. Wiegmann, *Solution of the n-channel Kondo problem (scaling and integrability)*, Z. Phys. B **54**, 201 (1984).

[355] N. Andrei, C. Destri, *Solution of the multichannel Kondo problem*, Phys. Rev. Lett. **52**, 364 (1984).

[356] A. M. Chang, H. U. Baranger, L. N. Pfeiffer, K. W. West, T. Y. Chang, *Non-Gaussian Distribution of Coulomb Blockade Peak Heights in Quantum Dots*, Phys. Rev. Lett. **76**, 1695 (1996).

[357] J. A. Folk, S. R. Patel, S. F. Godijn, A. G. Huibers, S. M. Cronenwett, C. M. Marcus, K. Campman, A. C. Gossard *Statistics and Parametric Correlations of Coulomb Blockade Peak Fluctuations in Quantum Dots*, Phys. Rev. Lett. **76**, 1699 (1996).

[358] U. Sivan, R. Berkovits, Y. Aloni, O. Prus, A. Auerbach, G. Ben-Yoseph, *Mesoscopic Fluctuations in the Ground State Energy of Disordered Quantum Dots*, Phys. Rev. Lett. **77**, 1123, (1996).

[359] F. Simmel, T. Heinzel, D. A. Wharam, *Statistics of conductance oscillations of a quantum dot in the Coulomb-blockade regime*, Europhys. Lett. **38**, 123 (1997).

[360] S. R. Patel, S. M. Cronenwett, D. R. Stewart, A. G. Huibers, C. M. Marcus, C. I. Duruöz, J. S. Harris, Jr., K. Campman, A. C. Gossard, *Statistics of Coulomb Blockade Peak Spacings*, Phys. Rev. Lett. **80**, 4522 (1998).

[361] S. R. Patel, D. R. Stewart, C. M. Marcus, M. Gökçedağ, Y. Alhassid, A. D. Stone, C. I. Duruöz, J. S. Harris, Jr., *Changing the Electronic Spectrum of a Quantum Dot by Adding Electrons*, Phys. Rev. Lett. **81**, 5900 (1998).

[362] F. Simmel, D. Abusch-Magder, D. A. Wharam, M. A. Kastner, J. P. Kotthaus, *Statistics of the Coulomb-blockade peak spacings of a silicon quantum dot*, Phys. Rev. B **59**, R10441 (1999).

[363] S. Lüscher, T. Heinzel, K. Ensslin, W. Wegscheider, M. Bichler, *Signatures of Spin Pairing in Chaotic Quantum Dots*, Phys. Rev. Lett. **86**, 2118 (2001).

[364] R. A. Jalabert, A. D. Stone, Y. Alhassid, *Statistical theory of Coulomb blockade oscillations: Quantum chaos in quantum dots*, Phys. Rev. Lett. **68**, 3468 (1992).

[365] S. M. Reimann, M. Manninen, *Electronic structure of quantum dots*, Rev. Mod. Phys. **74**, 1283 (2002).

[366] Ya. M. Blanter, A. D. Mirlin, B. A. Muzykantskii, *Fluctuations of Conductance Peak Spacings in the Coulomb Blockade Regime: Role of Electron-Electron Interaction*, Phys. Rev. Lett. **78**, 2449 (1997).

[367] L. P. Rokhinson, L. J. Guo, S. Y. Chou, D. C. Tsui, *Spin transitions in a small Si quantum dot*, Phys. Rev. B **63**, 035321 (2001).

[368] S. Lindemann, T. Ihn, T. Heinzel, W. Zwerger, K. Ensslin, K. Maranowski A. C. Gossard, *Stability of spin states in quantum dots*, Phys. Rev. B **66**, 195314 (2002).

[369] P. W. Brouwer, Y. Oreg, B. I. Halperin, *Mesoscopic fluctuations of the ground-state spin of a small metal particle*, Phys. Rev. B **60**, 13977 (1999).

[370] H. U. Baranger, D. Ullmo, L. I. Glazman, *Interactions and interference in quantum dots: Kinks in Coulomb-blockade peak positions*, Phys. Rev. B **61**, 2425 (2000).

