Контрольная работа 13.03.2019

Вариант А

Задача 1 Оценить интеграл

$$\int_0^\infty \frac{dx \tanh x}{(x^2+b^2)^2}$$

при a) $b \ll 1$ [2 балл] и b) при $b \gg 1$ [2 балл] .

Ответ:

$$1/(2b^2), \quad b \ll 1, \qquad \pi/(4b^4), \quad b \gg 1$$

Задача 2 Оценить интеграл

$$\int_0^\infty \frac{dx\sqrt{x}}{(e^{x+z}-1)(1-e^{-x})}$$

при $z \ll 1$ [2 балла].

Ответ:

$$\pi/\sqrt{z}$$

Задача 3 Оценить интеграл

$$\int_0^\infty \frac{dxx}{e^{x-z}+1}$$

при $z \gg 1$ [2 балла].

Ответ:

$$z^2/2$$

Задача 4 Рассмотрим следующую задачу: распро- странение света из точки $(0,0)$ в точку $(1,0)$ в среде с показателем преломления $n(x,y) = n_0(1-\alpha y x^3)$, причем $\alpha \ll 1$. Решая приближенное уравнение Эйлера-Лагранжа, найдите оптимальную траекторию луча при $\alpha \ll 1$ (2 балла). Найдите под каким углом наблюдатель в точке $(0,0)$ видит предмет в точке $(1,0)$ и наоборот, под каким углом наблюдатель в точке $(1,0)$ видит предмет в точке $(0,0)$ (2 балла). Найдите его максимальное отклонение (от прямой между начальной и конечной точками) (2 балла).

Ответ:

$$y(x) = \frac{\alpha}{20} x(1 - x^4), \qquad y'(0) = \frac{\alpha}{20}, \qquad y'(1) = -\frac{\alpha}{5}, \qquad y_{\max} = y(5^{-1/4}) = \frac{\alpha}{25\, 5^{1/4}}$$

Задача 5 В среде с показателем преломления 1 находится плоская пластина с показателем преломления n, который зависит от расстояния до поверхности пластины по формуле $n(z) = 1 + \alpha z^2$. (z отсчитывается вдоль перпендикуляра к поверхности. Точки $z = 0$ и $z = d$ соответствуют краям пластины.) Луч света падает на поверхность пластину $z = 0$ под углом θ к нормали ($\theta \neq \pi/2$). Найти угол θ', под которым луч выйдет из пластины, в первом порядке по малому параметру $\alpha d^2 \ll 1$. a) Вычислить θ', считая $\theta \ll 1$ (2 балла) b) Вычислить θ' для произвольного значения угла падения $0 \leqslant \theta < \pi/2$. Указание: использовать закон Снеллиуса при $z = d$.

Ответ:

$$\theta' = \theta$$