

# Контрольная работа №3

## Вариант А 30.04.2024

**Задача 1** (2 балла) Ядерный спин  $S = 1$  взаимодействует обменным изинговским образом с окружающими  $N$  спинами  $s = 1/2$  посредством гамильтониана

$$H = -J \sum_{j=1}^N S^z s_j^z.$$

Вычислить свободную энергию системы.

**Задача 2** (6 баллов) Вычислить свободную энергию одномерной цепочки изинговских спинов  $\sigma_j = \pm 1$  в термодинамическом пределе, если их взаимодействие описывается гамильтонианом

$$H = - \sum_{i=1}^{2N} J_i \sigma_i \sigma_{i+1},$$

где  $J_{2i} = J$ ,  $J_{2i+1} = -J$ , и подразумеваются периодические граничные условия:  $\sigma_{2N+1} = \sigma_1$ .

**Задача 3** (2 балла) При условии наличия масштабной инвариантности, для случая сильных магнитных полей  $h \gg h_t \sim |t|^{\beta+\gamma}$  выразить восприимчивость  $\chi$  через корреляционную длину. Ответ выразить через показатель  $\delta$ .

*Напоминание:* Определение критических индексов:

$$\xi \sim |t|^{-\nu}, \quad \xi \sim h^{-\mu}, \quad \varphi \sim (-t)^\beta, \quad \varphi \sim h^{1/\delta}, \quad \chi \sim |t|^{-\gamma},$$

и соотношение между индексами, следующее из масштабной инвариантности  $\mu d = 1 + 1/\delta$ .

**Задача 4** (4 балла) Найти зависимость обменной энергии одиночного вихря в XY модели от размера системы, если вихрь описывается анзацем  $\theta = \arctg[\sqrt{y^2 + a^2}/\sqrt{x^2 + a^2}]$ .

*Напоминание:* Обменная энергия в XY модели описывается как  $E = (J/2) \int d^2\mathbf{r} (\nabla\theta)^2$ .

**Задача 5** (4 балла) Свободная энергия (на единицу площади) двумерного кристалла может быть записана в виде разложения Ландау

$$F = \sum_{a=x,y} r_a \varepsilon_a + \frac{1}{2} \sum_{a,b=x,y} \varepsilon_a c_{ab} \varepsilon_b.$$

Здесь  $r_a$  – натяжение мембраны,  $c_{xx} > 0$ ,  $c_{yy}$ ,  $c_{xy} = c_{yx} > 0$  – упругие модули. Считая выполненным условие  $c_{xx}c_{yy} - c_{xy}^2 > 0$ , определить фазовую диаграмму модели на плоскости  $\{r_x, r_y\}$  и найти области существования плоской фазы, в которой оба параметра деформации отличны от нуля  $\varepsilon_x > 0$  и  $\varepsilon_y > 0$ .

# Контрольная работа №3

## Вариант Б 30.04.2024

**Задача 1** (2 балла) Два спина  $S = 1/2$  взаимодействуют между собой обменным изинговским образом, а также каждый из них взаимодействует с  $N$  спинами  $s = 1/2$ . Гамильтониан такой системы

$$H = -JS_1^z S_2^z - J \sum_{j=1}^N S_1^z s_j^z - J \sum_{j=1}^N S_2^z s_j^z.$$

Найти свободную энергию системы.

**Задача 2** (6 баллов) Вычислить свободную энергию одномерной цепочки изинговских спинов  $\sigma_j = \pm 1$  в термодинамическом пределе, если их взаимодействие описывается гамильтонианом

$$H = - \sum_{i=1}^{2N} J_i \sigma_i \sigma_{i+1},$$

где  $J_{2i} = J$ ,  $J_{2i+1} = J/2$ , и подразумеваются периодические граничные условия:  $\sigma_{2N+1} = \sigma_1$ .

**Задача 3** (2 балла) При условии наличия масштабной инвариантности, для случая сильных магнитных полей  $h \gg h_t \sim |t|^{\beta+\gamma}$  выразить намагниченность  $\varphi$  через корреляционную длину. Ответ выразить через показатель  $\delta$ .

*Напоминание:* Определение критических индексов:

$$\xi \sim |t|^{-\nu}, \quad \xi \sim h^{-\mu}, \quad \varphi \sim (-t)^\beta, \quad \varphi \sim h^{1/\delta}, \quad \chi \sim |t|^{-\gamma},$$

и соотношение между индексами, следующее из масштабной инвариантности  $\mu d = 1 + 1/\delta$ .

**Задача 4** (4 балла) Найти зависимость обменной энергии одиночного вихря в XY модели от размера системы, если вихрь описывается анзацем  $\theta = \ln \sqrt{x^2 + y^2 + a^2}$ .

*Напоминание:* Обменная энергия в XY модели описывается как  $E = (J/2) \int d^2 \mathbf{r} (\nabla \theta)^2$ .

**Задача 5** (4 балла) Свободная энергия (на единицу площади) двумерного кристалла может быть записана в виде разложения Ландау

$$F = \sum_{a=x,y} r_a \varepsilon_a + \frac{1}{2} \sum_{a,b=x,y} \varepsilon_a c_{ab} \varepsilon_b.$$

Здесь  $r_a$  – натяжение мембраны,  $c_{xx} > 0$ ,  $c_{yy}$ ,  $c_{xy} = c_{yx} > 0$  – упругие модули. Считая выполненным условие  $c_{xx}c_{yy} - c_{xy}^2 > 0$ , определить фазовую диаграмму модели на плоскости  $\{r_x, r_y\}$  и найти области существования трубочных фаз, в которых  $\varepsilon_x > 0$ , а  $\varepsilon_y = 0$  и наоборот.