

# Контрольная работа №2

## Вариант А 12.03.2024

**Задача 1** (1 + 1 балла) Вычислить средние

$$\text{a) } \frac{\text{Tr}[b_p^\dagger b_p e^{-\beta \epsilon_p b_p^\dagger b_p / 2} b_p b_p^\dagger e^{-\beta \epsilon_p b_p^\dagger b_p / 2}]}{\text{Tr}[e^{-\beta \epsilon_p b_p^\dagger b_p}]}, \quad \text{b) } \frac{\text{Tr}[e^{a_p a_p^\dagger} e^{-\beta \epsilon_p a_p^\dagger a_p}]}{\text{Tr}[e^{-\beta \epsilon_p a_p^\dagger a_p}]}$$

где  $b_p$  и  $b_p^\dagger$  – бозонные операторы уничтожения и рождения, а  $a_p$  и  $a_p^\dagger$  – фермионные операторы уничтожения и рождения.

**Задача 2** (3 балла) Неидеальный ферми-газ частиц со спином  $s = 3/2$  с четверным взаимодействием описывается следующим гамильтонианом

$$H = \sum_{p,\sigma} \epsilon_p a_{p,\sigma}^\dagger a_{p,\sigma} + \frac{U}{4V^3} \sum_{\substack{p_1+p_2+p_3+p_4 \\ =k_1+k_2+k_3+k_4}} a_{p_1,3/2}^\dagger a_{p_2,1/2}^\dagger a_{p_3,-1/2}^\dagger a_{p_4,-3/2}^\dagger a_{k_4,-3/2} a_{k_3,-1/2} a_{k_2,1/2} a_{k_1,3/2}$$

Вычислить поправку первого порядка по  $U$  к химическому потенциалу. Ответ выразить через полное число частиц  $N$ .

*Напоминание: на лекции был получен результат для поправки первого порядка по взаимодействию к энергии системы  $E = E_0(N) + \langle H_{\text{int}} \rangle_0 + \dots$*

**Задача 3** (4 балла) Спектр магнонов в антиферромагнетике с анизотропией имеет вид  $\epsilon_p = \sqrt{Dp^2 + M}$ . Вычислить вклад в теплоемкость от таких магнонов при низких температурах. Определить область низких температур.

*Напоминание: на лекции был получен результат для свободной энергии системы идеальных бозонов с нулевым химическим потенциалом*

$$F = TV \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} \ln(1 - e^{-\beta \epsilon_p})$$

**Задача 4** (4 балла) В случае когда величина притяжения зависит от импульса следующим образом  $\lambda_p = \lambda_0 (|\xi_p|/\Omega)^{-\gamma}$ , где  $0 < \gamma < 1$ , вычислить зависимость сверхпроводящего параметра порядка при нулевой температуре от  $\lambda_0$ .

*Напоминание: на лекции было получено уравнение самосогласования*

$$\Delta = \frac{1}{V} \sum_p \lambda_p \frac{\Delta}{2\sqrt{\xi_p^2 + \Delta^2}} \tanh \frac{\sqrt{\xi_p^2 + \Delta^2}}{2T}$$

**Задача 5** (6 баллов) Используя уравнение Гросса-Питаевского

$$i \frac{\partial \Psi_\sigma}{\partial t} = \left( -\frac{\nabla^2}{2m} - \mu \right) \Psi_\sigma + \frac{4\pi a}{m} |\Psi_{-\sigma}|^2 \Psi_\sigma$$

для двух-компонентного Бозе газа ( $\sigma = 1, -1$ ), найти спектр боголюбовских возбуждений.