[371] L. Amico, A. Di Lorenzo, A. Osterloh *Integrable Model for Interacting Electrons in Metallic Grains*, Phys. Rev. Lett. **86**, 5759 (2001).

[372] J. A. Folk, C. M. Marcus, R. Berkovits, I. L. Kurland, I. L. Aleiner, B. L. Altshuler, *Ground state spin and Coulomb blockade peak motion in chaotic quantum dots*, Phys. Script. T**90**, 26 (2001).

[373] G. Usaj, H. Baranager, *Exchange and the Coulomb blockade: Peak height statistics in quantum dots*, Phys. Rev. B **67**, 121308 (2003).

[374] Y. Alhassid, T. Rupp, *Effects of Spin and Exchange Interaction on the Coulomb-Blockade Peak Statistics in Quantum Dots*, Phys. Rev. Lett. **91**, 056801 (2003).

[375] Y. Alhassid, T. Rupp, A. Kaminski, L. I. Glazman, *Linear conductance in Coulomb-blockade quantum dots in the presence of interactions and spin*, Phys. Rev. B 69, 115331 (2004).

[376] M. Schechter, *Spin magnetization of small metallic grains*, Phys. Rev. B **70**, 024521 (2004).

[377] Zu-Jian Ying, M. Cuoco, C. Noce, Huan-Qiang Zhou, *Coexistence of spin polarization and pairing correlations in metallic grains*, Phys. Rev. B **74**, 012503 (2006).

[378] Zu-Jian Ying, M. Cuoco, C. Noce, Huan-Qiang Zhou, *Field response of metallic grains with magnetic and pairing correlations*, Phys. Rev. B **74**, 214506 (2006).

[379] S. Schmidt, Y. Alhassid, K. van Houcke, *Effect of a Zeeman field on the transition from superconductivity to ferromagnetism in metallic grains*, Europhys. Lett. **80**, 47004 (2007).

[380] S. Schmidt, Y. Alhassid, *Mesoscopic Competition of Superconductivity and Ferromagnetism: Conductance Peak Statistics for Metallic Grains*, Phys. Rev. Lett. **101**, 207003 (2008).

[381] K. Van Houcke, Y. Alhassid, S. Schmidt, S. M. A. Rombouts, *The competition between superconductivity and ferromagnetism in small metallic grains: thermodynamic properties*, arxiv:1011.5421

[382] B. L. Altshuler, Y. Gefen, A. Kamenev, L. S. Levitov, *Quasiparticle Lifetime in a Finite System: A Nonperturbative Approach*, Phys. Rev. Lett. **78**, 2803 (1997).

[383] D. Ullmo, H. U. Baranger, *Interactions in chaotic nanoparticles: Fluctuations in Coulomb blockade peak spacings*, Phys. Rev. B **64**, 245324 (2001).

[384] G. Usaj, H. U. Baranger, *Spin and e-e interactions in quantum dots: Leading order corrections to universality and temperature effects*, Phys. Rev. B **66**, 155333 (2002).

[385] Y. Alhassid, S. Malhotra, *Spin and interaction effects in quantum dots: A Hartree-Fock-Koopmans approach*, Phys. Rev. B **66**, 245313 (2002).

[386] Y. Alhassid, T. Rupp, *A universal Hamiltonian for a quantum dot in the presence of spin-orbit interaction*, http://arxiv.org/abs/cond-mat/0312691.

[387] H.E. Türeci, Y. Alhassid, *Spin-orbit interaction in quantum dots in the presence of exchange correlations: An approach based on a good-spin basis of the universal Hamiltonian*, Phys. Rev. B **74**, 165333 (2006).

[388] G. Murthy, *A Universal Interacting Crossover Regime in Two-Dimensional Quantum Dots*, Phys. Rev. B **77**, 073309 (2008).

[389] O. Zelyak, G. Murthy, *Quantum criticality near the Stoner transition in a two-dot with spin-orbit coupling*, Phys. Rev. B **80**, 205310 (2009).

