

Контрольная работа №2 Вариант А 11.03.2025

Задача 1 (1 + 1 балла) Вычислить средние

$$\text{a) } \frac{\text{Tr}[b_p e^{-\beta \epsilon_p} b_p^\dagger b_p b_p^\dagger]}{\text{Tr}[e^{-\beta \epsilon_p} b_p^\dagger b_p]}, \quad \text{b) } \frac{\text{Tr}[a_p a_p^\dagger e^{-\beta \epsilon_p} a_p^\dagger a_p a_p a_p^\dagger]}{\text{Tr}[e^{-\beta \epsilon_p} a_p^\dagger a_p]}$$

где b_p и b_p^\dagger – бозонные операторы уничтожения и рождения, а a_p и a_p^\dagger – фермионные операторы уничтожения и рождения.

Задача 2 (2 балла) Ферми-жидкость частиц со спином $s = 1/2$ описывается следующим функционалом энергии

$$E = \sum_{p, \sigma=\uparrow, \downarrow} \epsilon_p n_{p, \sigma} + \frac{U_1}{2V} (N_\uparrow + N_\downarrow)^2 + \frac{U_2}{2V} (N_\uparrow - N_\downarrow)^2,$$

где $N_\sigma = \sum_p n_{p, \sigma}$, а $n_{p, \sigma}$ – функция распределения частиц с импульсом p и проекцией спина σ . Вычислить зависимость энергии квазичастиц от числа частиц с проекциями спина вверх и вниз, N_\uparrow, N_\downarrow .

Задача 3 (4 балла) Спектр изгибных фононов в двухслойных одноатомных кристаллах имеет вид $\epsilon_p = \kappa p^2 + \omega_0$. Вычислить вклад в теплоёмкость от таких фононов при низких температурах. Определить область низких температур.

Напоминание: на лекции был получен результат для свободной энергии системы идеальных бозонов с нулевым химическим потенциалом

$$F = TV \int \frac{d^2 \mathbf{p}}{(2\pi)^2} \ln(1 - e^{-\beta \epsilon_p}).$$

Задача 4 (2 балла) Бозонные возбуждения в квантовой жидкости имеют спектр $\epsilon_p = \Delta + p(p - 2p_0)/(2m)$, где $\Delta, p_0, m > 0$. Найти при каких условиях на Δ, p_0, m такая жидкость будет сверхтекучей. Найти критическую скорость.

Напоминание: на лекции был выведен критерий сверхтекучести Ландау для скорости

$$v < v_{\text{cr}} = \min_p \epsilon_p / p.$$

Задача 5 (6 баллов) Используя уравнение Гросса-Питаевского

$$i \frac{\partial \Psi_\sigma}{\partial t} = \left(-\frac{\nabla^2}{2m} - \mu \right) \Psi_\sigma + \frac{4\pi a}{m} |\Psi_{-\sigma}|^2 \Psi_\sigma$$

для двухкомпонентного Бозе газа ($\sigma = 1, -1$), найти спектр боголюбовских возбуждений.

Подсказка: искать решение в виде $\Psi_\sigma(\mathbf{r}, t) = \Psi_0 + A_\sigma e^{i\mathbf{q}\mathbf{r} - i\omega t} + B_\sigma^ e^{i\mathbf{q}\mathbf{r} - i\omega t}$. Использовать формулу для детерминанта блочной матрицы*

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(AD - BC)$$

в которой матрицы C и D коммутируют, или рассмотреть синфазные $\Psi_{+1} + \Psi_{-1}$ и противофазные $\Psi_{+1} - \Psi_{-1}$ колебания.

Контрольная работа №2 Вариант Б 11.03.2025

Задача 1 (1 + 1 балла) Вычислить средние

$$\text{a) } \frac{\text{Tr}[b_p^\dagger e^{-\beta\epsilon_p} b_p^\dagger b_p b_p]}{\text{Tr}[e^{-\beta\epsilon_p} b_p^\dagger b_p]}, \quad \text{b) } \frac{\text{Tr}[a_p^\dagger a_p e^{-\beta\epsilon_p} a_p^\dagger a_p a_p^\dagger a_p]}{\text{Tr}[e^{-\beta\epsilon_p} a_p^\dagger a_p]}$$

где b_p и b_p^\dagger – бозонные операторы уничтожения и рождения, а a_p и a_p^\dagger – фермионные операторы уничтожения и рождения.

Задача 2 (2 балла) Ферми-жидкость частиц со спином $s = 1/2$ описывается следующим функционалом энергии

$$E = \sum_{p,\sigma=\uparrow,\downarrow} \epsilon_p n_{p,\sigma} + \frac{U_1}{2V} (N_\uparrow^2 + N_\downarrow^2) + \frac{U_2}{V} N_\uparrow N_\downarrow,$$

где $N_\sigma = \sum_p n_{p,\sigma}$, а $n_{p,\sigma}$ – функция распределения частиц с импульсом p и проекцией спина σ . Вычислить зависимость энергии квазичастиц от числа частиц с проекциями спина вверх и вниз, N_\uparrow, N_\downarrow .

Задача 3 (4 балла) Спектр ϵ_p изгибных фононов в одноатомных кристаллах при наличии кривизны имеет вид $\epsilon_p = \sqrt{\Delta^2 + \kappa p^4}$. Вычислить вклад в теплоёмкость от таких бозонных квазичастиц при низких температурах. Определить область низких температур.

Напоминание: на лекции был получен результат для свободной энергии системы идеальных бозонов с нулевым химическим потенциалом

$$F = TV \int \frac{d^2\mathbf{p}}{(2\pi)^2} \ln(1 - e^{-\beta\epsilon_p}).$$

Задача 4 (2 балла) Бозонные возбуждения в квантовой жидкости имеют спектр $\epsilon_p = \Delta + (p - p_0)^2/(2m)$, где $p_0, m > 0$. Найти при каких условиях на Δ, p_0, m такая жидкость будет сверхтекучей. Найти критическую скорость.

Напоминание: на лекции был выведен критерий сверхтекучести Ландау для скорости

$$v < v_{\text{cr}} = \min_p \epsilon_p/p.$$

Задача 5 (6 баллов) Используя уравнение Гросса-Питаевского

$$i \frac{\partial \Psi_\sigma}{\partial t} = \left(-\frac{\nabla^2}{2m} - \mu \right) \Psi_\sigma + \frac{4\pi a}{m} |\Psi_{-\sigma}|^2 \Psi_{-\sigma}$$

для двухкомпонентного Бозе газа ($\sigma = 1, -1$), найти спектр боголюбовских возбуждений.

Подсказка: искать решение в виде $\Psi_\sigma(\mathbf{r}, t) = \Psi_0 + A_\sigma e^{i\mathbf{q}\mathbf{r} - i\omega t} + B_\sigma^ e^{i\mathbf{q}\mathbf{r} - i\omega t}$. Использовать формулу для детерминанта блочной матрицы*

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(AD - BC)$$

в которой матрицы C и D коммутируют, или рассмотреть синфазные $\Psi_{+1} + \Psi_{-1}$ и противофазные $\Psi_{+1} - \Psi_{-1}$ колебания.