Домашнее задание к занятию №1

Задачи принимаются до начала следующего семинара

Задача 1 Доказать, что максимальное значение энтропии равно $\ln \dim \rho$, где ρ - матрица плотности. Какой вид матрицы плотности максимизирует энтропию?

Задача 2 Из распределения Гиббса доказать, что давление

$$P = -\sum_n e^{-\beta E_n} \frac{\partial E_n}{\partial V} \Big/ \sum_n e^{-\beta E_n}$$

может быть записано как $P = -(\partial E/\partial V)_S$.

Задача 3 Вычислить свободную энергию, энергию, энтропию, теплоемкость, и химический потенциал для системы невзаимодействующих спинов $s = 1$ в магнитном поле, описываемых гамильтонианом $H = \sum_{j=1}^{N} s_z^{(j)} B$.

Задача 4* Пользуясь методом якобиана найти связь между сжимаемостью при постоянной температуре и энтропии: $(\partial P/\partial V)_T$ и $(\partial P/\partial V)_S$.

Ответы

Задача 1: $\rho = \hat{1}/\operatorname{tr}\hat{1}$, где $\hat{1}$ — единичная матрица.

Задача 3: $F = -TN\ln(2\cosh(\beta\mu_B B) + 1),\ E = -2\mu_B BN\frac{\sinh(\beta\mu_B B)}{2\cosh(\beta\mu_B B)+1}$.

Задача 4*: $\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T = \left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_S + \frac{T}{C_V}\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V^2$.