

# Домашнее задание №12

22.04.2025

Задачи принимаются до начала семинара 06.05.2025

**Задача 1** Пользуясь теоремой Вика вычислить среднее

$$\int d^d \mathbf{r}_1 d^d \mathbf{r}_2 \langle \langle \bar{\varphi}^2(\mathbf{r}) \cdot \bar{\varphi}^2(\mathbf{r}') \cdot \bar{\varphi}^2(\mathbf{r}'') \rangle \rangle$$

где  $\langle \langle ABC \rangle \rangle = \langle (A - \langle A \rangle)(B - \langle B \rangle)(C - \langle C \rangle) \rangle$ . Ответ выразить через  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \langle \bar{\varphi}(\mathbf{r}) \bar{\varphi}(\mathbf{r}') \rangle$ .

**Задача 2**

Написать ур-ния РГ для окрестности гауссовой фиксированной точки  $\tilde{\tau} = \tilde{\lambda} = 0$  для уравнений ренорм-группы [(3.68) из лекций]

$$\frac{d\tilde{\tau}}{dl} = 2\tilde{\tau} + \frac{3\tilde{\lambda}}{1 + \tilde{\tau}}, \quad \frac{d\tilde{\lambda}}{dl} = \epsilon\tilde{\lambda} - \frac{9\tilde{\lambda}^2}{(1 + \tilde{\tau})^2}. \quad (1)$$

Определить соответствующие собственные значения. Сравнить с уравнениями для окрестности нетривиальной фиксированной точки  $\tilde{\lambda} = \epsilon/9$  и  $\tilde{\tau} = -\epsilon/6$ . Построить фазовый портрет для уравнений ренорм-группы (1).

**Задача 3** Пусть в эффективный гамильтониан добавлен член  $(\mu/2) \int d^d \mathbf{r} \phi^6(\mathbf{r})$ . Найти уравнение ренормгруппы в первом порядке по безразмерному параметру, соответствующему  $\mu$ . Объяснить, почему в размерности  $d = 4 - \epsilon$  таким членом можно пренебречь.

**Задача 4** Найти зависимость производной спиновой восприимчивости,  $\partial\chi/\partial\lambda$ , от расстояния до нетривиальной критической точки  $\tilde{\tau} + \epsilon/6$  в размерности  $d = 4 - \epsilon$ ,  $\epsilon > 0$ .

**Задача 5** Вычислить интеграл

$$\int \frac{d^2 \mathbf{q}}{(2\pi)^2} \frac{|1 - \exp(i\mathbf{q}\mathbf{R})|^2}{q^2}$$

**Задача 6** Вычислить корреляционную функцию  $\langle \cos^3(\theta_j - \theta_k) \rangle$  для классической XY модели при высоких температурах с экспоненциальной точностью.

**Задача 7** Вычислить корреляционную функцию  $\langle \cos[3(\theta_j - \theta_k)] \rangle$  для классической XY модели при низких температурах.

**Задача 8** Получить оценку  $y \sim \exp(-J/T)$  в классической XY модели из логарифмического взаимодействия вихрей.

**Задача 9** Вычислить зависимость корреляционной длины БКТ перехода от температуры при  $|T - T_{BKT}| \ll T_{BKT}$