*Подсказка: искать решение в виде  $\Psi_\sigma(\mathbf{r}, t) = \Psi_0 + \delta\Psi_\sigma e^{i\mathbf{q}\mathbf{r} - i\omega t}$ . Использовать формулу для детерминанта блочной матрицы*

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} = \det A \det(A - BA^{-1}B)$$

# Контрольная работа №2

## Вариант Б 12.03.2024

**Задача 1** (1 + 1 балла) Вычислить средние

$$\text{a) } \frac{\text{Tr}[(b_p^\dagger b_p + b_p b_p^\dagger) e^{-\beta \epsilon_p b_p^\dagger b_p / 2} b_p^\dagger b_p e^{-\beta \epsilon_p b_p^\dagger b_p / 2}]}{\text{Tr}[e^{-\beta \epsilon_p b_p^\dagger b_p}]}, \quad \text{b) } \frac{\text{Tr}[\sin(a_p^\dagger a_p) e^{-\beta \epsilon_p a_p^\dagger a_p}]}{\text{Tr}[e^{-\beta \epsilon_p a_p^\dagger a_p}]}$$

где  $b_p$  и  $b_p^\dagger$  – бозонные операторы уничтожения и рождения, а  $a_p$  и  $a_p^\dagger$  – фермионные операторы уничтожения и рождения.

**Задача 2** (3 балла) Неидеальный бозе-газ частиц со спином  $s = 1$  с тройным взаимодействием описывается следующим гамильтонианом

$$H = \sum_{p,\sigma} \epsilon_p b_{p,\sigma}^\dagger b_{p,\sigma} + \frac{U}{3V^2} \sum_{\substack{p_1+p_2+p_3 \\ =k_1+k_2+k_3}} b_{p_1,1}^\dagger b_{p_2,0}^\dagger b_{p_3,-1}^\dagger b_{k_3,-1} b_{k_2,0} b_{k_1,1}$$

Вычислить поправку первого порядка по  $U$  к химическому потенциалу. Ответ выразить через полное число частиц  $N$ .

*Напоминание: на лекции был получен результат для поправки первого порядка по взаимодействию к энергии системы  $E = E_0(N) + \langle H_{\text{int}} \rangle_0 + \dots$*

**Задача 3** (4 балла) Спектр  $\epsilon_p$  бозонных возбуждений в трёхмерном материале имеет минимум в точке  $p = p_0$ , вблизи которой  $\epsilon_p = \Delta + (p - p_0)^4 / (2mp_0^2)$ . Вычислить вклад в теплоемкость от таких бозонных квазичастиц при низких температурах. Определить область низких температур.

*Напоминание: на лекции был получен результат для свободной энергии системы идеальных бозонов с нулевым химическим потенциалом*

$$F = TV \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} \ln(1 - e^{-\beta \epsilon_p})$$

**Задача 4** (4 балла) В случае когда величина притяжения зависит от импульса следующим образом  $\lambda_p = \lambda_0 (|\xi_p|/\Omega)^{-\gamma}$ , где  $0 < \gamma < 1$ , вычислить зависимость температуры сверхпроводящего перехода от  $\lambda_0$ .

*Напоминание: на лекции было получено уравнение самосогласования*

$$\Delta = \frac{1}{V} \sum_p \lambda_p \frac{\Delta}{2\sqrt{\xi_p^2 + \Delta^2}} \tanh \frac{\sqrt{\xi_p^2 + \Delta^2}}{2T}$$

**Задача 5** (6 баллов) Используя уравнение Гросса-Питаевского

$$i \frac{\partial \Psi_\sigma}{\partial t} = \left( -\frac{\nabla^2}{2m} - \mu \right) \Psi_\sigma + \frac{4\pi a}{m} |\Psi_{-\sigma}|^2 \Psi_\sigma$$

для двух-компонентного Бозе газа ( $\sigma = 1, -1$ ), найти спектр боголюбовских возбуждений.

*Подсказка: искать решение в виде  $\Psi_\sigma(\mathbf{r}, t) = \Psi_0 + \delta\Psi_\sigma e^{i\mathbf{q}\mathbf{r} - i\omega t}$ . Использовать формулу для детерминанта блочной матрицы*

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} = \det A \det(A - BA^{-1}B)$$