
ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ ЦЕЛОЧИСЛЕННОГО КВАНТОВОГО ЭФФЕКТА ХОЛЛА

ИГОРЬ БУРМИСТРОВ

28 марта 2024 г.

Оглавление

Введение	5
1 Двумерные электроны в магнитном поле	9
1.1 Целочисленный квантовый эффект Холла и его экспериментальное наблюдение	10
1.2 Краевые состояния и калибровочная интерпретация Лафлина	15
1.3 Коллективные возбуждения в магнитном поле (классическое рассмотрение) .	21
1.4 Электростатика краевых состояний: реконструкция края и краевой магнетоплазмон	25
2 Влияние примесей без учета явления андерсоновской локализации	31
2.1 Двумерный электронный газ с редкими примесями в магнитном поле	32
2.2 Плавный случайный потенциал	37
2.3 Квантовое туннелирование между эквипотенциальными линиями и модель Чалкера–Коддингтона	43
2.4 Самосогласованное борновское приближение. Плотность состояний.	51
2.5 Самосогласованное борновское приближение. Проводимость.	59
2.6 Коллективные возбуждения в магнитном поле (квантовое рассмотрение) . . .	67
3 Плотность состояний на уровнях Ландау за рамками самосогласованного борновского приближения	69
3.1 Хвосты плотности состояний и динамическая проводимость на нижнем уровне Ландау	70
3.2 Точное решение для плотности состояний на нижнем уровне Ландау	79
3.3 Хвосты плотности состояний на высоких уровнях Ландау	84
4 Вывод нелинейной сигма-модели	91
4.1 Вывод нелинейной сигма-модели: разделение массивных и безмассовых мод .	92
4.2 Вывод формул Кубо для проводимости в нелинейной сигма модели	101
5 Квантование холловской проводимости	107
5.1 Топологический заряд и разделение краевой и объемной теорий	108
5.2 Непрерывный предел модели Чалкера–Коддингтона	115
6 Поток продольной и холловской проводимости	121
6.1 Пертурбативные локализационные поправки	122
6.2 Инстантоны и их вклад в статистическую сумму	128
6.3 Вклад инстантонов в поправки к проводимости	137
7 Физические явления в ЦКЭХ	141
7.1 Делокализованные состояния и их всплывание. Квантовохолловские осцилляции	142
7.2 Мезоскопические флуктуации локальной плотности состояний	146

7.3	Обобщенная мультифрактальность и время сбоя фазы	152
8	ЗАКЛЮЧЕНИЕ	153
	Список литературы	155

Введение

Целочисленный и дробный квантовые эффекты Холла – это замечательные и сложные физические явления, которые по своей роли и значению в физике конденсированного состояния можно сравнить с явлениями сверхпроводимости и сверхтекучести. Точное квантование холловской проводимости в единицах e^2/h наблюдается в экспериментах на двумерных электронных системах при низких температурах (0.05 – 4 К) и в сильных перпендикулярных магнитных полях (1 – 20 Т). Изначально квантование холловской проводимости явилось полной неожиданностью для экспериментаторов и теоретиков и оказалось противоречащим теоретическому пониманию электронного транспорта не только в металлах, но и в двумерных электронных системах, которое существовало на тот момент времени. Несмотря на свою относительно недавнюю историю, открытие квантового эффекта Холла привело к трём нобелевским премиям по физике. В 1985 году за открытие целочисленного квантового эффекта Холла нобелевская премия была вручена К. фон Клитцингу (K. von Klitzing), а в 1998 году за открытие и объяснение дробного квантового эффекта Холла премия была присуждена Х. Стормеру (H. Störmer), Д. Цуи (D. Tsui) и Р. Лафлину (R. Laughlin). В 2016 году Д. Таулесс (D. Thouless) получил нобелевскую премию в том числе и за объяснение квантования холловской проводимости в чистых кристаллах. Отметим, что кроме огромного фундаментального значения целочисленный квантовый эффект Холла имеет также важное прикладное значение, позволяя измерять отношение мировых констант h/e^2 , а значит и определять постоянную тонкой структуры e^2/hc с высокой точностью.

Несмотря на огромное количество теоретических и экспериментальных работ, исследующих квантовый эффект Холла, и достигнутый прогресс в его понимании, построение микроскопической теории квантового эффекта Холла в настоящее время далеко от завершения. Имеющийся сейчас набор экспериментальных данных, которые не поняты теоретически, значительно превосходит то, что было предсказано при объяснении эффекта квантования холловской проводимости. Основная причина, по которой законченная теория квантового эффекта Холла не построена, состоит в отсутствие в задаче малого параметра, например, такого, как отношение сверхпроводящей щели к энергии Ферми в теории сверхпроводимости. Последовательная теория квантового эффекта Холла должна учитывать одновременно наличие сильного магнитного поля, случайный потенциал, создаваемый примесями, и электрон-электронное взаимодействие. Кроме того, теория должна адекватно описывать отклик двумерной электронной системы на приложенное внешнее электромагнитное поле.

Традиционно целочисленный и дробный квантовые эффекты Холла изучаются по отдельности. Причина такого искусственного разделения связана с тем, что целочисленный

эффект Холла возникает уже в модели невзаимодействующих двумерных электронов в случайном потенциале и в сильном магнитном поле. Для возникновения дробного квантового эффекта Холла необходимо обязательно учитывать влияние электрон-электронного взаимодействия. Подчеркнем, что для объяснения целочисленного квантового эффекта Холла учет электрон-электронного взаимодействия также важен, так как взаимодействие между электронами приводит к ряду качественных изменений по сравнению с моделью без взаимодействия. Наличие электрон-электронного взаимодействия сильно усложняет задачу, и поэтому в книге мы в основном ограничимся рассмотрением только целочисленного квантового эффекта Холла в рамках модели невзаимодействующих электронов, за редкими исключениями ??(см. раздел 3).

В модели невзаимодействующих электронов описание целочисленного квантового эффекта Холла сводится к решению задачи о движении двумерного электрона в случайном потенциале при наличии сильного перпендикулярного магнитного поля. Задача о движении электрона в случайном потенциале, которая называется задачей локализации Андерсона, уже достаточно долго изучалась к моменту открытия целочисленного квантового эффекта Холла. Как известно из общего курса квантовой механики, мелкая потенциальная яма на двумерной плоскости всегда имеет связанное состояние. Таким образом, можно ожидать, что двумерный электрон в случайном потенциале всегда будет локализован и проводимость двумерной электронной системы достаточно больших размеров будет равна нулю. Это утверждение, являющееся следствием скейлинговой теории андерсоновской локализации, и наблюдение целочисленного квантования холловской проводимости, очевидно, противоречат друг другу. Это означает, что магнитное поле оказывает такое сильное влияние на локализацию Андерсона, что она разрушается. Через несколько лет после открытия целочисленного квантового эффекта Холла механизм разрушения локализации Андерсона в сильном магнитном поле и появление делокализованного состояния были поняты. Это позволило построить скейлинговую теорию целочисленного квантового эффекта Холла, которая нашла подтверждение в экспериментальных данных по температурной зависимости тензора проводимости, а также в результатах численного моделирования.

??

Раздел 1 носит вводный характер. В нем обсуждаются электронные системы, на которых целочисленный квантовый эффект Холла измеряется экспериментально. Также показывается его отличие от квантовых осцилляций проводимости Шубникова – де Гааза в магнитном поле.

В разделе 2 рассматривается задача об уровнях Ландау для двумерного электрона, движение которого ограничено полосой конечной ширины. Показано, что наличие резкой границы приводит к появлению краевых состояний вблизи границы. Также демонстрируется связь между квантованием холловской проводимости и калибровочной инвариантностью.

Раздел 3 посвящен исследованию краевых состояний вблизи границы двумерной области, которую можно считать плавной. Оказывается, что электростатическое экранирование играет принципиальную роль в формировании своеобразной структуры электронной плотности вблизи границы.

В разделе 4 рассматривается задача о движении двумерного электрона во внешнем магнитном поле в присутствии малого количества примесей, взаимным влиянием которых на электрон можно пренебречь. Показано, что примесь отщепляет состояния от уровня Ландау, но не меняет холловский ток.

В разделе 5 изучается поведение двумерного электрона в магнитном поле и плавном случайном потенциале. Подробно объяснена связь этой задачи с задачей о классической

перколяции. Учет возможности квантового туннелирования приводит к модели Чалкера-Коддингтона, которая широко используется для численного моделирования целочисленного квантового эффекта Холла.

Раздел 6 посвящен решению задачи о поведении двумерного электрона в магнитном поле и случайном потенциале, создаваемом примесными δ -центрами, в рамках самосогласованного борновского приближения.

В разделе 7 также рассматривается задача о движении двумерного электрона в сильном магнитном поле и случайном потенциале, создаваемом примесными δ -центрами, но в приближении нижнего уровня Ландау.

Изложение материала разделов 1–5 рассчитано на читателя, владеющего стандартным аппаратом квантовой механики, например, на уровне книги [1]. Для понимания материала разделе 6 от читателя потребуется знание основ метода диаграмной техники (см. [2]). В разделе 7 изложение материала построено на использовании грасманновых переменных (см. [3]) и методе функционального интегрирования (см. [4]).

После каждого раздела приведены задачи для самостоятельного решения, более сложные из которых отмечены звездочкой.

Глава 1

Двумерные электроны в магнитном поле

Введение

XXXXX

1.1 Целочисленный квантовый эффект Холла и его экспериментальное наблюдение

Хорошо известно (см., например, [5]), что тензор проводимости двумерного электронного газа в перпендикулярном внешнем магнитном поле \mathbf{B} дается формулами Друде-Лоренца:

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \frac{e^2 n \tau / m_e}{1 + \omega_c^2 \tau^2}, \quad \sigma_{xy} = -\sigma_{yx} = \omega_c \tau \sigma_{xx}. \quad (1.1)$$

Здесь $\omega_c = |e|B/m_e c$ – циклотронная частота, e – заряд электрона, c – скорость света, m_e – эффективная масса электрона, τ – транспортное время упругого рассеяния на примесях и n – электронная концентрация. Формулы (1.1) справедливы при следующих предположениях: а) магнитное поле слабое, $\omega_c \tau \ll 1$; б) транспортное время τ не зависит от энергии; в) изотропный энергетический спектр. Согласно уравнениям (1.1) тензор сопротивления имеет вид

$$\rho_{xx} = \rho_{yy} = \frac{m_e}{e^2 n \tau}, \quad \rho_{xy} = -\rho_{yx} = \frac{m_e \omega_c}{e^2 n}. \quad (1.2)$$

Второе из этих уравнений описывает *классический эффект Холла* – холловское сопротивление прямо пропорционально магнитному полю.

В двумерном случае оказывается удобным измерять проводимость в естественных единицах $e^2/h \approx 1/25813 \Omega^{-1}$ ($h = 2\pi\hbar$ – постоянная Планка), а сопротивление, соответственно, в единицах $h/e^2 \approx 25813 \Omega$. Так, например, формулы (1.1) можно записать в следующем виде: $\sigma_{ab} = (e^2/h)\bar{\sigma}_{ab}$, где безразмерные величины $\bar{\sigma}_{ab}$ при нулевой температуре $T = 0$ имеют вид:

$$\bar{\sigma}_{xx} = \frac{2E_F \tau / \hbar}{1 + \omega_c^2 \tau^2}, \quad \bar{\sigma}_{xy} = \frac{2E_F \omega_c \tau^2 / \hbar}{1 + \omega_c^2 \tau^2}. \quad (1.3)$$

Здесь $E_F = \pi\hbar^2 n / m_e$ – энергия Ферми двумерного электронного газа. Выражение холловского сопротивления удобно записать в следующем виде:

$$\rho_{xy} = \frac{h}{e^2} \bar{\rho}_{xy}, \quad \bar{\rho}_{xy} = \frac{1}{\nu}, \quad (1.4)$$

где безразмерный параметр $\nu = 2\pi l_H^2 n$ называется фактором заполнения, а $l_H = \sqrt{\hbar c / |e|B}$ – магнитной длиной. Заметим, что формула (1.4) оказывается верной и в области сильных магнитных полей $\omega_c \tau \gg 1$ (см. например, [5]). Удивительно то, что формула (1.4) не зависит от степени беспорядка в двумерном электронном газе, т.е. от транспортного времени рассеяния. В пределе $1/\tau \rightarrow 0$ классическое рассмотрение движения электрона в магнитном поле перестает работать и необходимо учитывать квантование уровней Ландау. Тогда для фактора заполнения получаем следующий результат

$$\nu = \sum_{n=0}^{\infty} n_F(\hbar\omega_c(n + 1/2) - \mu), \quad (1.5)$$

где $n_F(E) = [1 + \exp(E/T)]^{-1}$ – функция распределения Ферми-Дирака, а μ – химический потенциал.

В области слабых магнитных полей $\omega_c \tau \ll 1$ квантование уровней Ландау не существен-

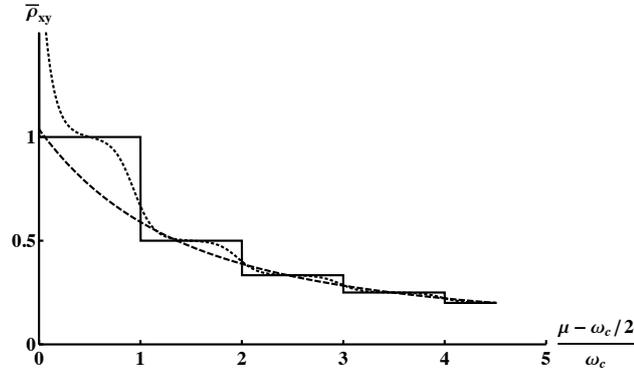


Рис. 1.1: Зависимость безразмерного холловского сопротивления $\bar{\rho}_{xy}$ от $(\mu - \hbar\omega_c/2)/(\hbar\omega_c)$ при значениях параметра $T/(\hbar\omega_c)$ равного 0 (сплошная кривая), 0.1 (точечная кривая) и 1 (пунктирная кривая).

но, и поэтому электронная концентрация, а значит, и фактор заполнения являются плавными функциями химического потенциала. В пределе $1/\tau \rightarrow 0$ и при высоких температурах $T \gg \hbar\omega_c$ фактор заполнения, согласно формуле (1.5), будет оставаться плавной функцией μ . Однако при нулевой температуре $T = 0$ фактор заполнения станет ступенчатой функцией:

$$\nu = \sum_{n=0}^{\infty} \Theta(\mu - \hbar\omega_c(n + 1/2)), \quad (1.6)$$

где $\Theta(x)$ – функция Хевисайда. В пределе $1/\tau \rightarrow 0$ при понижении температуры плавная зависимость холловского сопротивления от химического потенциала при фиксированном магнитном поле сменится на ступенчатую, как изображено на рис. 1.1. Заметим, что при фиксированной электронной плотности, холловское сопротивление даже при нуле температур будет пропорционально магнитному полю.

Зависимость холловского сопротивления от химического потенциала при фиксированном магнитном поле, похожая на изображенную сплошной линией на рис. 1.1, была экспериментально измерена К. фон Клитцингом [6] в двумерном электронном газе при низких температурах (см. рис. 1.2). Плато на зависимости ρ_{xy} от напряжения V_g на затворе (от химического потенциала) соответствуют значениям $(h/e^2)/k$, k – целое число. Подчеркнем, что несмотря на схожесть зависимостей холловского сопротивления от химического потенциала в бездиссипативной модели $1/\tau \rightarrow 0$ и в эксперименте их физическая природа совершенно различна. На самом деле, уравнения (1.4) и (1.5) описывают хорошо известные квантовые осцилляции Шубникова – де Гааза в двумерном идеальном ферми-газе. В реальном эксперименте транспортное время рассеяния совсем не равно бесконечности, что демонстрирует отличное от нуля сопротивление ρ_{xx} , показанное на рис. 1.2. Заметим, что в области напряжений, соответствующих плато в ρ_{xy} , сопротивление ρ_{xx} обращается в нуль. Это означает целочисленное квантование холловской проводимости: $\sigma_{xy} = (e^2/h)k$. Таким образом, основной вопрос, который ставит эксперимент К. фон Клитцинга – это какой физический механизм приводит, как принято говорить, к целочисленному квантованию холловской проводимости в единицах e^2/h и обращению в нуль диссипативной проводимости σ_{xx} при низких температурах в двумерном электронном газе с конечным транспортным временем рассеяния на примесях.¹

¹Заметим, что, строго говоря, в реальном эксперименте измеряется холловское сопротивление образца, которое и квантуется в единицах h/e^2 .

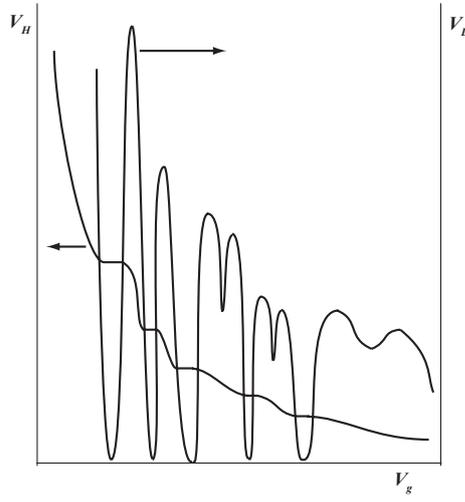


Рис. 1.2: Схематическое изображение зависимости холловского V_H и продольного V_L напряжений от напряжения на затворе V_g , измеренная в работе [6].

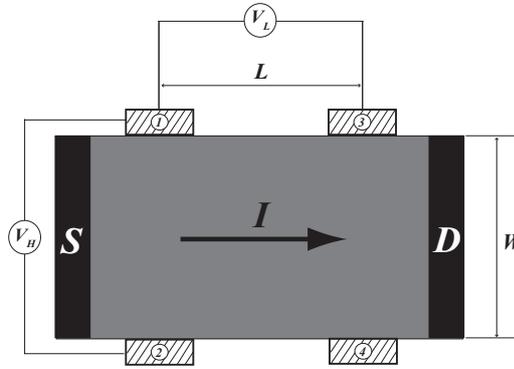


Рис. 1.3: Схематическое изображение стандартной четырех контактной схемы измерений: $\rho_{xx} = R_L = V_L W / (IL)$ и $\rho_{xy} = R_H = V_H / I$.

В экспериментах К. фон Клитцинга двумерный электронный газ был реализован в полевом транзисторе на основе оксида кремния. Температура и магнитное поле, при которых производились измерения, равнялись $T = 1.5$ К и $B = 18$ Т соответственно. Концентрация носителей менялась с помощью затвора. Размеры образца были $L_s = 400$ мкм (длина) и $W = 50$ мкм (ширина). Расстояние между контактами было $L = 130$ мкм.

Стандартная четырех контактная схема измерений представлена на рис. 1.3, причем $\rho_{xx} = R_L = V_L W / (IL)$ и $\rho_{xy} = R_H = V_H / I$. В 1981 г. эксперименты К. фон Клитцинга были повторены Д. Цуи и А. Госсардом (A. Gossard) в двумерном электронном газе, созданном в гетероструктуре GaAs-Al_{0.3}Ga_{0.7}As [7]. Эксперименты выполнялись при температуре $T = 4.2$ К, магнитное поле менялось от нуля до 10 Т, подвижность носителей равнялась $10^4 \div 10^5$ см²/В·с, а их концентрация $n = 10^{11} \div 10^{12}$ см⁻². Отметим, что относительная точность квантования была порядка 10^{-5} . В настоящее время достигнута точность квантования равная 10^{-8} . В течение последних 25 лет квантование холловского сопротивления наблюда-

лось на многих двумерных структурах. Недавно квантовый эффект Холла наблюдался на графене² при комнатных температурах, что связано с большим, порядка 10^3 К, расстоянием между уровнями Ландау [8].

В заключение этого раздела кратко коснемся вопроса о том, в каких системах обычно создается двумерный электронный газ. Первый вариант – это двумерный электронный слой в кремниевом МОП транзисторе (см., [9]). Его устройство схематически изображено на рис. 1.4. Когда на металлический затвор из алюминия (Al) подается положительное напряжение, то, так же как и в конденсаторе (роль изоляционной прослойки играет оксид кремния (SiO_2)), из объема кремния (Si), который является полупроводником р-типа, притягивается отрицательный заряд. За счет изгиба зон, вызванного потенциалом на границе раздела, электроны из валентной зоны, притянутые к поверхности, сначала заполняют связанные состояния на акцепторных примесях, которые могут находиться в щели над валентной зоной, а потом попадают на дискретный уровень в зоне проводимости, создавая таким образом двумерный электронный газ. Меняя потенциал затвора, возможно регулировать двумерную концентрацию электронов в широких пределах.

Другой вариант – это инверсионный слой (см. например, [10]) на границе раздела легированного полупроводника n-типа, например, AlGaAs, и полупроводника p-типа, например, GaAs, который играет роль изолятора (рис. 1.5). Существенный момент в том, что щель в GaAs почти в два раза меньше, чем щель в AlGaAs. Это позволяет электронам в AlGaAs покинуть свои места на донорных примесях и, туннелируя через барьер, который создается нелегированным полупроводником n-типа, попасть либо на акцепторные примеси в щели над валентной зоной GaAs, либо в зону проводимости. Положительный заряд донорных примесей притягивает электроны, протуннелировавшие в GaAs, к границе раздела двух полупроводников, что приводит к искривлению зон и появлению дискретного уровня вблизи этой границы. В конце концов, уровни Ферми выравниваются и приток электронов из AlGaAs прекращается, дискретный уровень опускается ниже уровня Ферми и оказывается заселенным электронами, движение которых ограничено двумя пространственными измерениями.

²Графен, представляющий собой монослой графита, интересен тем, что в нем электронный спектр похож на релятивистский спектр Дирака для безмассовой частицы $\varepsilon(p) = \pm vp$, где v – скорость электрона.

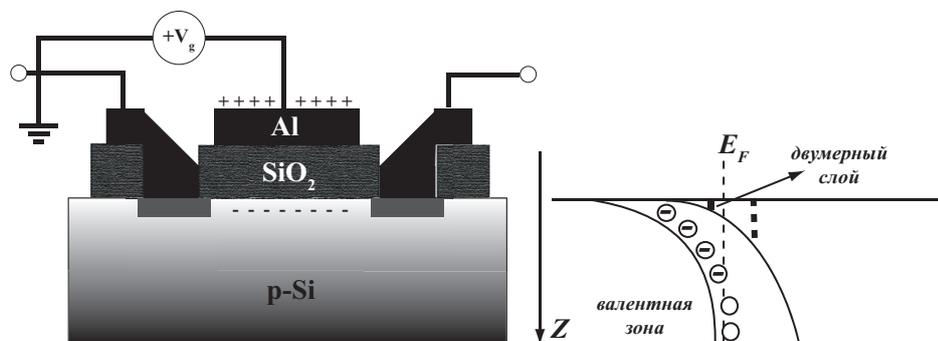


Рис. 1.4: Схемы кремниевого МОП транзистора (вид сбоку) и энергетических зон.

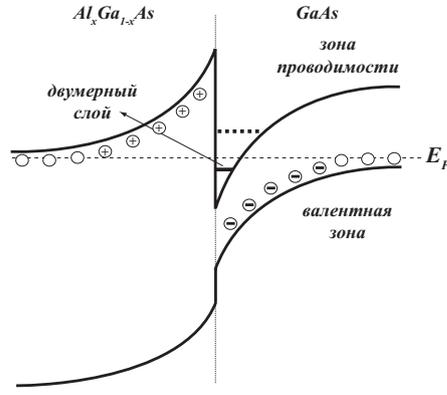


Рис. 1.5: Схема энергетических зон в $\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}/\text{GaAs}$.

Задачи:

1.1.1 Найти спектр двумерного электрона, описываемого гамильтонианом $\mathcal{H} = v\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma}$, где $\mathbf{p} = (p_x, p_y)$ – импульс электрона, а $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y)$ – матрицы Паули, в перпендикулярном плоскости $x-y$ магнитном поле B .

1.1.2 Записав уравнение Навье-Стокса для скорости двумерных электронов с учетом трения за счет рассеяния на примесях (τ), и в присутствии магнитного и электрического полей

$$\rho \left(\partial_t v_j + \frac{v_j}{\tau} \right) = \nabla_j P + \rho \omega_c \epsilon_{jk} v_k + \rho \frac{e E_j}{m_e} + \zeta \nabla_j \nabla_k v_k + \eta_s \nabla^2 v_j + \frac{\eta_H}{2} (\epsilon_{jk} \nabla^2 v_k + \epsilon_{jl} \nabla_l \nabla_k v_k + \epsilon_{kl} \nabla_j \nabla_k v_l),$$

найти тензор проводимости на конечной частоте ω и волновом векторе q . Объемную (ζ), сдвиговую (η_s) и холловскую (η_H) вязкость считать заданными и не зависящими от частоты и волнового вектора. Использовать связь давления с плотностью через обратную сжимаемость $\delta P = \kappa^{-1} \delta \rho / \rho$ и уравнение непрерывности $\partial_t \rho + \nabla_k (\rho v_k) = 0$.

1.1.3 Вычислить среднее значение проекции углового момента вдоль оси z для электронов на n -м уровне Ландау.

1.2 Краевые состояния и калибровочная интерпретация Лафлина

В транспортных измерениях, которые производятся в лаборатории, изучаются образцы конечного размера. Поэтому необходимо понять, как влияет наличие границы на холловскую проводимость даже в бесстолкновительном пределе $1/\tau \rightarrow 0$.

Рассмотрим двумерный электронный газ, который занимает область $-W/2 \leq x \leq W/2$ вдоль оси x и $-L/2 \leq y \leq L/2$ вдоль оси y . Постоянное магнитное поле B приложено вдоль оси z , а вдоль оси x действует постоянное электрическое поле E , создающее между краями разность напряжений $V = EW$ (рис. 1.6).

