Домашнее задание к занятию

13.02.2019

Задача 1. (1 балл) Рассмотрим слабо ангармонический осциллятор с единичной массой и потенциальной энергией

$$U(x) = \frac{\nu^2 x^2}{2} + \frac{\varepsilon x^6}{6}, \qquad \varepsilon a^4 \ll \nu^2.$$

Используя метод пробных функций, найдите нелинейный сдвиг частоты, зависящий от амплитуды колебаний a.

Задача2. "Задача управления". Тело совершает одномерное движение, удовлетворяющее уравнению

$$\frac{dx(t)}{dt} = -\gamma x(t) + u(t),$$

где $u(t)$ — результат нашего воздействия на тело (мы таким образом управляем движением тела). Мы хотим, чтобы за время T тело переместилось из точки $x(0) = 0$ в точку $x(T) = x_0$. Наше воздействие имеет для нас "цену" (т.е. это мера наших затрат), которая определяется ценовым функционалом

$$C[u(t)] = \int\limits_0^T u^2(t)dt.$$

Найдите закон движения $x(t)$, при котором цена будет минимальной.

Задача 3. (1 балл) Пусть показатель преломления в атмосфере меняется с высотой как $n(z) = n_0(1 - \alpha z)$. Мы смотрим с поверхности ($z = 0$) на точечный объект, находящийся также на поверхности на расстоянии d от нас. Считая $\alpha d \ll 1$, найдите, под каким углом мы будем видеть этот объект.

Задача 4. (2 балла) Рассмотрим следующую задачу: распро- странение света из точки $(0, 0)$ в точку $(1, 0)$ в среде $n(x, y) = n_0(1 - \alpha xy)$, причем $\alpha \ll 1$. Решая приближенное уравнение Эйлера-Лагранжа, найдите оптимальную траекторию луча при $\alpha \ll 1$. Найдите его максимальное отклонение (от прямой между начальной и конечной точками) и оптическую длину пути, т.е. величину действия на оптимальной траектории. Как эта оптическая длина соотносится с той, которую можно было бы найти с помощью квадратной пробной функции $y(x) = bx(1-x)$ (т.е. она больше или меньше) и почему такой результат ожидаем?