

Домашнее задание №13

Задачи принимаются до начала следующего семинара

Задача 1(2 балла) Доказать соотношение для обобщенной восприимчивости

$$\alpha(i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\Omega}{\pi} \frac{\text{Im } \alpha(\Omega)}{\Omega - i\omega}.$$

Задача 2(2 балла) Определим функцию $R(\omega) = \int dt \langle X(t)X(0) \rangle e^{i\omega t}$. Показать, что функция $R(\omega)$ удовлетворяет условию детального баланса: $R(-\omega) = e^{\beta\omega} R(\omega)$.

Задача 3*(3 балла) Среднее значение величины X можно определить как $\langle X(t) \rangle = \text{Tr}[X\rho(t)]$, где матрица плотности удовлетворяет уравнению

$$\frac{d\rho}{dt} = -i[H_0 - Xf(t), \rho].$$

Решая это уравнение в первом порядке по $f(t)$ и считая, что при $t = -\infty$ матрица плотности была равновесная $\rho_0 \propto e^{-\beta H_0}$, получить формулу Кубо для обобщенной восприимчивости.

Задача 4*(3 балла) Гамильтониан имеет вид $H = H_0 - Xf(t)$, где $f(t) = ut$. Вычислить зависимость величины $\langle [H(t) - H(0)]^2 \rangle$ от времени при $t \rightarrow \infty$ и $u \rightarrow 0$. Выразить ответ через обобщенную восприимчивость α_X . Подсказка: воспользоваться формулами: $dH/dt = -\dot{f}X(t)$ и $\lim_{t \rightarrow \infty} \sin^2(\omega t)/(\pi t\omega^2) = \delta(\omega)$.