Рассмотрим сначала одноэлектронную задачу. Запишем гамильтониан

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m_e} \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 - eEx, \quad (1.7)$$

где оператор импульса $\mathbf{p} = -i\hbar\nabla$, а \mathbf{A} – векторный потенциал. Для удобства выберем калибровку Ландау: $A_x = A_z = 0$, $A_y = Bx$. Электронный спин будем считать поляризованным в направлении магнитного поля. Уравнение Шредингера будет иметь вид:

$$\begin{aligned} -\frac{\hbar^2}{2m_e} \frac{\partial^2 \psi(x, y)}{\partial x^2} + \frac{m_e \omega_c^2}{2} \left(x - il_H^2 \frac{\partial}{\partial y} + \frac{|e|El_H^2}{\hbar\omega_c} \right)^2 \psi(x, y) = \\ = \left(\mathcal{E} - i|e|El_H^2 \frac{\partial}{\partial y} + \frac{e^2 E^2 l_H^2}{2\hbar\omega_c} \right) \psi(x, y). \end{aligned} \quad (1.8)$$

Если не учитывать конечные размеры полоски, т.е. считать, что $W = L = \infty$, то волновые функции для осциллятора хорошо известны [1]:

$$\psi_{n,k}(x, y) = \frac{1}{\sqrt{L}} e^{-iky} \phi_n(x - x_k), \quad (1.9)$$

$$\phi_n(x) = \left(\frac{1}{2^n n! l_H \sqrt{\pi}} \right)^{1/2} \exp\left(-\frac{x^2}{2l_H^2}\right) H_n\left(\frac{x}{l_H}\right), \quad (1.10)$$

где координата центра осциллятора $x_k = kl_H^2 - |e|El_H^2/\hbar\omega_c$, k – волновой вектор, $H_n(x)$ – полиномы Эрмита, а n – целое положительное число. Соответствующий спектр имеет вид

$$\mathcal{E}_{n,k} = \mathcal{E}_{n,k}^{(0)} + |e|El_H^2 k - \frac{e^2 E^2 l_H^2}{2\hbar\omega_c}, \quad \mathcal{E}_{n,k}^{(0)} = \hbar\omega_c(n + 1/2). \quad (1.11)$$

Отметим, что состояние $\psi_{n,k}$ с заданным k сконцентрировано вблизи точки $x = x_k$.

Запишем квантово-механическое выражение для плотности тока в состоянии с волновой функцией $\psi_{n,k}$:

$$\mathbf{j}^{(n,k)}(x, y) = \frac{ie\hbar}{2m_e} (\psi_{n,k} \nabla \psi_{n,k}^* - \psi_{n,k}^* \nabla \psi_{n,k}) - \frac{e^2 \mathbf{A}}{m_e c} |\psi_{n,k}|^2. \quad (1.12)$$

Интегрируя по x , находим полный ток в направлении оси y , который переносит состояние с

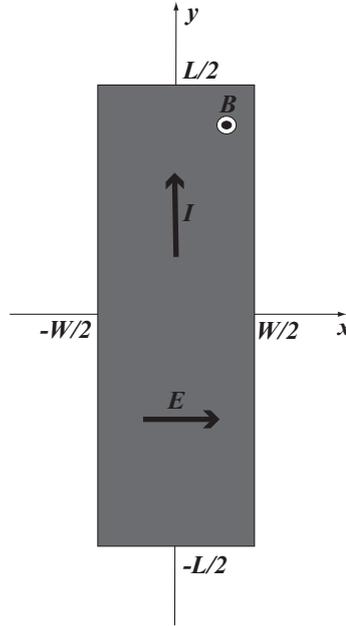


Рис. 1.6: Двумерный электронный газ в геометрии полоски.

волновой функцией $\phi_{n,k}$:

$$I_y^{(n,k)} = \int dx j_y^{(n,k)} = -\frac{|e|}{\hbar L} \frac{\partial \mathcal{E}_{n,k}}{\partial k} = -\frac{e^2 E l_H^2}{\hbar L} = -\frac{e^2 V l_H^2}{\hbar L W}. \quad (1.13)$$

Суммируя по всем состояниям заполненного уровня Ландау, с учётом $\sum_k = LW/(2\pi l_H^2)$, получаем вклад в холловский ток от одного уровня Ландау

$$I_y^{(n)} = \sum_k I_y^{(n,k)} = -\frac{e^2 V}{h}. \quad (1.14)$$

Таким образом, можно сказать, что один заполненный уровень Ландау дает вклад в холловскую проводимость равный

$$\sigma_{yx}^{(n)} = \frac{I_y^{(n)}}{V} = -\frac{e^2}{h} \quad (1.15)$$

Суммируя по всем заполненным уровням Ландау, получаем выражение для холловской проводимости

$$\sigma_{yx} = \frac{I_y}{V} = -\frac{e^2}{h} \nu, \quad (1.16)$$

где фактор заполнения ν дается уравнением (1.5). Таким образом, каждый заполненный электронами уровень Ландау дает вклад e^2/h в холловскую проводимость двумерного электронного газа в чистом пределе.

В приведенном выше рассуждении фактически проигнорирована конечность ширины полоски. В поле $B = 1$ Т магнитная длина l_H равна 26 нм. Для эксперимента фон Клитцинга [6], в котором $B = 18$ Т, а $W = 50$ мкм, отношение $l_H/W \sim 10^{-4}$. Будем считать, что выполняются неравенства $L \gg W \gg l_H$ и попытаемся учесть эффект конечности ширины W .

Для определенности будем считать, что граница полоски представляет собой резкий потенциальный барьер с энергией много большей $\hbar\omega_c$. Такие границы можно промоделировать

бесконечными потенциальными стенками, находящимися при $x = \pm W/2$. Тогда граничные условия на стенках

$$\psi(x = \pm W/2, y) = 0. \quad (1.17)$$

Общим решением уравнением Шредингера (1.8) в этом случае являются функции параболического цилиндра. Запишем волновые функции и энергетический спектр в следующем виде

$$\psi_{s,k}(x, y) = \frac{1}{\sqrt{L}} A_{s,k} e^{-iky} \left[\frac{\mathcal{D}_s\left(\frac{x-x_k}{l_H/\sqrt{2}}\right)}{\mathcal{D}_s\left(-\frac{W/2+x_k}{l_H/\sqrt{2}}\right)} - \frac{\mathcal{D}_s\left(-\frac{x-x_k}{l_H/\sqrt{2}}\right)}{\mathcal{D}_s\left(\frac{W/2+x_k}{l_H/\sqrt{2}}\right)} \right], \quad (1.18)$$

$$\mathcal{E}_{s,k} = \hbar\omega_c \left(s + \frac{1}{2} \right) + |e| E l_H^2 k - \frac{e^2 E^2 l_H^2}{2\hbar\omega_c}, \quad (1.19)$$

где $\mathcal{D}_s(z)$ – функция параболического цилиндра с индексом s [11]. Заметим, что пока s – непрерывный параметр, подлежащий дальнейшему определению. В дальнейшем будет удобно использовать следующее представление для функций параболического цилиндра:

$$\mathcal{D}_s(z) = \frac{2^{s/2} \Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1-s}{2})} e^{-z^2/4} {}_1F_1\left(-\frac{s}{2}, \frac{1}{2}, \frac{z^2}{2}\right) - \frac{2^{s/2} \sqrt{2\pi}}{\Gamma(-\frac{s}{2})} z e^{-z^2/4} {}_1F_1\left(\frac{1-s}{2}, \frac{3}{2}, \frac{z^2}{2}\right). \quad (1.20)$$

Здесь ${}_1F_1(\alpha, \gamma, z)$ – вырожденная гипергеометрическая функция, которая удовлетворяет уравнению

$$zy'' + (\gamma - z)y' + \alpha y = 0 \quad (1.21)$$

и может быть представлена в виде ряда

$${}_1F_1(\alpha, \gamma, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n + \alpha)}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(n + \gamma)} \frac{z^n}{n!}. \quad (1.22)$$

Требование обращения в нуль волновой функции (1.18) на границе $x = -W/2$ выполнено автоматически, а соответствующее условие на границе $x = W/2$ дает условие

$$\frac{\mathcal{D}_s\left(\frac{W/2-x_k}{l_H/\sqrt{2}}\right)}{\mathcal{D}_s\left(-\frac{W/2+x_k}{l_H/\sqrt{2}}\right)} = \frac{\mathcal{D}_s\left(-\frac{W/2-x_k}{l_H/\sqrt{2}}\right)}{\mathcal{D}_s\left(\frac{W/2+x_k}{l_H/\sqrt{2}}\right)}, \quad (1.23)$$

из которого определяется квантовое число s . Численное решение (1.23) дает картину спектра, представленную на рис. 1.7а. Как видно, спектр состоит из бесконечного числа ветвей, которые мы будем нумеровать, как и раньше, целым положительным числом n . Конечное значение ширины W приводит к дисперсии спектра, т.е. появляется зависимость энергетического параметра s_n от x_k , а значит и волнового вектора k . При $W \gg l_H$, можно показать, что $s_n(x_k)$ при $x_k = 0$ экспоненциально мало отличается от n , а при $x_k = \pm W/2$ точно равен $2n + 1$ (см. задачи). Как видно из рисунка, $s_n(x_k)$ возрастает по мере увеличения x_k .

На рисунке 1.7б показана волновая функция состояния k при разных n . Подчеркнем, что пространственно она локализована в окрестности радиуса l_H около точки с координатой x_k . Это дает право говорить, что состояние с волновым вектором k находится в точке с координатой x_k . Это означает, что даже если вдали от границы при $|x| \ll W/2$ химический потенциал $\mu \approx \hbar\omega_c(N + 1)$, т.е. находится между уровнями Ландау, то вблизи границы существует $(N + 1)$ состояние, пересекающее уровень химического потенциала. Эти поверхностные состояния принято называть краевыми [12]. Отметим, что в квазиклассической картине

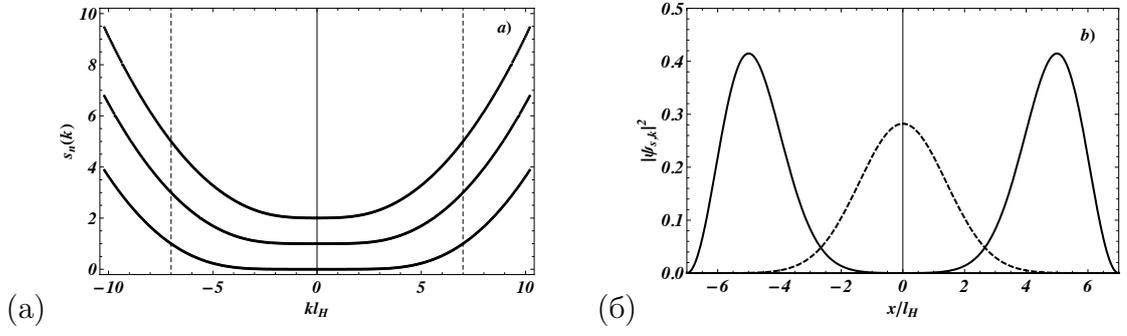


Рис. 1.7: (а) Три нижних уровня Ландау в полосе конечной ширины $W = 14l_H$. (б) Квадраты модулей волновых функций для состояний с $k = 0$ (пунктирная линия) и $kl_H = \pm 7$ (сплошные линии) на уровне Ландау с $n = 0$.

они соответствуют скачущим орбитам [5]. В отсутствие электрического поля положение n -го краевого состояния определяется уравнением

$$s_n(k_n) = \frac{\mu}{\hbar\omega_c} - \frac{1}{2}. \quad (1.24)$$

Для волновых векторов k вблизи волнового вектора k_n энергетический спектр можно представить в виде

$$\mathcal{E}_{n,k} \approx \mu + \hbar\omega_c \frac{ds_n(k_n)}{dk_n} (k - k_n). \quad (1.25)$$

Если, как обычно, отсчитывать энергию от уровня химического потенциала, а волновой вектор от значения k_n , то уравнение (1.25) означает, что имеются возбуждения, локализованные вблизи границы полоски и имеющие линейный закон дисперсии $\epsilon_n(k) = \hbar v_{\text{edge}}^{(n)} k$, где скорость краевого состояния $v_{\text{edge}}^{(n)} = \omega_c ds_n(k_n)/dk_n$. Так как характерный энергетический масштаб, в котором удобно измерять химический потенциал – это циклотронная энергия $\hbar\omega_c$, то скорость краевых состояний можно оценить по размерности как $|v_{\text{edge}}^{(n)}| \sim \omega_c l_H$ (см. задачу). Заметим, что вблизи левой границы полоски при $x = -W/2$ скорость краевого состояния отрицательна и возбуждение распространяется вдоль оси y в сторону отрицательных значений. Для правой границы при $x = W/2$ скорость краевого состояния положительна и возбуждение распространяется вдоль оси y в сторону положительных значений.

Вычислим теперь холловскую проводимость. Запишем вклад в плотность холловского тока от состояния n, k в точке x ,

$$j_y^{(n,k)}(x) = -\frac{|e|}{\hbar} |\psi_{s_n,k}(x, y)|^2 \frac{\partial \mathcal{E}_{n,k}}{\partial k}. \quad (1.26)$$

Полный ток в направлении y получается интегрированием по x и суммой по n по k . Заменяя сумму по k на интеграл,

$$\sum_k \rightarrow \int \frac{Ldk}{2\pi}, \quad (1.27)$$

получаем

$$I_y = -\frac{|e|L}{h} \sum_n \int dk \int dx |\psi_{s_n,k}(x, y)|^2 \frac{\partial \mathcal{E}_{n,k}}{\partial k} n_F(\mathcal{E}_{n,k} - \mu(x)). \quad (1.28)$$

Обратим внимание, что в формуле (1.28) химический потенциал зависит от координаты x . Это связано с тем, что во внешнем поле остается постоянным электрохимический потенциал:

$\mu(x) + eEx = \mu_0$. Пользуясь тем, что $\mu(x)$ меняется на масштабе $W \gg l_H$, а вероятность $|\psi_{s_n,k}(x, y)|^2$ сконцентрирована вблизи $x = x_k$, можно заменить $\mu(x)$ на $\mu(x_k)$ в выражении (1.28). Тогда вычисляя интеграл по x (из нормировки волновой функции) находим

$$I_y = -\frac{|e|}{h} \sum_n \int dk \frac{\partial \mathcal{E}_{n,k}}{\partial k} n_F(\mathcal{E}_{n,k} - \mu(x_k)) = -\frac{|e|}{h} \sum_n \int dk \frac{\partial \mathcal{E}_{n,k}}{\partial k} n_F(\mathcal{E}_{n,k} - \mu(x)). \quad (1.29)$$

Отметим, что в последнем равенстве мы обрано заменили x_k на координату в реальном пространстве. Как мы увидим в дальнейшем полный ток от координаты x зависеть не будет, как и должно быть.

Интегрируя по k по-частям и пользуясь при нулевой температуре простым соотношением $\partial n_F(E - \mu)/\partial E = -\delta(E - \mu)$, находим

$$I_y = -\frac{|e|}{h} \sum_n \int dk \frac{\partial \mathcal{E}_{n,k}}{\partial k} \mathcal{E}_{n,k} \delta(\mathcal{E}_{n,k} - \mu(x)) = -\frac{|e|}{h} \nu (\mu(W/2) - \mu(-W/2)) = -\frac{e^2 \nu}{h} V. \quad (1.30)$$

Здесь ν равно числу уровней Ландау, пересекающих химический потенциал при $V = 0$, см. рисунок 1.7а. Таким образом, при $T = 0$ разность химических потенциалов краевых состояний на правой и левой границах полоски определяет холловский ток.

Если вдали от границ двумерного газа химический потенциал лежит в щели между уровнями Ландау, то левые и правые краевые состояния совершенно независимы друг от друга. Каждое из них находится в равновесии с тем резервуаром, из которого выходит, а поэтому $\mathcal{E}_{n,\pm k_n} = \mu_{\pm}$, где μ_{\pm} – электрохимические потенциалы электронов на правой и левой границе, соответственно. Тогда, так как $\mu_+ - \mu_- = |e|V$, мы возвращаемся к формуле (1.16), в которой фактор заполнения равен числу краевых состояний. Это рассуждение позволяет сформулировать простое правило для расчета токов в режиме целочисленного квантового эффекта Холла [13]. Каждое краевое состояние переносит в направлении своего распространения ток, равный

$$I = \frac{e^2}{h} \mu, \quad (1.31)$$

где μ – это электрохимический потенциал резервуара, из которого оно выходит.

В 1981 г. Р. Лафлином была выдвинута идея о том, что квантование холловской проводимости связано с калибровочной инвариантностью и наличием края подвижности (делокализованных состояний) на уровне Ландау [12, 14].

Сделаем калибровочное преобразование $A_y \rightarrow A_y + 2\pi\phi/L$, где ϕ играет роль магнитного потока. Тогда в выражении (1.19) для спектра (и в выражении для x_k) волновой вектор изменится как $k \rightarrow k - (2\pi e/c\hbar)\phi/L$. Заметим, что при $\phi = \phi_0 = c\hbar/|e|$ энергетический спектр сохраняет свой вид, а состояния с волновым вектором k переходят в состояния с волновым вектором $k + 2\pi/L$. Согласно рисунку 1.7а это означает, что при изменении магнитного потока от нуля до ϕ_0 один электрон переходит с левого края (при $x = -W/2$) на правый края (при $x = W/2$).

Используя ур. (1.26), выражение для полного тока, переносимого вдоль направления y состоянием $\psi_{n,k}$ в присутствии магнитного потока ϕ , можно записать в виде

$$I_y^{(n,k)} = -\frac{|e|\phi_0}{h} \frac{\partial \mathcal{E}_{n,k}(\phi)}{\partial \phi}. \quad (1.32)$$

Соответственно, один заполненный уровень Ландау дает вклад в ток, равный

$$I_y^{(n)} = -\frac{|e|\phi_0}{h} \frac{\partial \mathcal{E}_n(\phi)}{\partial \phi}, \quad \mathcal{E}_n(\phi) = \sum_k \mathcal{E}_{n,k}(\phi). \quad (1.33)$$

Здесь $\mathcal{E}_n(\phi)$ – энергия электронов на заполненном уровне Ландау. Используя тот факт, что ток $I_y^{(n)}$ не может зависеть от ϕ из-за калибровочной инвариантности, интегрируя ур. (1.33), по ϕ от 0 до ϕ_0 , получаем

$$I_y^{(n)} = -\frac{|e|}{h} \left[\mathcal{E}_n(\phi_0) - \mathcal{E}_n(0) \right] = -\frac{e^2 V}{h}. \quad (1.34)$$

В последнем равенстве мы учли, что энергии $\mathcal{E}_n(\phi_0)$ и $\mathcal{E}_n(0)$ соответствуют состояниям, которые отличаются тем, где находится один электрон: не левом краю или на правом. Так как между краями образца потенциал V , то $\mathcal{E}_n(\phi_0) - \mathcal{E}_n(0) = |e|V$. Итак, мы вернулись фактически опять к формуле (1.16), которая говорит, что каждый заполненный уровень Ландау дает вклад e^2/h в холловскую проводимость. Таким образом, оказывается возможным связать квантование холловской проводимости при нуле температур с калибровочной инвариантностью. Отметим, что изменение магнитного потока во времени от 0 до ϕ_0 создает электрическое поле, которое и приводит к изменению энергии состояний с $\phi = 0$ и $\phi = \phi_0$.

Заметим, что изучение зависимости физических величин от магнитного поля, который может быть исключен калибровочным преобразованием тесно связано с эффектом Ааронова-Бома [15] и теоремой Байерс-Янга [16].

Задачи:

- 1.2.1 Найти дисперсию энергетического спектра для состояний вблизи центра полосы, $|k| \ll W/l_H^2$.
- 1.2.2 Найти зависимость скорости краевых мод от номера уровня Ландау и построить график. Считать, что скорость определяется соотношением $v_{\text{edge}} = \partial \mathcal{E}_{n,k} / \partial k|_{k=W/2l_H^2}$.
- 1.2.3 Для четырех контактной схемы измерений, изображенной на рис. 1.3, вычислить холловское $R_H = R_{14}$ и продольное $R_L = R_{31}$ сопротивления, где $R_{ij} = (\mu_i - \mu_j)/I$. Считать, что фактор заполнения равен ν . Указание: использовать уравнение (1.31).
- 1.2.4 Показать, что ур. (1.28) при $T = 0$ при точном расчете (без замены x на x_k) приводит к ответу (1.30) пределе $V \rightarrow 0$.

1.3 Коллективные возбуждения в магнитном поле (классическое рассмотрение)

Рассмотрим теперь коллективные возбуждения в двумерной электронной системе в перпендикулярном магнитном поле. Начнем с классического рассмотрения, в котором квантование спектра электронов (уровни Ландау) игнорируется. Запишем линеаризованное кинетическое уравнение для отклонения электронной функции распределения от равновесной $f(\varepsilon, \mathbf{p}) = f_{\text{eq}} + \delta f \exp[i(\mathbf{q}\mathbf{r} - \omega t)]$ в присутствии перпендикулярного магнитного поля B и слабого электрического поля $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \exp[i(\mathbf{q}\mathbf{r} - \omega t)]$, направленного в плоскости, (см. например, книгу [5]),

$$-(i\omega - i\mathbf{q}\mathbf{v}_p)\delta f + e\mathbf{E}_0\mathbf{v}_p \frac{\partial f_{\text{eq}}}{\partial \varepsilon} + e[\mathbf{v}_p \times \mathbf{B}] \frac{\partial \delta f}{\partial \mathbf{p}} = \text{St}_{\text{ee}}[\delta f]. \quad (1.35)$$

Здесь \mathbf{v}_p скорость электронов, для квадратичного спектра равная p/m_e . Для решения кинетического уравнения необходимо конкретизировать вид интеграла столкновения $\text{St}_{\text{ee}}[\delta f]$. Считая, что он описывает изменение функции распределения из-за межэлектронного взаимодействия, выберем его в самом простом модельном виде:

$$\text{St}_{\text{ee}}[\delta f] = -\frac{\delta f - \delta f_{\text{hd}}}{\tau_{ee}}, \quad \delta f_{\text{hd}} = -\frac{\partial f_{\text{eq}}}{\partial \varepsilon} (\delta\mu + \mathbf{p}\delta\mathbf{v}). \quad (1.36)$$

Неизвестные параметры $\delta\mu$ и $\delta\mathbf{v}$ фиксируются сохранением числа частиц и импульса,

$$\delta n_e = \int \frac{d^2\mathbf{p}}{(2\pi)^2} \delta f = \int \frac{d^2\mathbf{p}}{(2\pi)^2} \delta f_{\text{hd}}, \quad \mathbf{j}/e = \int \frac{d^2\mathbf{p}}{(2\pi)^2} \mathbf{p}\delta f = \int \frac{d^2\mathbf{p}}{(2\pi)^2} \mathbf{p}\delta f_{\text{hd}}, \quad (1.37)$$

где δn_e – изменение электронной концентрации, а \mathbf{j} – электрический ток. Выбирая направление волнового вектора \mathbf{q} за ось x , находим

$$i(\Omega + i\gamma - qR_c \cos \varphi)\delta f + \frac{\partial \delta f}{\partial \varphi} = \frac{\partial f_{\text{eq}}}{\partial p} \left[\frac{e(E_x \cos \varphi + E_y \sin \varphi)}{\omega_c} + \frac{\gamma\delta\mu}{v_p} + \gamma \frac{p(\delta v_x \cos \varphi + \delta v_y \sin \varphi)}{v_p} \right], \quad (1.38)$$

где φ – угол между направлением векторов \mathbf{p} и \mathbf{q} . Здесь мы ввели обозначения $\Omega = \omega/\omega_c$, циклотронный радиус $R_c = v_p/\omega_c$ и $\gamma = 1/(\omega_c\tau_{ee})$. Будем искать δf в виде

$$\delta f = e^{iqR_c \sin \varphi} \sum_{s=-\infty}^{\infty} g_s e^{-is\varphi}. \quad (1.39)$$

Тогда из линеаризованного кинетического уравнения (1.38) найдем

$$g_s = \frac{-i}{\Omega + i\gamma - s} \frac{\partial f_{\text{eq}}}{\partial p} \left[e \left(\frac{E_x}{\omega_c} + \frac{\gamma p \delta v_x}{v_p} \right) \frac{s}{qR_c} J_s(qR_c) + ie \left(\frac{E_y}{\omega_c} + \frac{\gamma p \delta v_y}{v_p} \right) J'_s(qR_c) + \frac{\gamma \delta \mu}{v_p} J_s(qR_c) \right]. \quad (1.40)$$

Здесь $J_s(z) = \int_0^{2\pi} du \exp(isu - iz \sin u)/(2\pi)$ – функция Бесселя. Подчеркнем, что при $q = 0$ ненулевыми оказываются только нулевая и первая гармоника: g_0 и $g_{\pm 1}$.

Соотношения (1.37) приводят к равенствам

$$\begin{aligned}\delta v_x &= \frac{4\pi}{p_F^2 m_e} \int \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} p \sum_{s=-\infty}^{\infty} g_s \frac{s}{q R_c} J_s(q R_c), & \delta v_y &= -\frac{4\pi i}{p_F^2 m_e} \int \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} p \sum_{s=-\infty}^{\infty} g_s J'_s(q R_c), \\ \delta \mu &= \frac{2\pi}{m_e} \delta n_e = \frac{2\pi}{m_e} \int \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} \sum_{s=-\infty}^{\infty} g_s J_s(q R_c).\end{aligned}\quad (1.41)$$

Здесь мы воспользовались тем, что при $T \ll \mu$ можно использовать соотношение $-\partial f_{\text{eq}}/\partial \varepsilon = \delta(\varepsilon - \mu)$. Покажем, что решение (1.40) удовлетворяет уравнению непрерывности. Домножим обе части ур. (1.40) на $(\Omega + i\gamma - s)J_s(qR)$ просуммируем по s . Тогда найдем,

$$(\Omega + i\gamma) \sum_{s=-\infty}^{\infty} g_s J_s(q R_c) - \sum_{s=-\infty}^{\infty} s g_s J_s(q R_c) = -i\gamma \frac{\partial f_{\text{eq}}}{\partial \varepsilon} \delta \mu. \quad (1.42)$$

Здесь мы воспользовались соотношениями для функций Бесселя $\sum_{s=-\infty}^{\infty} J_s^2(z) = 1$ и $J_{-s}(z) = (-1)^s J_s(z)$. Интегрируя по \mathbf{p} выражение (1.42), получаем уравнение непрерывности:

$$(\Omega + i\gamma)\delta n_e - q R_c \frac{p_F m_e}{4\pi} \delta v_x = i\gamma \delta n_e \implies -i\omega \delta n_e + i n_e q \delta v_x = 0. \quad (1.43)$$

Подставляя выражение (1.40) для g_s в выражения (1.41), получаем связь между δn_e , δv_x , δv_y с одной стороны и электрическим полем с другой,

$$\begin{pmatrix} 1 - i\gamma Y_{00}^{(0)} & -2i\gamma Y_{00}^{(1)} & 2\gamma Y_{10}^{(0)} \\ -i\gamma Y_{00}^{(1)} & 1 - 2i\gamma Y_{00}^{(2)} & 2\gamma Y_{10}^{(1)} \\ -\gamma Y_{10}^{(0)} & -2\gamma Y_{10}^{(1)} & 1 - 2i\gamma Y_{11}^{(0)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta n_e/n_e \\ \delta v_x/v_F \\ \delta v_y/v_F \end{pmatrix} = \frac{2e}{m_e v_F \omega_c} \begin{pmatrix} iY_{00}^{(1)} E_x - Y_{10}^{(0)} E_y \\ iY_{00}^{(2)} E_x - Y_{10}^{(1)} E_y \\ Y_{10}^{(1)} E_x + iY_{11}^{(0)} E_y \end{pmatrix}. \quad (1.44)$$

Здесь мы ввели следующее обозначение

$$Y_{kl}^{(j)} = \sum_{s=-\infty}^{\infty} \frac{s^j}{(q R_c)^j} \frac{J_s^{(k)}(q R_c) J_s^{(l)}(q R_c)}{\Omega + i\gamma - s}, \quad (1.45)$$

где $J_s^{(k)}(z)$ обозначает k -ю производную функции Бесселя.

