Контрольная работа 06.02.2019

Вариант A

Задача 1 Найти приближенно решения уравнения

$$x^2 - 1 = \varepsilon x^3$$

в первом не исчезающем порядке по степени малого параметра $\varepsilon \to 0$ [1 балла].

Ответ:

$$x = \pm 1 + \varepsilon/2$$

Задача 2 Решить систему уравнений

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}, \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{x}(0) = (1,1,1,1)^T$$

с помощью матричной экспоненты [2 балла]. Указание: использовать тот факт, что для блок-диагональной матрицы

$$M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

выполняется соотношение

$$e^{Mt} = \begin{pmatrix} e^{At} & 0 \\ 0 & e^{Bt} \end{pmatrix}$$

.

Ответ:

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 1 & t & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^t & te^t \\ 0 & 0 & 0 & e^t \end{pmatrix} \vec{x}(0)$$

Задача 3 Двумерный вектор $\vec{x} = \{x_1, x_2\}$ подчиняется следующему ур-нию

$$\dot{\vec{x}}(t) = [M_0 + \varepsilon M_1(t)]\vec{x}(t), \qquad M_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad M_1(t) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ e^t & 0 \end{pmatrix}, \qquad \vec{x}(0) = \{1, -1\}^T$$

Найти зависимость $x_1(t)$ с точностью до первого порядка по малому параметру ε [2 балла]. Найти зависимость $x_2(t)$ с точностью до первого порядка по малому параметру ε [3 балла]. Указание: использовать тот факт, что $M_0(1,-1)^T = 0$ и $(1,0)M_0 = 0$.

Ответ:

$$x_1(t) = 1 + \varepsilon(t - t^2/2), \qquad x_2(t) = -1 + \varepsilon(e^t t + t^2/2)$$

Задача 4 Рассмотрим слабо ангармонический осциллятор ($\epsilon \to 0$):

$$\ddot{x} + \omega^2 x = -\epsilon x^3, \qquad x(0) = 0, \qquad \dot{x}(0) = v.$$

Используя параметризацию вида $x = A\sin(\Omega t)$, где A и Ω не зависят от времени, найти нелинейный сдвиг частоты осцилляций в первом порядке по ϵ [2 балла]. Найдите выражение для Ω во всех порядках по ϵ [4 балла].

Ответ:

$$\Omega^2 = \omega^2 + 3\epsilon v^2/4\omega^2$$

Задача 5 Рассмотрим гармонический осциллятор с трением ($\gamma > 0$) и со слабой периодической модуляцией частоты ($\epsilon \to 0^+$):

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega^2 x = -\epsilon\cos(\Omega t)x, \qquad x(0) = x_0, \qquad \dot{x}(0) = 0.$$

Определить значение $\Omega > 0$, при котором может развиваться параметрический резонанс (амплитуда колебаний будет расти со временем) [2 балла]. Считая выполненным условие $\epsilon \ll \omega^2 - \gamma^2$, найти поведение амплитуды колебаний со временем в условиях параметрического резонанса и определить при каком значение γ амплитуда осцилляций будет затухать со временем [2 балла]. Найти функцию Грина для осциллятора с затуханием. [2 балла]. Указание: воспользоваться подстановкой $x(t) = e^{-\gamma t}y(t)$.

Ответ:

$$x(t) = \sqrt{2}x_0 \exp\left(-\gamma t + \frac{\epsilon t}{4\sqrt{\omega^2 - \gamma^2}}\right)\cos\left(2t\sqrt{\omega^2-\gamma^2} + \pi/4\right)$$