[390] Y. Alhassid, *The statistical theory of quantum dots*, Rev. Mod. Phys. **72**, 895 (2000).

[391] D. Ullmo, *Many-body physics and quantum chaos*, Rep. Prog. Phys. **71**, 026001 (2008).

[392] D. Huertas-Hernando, Y. Alhassid, *Extracting the ground-state spin of a quantum dot from the conductance peaks in a parallel magnetic field at a finite temperature*, Phys. Rev. B **75**, 153312 (2007).

[393] G. Brillings, A. D. Stone, Y. Alhassid, *Signatures of exchange correlations in the thermopower of quantum dots*, Phys. Rev B **81**, 205303 (2010).

[394] И. Я. Коренблит, Е. Ф. Шендер, *Ферромагнетизм упорядоченных систем*, УФН **126**, 233 (1978).

[395] S. Jia, S. L. Bud'ko, G. D. Samolyuk, P. C. Canfield, *Nearly ferromagnetic Fermi-liquid behaviour in* YFe_2Zn_20 *and high-temperature ferromagnetism of* $GdFe_2Zn_20$, Nature Phys. **3**, 334 (2007).

[396] Ph. Jacquod, A. D. Stone, *Suppression of ground-state magnetization in finite-size systems due to off-diagonal interaction fluctuations*, Phys. Rev. Lett. **84**, 3938 (2000).

[397] Ph. Jacquod, A. D. Stone, *Ground-state magnetization for interacting fermions in a disordered potential: Kinetic energy, exchange interaction, and off-diagonal fluctuations*, Phys. Rev. B **64**, 214416 (2001).

[398] C. Kittel, H. Shore, *Development of a phase transition for a rigorously solvable many-body system*, Phys. Rev. **138**, A1165 (1965).

[399] Th. Niemeijer, *On the high-density limit of Heisenberg and Ising ferromagnets*, Physica (Utr.) **48**, 467 (1970).

[400] G. Vertogen, A. S. DeVries, *On the thermodynamic equivalence of Van der Waals spin systems*, Physica (Utr.) **59**, 634 (1972).

[401] R. Dekeyser, M. H. Lee, *Time-dependent correlations for spin Van der Waals systems*, Phys. Rev. B **19**, 265 (1979).

[402] A. Kamenev, Y. Gefen, *Zero-bias anomaly in finite-size systems*, Phys. Rev. B **54**, 5428 (1996).

[403] M. N. Kiselev, Y. Gefen, *Interplay of spin and charge channels in zero-dimensional systems*, Phys. Rev. Lett. **96**, 066805 (2006).

[404] N. Sedlmayr, I. V. Yurkevich, I. V. Lerner, *Tunnelling density of states at Coulomb-blockade peaks*, Europhys. Lett. **76**, 109 (2006).

[405] B. Nissan-Cohen, Y. Gefen, M. N. Kiselev, I. V. Lerner, *Interplay of charge and spin in quantum dots: The Ising case*, Phys. Rev. B **84**, 075307 (2011).

[406] J. Wei, E. Norman, *Lie algebraic solution of linear differential equations*, J. Math. Phys. **4**, 575 (1963).

[407] I. V. Kolokolov, *Functional representation for the partition function of the quantum Heisenberg ferromagnet*, Phys. Lett. **A** 114, 99 (1986).

[408] И. В. Колоколов, Е. В. Подивилов, *Функциональный метод для квантовых ферромагнетиков и немагнонная динамика при низких температурах*, ЖЭТФ **95**, 211 (1989).

[409] M. Chertkov, I. V. Kolokolov, *Equilibrium and nonequilibrium mean-field dynamics of quantum spin cluster*, ЖЭТФ **106**, 1525 (1994).

[410] M. Chertkov, I. V. Kolokolov, *Equilibrium dynamics of a paramagnetic cluster*, Phys. Rev. B **51**, 3974 (1995).

[411] I. V. Kolokolov, *A functional integration method for quantum spin systems and one-dimensional localization*, Int. J. Mod. Phys. B **10**, 2189 (1996).