Отметим, что в *бесстолкновительном пределе*, когда отсутствует электрон-электронное рассеяние, $\gamma \ll \Omega$, вычисляя ток как $\mathbf{j} = en_e \delta \mathbf{v}$, мы получаем явные выражения для проводимостей на конечной частоте и волновом векторе (напомним, что ось x выбрана вдоль \mathbf{q})

$$\begin{aligned}\sigma_{xx}(\omega, \mathbf{q}) &= 2 \frac{e^2 n_e i}{m_e \omega_c} Y_{00}^{(2)}, & \sigma_{yy}(\omega, \mathbf{q}) &= 2 \frac{e^2 n_e i}{m_e \omega_c} Y_{11}^{(0)}, \\ \sigma_{xy}(\omega, \mathbf{q}) &= -\sigma_{yx}(\omega, \mathbf{q}) = -2 \frac{e^2 n_e}{m_e \omega_c} Y_{10}^{(1)}.\end{aligned}\quad (1.46)$$

Полученные выше соотношения проясняют физический смысл функций $Y_{kl}^{(j)}$.

Пользуясь соотношением непрерывности (1.43) можно выписать тензор проводимости при конечном значении γ :

$$\hat{\sigma}(\omega, \mathbf{q}) = 2 \frac{e^2 n_e}{m_e \omega_c} \begin{pmatrix} 1 - 2i\gamma Y_{00}^{(2)} - i\gamma Y_{00}^{(1)} q R_c / \Omega & 2\gamma Y_{10}^{(1)} \\ -2\gamma Y_{10}^{(1)} - \gamma Y_{10}^{(0)} q R_c / \Omega & 1 - 2i\gamma Y_{11}^{(0)} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} iY_{00}^{(2)} & -Y_{10}^{(1)} \\ Y_{10}^{(1)} & iY_{11}^{(0)} \end{pmatrix}. \quad (1.47)$$

Учтем еще теперь влияние межэлектронного взаимодействия $U(q)$ на электрическое поле. Полное электрическое поле, которое стоит в правой части ур. (1.44), состоит из суммы внешнего поля $E_j^{(\text{ext})}$ и экранированного поля $-\nabla\phi$, где $\phi(\omega, \mathbf{q}) = eU(q)\delta n_e(\omega, \mathbf{q})$. выражая $\delta n_e(\omega, \mathbf{q})$ через $\delta\mathbf{v}$ с помощью уравнения самосогласования (1.43), найдем связь между током и внешним электрическим полем:

$$\left(\delta_{jk} + i\sigma_{jx}(\omega, \mathbf{q})\frac{q^2 U(q)R_c}{\Omega v_F}\delta_{kx}\right)j_k = \sigma_{jl}(\omega, \mathbf{q})E_l^{(\text{ext})}. \quad (1.48)$$

Отметим, что здесь было учтено, что ось x выбрана вдоль направления вектора \mathbf{q} . Если при заданных ω и q детерминант матрицы в правой части ур. (1.48) обратится в нуль, то формально обратная матрица не будет существовать. Физически это означает гигантское усиление электрического поля. Условие обращения детерминанта в нуль сводится к уравнению

$$1 + i\frac{2\pi q}{\omega\epsilon}\sigma_{xx}(\omega, \mathbf{q}) = 0, \quad (1.49)$$

где мы использовали выражение для фурье-образа кулоновского потенциала для двумерных носителей заряда $U(q) = 2\pi e^2/(q\epsilon)$. Здесь ϵ – диэлектрическая постоянная, связанная с диэлектрическим окружением двумерного электронного газа.

В бесстолкновительном пределе $\gamma \ll \Omega$, используя ур. (1.46), из ур. (1.49) находим

$$1 - \frac{1}{qa_B\Omega} \sum_{s=-\infty}^{\infty} \frac{s^2 J_s^2(qR_c)}{\Omega - s + i\gamma} = 0. \quad (1.50)$$

где $a_B = \epsilon/(m_e e^2)$ – боровский радиус, определяющий статическую экранировку кулоновского взаимодействия для двумерной ситуации.

Пользуясь соотношением $\sum_{s=1}^{\infty} s^2 J_s^2(z) = z^2/4$, из ур. (1.50) находим в пределе $\omega_c \rightarrow 0$ спектр обычного двумерного плазмона в нулевом магнитном поле: $\omega_{\text{mp},0}^2(q) = qv_F^2/(2a_B)$. Как видно из ур. (1.50) знаменатель члена с $s = k$ расходится при $\Omega = k$. Поэтому естественно искать решения вблизи этих значений. Тогда находим

$$\omega_k(q) \simeq k\omega_c \left[1 + \frac{J_k^2(qR_c)}{qa_B}\right], \quad k = 1, 2, \dots \quad (1.51)$$

Для случая $a_B \ll R_c$ это выражение справедливо при малых, $qR_c \ll 1$, и больших, $qR_c \gg 1$, волновых векторах. В обратном случае $a_B \gg R_c$ выражение (1.51) справедливо при всех значениях qR_c . Моды $\omega_k(q)$ называются модами Бернштейна и в первые обсуждались для плазмы в магнитном поле. Мода Бернштейна с $k = 1$ на малых волновых векторах, $qR_c \ll 1$, совпадает с магнетоплазменной модой со спектром

$$\omega_{\text{mp}}(q) \simeq \omega_c [1 + qR_c^2/(4a_B)] \quad (1.52)$$

В гидродинамическом режиме $\Omega \ll \gamma$ необходимо использовать полное выражение (1.47) для проводимости. При этом оказывается, что на малых волновых векторах спектр совпадает со спектром магнетоплазмона, уширенным за счет межэлектронного рассеяния

$$\omega_{\text{mp}}(q) \simeq \omega_c [1 + qR_c^2/(4a_B)] - i\gamma. \quad (1.53)$$

Еще раз подчеркнем, что приведенное выше рассмотрение является полностью классическим и игнорирует квантование спектра электронов в магнитном поле.

Задачи:

- 1.3.1 Разложившись до второго порядка по q в уравнениях (1.44) вывести уравнение Навье-Стокса из задачи 1.1.2. Определить чему равны объемная, сдвиговая и холловская вязкости.
- 1.3.2 Воспользовавшись ур. (1.46) вычислить $\partial_q^2 \sigma_{jk}(\omega, \mathbf{q})$ в пределе $q \rightarrow 0$. Сравнить ответы с выражениями для вязкости, полученными в предыдущей задаче.
- 1.3.3 Вывести спектр магнетоплазмонов, см. ур. (1.53), в гидродинамическом режиме.

1.4 Электростатика краевых состояний: реконструкция края и краевой магнетоплазмон

В разделе 1.2 был рассмотрен двумерный электронный газ с границей, которая моделировалась бесконечно высокой стенкой. Рассмотрим теперь противоположный случай модели границы. Пусть двумерный электронный газ помещен в удерживающий потенциал $U_{\text{conf}}(\mathbf{r})$, который меняется на масштабе l_H на величину много меньшую, чем $\hbar\omega_c$. Тогда наличие этого потенциала приводит к плавному поднятию уровней Ландау по мере приближения к границе; при этом расстояние между уровнями Ландау не меняется и остается равным $\hbar\omega_c$.

Рассмотрим вопрос о распределении электронной плотности вблизи такого края, следуя работе Д. Шкловского, Б. Шкловского, Л. Глазмана [17]. При этом будет учтена экранировка, возникающая за счет наличия электрон-электронного (кулоновского) взаимодействия в электронном газе.

Для простоты изложения начнем рассмотрение со случая, когда нет магнитного поля. Будем считать, что граница двумерного слоя формируется бесконечной пластиной затвора, параллельной оси y с напряжением $-V_g$ относительно двумерного электронного газа, находящегося в плоскости $z = 0$ (рис. 1.9). Также имеется фон положительных зарядов с концентрацией n_0 от доноров в слое изолятора с диэлектрической проницаемостью $\epsilon \gg 1$. Этот фон положительных зарядов определяет концентрацию электронов при $x \rightarrow +\infty$. Предположим, что в полосе шириной $2l$ на расстоянии от затвора в плоскости двумерного газа плотность электронного заряда равна нулю. Считая, что l больше расстояний от затвора и донорного слоя до двумерного электронного газа, получим эффективную двумерную задачу (рис. 1.8). Также будем считать, что выполняется условие $a_B \ll l$, где $a_B = \epsilon\hbar^2/m_e e^2$ – боровский радиус. Неравенство $a_B \ll l$ означает, что электрическое поле хорошо экранируется электронами.

Электростатический потенциал $\phi(x, z)$ при $z \leq 0$ удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (1.54)$$

с граничными условиями

$$\phi(x, z = 0) = \begin{cases} -V_g & x < -l, \\ 0 & x > l, \end{cases} \quad (1.55)$$

$$E_z(x, z = 0_-) = -\left. \frac{\partial \phi}{\partial z} \right|_{z=0_-} = -\frac{4\pi e n_0}{\epsilon}, \quad |x| < l. \quad (1.56)$$

Последнее условие означает, что в области $|x| < l$ отсутствуют электроны. Условие $\phi(x, 0) = 0$ при $x > l$ означает отсутствие x -й компоненты электрического поля E_x в двумерном электронном газе, что возможно только при полной экранировке как в хорошем металле. Электронная концентрация в двумерном электронном газе находится из следующего очевидного равенства:

$$n_e = n_0 - \left. \frac{\epsilon}{4\pi e} \frac{\partial \phi}{\partial z} \right|_{z=0_-}. \quad (1.57)$$

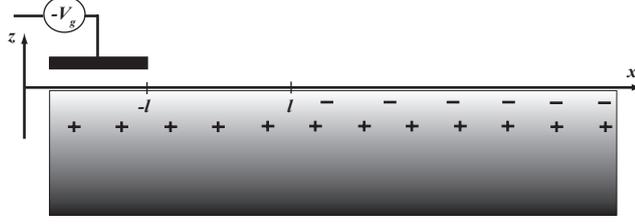


Рис. 1.8: Схематическое изображение формирования затвором границы двумерного электронного газа.

Задача (1.54)–(1.56) относится к классу задач, известных в теории функций комплексного переменного как задача Келдыша–Седова [18]. Для ее решения удобно ввести комплексные координату $\zeta = x + iz$ и функцию $F(\zeta)$ так, что $\phi(x, z) = \text{Im } F(\zeta)$. Рассмотрим комплексную плоскость с разрезом от $-l$ до l (рис. 1.9). Пусть $f(\zeta) = F'(\zeta)g(\zeta)$, где двузначная функция

$$g(\zeta) = \left(\frac{\zeta + l}{\zeta - l} \right)^{1/2} \quad (1.58)$$

определена так, что при $t > l$

$$g(t) = \left(\frac{t + l}{t - l} \right)^{1/2} \quad (1.59)$$

и $\arg g(z) = [\arg(l + z) - \arg(l - z)]/2$. Тогда граничные условия (1.55)–(1.56) переписываются следующим образом

$$\text{Im } f(x, z = 0) = \begin{cases} \frac{d\phi}{dz} \sqrt{\frac{l+x}{l-x}} & |x| < l, \\ \frac{d\phi}{dx} \sqrt{\frac{l+x}{x-l}} & |x| > l \end{cases} = \frac{4\pi en_0}{\epsilon} \sqrt{\frac{l+x}{l-x}} \Theta(l - |x|). \quad (1.60)$$

Воспользуемся формулой Шварца для аналитической функции при $\text{Im } \zeta < 0$:

$$f(\zeta) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt \text{Im } f(t)}{t - \zeta} + \text{Re } f(\infty). \quad (1.61)$$

Напомним, что формула Шварца получается после сложения формул Коши для $f(\zeta)$:

$$f(\zeta) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{C_K} \frac{dt f(t)}{t - \zeta} = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt f(t)}{t - \zeta} + \frac{f(\infty)}{2} \quad (1.62)$$

и для сопряженной ей функции $f^*(\zeta)$

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_K} \frac{dt f^*(t)}{t - \zeta} = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt f^*(t)}{t - \zeta} + \frac{f^*(\infty)}{2}. \quad (1.63)$$

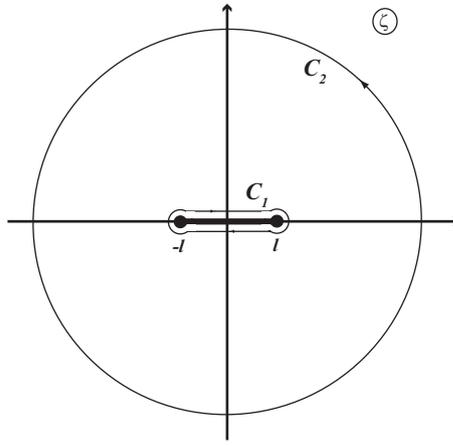


Рис. 1.9: Контуры интегрирования на комплексной плоскости.

Используя граничные условия (1.60), из формулы Шварца находим

$$\begin{aligned} f(\zeta) &= -\frac{1}{\pi} \int_{-l}^l \frac{dt \operatorname{Im} f(t)}{t - \zeta} + \operatorname{Re} f(\infty) = \\ &= -\frac{4en_0}{\epsilon} \int_{-1}^1 \frac{dt}{t - \zeta/l} \sqrt{\frac{1+t}{1-t}}, \end{aligned} \quad (1.64)$$

где мы предположили, что $\operatorname{Re} f(\infty) = 0$. Рассмотрим интеграл

$$\int_{C_1+C_2} \frac{dt g(t)}{t - \zeta} = 2\pi i g(\zeta), \quad (1.65)$$

где контур $C_1 + C_2$ показан на рис. 1.9. Вычисляя интегралы, найдем

$$\int_{C_1} \frac{dt g(t)}{t - \zeta} = (e^{-i\pi/2} - e^{i\pi/2})g(\zeta), \quad \int_{C_2} \frac{dt g(t)}{t - \zeta} = 2\pi i \quad (1.66)$$

Отсюда получаем следующее выражение для функции $f(\zeta)$:

$$f(\zeta) = \frac{4\pi en_0}{\epsilon} [-1 + g(\zeta)]. \quad (1.67)$$

Значит,

$$F'(\zeta) = \frac{4\pi en_0}{\epsilon} \left[1 - \frac{1}{g(\zeta)} \right]. \quad (1.68)$$

Принимая во внимание значения функции $g(\zeta)$ на действительной оси при подходе к ней из нижней полуплоскости:

$$g(t - i0) = \begin{cases} i\sqrt{\frac{t+l}{l-t}} & |t| < l, \\ \sqrt{\frac{t+l}{t-l}} & |t| > l, \end{cases} \quad (1.69)$$

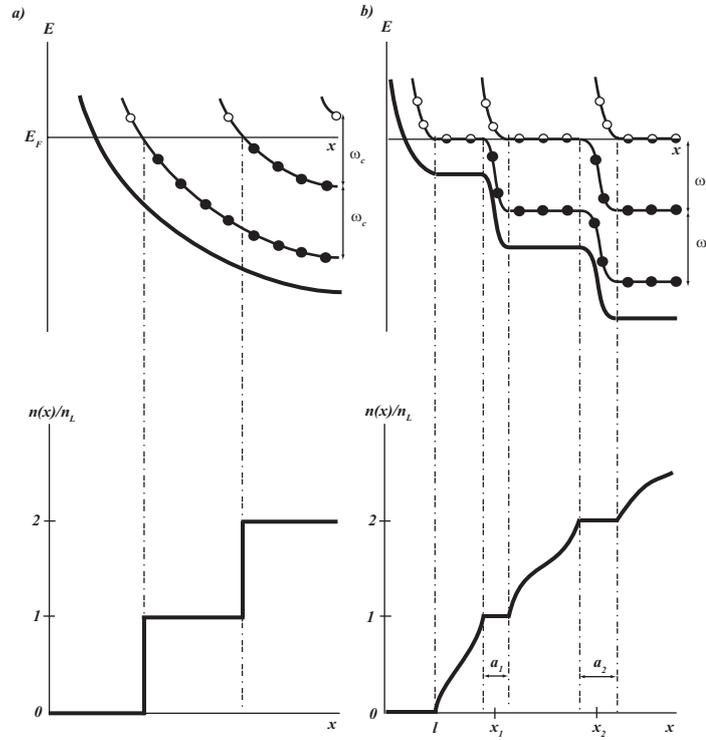


Рис. 1.10: Структура края при плавном краевом потенциале (из работы [17]):(а) в одноэлектронном приближении; (б) в самосогласованном электростатическом приближении. $n_L = 1/(2\pi l_H^2)$.

найдем

$$\begin{aligned}
 E_z(x) &= -\operatorname{Re} F'(\zeta) \Big|_{z=0^-} = -\frac{4\pi en_0}{\epsilon} \left[1 - \Theta(x-l) \sqrt{\frac{x-l}{x+l}} \right], \\
 E_x(x) &= -\operatorname{Im} F'(\zeta) \Big|_{z=0^-} = -\frac{4\pi en_0}{\epsilon} \Theta(l-|x|) \sqrt{\frac{l-x}{x+l}}.
 \end{aligned} \tag{1.70}$$

Интегрируя $E_x(x)$ по x , находим выражение для электростатического потенциала

$$\phi(x, z=0) = \frac{4\pi en_0}{\epsilon} \begin{cases} -\pi l & x < -l, \\ \sqrt{l^2 - x^2} - l \arccos(x/l) & |x| < l, \\ 0 & x > l. \end{cases} \tag{1.71}$$

Из граничного условия (1.55) для $\phi(x, z=0)$ при $x < -l$ находим, что $l = \epsilon e V_g / (4\pi^2 e^2 n_0)$. Для профиля плотности двумерных электронов окончательно находим

$$n_e(x) = \Theta(x-l) n_0 \sqrt{\frac{x-l}{x+l}}, \quad l = \frac{e V_g \epsilon}{4\pi^2 e^2 n_0}. \tag{1.72}$$

Видно, что условие $a_B \ll l$ оказывается эквивалентным условию $E_F \ll e V_g$, т.е. рассмотренный выше метод применим для достаточно больших напряжений. Отметим, что типичное значение энергии Ферми E_F равно нескольким мэВ. Для типичных значений $V_g = 1$ В, $n_0 = 10^{11}$ см $^{-2}$ и $\epsilon = 12.5$ получим, что $l \approx 2.2 \cdot 10^{-5}$ см, тогда как $a_B \approx 10^{-6}$ см.

Рассмотрим теперь случай, когда вся система помещена в перпендикулярное магнитное

поле. Типичные значения циклотронной энергии $\hbar\omega_c \ll eV_g$, поэтому профиль (1.72), найденный для задачи без магнитного поля, почти не изменится. Пусть вдали от края при $x \rightarrow +\infty$ фактор заполнения $\nu_0 = 2\pi l_H^2 n_0$ равен целому числу. Тогда при $x \rightarrow +\infty$ электростатический потенциал значения, $\nu = k$, то экранирование отсутствует, так как электронная концентрация не зависит от химического потенциала: $dn_e/d\mu = 0$. Следовательно, в областях с целочисленным фактором заполнения, которые принято называть несжимаемыми, будет ненулевое электрическое поле E_x . Оказывается, что энергетически выгодно разместить эти области не равномерно вдоль оси x , а в узких полосках ширины a_k с постоянной плотностью $k/(2\pi l_H^2)$ (рис. 1.10). Положение центра этих полосок x_k можно найти из соотношения $n_e(x_k) = k/(2\pi l_H^2)$, где в левой части электронная плотность определяется выражением (1.72). Решение уравнения дает

$$x_k = l \frac{\nu_0^2 + k^2}{\nu_0^2 - k^2}, \quad k \leq [\nu_0]. \quad (1.73)$$

Ширину a_k для k -й полоски можно оценить из следующих простых соображений. Как видно из рис. 1.10, в области полоски возникает избыточная по сравнению со случаем нулевого магнитного поля электронная концентрация, разных знаков при $x > x_k$ и $x < x_k$, т.е. возникает конденсатор с зарядом на обкладке, который можно оценить как

$$e\Delta n_k \approx \frac{e}{a_k} \int_{0 < x - x_k \lesssim a_k/2} dx [n_e(x_k) - n_e(x)] \sim -e \frac{dn_e(x)}{dx} \Big|_{x=x_k} a_k. \quad (1.74)$$

Эта избыточная электронная концентрация создает электрическое поле

$$\Delta E_z = \frac{4\pi e \Delta n_k}{\epsilon}. \quad (1.75)$$

Характерное значение этого поля можно оценить как

$$\Delta E_z \sim \frac{\Delta\phi}{a_k}, \quad (1.76)$$

где $\Delta\phi = \hbar\omega_c/e$ – падение напряжения на полоске. Собирая выражения (1.74), (1.75), (1.76) вместе, находим следующую оценку для ширины несжимаемой полоски:

$$a_k^2 \sim \frac{\hbar\omega_c \epsilon}{e^2 (dn_e/dx)|_{x=x_k}}. \quad (1.77)$$

Этот результат показывает, что в отличие от координаты положения полоски, которая оказывается порядка характерной длины, на которой меняется плавная часть электронной плотности, $x_k \sim l$, ширина несжимаемых полосок оказывается гораздо меньше $a_k \sim \sqrt{a_B l} \ll l$. Ширина полоски не может быть меньше магнитной длины, что приводит к следующему условию применимости нашего рассмотрения: $l_H \ll \sqrt{a_B l} \ll l$. Приведенная выше оценка не позволяет установить правильный численный коэффициент в выражении (1.77). Аккуратное вычисление (см. задачу) приводит к следующему ответу

$$a_k^2 = \frac{2}{\pi^2} \frac{\hbar\omega_c \epsilon}{e^2 (dn_e/dx)|_{x=x_k}}. \quad (1.78)$$

To add edge magnetoplasmons [19, 20]

Задачи:

- 1.4.1 Найти распределение электронной плотности $n_e(x)$ и электрического потенциала $\phi(x, z = 0)$ в случае, когда вдали от затвора фактор заполнения удовлетворяет условию $1 < \nu_0 < 2$.

Глава 2

Влияние примесей без учета явления андерсоновской локализации

Введение

2.1 Двумерный электронный газ с редкими примесями в магнитном поле

Двумерный электронный газ, используемый в реальных экспериментах, окружен диэлектрическими слоями, в которых находятся примесные атомы. Они создают случайный эффективный двумерный потенциал, на котором рассеиваются электроны из двумерного слоя. Очевидно, что это приводит к конечному значению сопротивления ρ_{xx} . Здесь в первую очередь интересно рассмотреть вопрос о влиянии примесей на спектр двумерных электронов в магнитном поле. В последующем изложении будем следовать работам Бычкова [21] и Баскина, Магрилла и Энтина [22].

Пусть имеется \mathcal{N} одинаковых примесных δ -центров, которые расположены в точках с координатами (\mathbf{r}_j, z_j) . Здесь $\mathbf{r} = (x, y)$ координаты в плоскости двумерного газа, а ось z направлена перпендикулярно этой плоскости. Одноэлектронный гамильтониан для этой задачи может быть записан в виде

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m_e} \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 + V(\mathbf{r}, z) + U_{\text{conf}}(\mathbf{r}, z), \quad (2.1)$$

где $V(\mathbf{r}, z) = u \sum_{j=1}^{\mathcal{N}} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j) \delta(z - z_j)$ – случайный потенциал, создаваемый примесями, а $U_{\text{conf}}(\mathbf{r}, z)$ – удерживающий потенциал, который приводит к образованию двумерного электронного газа. В целях упрощения изложения, будем считать, что удерживающий потенциал U_{conf} зависит только от координаты z . Тогда электронная волновая функция может быть представлена в виде произведения $\Psi(\mathbf{r})\varphi(z)$, где волновая функция $\varphi(z)$ есть нормированная собственная функция гамильтониана

$$\mathcal{H}_{\perp} = -\frac{\hbar^2}{2m_e} \frac{d^2}{dz^2} + U_{\text{conf}}(z) \quad (2.2)$$

с наименьшим собственным значением. Заметим, что интеграл $1/\int dz \varphi^4(z)$ характеризует эффективную толщину двумерного газа. Волновая функция двумерного движения $\Psi(\mathbf{r})$ удовлетворяет уравнению Шредингера

$$\frac{1}{2m_e} \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 \Psi(\mathbf{r}) + V_{\text{eff}}(\mathbf{r})\Psi(\mathbf{r}) = E\Psi(\mathbf{r}), \quad (2.3)$$

где $V_{\text{eff}}(\mathbf{r}) = \sum_{j=1}^{\mathcal{N}} u_j \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j)$. Как видно, дисперсия δ -центров вдоль оси z приводит к зависимости силы потенциала от расстояния до двумерного электронного газа: $u_j = u\varphi^2(z_j)$.

