Контрольная работа №3
Вариант А 29.04.2025

Задача 1 (3 балла) Примесный спин $S = 3/2$ находится в магнитном поле h и взаимодействует обменным изинговским образом с окружающими N спинами $s = 1/2$ посредством гамильтониана

$$H = -J \sum_{j=1}^{N} S^z s_j^z + hS^z.$$

Вычислить намагниченность примесного спина.

Подсказка: метод трансфер-матрицы в этой задаче не нужен.

Задача 2 (5 баллов) Вычислить свободную энергию одномерной цепочки изинговских спинов $\sigma_j = \pm 1$ в меняющем знак от узла к узлу магнитном поле в термодинамическом пределе, если их система описывается гамильтонианом

$$H = -\sum_{i=1}^{2N} J_i \sigma_i \sigma_{i+1} + h \sum_{i=1}^{2N} \frac{\sigma_i - \sigma_{i+1}}{2},$$

где $J_{2i} = J$, $J_{2i+1} = -J$, и подразумеваются периодические граничные условия: $\sigma_{2N+1} = \sigma_1$.

Задача 3 (3 балла) При условии наличия масштабной инвариантности, записать зависимость теплоёмкости C_P как функции t и h. Выразить ответ через индексы β и γ.

Напоминание: Определение критических индексов:

$$\xi \sim |t|^{-\nu}, \quad \xi \sim h^{-\mu}, \quad \varphi \sim (-t)^{\beta}, \quad \varphi \sim h^{1/\delta}, \quad \chi \sim |t|^{-\gamma}, \quad C_P \sim |t|^{-\alpha}.$$

Задача 4 (3 балла) Критическая точка фазового перехода описывается следующими уравнениями ренормгруппы

$$\frac{du}{d\ell} = u + 2v, \quad \frac{dv}{d\ell} = 2u + v$$

для безразмерных параметров теории.

(а) Построить фазовый портрет для системы, описываемой этими уравнениями. Стрелками отметить направление изменения величин при возрастании РГ-времени ℓ. (1 балл)

(б) Вычислить индекс корреляционной длины. (2 балла)

Задача 5 (4 балла) Найти зависимость силы взаимодействия между двумя вихрями в XY модели от расстояния между ними R, если вихрь описывается анзацем $\theta = \mathrm{arctg}(y/x)$.

Напоминание: Обменная энергия в XY модели описывается как $E = (J/2) \int d^2\boldsymbol{r} (\nabla\theta)^2$.

Задача 6 (4 балла) Свободная энергия (на единицу площади) двухзонного сверхпроводника может быть записана в виде разложения Ландау

$$F = \tau_1 \Delta_1^2 + \tau_2 \Delta_2^2 + \frac{1}{2}\lambda_1 \Delta_1^4 + \frac{1}{2}\lambda_2 \Delta_2^4 + \lambda_3 \Delta_1^2 \Delta_2^2.$$

Здесь $\tau_{1,2}$ – отклонение температуры от температуры сверхпроводящего перехода в каждой зоне, а константы взаимодействия, $\lambda_{1,2,3} > 0$. Считая выполненным условие $\lambda_1 \lambda_2 > \lambda_3^2$, определить фазовую диаграмму модели на плоскости $\{\tau_1, \tau_2\}$ и найти области существования сверхпроводящих фаз, в которых параметр порядка возникает только в одной из зон: например, $\Delta_1 > 0$, а $\Delta_2 = 0$ и наоборот.

Контрольная работа №3
Вариант Б 29.04.2025

Задача 1 (3 балла) Примесный спин $S = 1$ находится в магнитном поле h и взаимодействует обменным изинговским образом с окружающими N спинами $S = 1$ посредством гамильтониана

$$H = -J \sum_{j=1}^{N} S^z S_j^z + hS^z.$$

Вычислить намагниченность примесного спина.

Подсказка: метод трансфер-матрицы в этой задаче не нужен.

Задача 2 (5 баллов) Вычислить среднюю намагниченность на один спин одномерной цепочки изинговских спинов $\sigma_j = \pm 1$ в термодинамическом пределе, если их взаимодействие описывается гамильтонианом

$$H = -\sum_{i=1}^{2N} J_i \sigma_i \sigma_{i+1} + \sum_{i=1}^{2N} h_i \frac{\sigma_i + \sigma_{i+1}}{2},$$

где $J_{2i} = J$, $J_{2i+1} = 0$, $h_{2i} = 0$, $h_{2i+1} = h$, и подразумеваются периодические граничные условия: $\sigma_{2N+1} = \sigma_1$.

Задача 3 (3 балла) При условии наличия масштабной инвариантности, записать зависимость корреляционной длины ξ как функции t и h. Выразить ответ через индексы β и γ.

Напоминание: Определение критических индексов:

$$\xi \sim |t|^{-\nu}, \quad \xi \sim h^{-\mu}, \quad \varphi \sim (-t)^{\beta}, \quad \varphi \sim h^{1/\delta}, \quad \chi \sim |t|^{-\gamma}.$$

Задача 4 (3 балла) Критическая точка фазового перехода описывается следующими уравнениями ренормгруппы

$$\frac{du}{d\ell} = u + 2v, \quad \frac{dv}{d\ell} = -v$$

для безразмерных параметров теории.

(а) Построить фазовый портрет для системы, описываемой этими уравнениями. Стрелками отметить направление изменения величин при возрастании РГ-времени ℓ. (1 балл)

(б) Вычислить индекс корреляционной длины. (2 балла)

Задача 5 (4 балла) Найти зависимость силы взаимодействия между двумя вихрями в XY модели от расстояния между ними R, если вихрь описывается анзацем $\theta = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$.

Напоминание: Обменная энергия в XY модели описывается как $E = (J/2)\int d^2\boldsymbol{r}(\nabla\theta)^2$.

Задача 6 (4 балла) Свободная энергия (на единицу площади) двухзонного сверхпроводника может быть записана в виде разложения Ландау

$$F = \tau_1 \Delta_1^2 + \tau_2 \Delta_2^2 + \frac{1}{2}\lambda_1 \Delta_1^4 + \frac{1}{2}\lambda_2 \Delta_2^4 + \lambda_3 \Delta_1^2 \Delta_2^2.$$

Здесь $\tau_{1,2}$ – отклонение температуры от температуры сверхпроводящего перехода в каждой зоне, а константы взаимодействия, $\lambda_{1,2,3} > 0$. Считая выполненным условие $\lambda_1\lambda_2 > \lambda_3^2$, определить фазовую диаграмму модели на плоскости $\{\tau_1, \tau_2\}$ и найти области существования сверхпроводящих фаз, в которых параметр порядка возникает только в одной из зон: например, $\Delta_1 > 0$, а $\Delta_2 = 0$ и наоборот.