[412] A. Saha, Y. Gefen, I.S. Burmistrov, A. Shnirman, A. Altland, A quantum dot close to Stoner instability: The role of the Berry's phase, http://arxiv.org/abs/1203.4929.

[413] К. Хуанг, *Статистическая механика*, МИР, Москва, 1966.

[414] I. S. Burmistrov, Y. Gefen, M. N. Kiselev, *Spin and charge correlations in quantum dots: An exact solution*, Письма в ЖЭТФ **92**, 202 (2010).

[415] K.A. Matveev, A.V. Andreev, *Thermopower of a single-electron transistor in the regime of strong inelastic cotunneling*, Phys. Rev. B 66, 045301 (2002).

[416] I. S. Burmistrov, Y. Gefen, M. N. Kiselev, *An exact solution for spin and charge correlations in quantum dots: The effect of level fluctuations and Zeeman splitting*, http://arxiv.org/abs/1201.4641.

[417] M. L. Mehta, *Random Matrices* (Boston: Academic) (1991).

[418] Y. V. Fyodorov, *Multifractality and freezing phenomena in random energy landscapes: An introduction*, Physica A **389**, 4229 (2010).

[419] L. D. Graham, D. S. Schreiber, *Conduction-electron polarization in the paramagnetic state of a "giant-moment" dilute alloy*, Phys. Rev. Lett. **17**, 650 (1966).

[420] L. Shen, D. S. Schreiber, A. J.Arko, *Low-temperature resisitivity of a "giant" magnetic alloy*, Phys. Rev. **179**, 512 (1969).

[421] J. W. Loram, K. A. Mirza, *Dilute PdNi-a homogeneous magnetic system of fluctuating moments*, J. Phys. F: Met. Phys. **15**, 2213 (1985).

[422] A. M. Clogston, B. T. Matthias, M. Peter, H. J. Williams, E. Corenzwit, R. C. Sherwood, *Local magnetic moment associated with an iron atom dissolved in various transition metal alloys*, Phys. Rev. **125**, 541 (1962).

[423] D. Shaltiel, J. H. Wrenick, H. J. Williams, M. Peter, *Paramagnetic resonance of S-state ions in metals of high paramagnetic susceptibility*, Phys. Rev. **135**, A1346, (1964).

[424] G. Mpourmpakis, G.E. Froudakis, A.N. Andriotis, M. Menon, *Role of Co in enhancing the magnetism of small Fe clusters*, Phys. Rev. B **72**, 104417 (2005).

[425] R. Litrán, B. Sampedro, T. C. Rojas, M. Multigner, J. C. Sánchez-López, P. Crespo, C. López-Cartes, M. A. García, A. Hernando, A. Fernández, *Magnetic and microstructural analysis of palladium nanoparticles with different capping systems*, Phys. Rev. B **73**, 054404 (2006).

[426] A. Hernando, B. Sampedro, R. Litrán, T. C. Rojas, J. C. Sánchez-López, A. Fernández, *Room temperature permanent magnetism in thiol-capped Pd-rich nanoparticles*, Nanotechnology **17**, 1449 (2006).

[427] E. Coronado, A. Ribera, J. García-Martínez, N. Linares, L. M. Liz-Marzán, *Synthesis, characterization and magnetism of monodispersed water soluble palladium nanoparticles*, J. Mater. Chem. 18, 5682 (2008).

[428] G. Usaj, H. U. Baranger, *Anisotropy in ferromagnetic nanoparticles: Level-to-level fluctuations of a collective effect*, Europhys. Lett. **72**, 110 (2005).

[429] I. S. Gradsteyn, I. M. Ryzhik, *Table of integrals, series, and products*, Academic Press (2000).

[430] P. A. Mello, *Averages on the unitary group and applications to the problem of disordered conductors*, J. Phys. A **23**, 4061 (1990).

[431] P. W. Brouwer, C. W. J. Beenakker, *Diagrammatic method of integration over the unitary group, with applications to quantum transport in mesoscopic systems*, J. Math. Phys. **37**, 4904 (1996).