Построим волновую функцию $\Psi(\mathbf{r})$ как линейную комбинацию волновых функций (1.10) задачи без потенциала $V_{\text{eff}}(\mathbf{r})$:

$$\Psi_n(\mathbf{r}) = \sum_k C_{n,k} \psi_{n,k}(\mathbf{r}). \quad (2.4)$$

Эта волновая функция соответствует состоянию с энергией $E_n^{(0)} = \hbar\omega_c(n + 1/2)$, где $n =$

$0, 1, 2, \dots$, если коэффициенты $C_{n,k}$ для каждого n удовлетворяют системе из \mathcal{N} уравнений

$$\Psi_n(\mathbf{r}_j) = \sum_k C_{n,k} \psi_{n,k}(\mathbf{r}_j) = 0, \quad j = 1, \dots, \mathcal{N}. \quad (2.5)$$

Если число примесей меньше числа состояний на уровне Ландау $\mathcal{N} < \mathcal{S}/(2\pi l_H^2)$, где \mathcal{S} – площадь, занимаемая двумерным электронным слоем, то всегда имеется $\mathcal{S}/(2\pi l_H^2) - \mathcal{N}$ наборов коэффициентов $C_{n,k}$ (при фиксированном n), которые удовлетворяют уравнениям (2.5). Таким образом, в присутствии примесей остается $\mathcal{S}/(2\pi l_H^2) - \mathcal{N}$ так называемых неотщепленных состояний с энергией $E_n^{(0)} = \hbar\omega_c(n + 1/2)$ и волновой функцией вида (2.4). Остальные \mathcal{N} состояний имеют другие энергии, т. е. отщепляются от уровня Ландау.

Будем считать, что δ -центры редкие, т. е. выполняется условие

$$n_{\text{imp}} = \mathcal{N}/\mathcal{S} \ll 1/(2\pi l_H^2). \quad (2.6)$$

Тогда энергию отщепленных состояний проще всего найти из следующих соображений. Перепишем (2.3) в интегральной форме

$$\Psi(\mathbf{r}) = \int d\mathbf{r}' G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; E) V_{\text{eff}}(\mathbf{r}') \Psi(\mathbf{r}'), \quad (2.7)$$

где функция Грина $G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; E)$ удовлетворяет уравнению

$$\left[E - \frac{1}{2m_e} \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 \right] G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; E) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (2.8)$$

Помещая начало координат в точку положения данного δ -центра и пренебрегая остальными в силу условия (2.6), найдем

$$\Psi(0) = u G_0(0, 0, E) \Psi(0). \quad (2.9)$$

Это уравнение определяет в неявной форме значение энергии. Воспользовавшись следующим выражением для функции Грина в совпадающих точках (см. задачи)

$$G_0(0, 0, E) = \frac{1}{2\pi l_H^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{E - \hbar\omega_c(n + 1/2)}, \quad (2.10)$$

получим уравнение

$$\frac{u}{2\pi l_H^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{E - \hbar\omega_c(n + 1/2)} = 1, \quad (2.11)$$

которое определяет энергию отщепленного состояния. В случае относительно слабого δ -центра, когда выполняется условие $mu/(2\pi\hbar^2) \ll 1$, энергии отщепленных состояний имеют вид

$$E_n = \hbar\omega_c(n + 1/2) + \Delta_{n,0}, \quad \Delta_{n,0} = \frac{u}{2\pi l_H^2} \ll \hbar\omega_c. \quad (2.12)$$

Таким образом, каждый δ -центр отщепляет ровно одно состояние на уровне Ландау, а всего отщепляется ровно \mathcal{N} состояний, как и должно быть.

Рассмотрим теперь, что дает наличие конечного радиуса действия $a \ll l_H$ у потенциала примеси, т.е. будем считать, что $V_{\text{eff}}(\mathbf{r}) = \sum_{j=1}^{\mathcal{N}} u_j(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|)$. Для простоты изложения ограничимся случаем нижнего уровня Ландау $n = 0$. Выберем опять центр координат в месте расположения данной примеси и пренебрежем остальными примесными центрами. В этом случае удобно работать в цилиндрической системе координат (ρ, θ) . Выбирая калибровку

$A_\rho = A_z = 0$ и $A_\theta = B\rho/2$, можно записать волновые функции с определенным значением проекции момента импульса на ось z в виде [1]:

$$\psi_{0,m}(\rho, \theta) = \frac{e^{-im\theta}}{l_H \sqrt{2\pi m!}} \left(\frac{\rho^2}{2l_H^2} \right)^{m/2} e^{-\rho^2/4l_H^2}, \quad m = 0, 1, \dots \quad (2.13)$$

Будем искать решение уравнения (2.7) в виде следующей линейной комбинации:

$$\Psi(\mathbf{r}) = \sum_{m \geq 0} C_m \psi_{0,m}(\rho, \theta). \quad (2.14)$$

Пренебрегая всеми уровнями Ландау, кроме нижнего, функцию Грина можно записать как

$$G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; E) = \sum_{m \geq 0} \frac{\psi_{0,m}(\rho, \theta) \psi_{0,m}^*(\rho', \theta')}{E - \hbar\omega_c/2}. \quad (2.15)$$

Тогда уравнение (2.7) примет вид

$$C_m = \frac{C_m}{E - \hbar\omega_c/2} \int_0^\infty \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\theta u(\rho) |\psi_{0,m}(\rho, \theta)|^2. \quad (2.16)$$

Отсюда находим, что энергии отщепленных состояний равны

$$\begin{aligned} E_{0,m} &= \frac{\hbar\omega_c}{2} + \Delta_m, \\ \Delta_m &= \frac{1}{l_H^2 m!} \int_0^\infty d\rho \rho \left(\frac{\rho^2}{2l_H^2} \right)^m u(\rho) \exp\left(-\frac{\rho^2}{2l_H^2}\right). \end{aligned} \quad (2.17)$$

Прежде всего заметим, что если примесь является δ -центром, $u(\mathbf{r}) = u\delta(\mathbf{r})$ (соответственно, $u(\rho) = u\delta(\rho)/(2\pi\rho)$), то отщепляется только состояние с $m = 0$, и мы возвращаемся к результату (2.12). Для примеси, которая создает потенциал с конечным радиусом взаимодействия a , число отщепленных состояний больше чем одно. Их число можно оценить из следующих простых соображений. Модуль квадрата волновой функции $\psi_{0,m}(\rho, \theta)$ равен

$$|\psi_{0,m}(\rho, \theta)|^2 = \frac{1}{2\pi l_H^2 m!} \exp\left[-S_m \left(\frac{\rho^2}{2l_H^2} \right)\right], \quad (2.18)$$

$$S_m(x) = x - m \ln x \quad (2.19)$$

и достигает максимального значения при $x = m$, которое находится из условия $S'_m(x) = 0$. Таким образом, модуль квадрата волновой функции имеет максимум на окружности радиуса $R_m = l_H \sqrt{2m}$. Приближение одной примеси работает, когда это расстояние много меньше среднего расстояния между примесями, т.е. $R_m \ll 1/\sqrt{n_{\text{imp}}}$. Это условие означает, что максимальное значение m (число отщепленных состояний), при котором выражение (2.17) еще остается справедливым, равно $1/(l_H^2 n_{\text{imp}}) \gg 1$.

Рассмотрим для примера цилиндрически симметричный потенциал примеси вида $u(\rho) = u \exp(-\rho^2/2a^2)$, причем будем считать, что $a \ll l_H$. Тогда получаем

$$\Delta_m = u \left(\frac{a}{l_H} \right)^{2m+2}. \quad (2.20)$$

Отщепленные состояния сосредоточены в интервале энергий $\hbar\omega_c/2 + \Delta_{\min} < E < \hbar\omega_c/2 +$

Δ_{\max} , где

$$\Delta_{\min} = u \left(\frac{a}{l_H} \right)^{2+\gamma/(l_H^2 n_{\text{imp}})}, \quad (2.21)$$

$$\Delta_{\max} = u \left(\frac{a}{l_H} \right)^2, \quad (2.22)$$

где γ – неизвестное число порядка единицы. Так как число отщепленных состояний порядка $1/(l_H^2 n_{\text{imp}}) \gg 1$, то удобно их характеризовать плотностью состояний:

$$D(E) = n_{\text{imp}} \frac{dm}{dE} = \frac{n_{\text{imp}}}{2(E - \frac{\hbar\omega_c}{2}) \ln l_H/a}. \quad (2.23)$$

Заметим, что полученная формула справедлива для энергий в интервале $\Delta_{\min} < E - \hbar\omega_c/2 < \Delta_{\max}$. Неизвестное число γ можно оценить из условия, что почти все состояния являются отщепленными. Так как

$$\int dE D(E) \approx \frac{\gamma}{2l_H^2}, \quad (2.24)$$

то $\gamma = 1/\pi$. В заключение отметим, что задача о вычислении плотности состояний на нижнем уровне Ландау решается точно (см., [23, 24, 25]).

Рассмотрим теперь вопрос о том, как влияет наличие примесей на холловскую проводимость. Будем считать, что выполняется условие $n_{\text{imp}} \ll (2\pi l_H^2)^{-1}$, а значит, можно рассматривать задачу с одной примесью, пренебрегая влиянием остальных. Будем следовать работе Прейнджа [26]. Пусть в точке с координатами $(0, 0)$ расположена примесь, создающая потенциал с радиусом действия $a \ll l_H$. Пусть также вдоль оси x приложено электрическое поле E . Тогда вдали от примеси при больших положительных значениях y , $y \gg a$ волновая функция и спектр имеют вид (1.10) и (1.11). Рассмотрим при $y \gg a$ состояние с заданными n и k , описываемое волновой функцией равной $\Psi_{n,k}(x, y) = \psi_{n,k}(x, y)$. При больших отрицательных значениях y , $-y \gg a$ это состояние должно обладать той же энергией $\mathcal{E}_{n,k}$, что и при $y \gg a$. Так как энергия состояния явно зависит от k , это означает, что k должно быть тем же самым. Поэтому волновая функция состояния при $-y \gg a$ может отличаться от $\psi_{n,k}(x, y)$ лишь фазовым множителем: $\Psi_{n,k}(x, y) = e^{-i\delta(k)}\psi_{n,k}(x, y)$. Наложим граничные условия вдоль оси y :

$$\Psi_{n,k}(x, -L/2) = e^{-i2\pi\phi/\phi_0}\Psi_{n,k}(x, L/2), \quad (2.25)$$

где ϕ – свободный параметр. Используя явный вид волновой функции $\psi_{n,k}(x, y)$, получим, что волновые вектора k должны удовлетворять соотношению

$$kL + \delta(k) - \frac{2\pi\phi}{\phi_0} = 2\pi m. \quad (2.26)$$

Тогда плотность состояний имеет вид

$$D(k) = \frac{\partial m}{\partial k} = \frac{1}{2\pi} (L + \delta'(k)). \quad (2.27)$$

Используем для тока вдоль оси y формулу (1.33)

$$\begin{aligned}
I_y &= -\frac{e\phi_0}{h} \sum_n \sum_{k_m=-k_n}^{k_m=k_n} \frac{\partial \mathcal{E}_{n,k}}{\partial \phi} = -\frac{e}{\hbar} \int_{k_n}^{k_n} dk \nu(k) \frac{\partial \mathcal{E}_{n,k}}{\partial k} (L + \delta'(k))^{-1} \\
&= -\frac{e}{h} \sum_n [\mathcal{E}_{n,k_n} - \mathcal{E}_{n,-k_n}],
\end{aligned} \tag{2.28}$$

и возвращаемся к формуле (1.16). Как видно, холловская проводимость σ_{yx} при наличии примеси удивительным образом не изменилась. Несмотря на то, что, как мы видели выше, примесь уменьшила число токонесущих (неотщепленных) состояний, их вклад в холловский ток увеличился.

Задачи:

- 2.1.1 Пусть квадрат волновой функции в z направлении имеет вид $\varphi^2(z) = (A/z_0) \exp(-z/z_0)$ при $z > z_0$. Считая, что δ -центры распределены равномерно с объемной концентрацией $n_{\text{имп}}^{3D}$, вычислить при $E < E_0 \approx Au/(2\pi l_H^2 z_0)$ плотность состояний на нижнем уровне Ландау.
- 2.1.2 Для нижнего уровня Ландау показать, что каждое новое состояние занимает площадь $2\pi l_H^2$.
- 2.1.3 Найти энергии отщепленных состояний на нижнем уровне Ландау при наличии двух слабых δ -центров с силами u_1 и u_2 , расположенных на расстоянии d друг от друга, считая, что $n_L u_{1,2} \ll \omega_c$.
- 2.1.4 Найти энергии отщепленных состояний на нижнем уровне Ландау при наличии слабого магнитного δ -центра, считая, что его взаимодействие с электроном описывается гамильтонианом следующего вида $V_{\text{эф}}(\mathbf{r}) = J\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)\mathbf{S} \cdot \mathbf{s}$, где \mathbf{s} – это оператор спина электрона, а \mathbf{S} – оператор спина $S = 1/2$ магнитной примеси.
- 2.1.5 Найти энергии отщепленных состояний на нижнем уровне Ландау при наличии двух слабых магнитных δ -центров, расположенных на расстоянии $d \ll l_H$. Считать, что их взаимодействие с электроном описывается гамильтонианом $V_{\text{эф}}(\mathbf{r}) = J\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{s} + J\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_2)\mathbf{S}_2 \cdot \mathbf{s}$, где \mathbf{s} – оператор спина электрона, а $\mathbf{S}_{1,2}$ – операторы спина $S = 1/2$ магнитных примесей.

2.2 Плавный случайный потенциал

Случайный потенциал общего вида можно представить в виде суммы

$$V(\mathbf{r}) = V_w(\mathbf{r}) + V_{\text{scat}}(\mathbf{r}) + V_s(\mathbf{r}). \quad (2.29)$$

Здесь $V_w(\mathbf{r})$ имеет большой корреляционный радиус, быстро меняется, но мал: $\max |V_w| \ll \hbar\omega_c$. Потенциал $V_{\text{scat}}(\mathbf{r})$ есть сумма потенциалов рассеяния, т.е. потенциалов с малым радиусом взаимодействия. Потенциал $V_s(\mathbf{r})$ – это плавный потенциал, ограниченный условием $|\nabla V_s| \ll \hbar\omega_c/l_H$ (рис. 2.1). В физической системе, в которой создан двумерный электронный газ, например, в гетероструктуре, V_w создается слабыми примесями, расположенными вдали от двумерного слоя, потенциал V_{scat} возникает от заряженных примесей внутри инверсионного слоя, а также от поверхностных дефектов, и V_s возникает из-за флуктуаций концентрации примесей и из-за наличия крупномасштабных неоднородностей.

Случайный потенциал V_w не приводит к интересным эффектам. Действительно, рассмотрим гамильтониан

$$\mathcal{H}_0 + \lambda V_w(\mathbf{r}) = \frac{1}{2m_e} \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 + \lambda V_w(\mathbf{r}), \quad (2.30)$$

где λ – произвольный параметр. При $\lambda = 0$ спектр гамильтониана есть $\mathcal{E}_n = \hbar\omega_c(n + 1/2)$, $n = 0, 1, \dots$. При произвольном λ справедливо соотношение

$$\frac{d\mathcal{E}_n(\lambda)}{d\lambda} = (V_w)_{nn}, \quad (2.31)$$

где $(V_w)_{nn}$ – диагональный матричный элемент потенциала V_w . Отсюда

$$|\mathcal{E}_n(1) - \mathcal{E}_n(0)| = \left| \int_0^1 d\lambda (V_w)_{nn} \right| \leq \max V_w \ll \hbar\omega_c. \quad (2.32)$$

Полученная оценка гарантирует, что спектр гамильтониана $\mathcal{H} + V_w(\mathbf{r})$ мало отличается от спектра $\hbar\omega_c(n + 1/2)$. В частности, в нем остается конечная щель порядка $\hbar\omega_c$.

Рассмотрим теперь движение электрона в магнитном поле при наличии плавного потенциала $V_s(\mathbf{r})$ (см. [27, 28, 29]). Запишем еще раз гамильтониан

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + V_s(x, y), \quad \mathcal{H}_0 = \frac{1}{2m_e} \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2. \quad (2.33)$$

Сделаем следующее преобразование координат:

$$\begin{aligned} x &= X + \eta_x, & y &= Y + \eta_y, \\ \eta_{x,y} &= \pm \frac{l_H^2}{\hbar} (p_{y,x} - eA_{y,x}). \end{aligned} \quad (2.34)$$

Координаты X и Y имеют смысл координат центра классической орбиты и описывают ее дрейф, а $\eta_{x,y}$ отвечают координатам электрона в системе отсчета, в которой классическая орбита покоится. Отметим, что в случае цилиндрической калибровки $\mathbf{A} = [\mathbf{B} \times \mathbf{r}]/2$, выра-

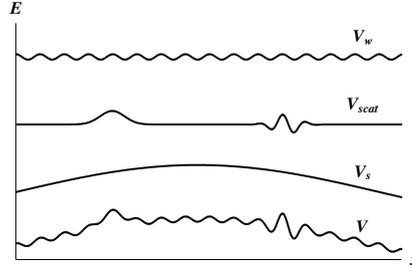


Рис. 2.1: Одномерное схематическое изображение потенциалов (2.29).

жения для координат X и Y могут быть записаны явно:

$$X = -\frac{l_H^2}{\hbar}(p_y + eA_y), \quad Y = \frac{l_H^2}{\hbar}(p_x + eA_x). \quad (2.35)$$

Легко проверить, что выполняются следующие коммутационные соотношения:

$$\begin{aligned} [X, Y] &= il_H^2, & [\eta_x, \eta_y] &= -il_H^2, & [X, \eta_\alpha] &= 0, \\ [Y, \eta_\alpha] &= 0, & [x, \eta_y] &= -il_H^2, & [y, \eta_x] &= il_H^2. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Тогда гамильтониан можно записать как

$$\mathcal{H} = \frac{\hbar\omega_c}{2l_H^2}(\eta_x^2 + \eta_y^2) + V_s(X + \eta_x, Y + \eta_y). \quad (2.37)$$

Отметим, что наличие вырождения на уровне Ландау тесно связано с существованием операторов X и Y , коммутирующих с гамильтонианом (в отсутствие V). Уравнения движения для операторов $\eta_{x,y}$ имеют вид

$$\dot{\eta}_x = \frac{i}{\hbar}[\mathcal{H}, \eta_x] \approx -\omega_c\eta_y - \frac{l_H^2}{\hbar} \frac{\partial V_s}{\partial Y}, \quad (2.38)$$

$$\dot{\eta}_y = \frac{i}{\hbar}[\mathcal{H}, \eta_y] \approx \omega_c\eta_x + \frac{l_H^2}{\hbar} \frac{\partial V_s}{\partial X}. \quad (2.39)$$

Пренебрегая последним членом в этих уравнениях в силу условия плавности потенциала $|\nabla V_s| \ll \hbar\omega_c/l_H$, найдем

$$\dot{\eta}_x = -\omega_c\eta_y, \quad \dot{\eta}_y = \omega_c\eta_x. \quad (2.40)$$

Уравнения движения для координат X и Y будут следующие:

$$\begin{aligned} \dot{X} &= \frac{i}{\hbar}[\mathcal{H}, X] = -\frac{i}{\hbar}[V_s(x, y), \eta_x] = \\ &= \frac{il_H^2}{\hbar^2}[p_y, V_s(x, y)] \approx \frac{l_H^2}{\hbar} \frac{\partial V_s(X, Y)}{\partial Y}, \end{aligned} \quad (2.41)$$

$$\begin{aligned} \dot{Y} &= \frac{i}{\hbar}[\mathcal{H}, Y] = -\frac{i}{\hbar}[V_s(x, y), \eta_y] = \\ &= -\frac{il_H^2}{\hbar}[p_x, V_s(x, y)] \approx -\frac{l_H^2}{\hbar} \frac{\partial V_s(X, Y)}{\partial X}. \end{aligned} \quad (2.42)$$

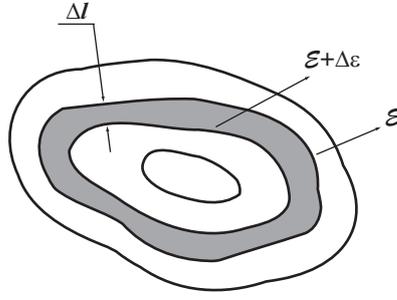


Рис. 2.2: Уровни плавного потенциала вблизи локального максимума.

Уравнения (2.41) и (2.42) полезно записать в виде

$$\dot{X} = \frac{1}{m_e \omega_c} \frac{\partial V_s(X, Y)}{\partial Y}, \quad \dot{Y} = -\frac{1}{m_e \omega_c} \frac{\partial V_s(X, Y)}{\partial X}. \quad (2.43)$$

Подчеркнем, что в главном приближении по малому параметру $l_H |\nabla V_s| / \hbar \omega_c \ll 1$ квантовые операторы X и Y подчиняются классическим уравнениям (2.43) (в них отсутствует \hbar). Пренебрегая тем, что X и Y не коммутируют друг с другом, т.е. рассматривая их как классические величины, найдем в адиабатическом приближении, что спектр гамильтониана (2.33) определяется выражением

$$\mathcal{E}_n = \hbar \omega_c (n + 1/2) + V_s(X, Y), \quad (2.44)$$

причем X и Y являются решением уравнения

$$\epsilon_n = \mathcal{E}_n - \hbar \omega_c (n + 1/2) = V_s(X, Y), \quad (2.45)$$

которое есть не что иное, как уравнение эквипотенциальной линии.

Таким образом, физическая картина движения частицы в магнитном поле в плавном потенциале такова: частица с энергией \mathcal{E} совершает быстрое циклотронное вращение в магнитном поле, приводящее к образованию уровней Ландау. При этом центр орбиты дрейфует по эквипотенциальной линии, задаваемой уравнением (2.45), со скоростью равной $v_d = |\nabla V_s| / m_e \omega_c$, как следует из (2.43). Из-за наличия магнитного поля скорость дрейфа направлена всегда строго в одну сторону.

На данном уровне Ландау (при фиксированном n) имеется много состояний. Плавный потенциал снимает их вырождение: каждому из них соответствует своя эквипотенциальная линия. Рассмотрим две эквипотенциальные линии, которые соответствуют близким состояниям с энергиями \mathcal{E} и $\mathcal{E} + \Delta\epsilon$ (рис. 2.2). Площадь, заключенная между этими эквипотенциальными линиями, может быть вычислена как

$$\begin{aligned} \Delta S &= \oint du \Delta l \sqrt{X_u^2 + Y_u^2} = \oint du \frac{\Delta\epsilon}{|\nabla V|} \sqrt{X_u^2 + Y_u^2} = \\ &= \frac{l_H^2}{\hbar} \Delta\epsilon \oint \frac{du}{\dot{u}} = l_H^2 \frac{T \Delta\epsilon}{\hbar}. \end{aligned} \quad (2.46)$$

Здесь мы считали, что эквипотенциальная линия параметризуется как $X = X(u)$ и $Y = Y(u)$. Используя квазиклассическое условие квантования для периода движения по эквипотенциальной линии T

$$T \Delta\epsilon = 2\pi \hbar, \quad (2.47)$$

находим площадь между эквипотенциальными линиями

$$\Delta S = 2\pi l_H^2. \quad (2.48)$$

Таким образом, несмотря на наличие плавного потенциала, в главном приближении по его градиентам, каждое состояние на уровне Ландау занимает площадь $2\pi l_H^2$. Этот ответ соответствует из выражения (2.36) для коммутатора операторов X и Y .

Используя полученный выше результат, можно получить выражение для плотности состояний на n -м уровне Ландау:

$$D(E) = \int \frac{dXdY}{2\pi l_H^2} \delta(E - \hbar\omega_c(n + 1/2) - V_s(X, Y)). \quad (2.49)$$

Заметим, что плотность состояний правильно дает полное число состояний на n -м уровне Ландау,

$$\int dE D(E) = \frac{S}{2\pi l_H^2}. \quad (2.50)$$

Найдем явно волновую функцию, соответствующую состоянию на n -м уровне Ландау. Рассмотрим эквипотенциальную линию $V_s(X, Y) = \mathcal{E}_n - \hbar\omega_c(n + 1/2)$. Сделаем локальный поворот системы координат от (x, y) к (x', y') , так чтобы вблизи точки (X, Y) уравнение эквипотенциальной линии стало $Y' = 0$. Тогда в калибровке $A_{x'} = -By'$, $A_{y'} = A_{z'} = 0$ уравнение Шредингера для гамильтониана (2.33) примет вид

$$\left[\frac{1}{2m_e} \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial x'} - \frac{eBy'}{c} \right)^2 - \frac{\hbar^2}{2m_e} \frac{\partial^2}{\partial y'^2} + V_s(y') - \mathcal{E} \right] \psi_n(x', y') = 0. \quad (2.51)$$

Считая, что x' – медленная переменная, пренебрегая в уравнении производными по x' и производными от случайного потенциала, $V_s(y') \approx V_s(0)$, найдем

$$\psi_n(x', y') = C(x') \phi_n(y'), \quad (2.52)$$

где функция $\phi_n(y)$ определена в (1.10). Тот факт, что одно состояние на уровне Ландау все еще должно занимать площадь $2\pi l_H^2$, но при этом волновая функция сосредоточена в области ширины порядка l_H от эквипотенциальной линии, позволяет найти неизвестную функцию $|C(x')|$ из следующего условия нормировки. Потребуем, чтобы интеграл от модуля квадрата волновой функции (2.52) вдоль эквипотенциальной линии равнялся единице:

$$\int dx' |C(x')|^2 \sqrt{X_{x'}^2 + Y_{x'}^2} = 1. \quad (2.53)$$

Тогда получим следующий ответ:

$$|C(x')|^2 = \frac{\hbar}{l_H^2 T |\nabla V_s(X, Y)|}. \quad (2.54)$$

До сих пор мы рассматривали какой-то заданный плавный потенциал. Введем теперь в задачу случайность. Пусть случайный плавный потенциал будет устроен следующим образом. Среднее значение потенциала равно нулю $\langle V_s \rangle = 0$. Вероятность того, что $V_s(X, Y) = \epsilon$ есть

$$\text{Prob}[V_s(X, Y) = \epsilon] = \rho(\epsilon). \quad (2.55)$$

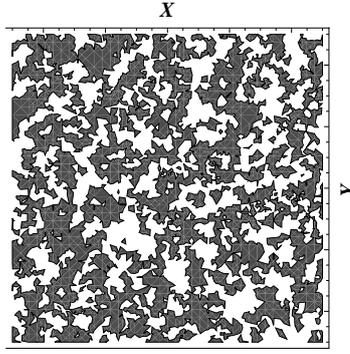


Рис. 2.3: Случайный потенциал на пороге протекания. Области с $V_s(X, Y) < \epsilon_c$ закрашены. Эквипотенциальные линии $V_s(X, Y) = \epsilon_c$ проходят по границам закрашенной области.

Коррелятор $\langle V_s(0, 0)V_s(X, Y) \rangle$ быстро спадает с расстоянием. Здесь $\langle \dots \rangle$ означает усреднение по реализациям случайного потенциала. Тогда если мы закрасим области, где выполняется условие $V_s(X, Y) < \epsilon$, то состояния с энергией ϵ будут сосредоточены у границ этих областей, при этом $\rho(\epsilon)$ дает нормированную на единицу плотность этих состояний. Физическая плотность состояний будет равна $\rho(\epsilon)/(2\pi l_H^2)$. Очевидно, вероятность того, что точка с координатами (X, Y) закрашена, равна

$$p(\epsilon) = \text{Prob}[V_s(X, Y) < \epsilon] = \int_{-\infty}^{\epsilon} \rho(\epsilon) d\epsilon. \quad (2.56)$$

Если при данной энергии все эквипотенциальные линии замкнуты, т.е. закрашенные области не пересекаются, то состояния с данной энергией локализованы. Если же имеется эквипотенциальная линия, которая не замкнута, т.е. по закрашенной области можно пересечь весь образец, то состояние с соответствующей энергией делокализовано. Если потенциал $V_s(X, Y)$ и граничные условия симметричны относительно взаимной замены X на Y , то эквипотенциальная линия должна проходить от края до края образца, как вдоль направления оси X , так и вдоль направления оси Y (рис. 2.3). Так как эквипотенциальные линии при разных энергиях пересекаться не могут, то обе эквипотенциальные линии должны соответствовать одной энергии ϵ_c . Таким образом, если делокализованное состояние существует, то оно реализуется только при одной энергии ϵ_c .

Задача нахождения энергии ϵ_c делокализованного состояния в случайном плавном потенциале сводится к задаче о перколяции [30]. Согласно (2.56) точка с координатами (X, Y) закрашивается с вероятностью $p(\epsilon)$. Протекание, т.е. появление закрашенной области, по которой можно пройти от одной границы до другой, будет происходить при некотором критическом значении вероятности закрашивания $p_c = p(\epsilon_c)$. При $\epsilon \rightarrow \epsilon_c$ в задаче возникает масштаб, который принято называть корреляционной длиной $\xi_{cl} \sim |\epsilon - \epsilon_c|^{-\nu_{cl}}$, где критический индекс $\nu_{cl} = 4/3$ [31]. В частности, вероятность возникновения связанного закрашенного кластера с размером L большим, чем корреляционная длина, оказывается экспоненциально мала, $\sim \exp(-L/\xi_{cl})$. Отметим, что именно расходимость корреляционной длины при $\epsilon = \epsilon_c$ сигнализирует о возможности протекания.

Предположим, что случайный потенциал ограничен по величине $|V_s(X, Y)| < M$. Покажем тогда, что в конечном электрическом поле $|eE| \ll \hbar\omega_c/l_H$ доля делокализованных

состояний f_∞ удовлетворяет неравенству

$$f_\infty > \frac{|eE|l_H}{\hbar\omega_c}. \quad (2.57)$$

Рассмотрим двумерный электронный газ, который занимает полосу размера L вдоль оси x и бесконечную вдоль оси y . Будем считать, что электрическое поле направлено вдоль оси y . Пусть функция $G(x) = 1$ для $0 < x < L$, $G(x) = 0$ при $x < -d$ и $x > L + d$, и наконец $G(x)$ гладко переходит из 0 в 1 в промежутках. Тогда определим

$$\tilde{V}_s(X, Y) = V_s(X, Y)G(X) - eEY. \quad (2.58)$$

Рассмотрим делокализованное состояние с энергией $\epsilon = -eEY_d$. В области $0 < x < L$ эквипотенциальная линия имеет координату Y , удовлетворяющую условию $|Y - Y_d| = |V(X, Y)/eE| < M/|eE|$. Рассмотрим теперь два делокализованных состояния с энергиями $\epsilon = -eEY_d$ и $\epsilon + \Delta\epsilon = -eE(Y_d + \Delta Y_d)$. Тогда при $0 < x < L$ эти две эквипотенциальные линии находятся на расстоянии δY , которое можно оценить как

$$\delta Y = -\frac{eE\Delta Y_d}{\partial V_s/\partial Y - eE}. \quad (2.59)$$

Так как закрашенная площадь соответствует плотности состояний, то при $|eE|l_H \ll \hbar\omega_c$ доля делокализованных состояний будет

$$f_\infty > \frac{|\delta Y|}{|\Delta Y_d|} = \frac{|eE|}{|\partial V_s/\partial Y|} > \frac{|eEl_H|}{\hbar\omega_c}. \quad (2.60)$$

Заметим, что в приведенных выше рассуждениях мы нигде не использовали тот факт, что потенциал случайный, т.е. точка с координатами (X, Y) закрашивается с вероятностью $p(\epsilon)$. Для этой ситуации можно предположить, что

$$f_\infty \sim \left(\frac{|eE|l_H}{\hbar\omega_c} \right)^q, \quad (2.61)$$

где показатель $q \leq 1$. Точный расчет теории перколяции дает значение $q = 41/84$ [28]. При нулевой температуре f_∞ определяет ширину зоны делокализованных состояний в присутствии конечного электрического поля:

$$\delta\epsilon_c \propto \Gamma \left(\frac{|eE|l_H}{\hbar\omega_c} \right)^q, \quad (2.62)$$

где Γ – ширина уровня Ландау (см. ниже).

Задачи:

2.2.1 Доказать, что среднее по времени значение оператора скорости дается выражением $\langle \mathbf{v}(x, y) \rangle = (e\mathbf{E} - \nabla V_s) \times \mathbf{B}/(eB^2)$.

TO ADD PROBLEMS!

2.3 Квантовое туннелирование между эквипотенциальными линиями и модель Чалкера–Коддингтона

Как мы видели в предыдущей лекции, центр орбиты частицы с энергией $\epsilon_n = \mathcal{E} - \hbar\omega_c(n + 1/2)$ дрейфует по эквипотенциальным линиям потенциала, определяемым соотношением $V_s(X, Y) = \epsilon_n$. В таком, по существу, классическом рассмотрении, мы полностью пренебрегли некоммутативностью координат: $[X, Y] = -il_H^2$. Это законно, если эквипотенциальные линии находятся друг от друга на расстояниях много больших, чем l_H . Однако бывают случаи, когда это нарушается. Например, две замкнутые эквипотенциальные линии, соответствующие одной и той же энергии ϵ_n , подходят к друг другу на расстояние порядка l_H (рис. 2.4). При классическом рассмотрении вероятность того, что частица перейдет с одной эквипотенциальной линии на другую, равна нулю. Вероятность будет отлична от нуля, если учесть возможность квантового туннелирования [32]. Для вопроса о существовании делокализованного состояния возможность такого квантового туннелирования принципиальна.

Возьмем к гамильтониану (2.33), который действует на волновые функции $\psi(x, y)$. Переходя к координатам (X, Y) , (η_x, η_y) и пользуясь малостью градиентов плавного потенциала V_s , получаем с помощью (2.37) приближенное уравнение Шредингера

$$\left[\frac{\hbar\omega_c}{2l_H^2} \left(-l_H^4 \frac{\partial^2}{\partial \eta_x^2} + \eta_x^2 \right) + V_s \left(X, -il_H^2 \frac{\partial}{\partial X} \right) \right] \psi(X, \eta_x) = \mathcal{E} \psi(X, \eta_x). \quad (2.63)$$

Так как переменные X и η_x разделились, то ищем волновую функцию в виде

$$\psi(X, \eta_x) = C(X) \phi_n(\eta_x), \quad (2.64)$$

где $\phi_n(\eta_x)$ – собственные функции осциллятора. Тогда функция $C(X)$ удовлетворяет уравнению

$$V_s(X, il_H^2 \partial_X) C(X) = \epsilon_n C(X). \quad (2.65)$$

В квазиклассическом ВКБ приближении решение уравнения (2.65) будем искать в виде:

$$C(X) = \exp \frac{1}{il_H^2} \left[S_0(X) + il_H^2 S_1(X) + \dots \right]. \quad (2.66)$$

Подставляя это представление в уравнение (2.65), получим

$$\begin{aligned} \epsilon_n = & V_s(X, S'_0(X)) + il_H^2 S'_1(X) \frac{\partial V_s(X, Y)}{\partial Y} \Big|_{Y=S'_0(X)} + \\ & + \frac{il_H^2}{2} S''_0(X) \frac{\partial^2 V_s(X, Y)}{\partial Y^2} \Big|_{Y=S'_0(X)} + O(l_H^4). \end{aligned} \quad (2.67)$$

Определим действительную функцию $Y(X)$ как одно из решений уравнения $V_s(X, Y) = \epsilon_n$. Вообще говоря, таких решений может быть несколько: обозначим их как $Y_i(X)$. Например, если $V_s(X, Y) = V_0(Y^2 + X^2)/a^2$, то $Y_{1,2}(X) = \pm \sqrt{a^2 \epsilon_n / V_0 - X^2}$ при $|X| < a \sqrt{\epsilon_n / V_0}$. Тогда из

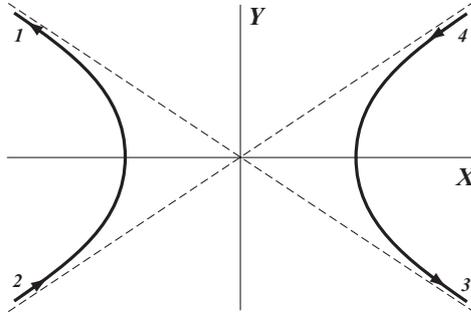


Рис. 2.4: Схематическое изображение области пространства около седловой точки, где потенциал имеет вид $V(X, Y) = V_0 + U_Y Y^2 - U_X X^2$. Сплошные линии показывают эквипотенциальные линии с энергией $\epsilon < V_0$. (Из работы [32])

уравнения (2.67) находим

$$C_i(X) = P_i(X)^{-1/2} \exp\left(-i l_H^{-2} \int^X dx Y_i(x)\right), \quad (2.68)$$

где функция $P_i(X)$ удовлетворяет уравнению

$$P_i'(X) = P_i(X) Y_i'(X) \frac{\partial}{\partial Y} \ln \frac{\partial V_s(X, Y)}{\partial Y} \Big|_{Y=Y_i(X)}. \quad (2.69)$$

Заметим, что если потенциал $V_s(X, Y) = F(X) + G(Y)$, то $P_i(X) = dG(Y_i)/dY_i$.

Рассмотрим окрестность седловой точки, вблизи которой существуют две эквипотенциальные линии, соответствующие одной и той же энергии, $V_s(X, Y) = \epsilon_n < V_0$ (рис. 2.4). Разлагая потенциал $V_s(X, Y)$ в ряд по степеням координат и ограничиваясь вторым порядком, можно представить его в виде

$$V_s(X, Y) = V_0 + U_Y Y^2 - U_X X^2, \quad U_Y, U_X > 0. \quad (2.70)$$

Обозначим решения уравнения $V_s(X, Y) = \epsilon_n$ следующим образом (рис. 2.4):

$$\begin{aligned} Y_{1,2}(X) &= \pm \frac{1}{\sqrt{U_Y}} \sqrt{U_X X^2 + \epsilon_n - V_0}, & X < 0, \\ Y_{3,4}(X) &= \mp \frac{1}{\sqrt{U_Y}} \sqrt{U_X X^2 + \epsilon_n - V_0}, & X > 0. \end{aligned} \quad (2.71)$$

Удобно ввести безразмерные переменные $\rho = (U_X/U_Y)^{1/4} X/l_H$ и $\gamma = (V_0 - \epsilon_n)/\sqrt{l_H^4 U_X U_Y} > 0$, тогда уравнение (2.65) примет вид

$$-\partial_\rho^2 C(\rho) - \rho^2 C(\rho) + \gamma C(\rho) = 0. \quad (2.72)$$

Будем считать, что асимптотика функции $C(X)$ равна

$$C(X) = \begin{cases} a_1 C_1(X) + a_2 C_2(X), & X \rightarrow -\infty, \\ a_3 C_3(X) + a_4 C_4(X), & X \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (2.73)$$

Функции $C_i(X)$, определенные уравнением (2.68), будем считать нормированными. При дан-

ном выборе знаков в уравнении (2.71) функции $C_{2,4}(X)$ описывают частицу, налетающую на область вблизи центра координат $X = Y = 0$, а функции $C_{1,3}(X)$ наоборот соответствуют частице, выходящей из этой области. Задача состоит в том, чтобы связать коэффициенты $a_{2,4}$ с коэффициентами $a_{1,3}$. Эту связь удобно описывать трансфер-матрицей:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \mathbb{T} \begin{pmatrix} a_3 \\ a_4 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{T} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix}. \quad (2.74)$$

Коэффициенты a_j связаны между собой соотношением $|a_1|^2 + |a_3|^2 = |a_2|^2 + |a_4|^2$, которое выражает собой сохранение полной вероятности: частицы не исчезают в области квантового туннелирования. Заметим, что если $a_2 = 1$, а $a_4 = 0$, то тогда у нас возникает обычная задача рассеяния для одномерного уравнения (2.72). Поэтому коэффициенты $a_3 = t$ и $a_1 = r$, где t и r – это амплитуды прохождения и отражения, соответствующие (2.72). Если выбрать наоборот $a_2 = 0$, а $a_4 = 1$, то как известно из квантовой механики $a_1 = t$, а $a_3 = -r^*t/t^*$. Приведенные выше рассуждения позволяют выразить элементы трансфер-матрицы через величины t и r :

$$\mathbb{T} = \begin{pmatrix} r/t & 1/t^* \\ 1/t & r^*/t^* \end{pmatrix}. \quad (2.75)$$

Применяя уравнения (2.68) для рассматриваемого вида потенциала $V_s(X, Y)$, найдем при $|\rho| \rightarrow \infty$ следующую асимптотику функции $C(\rho)$

$$C(\rho) = \begin{cases} t\rho^{-i\gamma/2-1/2}e^{i\rho^2/2}, & \rho \rightarrow +\infty, \\ |\rho|^{i\gamma/2-1/2}e^{-i\rho^2/2} + r|\rho|^{-i\gamma/2-1/2}e^{i\rho^2/2}, & \rho \rightarrow -\infty. \end{cases} \quad (2.76)$$

Заметим, что $|t|$ и $|r|$ могут быть найдены из асимптотических выражений (2.76) с помощью обхода точки $\rho = 0$ в комплексной плоскости (см., [1]). Мы воспользуемся точным решением уравнения (2.72). Как известно, существует два линейно независимых решения $D_\nu(\sqrt{2}e^{i\pi/4}\rho)$ и $D_\nu(-\sqrt{2}e^{i\pi/4}\rho)$, где $\nu = i\gamma/2 - 1/2$. Запишем волновую функцию в виде их линейной комбинации

$$C(\rho) = c_+ D_\nu(\sqrt{2}e^{i\pi/4}\rho) + c_- D_\nu(-\sqrt{2}e^{i\pi/4}\rho). \quad (2.77)$$

Пользуясь следующими выражениями для асимптотик функций параболического цилиндра при $z \rightarrow +\infty$:

$$D_\nu(z) = z^\nu e^{-z^2/4}, \quad (2.78)$$

$$D_\nu(-z) = e^{-i\pi\nu} z^\nu e^{-z^2/4} + \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(-\nu)} z^{-\nu-1} e^{z^2/4}, \quad (2.79)$$

найдем, что если выбрать коэффициенты c_\pm , равными

$$c_+ = \frac{2^{\nu/2} e^{-i\pi\nu/4}}{e^{-i\pi\nu} - e^{i\pi\nu}}, \quad c_- = -\frac{2^{\nu/2} e^{i3\pi\nu/4}}{e^{-i\pi\nu} - e^{i\pi\nu}}, \quad (2.80)$$

то волновая функция (2.77) будет иметь нужную нам асимптотику (2.76). Отсюда находим

$$r = -ie^{-i\phi(\gamma)}[1 + e^{\pi\gamma}]^{-1/2}, \quad t = e^{-i\phi(\gamma)}e^{\pi\gamma/2}[1 + e^{\pi\gamma}]^{-1/2}, \quad (2.81)$$

$$\phi(\gamma) = \arg \Gamma(1/2 - i\gamma/2) - \frac{\gamma}{2} \ln 2.$$

При выводе мы воспользовались соотношением для гамма-функции

$$\left| \Gamma\left(\frac{1-i\gamma}{2}\right) \right|^2 = \frac{\pi}{\text{ch}(\gamma/2)}. \quad (2.82)$$

Таким образом, для интересующей нас трансфер-матрицы мы находим следующее выражение

$$\mathbb{T} = \begin{pmatrix} -ie^{-\pi\gamma/2}, & e^{-i\phi(\gamma)}\sqrt{1+e^{-\pi\gamma}} \\ e^{i\phi(\gamma)}\sqrt{1+e^{-\pi\gamma}} & ie^{-\pi\gamma/2} \end{pmatrix}. \quad (2.83)$$

Сохранение потока вероятности $|a_1|^2 + |a_3|^2 = |a_2|^2 + |a_4|^2$ определяет общий вид трансфер-матрицы:

$$\mathbb{T} = \begin{pmatrix} e^{i\phi_1} & 0 \\ 0 & e^{i\phi_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{sh } \theta & \text{ch } \theta \\ \text{ch } \theta & \text{sh } \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\phi_3} & 0 \\ 0 & e^{i\phi_4} \end{pmatrix}. \quad (2.84)$$

Для рассматриваемого нами случая

$$\text{sh } \theta = e^{-\pi\gamma/2}, \quad \phi_1 = \phi_3 = -\frac{\pi}{2}, \quad \phi_2 = -\phi_4 = \phi(\gamma). \quad (2.85)$$

Отметим, что фазы ϕ_i можно исключить из рассмотрения, переопределив амплитуды $a_j \rightarrow a_j e^{-i\phi_j}$. Тогда трансфер-матрица станет действительной. Перепишем результат (2.75), как

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_4 \end{pmatrix} = \mathbb{T}' \begin{pmatrix} a_3 \\ a_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{T}' = \begin{pmatrix} \text{sh } \theta' & \text{ch } \theta' \\ \text{ch } \theta' & \text{sh } \theta' \end{pmatrix}, \quad (2.86)$$

где, как легко показать, параметры θ и θ' связаны соотношением

$$\text{sh } \theta' \text{sh } \theta = 1. \quad (2.87)$$

Матрица \mathbb{T}' соответствует картине, повернутой на $\pi/2$. Однако для ситуации общего положения, когда есть симметрия задачи относительно X и Y , протекание должно быть одновременно возможно, как в направлении оси X , так и в направлении оси Y . Это означает, что частица может с равной вероятностью туннелировать, как вдоль оси X , так и вдоль оси Y . Значение параметра θ , при котором такое возможно, определяет соотношением $\theta'_c = \theta_c$, т.е. $\text{sh } \theta_c = 1$. Отсюда $\theta_c = \ln(1 + \sqrt{2}) \approx 0.88$ и $\epsilon_n^c = V_0$.

Рассмотрим, как учет квантового туннелирования модифицирует результат классической теории перколяции для показателя корреляционной длины [33]. Будем рассматривать случайный потенциал с нулевым средним $\langle V_s(X, Y) \rangle = 0$. Тогда протекание будет возможно при $\epsilon_n^c = 0$. Как упоминалось выше, теория классической перколяции дает следующую зависимость размера кластера одного цвета от энергии $\xi_{\text{cl}}(\epsilon_n) \sim |\epsilon_n|^{-\nu_{\text{cl}}}$, где показатель $\nu_{\text{cl}} = 4/3$. Нас будет интересовать поведение усредненной по реализациям случайного потенциала функции Грина $\mathcal{G}(X, X'; \epsilon_n)$ для уравнения (2.65) при $|X - X'| \rightarrow \infty$. Более точно, нас будет интересовать величина

$$\xi^{-1}(\epsilon_n) \sim \lim_{|X-X'| \rightarrow \infty} \frac{\langle \ln |\mathcal{G}(X, X'; \epsilon_n)| \rangle}{|X - X'|}. \quad (2.88)$$

Существование этого предела означает, что функция Грина экспоненциально затухает с увеличением расстояния $|X - X'|$.

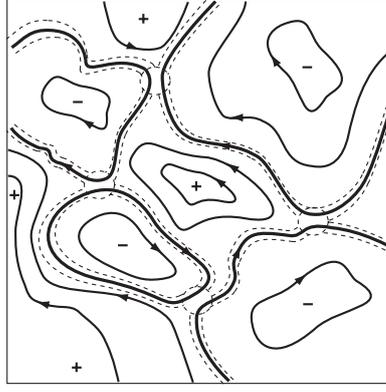


Рис. 2.5: Схематическое изображение эквипотенциальных линий для случайного потенциала $V_s(X, Y)$. Стрелки указывают направление дрейфа центра орбиты, знаки $+$ и $-$ обозначают максимумы и минимумы потенциала, и жирные линии обозначают эквипотенциальные линии энергии ϵ_n , $V_s(X, Y) = \epsilon_n$. Части эквипотенциальных линий между пунктирными кривыми являются прототипами ребер, а области внутри пунктирных окружностей, где возможно квантовое туннелирование, прототипами узлов в модели Чалкера–Коддингтона (из работы [34]).

Функция Грина $\mathcal{G}(\rho, \rho')$ для уравнения (2.72) удовлетворяет уравнению

$$[\partial_\rho^2 + \rho^2 - \gamma] \mathcal{G}(\rho, \rho') = \delta(\rho - \rho') \quad (2.89)$$

и в квазиклассическом приближении имеет вид

$$\mathcal{G}(\rho, \rho') = -\frac{2i}{\sqrt{p(\rho)p(\rho')}} \exp \left[i \operatorname{sign}[\rho - \rho'] \int_{\rho'}^{\rho} du p(u) \right], \quad (2.90)$$

где $p(\rho) = \sqrt{\rho^2 - \gamma}$. Введем координаты $R = (\rho + \rho')/2$ и $x = \rho - \rho'$ и будем считать, что координата центра масс R меняется медленно по сравнению с координатой относительного движения x . Тогда

$$\mathcal{G}(\rho, \rho') \approx -\frac{2i}{|p(R)|} \exp[ip(R)|x|]. \quad (2.91)$$

Возвращаясь к размерным переменным, из формулы (2.91) получаем, что

$$\xi^{-1}(\epsilon_n) \sim \langle \operatorname{Im} Y(X) \rangle. \quad (2.92)$$

Вместо усреднения по разным реализациям случайного потенциала будем проводить усреднение по положению седловых точек, в которых $V_s(X, Y) = 0$ и происходит квантовое туннелирование с одной эквипотенциальной линии на другую. Так как в случайном плавном потенциале типичное расстояние между седловыми точками равно корреляционной длине ξ_{cl} теории классической перколяции, то среднее в уравнении (2.92) можно оценить как

$$\xi^{-1}(\epsilon_n) \sim \xi_{cl}^{-1}(\epsilon_n) \operatorname{Im} \int dX Y(X). \quad (2.93)$$

Учитывая, что $Y(X) = \sqrt{(U_x X^2 + \epsilon_n)/U_Y}$, находим

$$\xi^{-1}(\epsilon_n) \sim \xi_{cl}^{-1}(\epsilon_n) |\epsilon_n|. \quad (2.94)$$

Учитывая, что в теории классической перколяции $\xi_{cl} \sim |\epsilon_n|^{-4/3}$, окончательно получаем

$$\xi(\epsilon_n) \sim |V_0 - \epsilon_n|^{-\nu_q}, \quad \nu_q = 7/3. \quad (2.95)$$

Как мы видели в предыдущей главе, случайный потенциал может приводить к уширению уровня Ландау, а значит, к сильной зависимости плотности состояний на уровне Ландау от энергии. В проведенном выше рассмотрении этот эффект во внимание не принимался, так как рассматривались состояния с энергией $|\epsilon_n| \ll [\langle V_s^2 \rangle]^{1/2}$, т.е. вблизи центра уровня Ландау, где плотность состояний можно считать постоянной. Здесь $[\langle V_s^2 \rangle]^{1/2}$ – это значение среднеквадратичной флуктуации случайного потенциала. Кроме этого, мы предполагали, что применимо квазиклассическое рассмотрение. Это означает, что все расстояния должны быть велики по сравнению с магнитной длиной l_H . При вычислении корреляционной длины характерное значение X , которое возникает, равно $\sqrt{|\epsilon_n|/U_X}$. Оценивая величину U_X как $[\langle V_s^2 \rangle]^{1/2}/d$, где d – типичная длина, на которой меняется случайный потенциал, получаем неравенство $|\epsilon_n|/[\langle V_s^2 \rangle]^{1/2} \gg l_H^2/d^2$, которое ограничивает применимость формулы (2.95).

Рассмотрим сеть эквипотенциальных линий случайного плавного потенциала при какой-то энергии вблизи порога протекания. Как видно из рис. 2.5, сеть состоит из эквипотенциальных линий, окружающих случайно разбросанные холмы и впадины потенциала. Между такими эквипотенциальными линиями находятся седловые точки, где возможно квантовое туннелирование. Сделаем существенное упрощение: представим сеть эквипотенциальных линий в виде регулярной сетки так, как изображено на рис. 2.6. Рассмотрим на этой решетке следующую модель, которая носит имя Чалкера-Коддингтона [34]. Пусть у сетки имеется $2M$ входов слева и, соответственно, $2M$ выходов справа. Зададим на входе в сетку набор из $2M$ комплексных чисел Z_i , $i = 1, \dots, 2M$, тогда на выходе мы получим, вообще говоря, другой набор из $2M$ комплексных чисел Z'_i , который определяется соотношением

$$Z'_i = \mathbb{T}_{ij} Z_j. \quad (2.96)$$

Трансфер-матрицу \mathbb{T} размером $2M \times 2M$ удобно определить как произведение элементарных трансфер-матриц:

$$\mathbb{T} = \prod_{\alpha=1}^N \mathbb{A}_\alpha \mathbb{B} \mathbb{C}_\alpha \mathbb{D}, \quad (2.97)$$

где N число элементарных блоков сетки (см. рис. 2.6). Матрицы \mathbb{A}_α , \mathbb{B} , \mathbb{C}_α , и \mathbb{D} размера $2M \times 2M$ устроены следующим образом:

$$[\mathbb{A}_\alpha]_{ij} = \delta_{ij} e^{i\phi_j(\alpha)}, \quad [\mathbb{C}_\alpha]_{ij} = \delta_{ij} e^{i\phi'_j(\alpha)}. \quad (2.98)$$

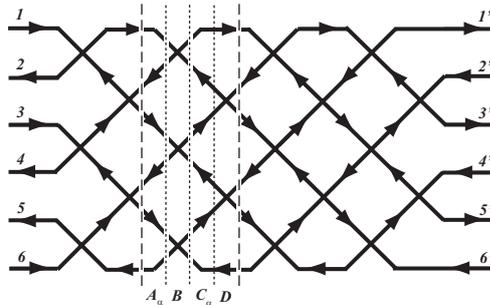


Рис. 2.6: Сеточная модель для $2M = 6$, $N = 4$. (из работы [34])

Здесь $\phi_j(\alpha)$, $\phi'_j(\alpha)$ – независимые случайные величины, однородно распределенные по полуинтервалу $[0, 2\pi)$. Матрицы \mathbb{B} и \mathbb{D} блок-диагональные, причем

$$\mathbb{B}_{ij} = \begin{cases} \text{ch } \theta' & , \quad i = j, i = 1, \dots, 2M \\ \text{sh } \theta' & , \quad i = 2k, j = 2k - 1, k = 1, \dots, M \\ \text{sh } \theta' & , \quad i = 2k - 1, j = 2k, k = 1, \dots, M \\ 0 & , \quad \text{иначе,} \end{cases}$$

$$\mathbb{D}_{ij} = \begin{cases} \text{ch } \theta & , \quad i = j, i = 2, \dots, 2M - 1 \\ \text{sh } \theta & , \quad i = 2k, j = 2k + 1, k = 1, \dots, M - 1 \\ \text{sh } \theta & , \quad i = 2k + 1, j = 2k, k = 1, \dots, M - 1 \\ 0 & , \quad \text{иначе,} \end{cases} \quad (2.99)$$

где параметры θ и θ' связаны соотношением $\text{sh } \theta' = 1/\text{sh } \theta$. Граничные условия имеют вид $\mathbb{D}_{11} = \mathbb{D}_{2M,2M} = \text{ch } \theta$, $\mathbb{D}_{1,2M} = \mathbb{D}_{2M,1} = \text{sh } \theta$ для геометрии цилиндра и $\mathbb{D}_{11} = \mathbb{D}_{2M,2M} = 1$ для геометрии полосы.

Согласно теореме Оселедца [35], существует конечный предел $\mathcal{T} = \lim_{N \rightarrow \infty} (\mathbb{T}^\dagger \mathbb{T})^{1/2N}$. Определим для данного значения M следующую величину

$$\xi_M^{-1} = \min_i \langle |\ln t_i| \rangle, \quad (2.100)$$

где t_i – собственные значения матрицы $\mathbb{T}^\dagger \mathbb{T}$, а усреднение $\langle \dots \rangle$ производится по случайным фазам $\phi_j(\alpha)$ и $\phi'_j(\alpha)$. Величина ξ_M , которую будем называть корреляционной длиной, определяет как хорошо передается информация от входа сетки к выходу. В частности, соотношение (2.100) означает, что при $N \gg \xi_M$ значения $|Z'_j| \leq \exp(-N/\xi_M) \max_i |Z_i|$. Корреляционная длина ξ_∞ в бесконечной системе (при $M \rightarrow \infty$) находится из скейлингового соотношения $\xi_M/M = \mathcal{F}(\xi_\infty/M)$, где $\mathcal{F}(x)$ – неизвестная регулярная функция. Численный расчет [34] дает следующий результат для корреляционной длины $\xi_\infty \sim |\theta - \theta_c|^{-\nu}$, где значение θ_c удивительным образом хорошо согласуется с $\theta_c = 1$. Численное значение критического индекса корреляционной длины в настоящее время равно $\nu = 2.593 \pm 0.005$ [36].

Задачи:

2.3.1 Получить асимптотики функции $C(\rho)$ (2.76) из выражения (2.68).

2.3.2 В квазиклассическом приближении найти функцию Грина $\mathcal{G}(x_1, x_2)$ для гамильтониана осциллятора

$$\mathcal{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{m\omega^2 x^2}{2}. \quad (2.101)$$

2.3.3 Пусть матрица

$$\mathbb{T} = \begin{pmatrix} \alpha e^{-i\phi/2} & \beta e^{i\phi/2} \\ \beta e^{-i\phi/2} & \alpha e^{i\phi/2} \end{pmatrix}, \quad (2.102)$$

где α , β и ϕ – действительные числа. Считая, что фаза ϕ – случайная гауссова величина с

$\langle \phi \rangle = 0$ и $\langle \phi^2 \rangle = \lambda$, найти $\langle \ln T^\dagger T \rangle$.

2.3.4 На примере волновых функций нижнего уровня Ландау в цилиндрической калибровке показать, что операторы $(X + iY)/(l_H\sqrt{2})$ и $(X - iY)/(l_H\sqrt{2})$ играют для них роль операторов рождения и уничтожения соответственно. Вычислить чему равно среднее значение квадрата радиуса $X^2 + Y^2$ в состоянии с заданным угловым моментом m .

2.4 Самосогласованное борновское приближение. Плотность состояний.

В этом разделе мы будем вычислять плотность состояний $D(E)$ в самосогласованном борновском приближении для гауссового случайного потенциала. Подход самосогласованного борновского приближения был впервые развит в работах Ц. Андо (Т. Ando) и Ю. Уэмура (Y. Uemura) в середине семидесятых годов прошлого века [37, 9].

Напомним, что гамильтониан задачи имеет вид

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m_e}(\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2 + V(\mathbf{r}), \quad V(\mathbf{r}) = u \sum_{j=1}^{\mathcal{N}} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j), \quad (2.103)$$

где \mathbf{r}_j – это координаты δ -рассеивателей. Как было показано в разделе 4, каждый δ -рассеиватель отщепляет от уровня Ландау одно состояние. Будем считать, что $\mathcal{N} \gg \mathcal{S}/2\pi l_H^2$, тогда вырождение на уровне Ландау полностью снимается.

Считая $\mathcal{N} \gg 1$, вычислим средние $\langle V(\mathbf{r}) \rangle$, $\langle V(\mathbf{r}_1)V(\mathbf{r}_2) \rangle$, $\langle V(\mathbf{r}_1)V(\mathbf{r}_2)V(\mathbf{r}_3) \rangle$ и т.д., где усреднение производится по положению δ -центров. Переходя в импульсное представление и пользуясь соотношением

$$\sum_{j=1}^{\mathcal{N}} \langle e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}_j} \rangle = (2\pi\hbar)^2 n_{\text{imp}} \delta(\mathbf{q}), \quad (2.104)$$

находим

$$\begin{aligned} \langle V_1 \rangle &= n_{\text{imp}} u, \\ \langle V_1 V_2 \rangle &= n_{\text{imp}}^2 u^2 + n_{\text{imp}} u^2 \delta_{12}, \\ \langle V_1 V_2 V_3 \rangle &= n_{\text{imp}}^3 u^3 + n_{\text{imp}}^2 u^3 [\delta_{12} + \delta_{23} + \delta_{31}] + n_{\text{imp}} u^3 \delta_{12} \delta_{23}, \\ &\dots \end{aligned} \quad (2.105)$$

где для краткости обозначено $V_k \equiv V(\mathbf{r}_k)$, $\delta_{jk} \equiv \delta(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k)$. В дальнейшем будет удобно отсчитывать энергию от значения $\langle V(\mathbf{r}) \rangle = n_{\text{imp}} u$. Также мы пренебрежем всеми вкладками в $\langle V_{k_1} \dots V_{k_n} \rangle$, в которых из-за наличия δ -функций должны совпадать больше двух координат \mathbf{r}_{k_j} , например, последним членом в выражении для $\langle V_1 V_2 V_3 \rangle$. Такое приближение называется борновским. Тогда выражения (2.105) примут вид

$$\begin{aligned} \langle V_1 \rangle &= 0, \\ \langle V_1 V_2 \rangle &= \gamma \delta_{12}, \\ \langle V_1 V_2 V_3 \rangle &= 0, \\ \langle V_1 V_2 V_3 V_4 \rangle &= \gamma^2 [\delta_{12} \delta_{34} + \delta_{13} \delta_{24} + \delta_{14} \delta_{23}], \\ &\dots \end{aligned} \quad (2.106)$$

где $\gamma = n_{\text{imp}} u^2$. Случайный потенциал со средними вида (2.106) называется гауссовым δ -коррелированным случайным потенциалом.

Ниже будем рассматривать модель более общую модель, в которой случайный потенциал $V(\mathbf{r})$ считается нормально-распределенной случайной величиной с нулевым средним и следующей парной корреляционной функцией $\langle V(\mathbf{r})V(\mathbf{r}') \rangle = W(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)$. Как известно, из квантовой механики рассеяние на потенциале определяется сечением рассеяния. Определим

вместо сечения рассеяния следующие величины, имеющие размерность обратного времени,

$$\frac{1}{\tau_n} = \frac{m_e}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi \tilde{W}(2k_F \sin \phi/2) \cos(n\phi). \quad (2.107)$$

Здесь $\tilde{W}(q)$ – это фурье-образ корреляционной функции $W(r)$. Заметим, что $1/\tau_0$ пропорционально полному среднему сечению рассеяния на потенциале $V(\mathbf{r})$, а разность $1/\tau_{\text{tr},1} = 1/\tau_0 - 1/\tau_1$ пропорциональна транспортному сечению рассеяния. Отметим, что для модели δ -коррелированного случайного потенциала $\tilde{W}(q) = \gamma$, так что $1/\tau_n = \gamma m_e \delta_{n,0}$ и $\tau_{\text{tr},1}/\tau_0 = 1$.

Другой характерный случай это плавный случайный потенциал, когда функция $W(r)$ убывает на длине $d \gg 1/k_F$. Фурье-образ такого потенциала отличен от нуля при $qd \lesssim 1$, что ограничивает углы в интеграле в ур. (2.107) значениями $\phi \lesssim 1/(k_F d) \ll 1$. Тогда легко получить, что в случае плавного потенциала $\tau_{\text{tr},1}/\tau_0 \sim (k_F d)^2 \gg 1$.

При наличии магнитного поля необходимо сравнивать $1/k_F$ и d с характерными длинами в магнитном поле, l_H и R_c . Самосогласованное борновское приближение оказывается справедливым при выполнении следующих условий [38, 39]

$$1/k_F, d \ll l_H, \quad d \ll v_F \tau_0. \quad (2.108)$$

Будем работать в базисе волновых функций (1.10), тогда точная запаздывающая и опережающая функции Грина для гамильтониана (2.103) имеют вид¹

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{\mathcal{E}}^{R,A}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) &= \sum_{nn';kk'} [\mathcal{G}^{R,A}(\mathcal{E})]_{nn';kk'}^{kk'} \psi_{nk}(\mathbf{r}_1) \psi_{n'k'}^*(\mathbf{r}_2), \\ [[\mathcal{G}^{R,A}(\mathcal{E})]^{-1}]_{nn'}^{kk'} &= \left[\mathcal{E} - \omega_c \left(n + \frac{1}{2} \right) \pm i0 \right] \delta_{nn'} \delta_{kk'} - V_{nn'}^{kk'}. \end{aligned} \quad (2.109)$$

Матричный элемент случайного потенциала удобно представить как

$$\begin{aligned} V_{n_1 n_2}^{k_1 k_2} &= \int d\mathbf{r} \psi_{n_1 k_1}^*(\mathbf{r}) V(\mathbf{r}) \psi_{n_2 k_2}(\mathbf{r}) \\ &= \int \frac{d^2 \mathbf{q}}{(2\pi)^2} \tilde{V}(q) \delta_{k_1, k_2 + q_y} e^{-iq_x(k_1 + k_2)l_H^2/2} \mathbb{F}_{n_2 n_1}(\mathbf{q}), \end{aligned} \quad (2.110)$$

где $\tilde{V}(q)$ обозначает фурье-образ случайного потенциала $V(\mathbf{r})$, и

$$\mathbb{F}_{n_1 n_2}(\mathbf{q}) = 2\pi l_H^2 \sum_k \psi_{n_1 k}^*(0) \psi_{n_2 k}(\mathbf{q}_{\perp} l_H^2) e^{-iq_y q_x l_H^2/2}, \quad (2.111)$$

где $\mathbf{q}_{\perp} = \{q_y, -q_x\}$. Величина $\mathbb{F}_{n_1 n_2}(\mathbf{q})$ может быть точно вычислена (см. задачи в конце раздела):

$$\begin{aligned} \mathbb{F}_{n_1 n_2}(\mathbf{q}) &= \left(\frac{n_1!}{n_2!} \right)^{1/2} \left(\frac{q_y - iq_x}{l_H^{-1} \sqrt{2}} \right)^{n_2 - n_1} e^{-q^2 l_H^2/4} L_{n_1}^{n_2 - n_1} \left(\frac{q^2 l_H^2}{2} \right) \\ &= \left(\frac{n_2!}{n_1!} \right)^{1/2} \left(\frac{-q_y - iq_x}{l_H^{-1} \sqrt{2}} \right)^{n_1 - n_2} e^{-q^2 l_H^2/4} L_{n_2}^{n_1 - n_2} \left(\frac{q^2 l_H^2}{2} \right), \end{aligned} \quad (2.112)$$

¹В этом и последующем разделах в промежуточных формулах принята система единиц, в которой $\hbar = c = 1$.



Рис. 2.7: Диаграмма для функции Грина в самосогласованном борновском приближении. Тонкая сплошная линия изображает затравочную функцию Грина $G^R(\mathcal{E})$. Жирная сплошная линия изображает функцию $\langle \mathcal{G}^{R,A}(\mathcal{E}) \rangle$. Пунктирная линия с крестом изображает среднее $\langle V_1 V_2 \rangle$.

где $L_n^{m-n}(x)$ обозначает обобщенный полином Лагерра (полином Сонины) [40]. Заметим, что выполняется соотношение $\mathbb{F}_{n_1 n_2}^*(\mathbf{q}) = \mathbb{F}_{n_2 n_1}(-\mathbf{q})$.

В дальнейшем нам понадобится выражение для примесной линии

$$I_{n_1 n_2; n_3 n_4}^{k_1 k_2; k_3 k_4} = \langle V_{n_1 n_2}^{k_1 k_2} V_{n_3 n_4}^{k_3 k_4} \rangle = \int \frac{d^2 \mathbf{q}}{(2\pi)^2} \tilde{W}(\mathbf{q}) e^{-i\mathbf{q} \cdot (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_4)} l_H^2 \times \delta_{k_1, k_2 + \mathbf{q}_y} \delta_{k_4, k_3 + \mathbf{q}_y} \mathbb{F}_{n_2 n_1}(\mathbf{q}) \mathbb{F}_{n_4 n_3}(-\mathbf{q}). \quad (2.113)$$

Также определим затравочную функцию Грина

$$G_n^{R,A}(\mathcal{E}) = \frac{1}{\mathcal{E} - \omega_c(n + 1/2) \pm i0}. \quad (2.114)$$

Вычислим функцию Грина $\langle \mathcal{G}(\mathcal{E})^{R,A} \rangle$, усредненную по случайному потенциалу с помощью соотношений (2.106). В общем случае это сложная задача, поэтому рассмотрим так называемое самосогласованное борновское приближение. Это приближение, в котором пренебрегается всеми вкладками в $\langle \mathcal{G}(\mathcal{E})^{R,A} \rangle$, которые содержат пересекающиеся примесные линии.

В этом приближении усредненная функция Грина удовлетворяет уравнению Дайсона (рис. 2.7)

$$[\langle \mathcal{G}^R(\mathcal{E}) \rangle]_{nk; n'k'}^{-1} = [G_n^R(\mathcal{E})]^{-1} \delta_{nn'} \delta_{kk'} - \Sigma_{nk; n'k'}^R(\mathcal{E}), \quad (2.115)$$

где собственно-энергетическая часть имеет вид

$$\Sigma_{n_1 k_1; n_2 k_2}^R(\mathcal{E}) = \sum_{nn'; kk'} I_{n' n_2; n_1 n}^{k' k_2; k_1 k} \langle \mathcal{G}_{nk; n'k'}^R(\mathcal{E}) \rangle. \quad (2.116)$$

Будем считать, что выполняется условие $\omega_c \gg |\Sigma_{n_1 k_1; n_2 k_2}^R(\mathcal{E})|$, и поэтому будем искать собственно-энергетическую часть в виде $\Sigma_{nk; n'k'}^R(\mathcal{E}) = \Sigma_n^R(\mathcal{E}) \delta_{nn'} \delta_{kk'}$. Тогда получим

$$\langle \mathcal{G}_n^R(\mathcal{E}) \rangle = [\mathcal{E} - \omega_c(n + 1/2) - \Sigma_n^R(\mathcal{E})]^{-1},$$

$$\Sigma_n^R(\mathcal{E}) = \int \frac{d^2 \mathbf{Q}}{(2\pi)^2} \tilde{W}(\mathbf{Q}) \sum_{n'} \frac{n'!}{n!} \langle \mathcal{G}_{n'}^R(\mathcal{E}) \rangle e^{-z_Q} z_Q^{n-n'} L_{n'}^{n-n'}(z_Q) L_{n'}^{n-n'}(z_Q), \quad (2.117)$$

где $z_Q = Q^2 l_B^2 / 2$.

Рассмотрим случай плавного потенциала $k_F d \gg 1$. Воспользуемся предположением $1/k_F \ll l_H$, см. ур. (2.108), которое означает, что заполнено большое количество уровней Ландау: $\mathcal{E} \gg \omega_c$. Здесь мы отождествляем \mathcal{E} и химический потенциал μ , т.к. считаем, что нас интересуют энергии вблизи химического потенциала, а температура предполагается низкой, $T \ll \mu$. Тогда можно использовать асимптотическое выражение для полиномов Лагерра

($n \gg a$):

$$L_n^a(x) = \sqrt{\frac{(n+a)!}{n!}} e^{x/2} x^{-a/2} J_a(\sqrt{2x(2n+a+1)}), \quad (2.118)$$

где $J_a(x)$ обозначает функцию Бесселя. Подчеркнем, что мы считаем, что в сумму по n' дают вклад номера близкие к n . С помощью такого асимптотического выражения, уравнение на собственноэнергетическую часть принимает вид

$$\Sigma_n^R(\mathcal{E}) = \sum_{n'} \langle \mathcal{G}_{n'}^R(\mathcal{E}) \rangle \int \frac{d^2 Q}{(2\pi)^2} \tilde{W}(Q) J_{n-n'}^2(Q l_H \sqrt{n+n'+1}). \quad (2.119)$$

За счет того, что функция $\tilde{W}(Q)$ спадает на характерном импульсе $Q \sim 1/d$, будем считать, что интеграл в ур. (2.119) определяется этим же значением Q . Тогда воспользуемся теперь предположением $d \ll l_H$, см. ур. (2.108), которое означает, что выполняется следующая цепочка неравенств $Q \sim 1/d \gg 1/l_H$. Это означает, что аргумент функции Бесселя в ур. (2.119) большой, и можно воспользоваться асимптотикой при $x \gg 1$

$$J_n(x) \simeq \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{(2n+1)\pi}{4}\right). \quad (2.120)$$

Тогда, как обычно, заменяя квадрат косинуса от большого аргумента на $1/2$, находим

$$\Sigma_n^R(\mathcal{E}) \simeq \int_0^\infty \frac{dQ}{2\pi^2 l_H \sqrt{2n+1}} W(Q) \sum_{n'} \langle \mathcal{G}_{n'}^R(\mathcal{E}) \rangle. \quad (2.121)$$

Используя опять предположение о том, что \mathcal{E} близко к $\omega_c(n+1/2)$, и условие $k_F d \gg 1$ (т.е. малость угла ϕ в ур. (2.107)), сводим уравнение самосогласования к следующей простой форме:

$$\Sigma_n^R(\mathcal{E}) = \frac{\omega_c}{2\pi\tau_0} \sum_{n'} \langle \mathcal{G}_{n'}^R(\mathcal{E}) \rangle \equiv \Sigma_{\mathcal{E}}^R. \quad (2.122)$$

Подчеркнем, что в самосогласованном борновском приближении собственно энергетическая часть не зависит от номера уровня Ландау. Отметим, что ровно такое же уравнение получается из ур. (2.117) для случая δ -коррелированного случайного потенциала (см. задачу 2.4.3).

Вспоминая, что плотность состояний выражается через мнимую часть функции Грина, находим следующее выражение для средней плотности состояний

$$D(\mathcal{E}) = -\frac{1}{2\pi^2 l_H^2} \text{Im} \sum_n \langle \mathcal{G}_n^R(\mathcal{E}) \rangle = -\frac{m_e \tau_0}{\pi} \text{Im} \Sigma_{\mathcal{E}}^R. \quad (2.123)$$

Подчеркнем, что в самосогласованном борновском приближении мнимая часть собственно энергетической части усредненной по беспорядку функции Грина определяется плотностью состояний. Чтобы подчеркнуть этот факт удобно ввести времена рассеяния в магнитном поле, по следующей формуле

$$\frac{1}{\tau_n(\mathcal{E})} = \frac{1}{\tau_n} \frac{2\pi D(\mathcal{E})}{m_e}. \quad (2.124)$$

Тогда получим, что

$$\text{Im} \Sigma_{\mathcal{E}}^R = -\frac{1}{2\tau_0(\mathcal{E})}. \quad (2.125)$$

Найдем теперь плотность состояний в двух предельных случаях слабого, $\omega_c \tau_0 \ll 1$, и

сильного, $\omega_c \tau_0 \gg 1$, магнитного поля. В случае слабого магнитного поля для суммирования по уровням Ландау удобно использовать формулу Пуассона, используя которую получаем

$$\Sigma_{\mathcal{E}}^R = \frac{\omega_c}{2\pi\tau_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{dx e^{i2\pi kx}}{\mathcal{E} - \omega_c(x + 1/2) - \Sigma_{\mathcal{E}}^R}. \quad (2.126)$$

Выполняя интегрирование по x и используя условие $\omega_c \tau_0 \ll 1$, находим

$$\Sigma_{\mathcal{E}}^R = -\frac{i}{2\tau_0} \left[1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \delta^k e^{i2\pi k\mathcal{E}/\omega_c} \right], \quad \delta = e^{-\pi/(\omega_c \tau_0)} \ll 1. \quad (2.127)$$

Для плотности состояний получаем следующий ответ:

$$D(\mathcal{E}) = \frac{m_e}{2\pi} \left[1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \delta^k \cos \frac{2\pi k\mathcal{E}}{\omega_c} \right]. \quad (2.128)$$

Таким образом, в слабом магнитном поле плотность состояний демонстрирует осцилляции с магнитным полем (осцилляции Де Гааза – ван Альфена) вокруг значения в нулевом магнитном поле. Амплитуда осцилляций контролируется фактором Дингла δ .

В случае сильного магнитного поля, $\omega_c \tau_0 \gg 1$, можно считать, что главный вклад в сумму по n' в ур. (2.122) даёт член с $n' = n$. Тогда получаем квадратное уравнение для $\Sigma_{\mathcal{E}}^R$, решение которого даёт

$$\begin{aligned} \Sigma_{\mathcal{E}}^R &= \frac{\varepsilon_n}{2} - \frac{i}{2} \sqrt{\Gamma^2 - \varepsilon_n^2}, & \Gamma &= \sqrt{\frac{2\omega_c}{\pi\tau_0}} \ll \omega_c, \\ \langle \mathcal{G}_n^R(\mathcal{E}) \rangle &= \frac{2}{\varepsilon_n + i\Gamma(\varepsilon_n)}, & \Gamma(\varepsilon_n) &= \sqrt{\Gamma^2 - \varepsilon_n^2}, \end{aligned} \quad (2.129)$$

где $\varepsilon_n = \mathcal{E} - \omega_c(n + 1/2)$. Знак перед корнем выбран из условия того, что мы ищем собственно-энергетическую часть для запаздывающей функции Грина. Для средней плотности состояний получаем

$$D(\mathcal{E}) = \sum_n \frac{\Gamma(\varepsilon_n)}{\pi^2 l_H^2 \Gamma^2}. \quad (2.130)$$

Таким образом, в самосогласованном борновском приближении усредненная плотность состояний в сильном магнитном поле представляет собой сумму хорошо разделенных ($\Gamma \ll \omega_c$) уширенных уровней Ландау. Причем профиль плотности состояний для данного уровня Ландау представляет собой полукруг. Тот факт, что плотность состояний при $|\varepsilon_n| \geq \Gamma$ обращается в нуль, является следствием самосогласованного борновского приближения. Однако это приближение правильно учитывает полное число состояний на уровне Ландау:

$$\int_{-\Gamma}^{\Gamma} d\varepsilon \frac{\Gamma(\varepsilon)}{\pi^2 l_H^2 \Gamma^2} = \frac{1}{2\pi l_H^2}. \quad (2.131)$$

Как будет обсуждаться ниже, более точное решение задачи показывает существование состояний и при энергиях $|\varepsilon_n| \geq \Gamma$ (рис. (2.8)).

Выражение (2.130) для плотности состояний в самосогласованном борновском приближении позволяет найти фактор заполнения при нуле температур как функцию химического

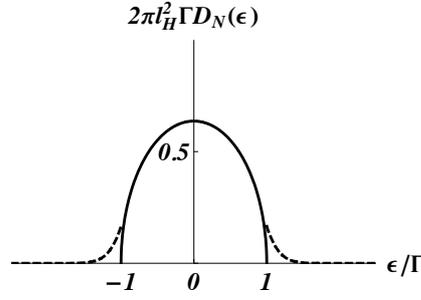


Рис. 2.8: Плотность состояний на N -м уровне Ландау. Сплошная линия соответствует результату самосогласованного борновского приближения. Пунктирная линия изображает хвосты плотности состояний, которые возникают при выходе за самосогласованное борновское приближение.

потенциала:

$$\nu(\mu) = 2\pi l_H^2 \int_{-\infty}^{\mu} d\mathcal{E} D(\mathcal{E}). \quad (2.132)$$

Будем считать, что химический потенциал проходит через N -й уровень Ландау, т.е. $|\mu - \omega_c(N + 1/2)| \leq \Gamma$. Тогда получим

$$\nu(\mu) = N + \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} f\left(\frac{\mu - \omega_c(N + 1/2)}{\Gamma}\right), \quad (2.133)$$

$$f(x) = \arcsin x + x\sqrt{1 - x^2}.$$

Рассмотрим теперь вопрос применимости самосогласованного борновского приближения для случая δ -коррелированного случайного потенциала, $d = 0$. Напомним, что для полного снятия вырождения уровня Ландау число примесей \mathcal{N} должно быть больше, чем число состояний на уровне Ландау, $\mathcal{N} > \mathcal{S}/2\pi l_H^2$. Это условие означает, что ширина уровня Ландау в самосогласованном борновском приближении должна удовлетворять условию $\Gamma > u/(\pi^{3/2} l_H^2)$. Проанализируем ряды теории возмущений для собственно-энергетической части. Простейшая диаграмма, неучтенная в самосогласованном борновском приближении представлена на рис. 2.9а. Ее вклад в $\Sigma_{\mathcal{E}}^R$ можно оценить по порядку величины как

$$\eta_N \frac{n_{\text{imp}}^2 u^4}{\Gamma^3 l_H^4} \sim \eta_N \frac{n_{\text{imp}}^{1/2} u}{l_H}, \quad (2.134)$$

где η_N – постоянный множитель, связанный с интегрированием по координатам. Как видно, при фиксированном значении параметра $n_{\text{imp}}^{1/2} l_H \sim 1$ эта диаграмма мала по сравнению с диаграммой самосогласованного борновского приближения, если $\eta_N \ll 1$. Как оказывается это происходит при $N = \mathcal{E}/\omega_c \gg 1$.

Другое приближение, которое было сделано, это пренебрежение многократным рассеянием на одной и той же примеси (переход от уравнений (2.105) к (2.106)). Рассмотрим теперь диаграмму, представленную на рис. 2.9b и учитывающую рассеяние за рамками борновского приближения. Она может быть оценена как

$$\tilde{\eta}_N \frac{n_{\text{imp}}^2 u^5}{\Gamma^4 l_H^6} \sim \tilde{\eta}_N \frac{n_{\text{imp}}^{1/2} u}{l_H} \frac{1}{n_{\text{imp}}^{1/2} l_H}. \quad (2.135)$$

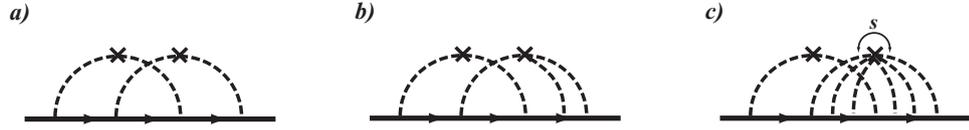


Рис. 2.9: Диаграммы теории возмущений за рамками самосогласованного борновского приближения: а) диаграмма с пересечением, б), в) - многократное рассеяние.

Эта диаграмма мала по сравнению с диаграммой, представленной на рис. 2.9а, если

$$\frac{\tilde{\eta}_N}{\eta_N} \frac{1}{n_{\text{imp}}^{1/2} l_H} \ll 1. \quad (2.136)$$

Можно было бы думать, что если $\tilde{\eta}_N/\eta_N \ll 1$ при $N \gg 1$, то все не борновские диаграммы будут малы при фиксированном значении параметра $n_{\text{imp}}^{1/2} l_H \sim 1$. Однако это не так. Если рассмотреть диаграмму, представленную на рис. 2.9с, которая оценивается как

$$\eta'_N \frac{n_{\text{imp}}^2 u^{s+2}}{\Gamma^{s+1} l_H^{2s}} \sim \eta'_N \frac{n_{\text{imp}}^{1/2} u}{l_H} \left(\frac{1}{n_{\text{imp}}^{1/2} l_H} \right)^{s-2}, \quad (2.137)$$

то получается, что эта диаграмма мала по сравнению с диаграммой, показанной на рис. 2.9а, если

$$\frac{n_{\text{imp}}}{n_L} \gg \left[\frac{\eta'_N}{\eta_N} \right]^{2/(s-2)}, \quad n_L = \frac{1}{2\pi l_H^2}. \quad (2.138)$$

Устремляя теперь $s \rightarrow \infty$, найдем условие малости диаграмм с многократным рассеянием на одной примеси, типа представленных на рис. 2.9с:

$$\frac{n_{\text{imp}}}{n_L} \gg 1. \quad (2.139)$$

Это приводит к условию $\Gamma \gg 2n_L u / \sqrt{\pi}$.

Подводя итог, можно сказать, что многократное рассеяние на примесях можно не рассматривать, если $2\pi n_{\text{imp}} l_H^2 \gg 1$, а диаграммы с пересечениями примесных линий малы в силу условия $N \gg 1$.

Задачи:

2.4.1 Определим обобщение транспортного времени следующим образом, $1/\tau_{\text{tr},n} = 1/\tau_0 - 1/\tau_n$. Для случая плавного потенциала $k_F d \gg 1$ найти зависимость отношения $\tau_0/\tau_{\text{tr},n}$ от n .

2.4.2 Пользуясь определением обобщенного полинома Лагерра (полинома Сонина) в виде ряда

$$L_n^a(z) = \sum_{m=0}^n (-1)^m C_{n+a}^{n-m} \frac{z^m}{m!},$$

где $C_n^k = n!/[k!(n-k)!]$ – биномиальный коэффициент, доказать равенство

$$(-1)^n n! z^{-n} L_n^{m-n}(z) = (-1)^m m! z^{-m} L_m^{n-m}(z).$$

2.4.3 Вывести соотношение (2.112).

2.4.4 Показать, что в случае δ -коррелированного потенциала ур. (2.117) сводится к ур. (2.122).

2.4.5 Пользуясь соотношением Крамерса–Кронинга, вычислить запаздывающую функцию Грина в ур. (2.129) при $\varepsilon_n > \Gamma$.

2.4.6 Вычислить диаграмму, представленную на рис. 2.9а. Показать, что $\eta_N \ll 1$ при $N \gg 1$.

2.4.7 Вычислить диаграмму, представленную на рис. 2.9а для случая плавного потенциала. Показать, что условие ее малости требует условия $d \ll l_H$.

2.5 Самосогласованное борновское приближение. Проводимость.

Вычислим теперь статический тензор проводимости σ_{ab} в самосогласованном борновском приближении. Проводимость определяется с помощью поляризационного оператора $\Pi_{ab}^R(\omega)$ как

$$\sigma_{ab} = \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{1}{\omega} \text{Im} (\Pi_{ab}^R(0) - \Pi_{ab}^R(\omega)). \quad (2.140)$$

Вычисление поляризационного оператора $\Pi_{ab}^R(\omega)$ удобно проводить в технике температурных функций Грина. Мацубаровский поляризационный оператор, усредненный по случайному потенциалу $V(\mathbf{r})$, равен

$$\Pi_{ab}(i\omega_n) = -e^2 \left\langle T \sum_{\varepsilon_k} \text{Tr} \hat{v}_a \mathcal{G}(i\varepsilon_k) \hat{v}_b \mathcal{G}(i\varepsilon_k + i\omega_n) \right\rangle, \quad (2.141)$$

где $\hat{v} = (\mathbf{p} - e\mathbf{A})/m_e$ – это оператор скорости. Для того чтобы найти $\Pi_{ab}^R(\omega)$, сделаем аналитическое продолжение мацубаровского поляризационного оператора. До вычисления сразу заметим, что сохранение числа частиц приводит к соотношению $\Pi_{ab}^R(0) = -\delta_{ab}e^2n_e/m_e$. Воспользуемся точными соотношениями

$$\mathcal{G}(i\varepsilon_n; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \int \frac{d\mathcal{E}}{\pi} \frac{\text{Im} \mathcal{G}^R(\mathcal{E}; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)}{\mathcal{E} - i\varepsilon_n}, \quad (2.142)$$

$$T \sum_{\varepsilon_k} \frac{1}{\mathcal{E} - i\varepsilon_k - i\omega_n} \frac{1}{\mathcal{E}' - i\varepsilon_k} = \frac{n_F(\mathcal{E}') - n_F(\mathcal{E})}{\mathcal{E}' - \mathcal{E} + i\omega_n}, \quad (2.143)$$

где $n_F(\mathcal{E})$ – распределение Ферми. Далее получим

$$\Pi_{ab}^R(\omega) = \frac{e^2}{4\pi^2} \int d\mathcal{E} d\mathcal{E}' \frac{n_F(\mathcal{E}) - n_F(\mathcal{E}')}{\mathcal{E}' - \mathcal{E} + \omega + i0} \langle \text{Tr} \hat{v}_a [\mathcal{G}^R(\mathcal{E}') - \mathcal{G}^A(\mathcal{E}')] \hat{v}_b [\mathcal{G}^R(\mathcal{E}) - \mathcal{G}^A(\mathcal{E})] \rangle. \quad (2.144)$$

Найдем матричные элементы оператора скорости, которые нам понадобятся в дальнейшем:

$$\langle nk | \hat{v}_a | n'k' \rangle = \int d^2\mathbf{r} \psi_{n'k'}^*(\mathbf{r}) \hat{v}_a \psi_{nk}(\mathbf{r}) = \frac{1}{ml_H \sqrt{2}} \delta_{k,k'} [\beta_a \sqrt{n} \delta_{n',n-1} + \gamma_a \sqrt{n'} \delta_{n',n+1}], \quad (2.145)$$

где

$$\beta_x = -i, \quad \beta_y = -1, \quad \gamma_x = i, \quad \gamma_y = -1. \quad (2.146)$$

Для дальнейших вычислений нам будет удобно пользоваться выражениями для операторов скорости в квазиклассическом приближении,

$$\hat{v}_x = \frac{iv_{\mathcal{E}}}{2} (\hat{V}_1 - \hat{V}_{-1}), \quad \hat{v}_y = -\frac{v_{\mathcal{E}}}{2} (\hat{V}_1 + \hat{V}_{-1}), \quad (2.147)$$

где $v_{\mathcal{E}} = \sqrt{2\mathcal{E}/m_e}$, а оператор V_m связывает состояния через m уровней Ландау,

$$\langle nk | \hat{V}_m | n'k' \rangle = \delta_{kk'} \delta_{n',n+m}. \quad (2.148)$$

Начнем с вычисления продольной проводимости $\sigma_{xx}(\mathcal{E})$. В этом случае легко показать, что величина, стоящая под знаком среднего в выражении (2.144) действительная, а значит при взятии мнимой части от $\Pi_{xx}^R(\omega)$ возникнет δ -функция. Тогда для диссипативной

проводимости находим

$$\sigma_{xx} = \int d\mathcal{E} \left(-\frac{\partial n_F(\mathcal{E})}{\partial \mathcal{E}} \right) \sigma_{xx}(\mathcal{E}), \quad (2.149)$$

$$\sigma_{xx}(\mathcal{E}) = -\frac{e^2}{4\pi\mathcal{S}} \langle \text{Tr} \hat{v}_x [\mathcal{G}^R(\mathcal{E}) - \mathcal{G}^A(\mathcal{E})] \hat{v}_x [\mathcal{G}^R(\mathcal{E}) - \mathcal{G}^A(\mathcal{E})] \rangle. \quad (2.150)$$

Заметим, что величина $\sigma_{ab}(\mathcal{E} = \mu)$ представляет собой тензор проводимости при нуле температур $T = 0$. Также отметим, что появление производной от функции распределения Ферми означает, что вклад в диссипативную проводимость дают электроны вблизи уровня Ферми. С помощью квазиклассических выражений (2.147) для оператора скорости, формулу (2.150) для проводимости можно переписать в виде:

$$\sigma_{xx}(\mathcal{E}) = -\frac{e^2 v_{\mathcal{E}}^2}{8\pi\mathcal{S}} \left\langle \text{Tr} \hat{V}_1 [\mathcal{G}^R(\mathcal{E}) - \mathcal{G}^A(\mathcal{E})] \hat{V}_{-1} [\mathcal{G}^R(\mathcal{E}) - \mathcal{G}^A(\mathcal{E})] \right\rangle. \quad (2.151)$$

Основная трудность при вычислении σ_{xx} – это то, что согласно уравнению (2.151) необходимо произвести усреднение произведения двух точных функций Грина по случайному потенциалу. Простейшая диаграмма состоит из “пузыря” с двумя усредненными по беспорядку функциями Грина. Однако, в случае плавного потенциала необходимо учесть и более сложные диаграммы, в которых обе функции Грина соединены непересекающимися приместными линиями (так называемая лестница). Соответствующие диаграммы изображены на рис. 2.10. Вклад от диаграммы записывается следующим образом:

$$\sigma_{xx}(\mathcal{E}) = -\frac{e^2 v_{\mathcal{E}}^2}{8\pi} \frac{1}{2\pi l_H^2} \sum_{s,s'=\pm 1} s s' \sum_{n=0}^{\infty} \Gamma_1^{(ss')} \langle G_{n+1}^{(s)}(\mathcal{E}) \rangle \langle G_n^{(s')}(\mathcal{E}) \rangle. \quad (2.152)$$

Здесь $\Gamma_1^{(ss')}$ матричный элемент перенормированного оператора \hat{V}_1 в лестничном приближении

$$\langle nk | \hat{V}_m | n'k' \rangle \rightarrow \langle nk | \hat{\Gamma}_m^{(ss')} | n'k' \rangle = \delta_{kk'} \delta_{n',n+m} \Gamma_m^{(ss')}, \quad (2.153)$$

удовлетворяющий следующему уравнению (см. рис. 2.10(b)):

$$\begin{aligned} \Gamma_m^{(ss')} &= 1 + \Gamma_m^{(ss')} \sum_{n_1} \left[\frac{(n+m)!n!}{(n_1+m)!n_1!} \right]^{1/2} \langle \mathcal{G}_{n_1+m}^{(s)}(\varepsilon + \omega) \rangle \langle \mathcal{G}_{n_1}^{(s')}(\varepsilon) \rangle \\ &\times \int \frac{d^2 Q}{(2\pi)^2} W(Q) e^{-z_Q} z_Q^{n_1-n} L_n^{n_1-n}(z_Q) L_{n_1+m}^{n_1-n}(z_Q). \end{aligned} \quad (2.154)$$

Используя асимптотическое выражение для полиномов Лагерра (2.118), находим

$$\begin{aligned} \Gamma_m^{(ss')} &= 1 + \Gamma_m^{(ss')} \sum_{n_1} \langle \mathcal{G}_{n_1+m}^s(\varepsilon + \omega) \rangle \langle \mathcal{G}_{n_1}^{s'}(\varepsilon) \rangle \int \frac{d^2 Q}{(2\pi)^2} W(Q) J_{n_1-n}(Q l_H \sqrt{n+n_1+1}) \\ &\times J_{n_1-n}(Q l_H \sqrt{n+n_1+1+2m}). \end{aligned} \quad (2.155)$$

Рассмотрим интеграл по Q , который формально зависит не только от m , но и от n и n_1 .

Считая, что главный вклад приходит от $n_1 \sim n \simeq \mathcal{E}/\omega_c$, находим

$$\begin{aligned} \frac{2\pi}{\omega_c} \int \frac{d^2\mathbf{Q}}{(2\pi)^2} W(Q) J_{n_1-n}(Ql_B\sqrt{n+n_1+1}) J_{n_1-n}(Ql_H\sqrt{n+n_1+1+2m}) \\ \simeq \frac{1}{\pi\omega_c R_c} \int_0^\infty dQ W(Q) \cos\left[Q\sqrt{R_c^2+2ml_H^2}-QR_c\right] \\ \simeq \frac{1}{\tau_0} - \frac{m^2}{2\pi v_\varepsilon} \int_0^\infty dQ \frac{Q^2}{m_\varepsilon^2 v_\varepsilon^2} W(Q) \equiv \frac{1}{\tau_m}. \end{aligned} \quad (2.156)$$

Здесь мы использовали асимптотику (2.120) для функции Бесселя. В итоге, мы получаем следующее выражение для перенормированной вершины в лестничном приближении

$$\begin{aligned} \Gamma_m^{(ss')} &= \frac{1}{1 - \Pi_m^{(ss')}(\omega)/\tau_m}, \\ \Pi_m^{(ss')}(\omega) &= \frac{\omega_c}{2\pi} \sum_{n_1} \langle \mathcal{G}_{n_1+m}^{(s)}(\mathcal{E} + \omega) \rangle \langle \mathcal{G}_{n_1}^{(s')}(\mathcal{E}) \rangle \equiv \frac{\tau_0(\Sigma_{\mathcal{E}+\omega}^{(s)} - \Sigma_{\mathcal{E}}^{(s')})}{m\omega_c + \Sigma_{\mathcal{E}+\omega}^{(s)} - \Sigma_{\mathcal{E}}^{(s')}}. \end{aligned} \quad (2.157)$$

Подставляя полученное выше выражение (2.157) в формулу (2.152), находим для проводимости

$$\sigma_{xx}(\mathcal{E}) = \frac{e^2 \mathcal{E}}{2\pi} \operatorname{Re} \frac{\Pi_1^{RA}(0)}{1 - \Pi_1^{RA}(0)/\tau_1} = \frac{e^2}{m_e} \frac{D(\mathcal{E}) \mathcal{E} \tau_{\text{tr},1}(\mathcal{E})}{1 + \omega_c^2 \tau_{\text{tr},1}^2(\mathcal{E})}, \quad (2.158)$$

где $1/\tau_{\text{tr},1}(\mathcal{E}) = D(\mathcal{E})/\tau_{\text{tr},1}$. Таким образом, в самосогласованном борновском приближении получилось, что диссипативная проводимость дается формально выражением, похожим на классическое, но с перенормированным транспортным временем рассеяния и плотностью состояний. При этом, перенормировка времени рассеяния также определяется плотностью состояний. Посмотрим, что дает общее выражение (2.158) в пределе слабых, $\omega_c \tau_0 \ll 1$, и сильных, $\omega_c \tau_1 \gg 1$, магнитных полей.

В случае слабого магнитного поля, используя ур. (2.128), находим (см. задачу 2.5.1)

$$\sigma_{xx} = \frac{e^2}{2\pi} \frac{m_e \mu \tau_{\text{tr},1}}{1 + \omega_c^2 \tau_{\text{tr},1}^2} \left(1 - \frac{4\omega_c^2 \tau_{\text{tr},1}^2}{1 + \omega_c^2 \tau_{\text{tr},1}^2} \frac{2\pi^2 T/\omega_c}{\sinh[2\pi^2 T/\omega_c]} e^{-\pi/(\omega_c \tau_0)} \cos \frac{2\pi\mu}{\omega_c} \right). \quad (2.159)$$

Это выражение описывает осцилляции проводимости с магнитным полем, которые называются осцилляциями Шубникова – де Гааза. Отметим, что эти осцилляции обязаны своим происхождением осцилляциям в плотности состояний.

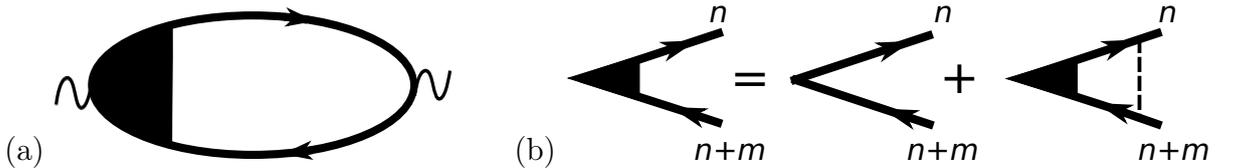


Рис. 2.10: (a) Диаграмма для проводимости σ_{xx} в самосогласованном борновском приближении. (b) Перенормированная вершина в лестничном приближении.

В пределе сильного магнитного поля, получаем

$$\sigma_{xx}(\mathcal{E}) = \frac{e^2}{\pi^2 \hbar} \left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{\Gamma^2(\varepsilon_n)}{\Gamma^2} \frac{\tau_0}{\tau_{\text{tr},1}}. \quad (2.160)$$

Для случая δ -коррелированного случайного потенциала, когда $\tau_{\text{tr},1} = \tau_0$, ур. (2.160) может быть физически интерпретировано следующим образом. Коэффициент диффузии для электрона с энергией ϵ можно оценить как $\mathcal{D}(\mathcal{E}) \sim n l_H^2 \Gamma(\varepsilon_n)$. Выражая проводимость через коэффициент диффузии и плотность состояний с помощью соотношения Эйнштейна, получим следующую оценку $\sigma_{xx} = e^2 D(\mathcal{E}) \mathcal{D}(\mathcal{E}) \sim e^2 n \Gamma^2(\varepsilon_n) / \Gamma^2$.

Рассмотрим теперь вычисление холловской проводимости $\sigma_{xy}(\mathcal{E})$ в самосогласованном борновском приближении. Для этого удобно провести следующее разделение, впервые предложенное Смрчка и Стредой [41],

$$\sigma_{xy} = \sigma_{xy}^{(I)} + \sigma_{xy}^{(II)}, \quad (2.161)$$

где

$$\sigma_{xy}^{(I)} = \lim_{\omega \rightarrow 0} \text{Im} \frac{e^2}{4\pi^2} \int \frac{d\Omega}{\Omega - \omega - i0} \int \frac{d\mathcal{E}}{\mathcal{S}} \frac{n_F(\mathcal{E}) - n_F(\mathcal{E} + \Omega)}{\omega} \left\langle \text{Tr} \left[\hat{v}_x \mathcal{G}^R(\mathcal{E} + \Omega) \hat{v}_y \mathcal{G}^A(\mathcal{E}) - \hat{v}_x \mathcal{G}^A(\mathcal{E} + \Omega) \hat{v}_y \mathcal{G}^R(\mathcal{E}) \right] \right\rangle \quad (2.162)$$

и

$$\sigma_{xy}^{(II)} = \lim_{\omega \rightarrow 0} \text{Re} \frac{e^2}{2\pi^2} \int \frac{d\Omega}{\Omega - \omega - i0} \int \frac{d\mathcal{E}}{\mathcal{S}} \frac{n_F(\mathcal{E}) - n_F(\mathcal{E} + \Omega)}{\omega} \left\langle \text{Tr} \left[\hat{v}_x \mathcal{G}^A(\mathcal{E} + \Omega) \hat{v}_y \text{Im} \mathcal{G}^R(\mathcal{E}) - \hat{v}_x \text{Im} \mathcal{G}^R(\mathcal{E} + \Omega) \hat{v}_y \mathcal{G}^R(\mathcal{E}) \right] \right\rangle. \quad (2.163)$$

Оказывается, что величины $\sigma_{xy}^{(I)}$ и $\sigma_{xy}^{(II)}$ имеют разный физический смысл и, как следствие, вычисляются по-разному. Начнем с вычисления $\sigma_{xy}^{(I)}$, записав эту величину через точные состояния гамильтониана со случайным потенциалом:

$$\sigma_{xy}^{(I)} = \lim_{\omega \rightarrow 0} \text{Im} \frac{e^2}{4\pi^2} \int \frac{d\Omega}{\Omega - \omega - i0} \int d\mathcal{E} \frac{n_F(\mathcal{E}) - n_F(\mathcal{E} + \Omega)}{\omega} \left\langle \sum_{a,b} \left[\frac{\langle a | \hat{v}_x | b \rangle \langle b | \hat{v}_y | a \rangle}{(\mathcal{E} + \Omega - E_b + i0)(\mathcal{E} - E_a - i0)} - \frac{\langle a | \hat{v}_x | b \rangle \langle b | \hat{v}_y | a \rangle}{(\mathcal{E} + \Omega - E_b - i0)(\mathcal{E} - E_a + i0)} \right] \right\rangle. \quad (2.164)$$

Можно показать, что здесь величина внутри усреднения по случайному потенциалу чисто действительная. Так что после взятия мнимой части интеграл по Ω содержит δ -функцию. В итоге получаем

$$\sigma_{xy}^{(I)} = \int d\mathcal{E} \left(-\frac{\partial n_F(\mathcal{E})}{\partial \mathcal{E}} \right) \sigma_{xy}^{(I)}(\mathcal{E}), \quad \sigma_{xy}^{(I)}(\mathcal{E}) = \frac{e^2}{2\pi \mathcal{S}} \text{Re} \langle \text{Tr} \hat{v}_x \mathcal{G}^R(\mathcal{E}) \hat{v}_y \mathcal{G}^A(\mathcal{E}) \rangle. \quad (2.165)$$

Таким образом, $\sigma_{xy}^{(I)}$ является частью холловской проводимости вклад, в которую дают состояния около химического потенциала. Величина $\sigma_{xy}^{(I)}(\mathcal{E})$ может быть вычислена так же как выше вычислялась $\sigma_{xx}(\mathcal{E})$. В результате получаем

$$\sigma_{xy}^{(I)}(\mathcal{E}) = \frac{e^2 \mathcal{E}}{2\pi} \text{Im} \frac{\Pi_1^{RA}(0)}{1 - \Pi_1^{RA}(0)/\tau_1} = -\frac{e^2}{m_e} \frac{D(\mathcal{E}) \mathcal{E} \omega_c \tau_{\text{tr},1}^2(\mathcal{E})}{1 + \omega_c^2 \tau_{\text{tr},1}^2(\mathcal{E})}, \quad (2.166)$$

Отметим, что выражение $\sigma_{xy}^{(I)}(\mathcal{E})$ имеет вид классической формулы Друде с перенормированными временем рассеяния и плотностью состояний.

Перейдем теперь к вычислению второго вклада в холловскую проводимость. Главная трудность состоит в том, что в эту величину дают вклад все заполненные состояния. Это затрудняет интегрирование по Ω и \mathcal{E} , а также мешает воспользоваться квазиклассическими выражениями для операторов скорости. Запишем выражение для $\sigma_{xy}^{(II)}$ в базисе точных состояний гамильтониана со случайным потенциалом:

$$\sigma_{xy}^{(II)} = \lim_{\omega \rightarrow 0} \text{Re} \frac{e^2}{2\pi\omega} \int \frac{d\Omega}{\Omega - \omega - i0} \int d\mathcal{E} n_F(\mathcal{E}) \left\langle \sum_{ab} \langle a|\hat{v}_x|b\rangle \langle b|\hat{v}_y|a\rangle \left[\frac{\delta(\mathcal{E} - E_a)}{\mathcal{E} + \Omega - E_b - i0} - \frac{\delta(\mathcal{E} - \Omega - E_a)}{\mathcal{E} - E_b - i0} - \frac{\delta(\mathcal{E} + \Omega - E_b)}{\mathcal{E} - E_a + i0} + \frac{\delta(\mathcal{E} - E_b)}{\mathcal{E} - \Omega - E_a + i0} \right] \right\rangle. \quad (2.167)$$

Интегрируя полученное выражение по Ω , получаем

$$\sigma_{xy}^{(II)} = \lim_{\omega \rightarrow 0} \text{Re} \frac{e^2}{2\pi\omega} \int d\mathcal{E} n_F(\mathcal{E}) \left\langle \sum_{ab} \frac{\langle a|\hat{v}_x|b\rangle \langle b|\hat{v}_y|a\rangle}{E_b - E_a - \omega} \left[\frac{1}{\mathcal{E} - E_b - i0} - \frac{1}{\mathcal{E} + \omega - E_b + i0} - \frac{1}{\mathcal{E} - \omega - E_a - i0} + \frac{1}{\mathcal{E} - E_a + i0} \right] \right\rangle. \quad (2.168)$$

Раскладывая по ω и беря предел $\omega \rightarrow 0$, находим

$$\begin{aligned} \sigma_{xy}^{(II)} &= - \lim_{\omega \rightarrow 0} \text{Im} \frac{e^2}{\omega} \int d\mathcal{E} n_F(\mathcal{E}) \left\langle \sum_{ab} \frac{\langle a|\hat{v}_x|b\rangle \langle b|\hat{v}_y|a\rangle}{E_b - E_a} \left[\delta(\mathcal{E} - E_b) - \delta(\mathcal{E} - E_a) \right] \right\rangle \\ &+ \text{Re} \frac{e^2}{2\pi} \int d\mathcal{E} n_F(\mathcal{E}) \left\langle \sum_{ab} \frac{\langle a|\hat{v}_x|b\rangle \langle b|\hat{v}_y|a\rangle}{E_b - E_a} \left\{ \frac{2\pi i}{E_b - E_a} \left[\delta(\mathcal{E} - E_b) - \delta(\mathcal{E} - E_a) \right] - \frac{1}{(\mathcal{E} - E_a - i0)^2} + \frac{1}{(\mathcal{E} - E_b + i0)^2} \right\} \right\rangle. \end{aligned} \quad (2.169)$$

Можно показать (см. задачу 2.5.2), что член пропорциональный $1/\omega$ тождественно равен нулю. Кроме операторов скорости удобно ввести операторы координат, которые связаны с операторами скорости стандартными соотношениями, $\hat{v}_x = i[\mathcal{H}, x]$ и $\hat{v}_y = i[\mathcal{H}, y]$. Тогда выражение (2.169) можно переписать в следующей форме:

$$\sigma_{xy}^{(II)} = -e^2 \text{Im} \int d\mathcal{E} n_F(\mathcal{E}) \left\langle \sum_a \langle a|[x, y]|a\rangle \delta(\mathcal{E} - E_a) - \frac{e^2}{2\pi} \text{Im} \int d\mathcal{E} n_F(\mathcal{E}) \left\langle \sum_a \left[\frac{\langle a|x\hat{v}_y|a\rangle}{(\mathcal{E} - E_a + i0)^2} - \frac{\langle a|\hat{v}_y x|a\rangle}{(\mathcal{E} - E_a - i0)^2} \right] \right\rangle \right\rangle. \quad (2.170)$$

В стандартном координатном представлении $[x, y] = 0$, так что находим

$$\sigma_{xy}^{(II)} = -\frac{e^2}{\pi} \text{Im} \int d\mathcal{E} n_F(\mathcal{E}) \left\langle \sum_a \frac{\langle a|x\hat{v}_y|a\rangle}{(\mathcal{E} - E_a + i0)^2} \right\rangle. \quad (2.171)$$

Используем теперь соотношение $ex\hat{v}_y/c = -\partial\mathcal{H}/\partial B$. Тогда получаем

$$\begin{aligned} \sigma_{xy}^{(II)} &= \frac{ec}{\pi\mathcal{S}} \text{Im} \int d\mathcal{E} n_F(\mathcal{E}) \left\langle \text{Tr} \frac{\partial\mathcal{H}/\partial B}{(\mathcal{E} - \mathcal{H} + i0)^2} \right\rangle = \frac{ec}{\pi\mathcal{S}} \text{Im} \int d\mathcal{E} n_F(\mathcal{E}) \frac{\partial}{\partial B} \left\langle \text{Tr} \frac{1}{\mathcal{E} - \mathcal{H} + i0} \right\rangle \\ &= -ec \frac{\partial}{\partial B} \int d\mathcal{E} n_F(\mathcal{E}) D(\mathcal{E}) \equiv -ec \frac{\partial n_e}{\partial B}. \end{aligned} \quad (2.172)$$

Заметим, что при выводе формулы (2.172) мы вынесли производную по магнитному полю за знак суммы по собственным состояниям. Может показаться, что так делать нельзя, т.к. число состояний на уровне Ландау пропорционально магнитному полю. Однако, чтобы не обсуждать эту специальную ситуацию, можно рассмотреть задачу в полоске, конечной ширины W , где энергия на уровне Ландау зависит от волнового числа k (в калибровке Ландау), а число уровней формально совпадает с числом допустимых значений k , которое в данном случае бесконечно. После перестановки знаков производной и суммы можно взять предел $W \rightarrow \infty$ и вернуться к задаче на плоскости.

Другая тонкость, на которую стоит обратить внимание, состоит в том, что решение уравнения $\hat{v}_x = i[\mathcal{H}, x]$ определяет x с точностью до оператора, который коммутирует с гамильтонианом \mathcal{H} . Например, в случае отсутствия случайного потенциала и бесконечной плоскости, вместо x можно выбрать оператор η_x , см. ур. (2.34). Аналогично, вместо оператора y можно выбрать η_y . Тогда первый член в правой части равенства (2.171) будет давать ненулевое выражение. Используя коммутационное соотношение $[\eta_x, \eta_y] = i\ell_H^2$, можно показать, что он в точности компенсирует тот факт, что сумма по всем состояниям $\propto B$ и выносить знак производной по B за знак суммы в этом случае нельзя (см. задачу 2.5.8).

Подчеркнем, что формула (2.172) является общей; при ее выводе не было сделано никаких приближений. Интересно, что $\sigma_{xy}^{(II)}$ выражается только через термодинамические величины и явно не содержит времени рассеяния на примесях. Это связано с тем, что холловская проводимость является не диссипативным откликом и поэтому, содержит вклад, который явно не зависит от примесного рассеяния. Полученную формулу $\sigma_{xy}^{(II)}$ можно переписать через намагниченность системы M :

$$\sigma_{xy}^{(II)} = -ec \frac{\partial M}{\partial \mu}. \quad (2.173)$$

Так как в образце конечного размера намагниченность связана с краевым током, то формула (2.173) является фактически отражением соотношения (1.31).

Заметим, что в самосогласованном борновском приближении плотность состояний удовлетворяет следующему соотношению

$$B \frac{\partial D(\mathcal{E})}{\partial B} = -\mathcal{E} \frac{\partial D(\mathcal{E})}{\partial \mathcal{E}}. \quad (2.174)$$

Используя это соотношение, мы можем переписать $\sigma_{xy}^{(II)}$ в следующем виде

$$\sigma_{xy}^{(II)} \simeq -ec \frac{n_e}{B} + \frac{ec}{B} \int d\mathcal{E} \left(-\frac{\partial n_F(\mathcal{E})}{\partial \mathcal{E}} \right) \mathcal{E} D(\mathcal{E}). \quad (2.175)$$

Вместе с выражением (2.166) в итоге получаем ответ для холловской проводимости в самосогласованном борновском приближении

$$\sigma_{xy} = -ec \frac{n_e}{B} + \int d\mathcal{E} \left(-\frac{\partial n_F(\mathcal{E})}{\partial \mathcal{E}} \right) \Delta \sigma_{xy}(\mathcal{E}), \quad \Delta \sigma_{xy}(\mathcal{E}) = \frac{ec}{B} \frac{\mathcal{E} D(\mathcal{E})}{1 + \omega_c^2 \tau_{\text{tr},1}^2(\mathcal{E})} \equiv \frac{\sigma_{xx}(\mathcal{E})}{\omega_c \tau_{\text{tr},1}(\mathcal{E})}. \quad (2.176)$$

Полученная формула имеет прозрачный физический смысл. При приложении внешнего электрического поля \mathbf{E} вдоль оси y центр электронной орбиты дрейфует со скоростью $v_x = -cE_y/B$. Это приводит к вкладу в проводимость σ_{xy} , равному $-ecn_e/B$. Кроме вклада от дрейфа электронов есть еще вклад от силы трения, $F_x \simeq m_e v_x / \tau_{\text{tr},1}(\mathcal{E})$, возникающей из-за смещения центра орбиты при рассеянии электрона на примесях. Эта дополнительная сила,

действующая на электрон, приводит к дополнительному току $\Delta j_x = \sigma_{xx}(\mathcal{E})F_x/e$, который соответствует следующему вкладу в холловскую проводимость $\Delta\sigma_{xy}(\mathcal{E}) = \sigma_{xx}(\mathcal{E})/[\omega_c\tau_{tr,1}(\mathcal{E})]$.

В пределе слабых магнитных полей, $\omega_c\tau_0 \ll 1$, получим

$$\sigma_{xy} = \frac{e^2 n_e}{m_e} \frac{\omega_c \tau_{tr,1}^2}{1 + \omega_c^2 \tau_{tr,1}^2} \left(1 + \frac{2}{\omega_c^2 \tau_{tr,1}^2} \frac{1 + 3\omega_c^2 \tau_{tr,1}^2}{1 + \omega_c^2 \tau_{tr,1}^2} \frac{2\pi^2 T / \omega_c}{\sinh[2\pi^2 T / \omega_c]} e^{-\pi / (\omega_c \tau_0)} \cos \frac{2\pi\mu}{\omega_c} \right). \quad (2.177)$$

Эта формула описывает осцилляции Шубникова – де Гааза для холловской проводимости.

В пределе сильных магнитных полей, $\omega_c\tau_{tr,1} \gg 1$, и низких температур, находим

$$\Delta\sigma_{xy} = \frac{e^2}{\pi^2 \hbar} \left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{\Gamma^3(\varepsilon_n)}{\omega_c \Gamma^2} \frac{\tau_0^2}{\tau_{tr,1}^2}. \quad (2.178)$$

В сильных магнитных полях классический эффект Холла сохраняется с точностью до членов порядка $\mathcal{O}(\Gamma/\omega_c)$. Таким образом, самосогласованного борновского приближения совершенно недостаточно для объяснения целочисленного квантового эффекта Холла.

Задачи:

2.5.1 Вывести выражение для осцилляций Шубникова – де Гааза для диссипативной проводимости, ур. (2.159).

2.5.2 Показать, что член пропорциональный $1/\omega$ в ур. (2.169) тождественно равен нулю.

2.5.3 Вывести выражение для осцилляций Шубникова – де Гааза для холловской проводимости, ур. (2.177).

2.5.4 Вывести следующую формулу для проводимости системы невзаимодействующих электронов

$$\begin{aligned} \sigma_{ab}(\omega) = & \frac{e^2}{2\pi\mathcal{S}} \int d\mathcal{E} n_F(\mathcal{E}) \text{Tr} \left\{ \hat{v}_a \left[\mathcal{G}^R(\mathcal{E}) - \mathcal{G}^A(\mathcal{E}) \right] \hat{v}_b \mathcal{G}^R(\mathcal{E} + \omega) \mathcal{G}^R(\mathcal{E}) \right. \\ & \left. - \hat{v}_a \mathcal{G}^A(\mathcal{E} - \omega) \mathcal{G}^A(\mathcal{E}) \hat{v}_b \left[\mathcal{G}^R(\mathcal{E}) - \mathcal{G}^A(\mathcal{E}) \right] \right\}. \end{aligned}$$

2.5.5 Вывести следующую формулу для проводимости системы невзаимодействующих электронов в магнитном поле

$$\begin{aligned} \sigma_{ab}(\omega) = & \frac{e^2 \omega}{2\pi\mathcal{S}} \int d\mathbf{r} d\mathbf{r}' x'_a (x'_b - x_b) \int d\mathcal{E} \left\{ \left[n_F(\mathcal{E}) - n_F(\mathcal{E} - \omega) \right] \mathcal{G}^R(\mathcal{E}; \mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathcal{G}^A(\mathcal{E} - \omega; \mathbf{r}', \mathbf{r}) \right. \\ & \left. + n_F(\mathcal{E}) \left[\mathcal{G}^R(\mathcal{E} + \omega; \mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathcal{G}^R(\mathcal{E}; \mathbf{r}', \mathbf{r}) - \mathcal{G}^A(\mathcal{E}; \mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathcal{G}^A(\mathcal{E} - \omega; \mathbf{r}', \mathbf{r}) \right] \right\}. \end{aligned}$$

2.5.6 Сдвиговая вязкость определяется формулой Кубо, аналогичной формуле (2.150), в которой оператор скорости \hat{v}_x надо заменить на оператор $2i\hat{T}_{xy}$, где $\hat{T}_{jk} = m_e(\hat{v}_j \hat{v}_k + \hat{v}_k \hat{v}_j)/2$ оператор тензора напряжений. Вычислить сдвиговую вязкость в самосогласованном борновском приближении.

2.5.7 Холловская вязкость определяется формулой Кубо, аналогичной формулам (2.162) и (2.163), в которых оператор скорости \hat{v}_x надо заменить на оператор $2i\hat{T}_{xy}$, а \hat{v}_y на $i(\hat{T}_{yy} - \hat{T}_{xx})/4$. Вычислить холловскую вязкость в самосогласованном борновском приближении.

2.5.8 Для случая бесконечной плоскости и в отсутствие случайного потенциала, выбирая операторы x и y равными η_x и η_y , соответственно, получить из выражения (2.170) выражение (2.172) для $\sigma_{xy}^{(II)}$.

2.6 Коллективные возбуждения в магнитном поле (квантовое рассмотрение)

Задачи:

2.6.1

Глава 3

Плотность состояний на уровнях Ландау за рамками самосогласованного борновского приближения

Введение

3.1 Хвосты плотности состояний и динамическая проводимость на нижнем уровне Ландау

В предыдущем разделе мы отметили, что на N -м уровне Ландау существуют состояния, которые лежат там, где вычисления в самосогласованном борновском приближении дают нулевой результат. Проследим, как они возникают на примере нижнего уровня Ландау. Будем следовать работам Л. Иоффе, А. Ларкина [43] и И. Аффлека (I. Affleck) [44].

Для иллюстрации рассмотрим сначала следующий, как говорят, нульмерный пример. Рассмотрим интеграл

$$D_0(\mathcal{E}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\gamma}} \int_{-\infty}^{\infty} dV e^{-V^2/2\gamma} \delta(\mathcal{E} - V) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\gamma}} e^{-\mathcal{E}^2/2\gamma}. \quad (3.1)$$

При выполнении условий $\mathcal{E}^2 \gg \gamma \gg 1$ получим этот очевидный результат другим способом. Функцию $D_0(\mathcal{E})$ можно представить в виде

$$D_0(\mathcal{E}) = -\frac{1}{\pi} \text{Im} G^R(\mathcal{E}), \quad (3.2)$$

$$G^R(\mathcal{E}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\gamma}} \int_{-\infty}^{\infty} dV e^{-V^2/2\gamma} \frac{1}{\mathcal{E} - V + i0}. \quad (3.3)$$

Воспользуемся представлением

$$\frac{1}{\mathcal{E} - V + i0} = -\frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\phi_1 d\phi_2 e^{i\phi^*(\mathcal{E}-V+i0)\phi}, \quad (3.4)$$

где $\phi = \phi_1 + i\phi_2$, а $\phi_{1,2}$ – это две действительные переменные. Производя гауссово интегрирование по переменной V , получим

$$G^R(\mathcal{E}) = -\frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\phi_1 d\phi_2 e^{i(\mathcal{E}+i0)|\phi|^2 - \gamma|\phi|^4/2}. \quad (3.5)$$

Перейдем к интегрированию по переменной $r = |\phi|^2$, тогда

$$G^R(\mathcal{E}) = -i \int_0^{\infty} dr e^{ir(\mathcal{E}+i0) - \gamma r^2/2}. \quad (3.6)$$

Будем для определенности считать, что $\mathcal{E} > 0$, и вычислим интеграл в выражении (3.6) приближенно с помощью метода перевала. Выражение в экспоненте имеет максимум при $r_* = i\mathcal{E}/\gamma$. Деформируем контур интегрирования так, чтобы он проходил через точку r_* (рис. 3.1). Представим r в виде $r = r_* + x$, где величину x будем считать малой. Тогда получим

$$G^R(\mathcal{E}) = -ie^{-\mathcal{E}^2/(2\gamma)} \int dx e^{-\gamma x^2/2}. \quad (3.7)$$

Здесь интегрирование идет по контуру C вблизи точки r_* . Легко проверить, что интеграл по вертикальной части контура не дает вклад в $\text{Im} G^R(\mathcal{E})$. Пользуясь условием $\gamma \gg 1$, интеграл по горизонтальной части контура можно распространить до бесконечности:

$$\text{Im} G^R(\mathcal{E}) = -e^{-\mathcal{E}^2/(2\gamma)} \int_0^{\infty} dx e^{-\gamma x^2/2} = -\frac{\pi}{\sqrt{2\pi\gamma}} e^{-\mathcal{E}^2/(2\gamma)}. \quad (3.8)$$

Отсюда получаем выражение (3.1). Таким образом, выражение для $D_0(\mathcal{E})$ при больших зна-

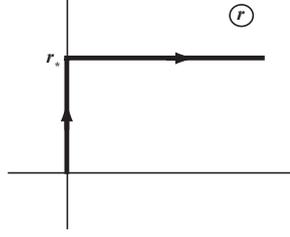


Рис. 3.1: Контур интегрирования.

чениях \mathcal{E} можно получить методом перевала.

Применим идею, изложенную выше, для вычисления хвостов плотности состояний на нижнем уровне Ландау. Представим запаздывающую функцию Грина с помощью функционального интеграла по бозонным $(\phi(\mathbf{r}), \phi^*(\mathbf{r}))$ и фермионным $(\psi(\mathbf{r}), \bar{\psi}(\mathbf{r}))$ переменным:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{\mathcal{E}}^R(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= \langle \mathbf{r} | \frac{1}{E - \mathcal{H} + i0} | \mathbf{r}' \rangle = -i \int D\phi_1 D\phi_2 D\bar{\psi} D\psi \psi(\mathbf{r}) \bar{\psi}(\mathbf{r}') \\ &\quad \times \exp \left[i \int d\mathbf{r} \bar{\Phi}(\mathbf{r}) (\mathcal{E} - \mathcal{H} + i0) \Phi(\mathbf{r}) \right], \end{aligned} \quad (3.9)$$

где \mathcal{H} определен, например, выражением (2.103), а $\bar{\Phi} = (\phi^*, \bar{\psi})$ и $\Phi = (\phi, \psi)$, причем $\phi = \phi_1 + i\phi_2$ и $\phi_{1,2}$ – это две действительные функциональные переменные. Пользуясь соотношением

$$\left\langle \exp \left(\int d\mathbf{r} f(\mathbf{r}) V(\mathbf{r}) \right) \right\rangle = \exp \left(\frac{\gamma}{2} \int d\mathbf{r} f^2(\mathbf{r}) \right), \quad (3.10)$$

которое следует из (2.106), находим усредненную функцию Грина

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{G}_{\mathcal{E}}^R(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \rangle &= -i \int D\phi_1 D\phi_2 D\bar{\psi} D\psi \psi(\mathbf{r}) \bar{\psi}(\mathbf{r}') \exp \int d\mathbf{r} \times \\ &\quad \times \left[i \bar{\Phi}(\mathbf{r}) (\mathcal{E} - \mathcal{H}_0 + i0) \Phi(\mathbf{r}) - \frac{\gamma}{2} (\bar{\Phi}(\mathbf{r}) \Phi(\mathbf{r}))^2 \right]. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Будем считать, что $\epsilon = \mathcal{E} - \omega_c/2 < 0$ и удовлетворяет условию $\omega_c \gg |\epsilon| \gg \Gamma = \sqrt{2\gamma/\pi l_H^2}$. При этих условиях интеграл по бозонным переменным $\phi_{1,2}(\mathbf{r})$ может быть вычислен методом перевала. Так как $|\epsilon|$ больше γ , то удобно сделать поворот контура интегрирования на угол, равный $-\pi/4$:

$$\bar{\Phi} \rightarrow e^{-i\pi/4} \bar{\Phi}, \quad \Phi \rightarrow e^{-i\pi/4} \Phi. \quad (3.12)$$

Тогда получим

$$\langle \mathcal{G}_{\mathcal{E}}^R(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \rangle = \int D\phi_1 D\phi_2 D\bar{\psi} D\psi \psi(\mathbf{r}) \bar{\psi}(\mathbf{r}') \exp(-S), \quad (3.13)$$

$$S = - \int d\mathbf{r} \left[\bar{\Phi}(\mathbf{r}) (\mathcal{E} - \mathcal{H}_0 + i0) \Phi(\mathbf{r}) + \frac{\gamma}{2} (\bar{\Phi}(\mathbf{r}) \Phi(\mathbf{r}))^2 \right]. \quad (3.14)$$

Классическое уравнение движения для бозонной части действия S имеет вид

$$\frac{\delta S}{\delta \phi^*(\mathbf{r})} = (\mathcal{E} - \mathcal{H}_0) \phi(\mathbf{r}) + \gamma |\phi(\mathbf{r})|^2 \phi(\mathbf{r}) = 0. \quad (3.15)$$

Обозначим решение уравнения (3.15) как $\phi_{cl}(\mathbf{r})$ и положим $\phi(\mathbf{r}) = \phi_{cl}(\mathbf{r}) + \delta\phi(\mathbf{r})$. Затем

разложим действие S до второго порядка по $\delta\phi(\mathbf{r})$ и фермионным переменным $\bar{\psi}, \psi$. Тогда

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{G}_{\mathcal{E}}^R(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \rangle &= e^{-S_{cl}} \int D\bar{\psi} D\psi \psi(\mathbf{r}) \bar{\psi}(\mathbf{r}') e^{-\delta S_f} \times \\ &\times \int D\delta\phi_1 D\delta\phi_2 e^{-\delta S_b}, \end{aligned} \quad (3.16)$$

где

$$S_{cl} = - \int d\mathbf{r} \left[\phi_{cl}^*(\mathbf{r})(\mathcal{E} - \mathcal{H}_0)\phi_{cl}(\mathbf{r}) + \frac{\gamma}{2} |\phi_{cl}(\mathbf{r})|^4 \right], \quad (3.17)$$

$$\delta S_f = - \int d\mathbf{r} \bar{\psi}(\mathbf{r})(\mathcal{E} - \mathcal{H}_0 + \gamma |\phi_{cl}(\mathbf{r})|^2)\psi(\mathbf{r}), \quad (3.18)$$

$$\begin{aligned} \delta S_b &= - \int d\mathbf{r} \left[\delta\phi^*(\mathbf{r})(\mathcal{E} - \mathcal{H}_0 + 2\gamma |\phi_{cl}(\mathbf{r})|^2)\delta\phi(\mathbf{r}) + \right. \\ &\left. + \frac{\gamma}{2} |\phi_{cl}(\mathbf{r})|^2 [(\delta\phi^*(\mathbf{r}))^2 + (\delta\phi(\mathbf{r}))^2] \right]. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Прежде чем вычислять дальше, найдем нулевые моды, т.е. такие $\psi(\mathbf{r})$ и $\delta\phi(\mathbf{r})$, при которых δS_f и δS_b обращаются в нуль. Очевидно, что если мы выберем $\psi(\mathbf{r}) = \eta_0 \phi_{cl}(\mathbf{r})$ и, соответственно, $\bar{\psi}(\mathbf{r}) = \bar{\eta}_0 \phi_{cl}^*(\mathbf{r})$, где η_0 и $\bar{\eta}_0$ – грассмановы переменные, то $\delta S_f = 0$. Можно показать, что больше фермионных нулевых мод нет. Будем считать, что $\phi_{cl}(\mathbf{r})$ – это действительная функция, и тогда выберем $\delta\phi(\mathbf{r}) = i\delta\theta \phi_{cl}(\mathbf{r})$, где $\delta\theta$ – действительное число. В результате имеем $\delta S_b = 0$. Эта нулевая бозонная мода описывает инвариантность бозонного действия относительно глобального поворота $\phi: \phi(\mathbf{r}) \rightarrow \phi(\mathbf{r})e^{i\theta}$. Выберем теперь

$$\delta\phi = (\partial_\mu + iA_\mu)\phi_{cl}(\mathbf{r})x_\mu^0, \quad (3.20)$$

где $x_\mu^0 = (x^0, y^0)$ – это два действительных числа. Тогда можно показать, что $\delta S_b = 0$. Эти две бозонные моды связаны с инвариантностью действия относительно преобразования $\phi(\mathbf{r}) \rightarrow \exp[ieB\epsilon_{\nu\mu}x_\nu x_\mu^0/2]\phi(\mathbf{r} + \mathbf{r}^0)$.

Прежде чем решать уравнение (3.15), найдем спектр флуктуаций $\delta\phi(\mathbf{r})$ и $\psi(\mathbf{r})$. Разложим $\delta\phi, \psi, \bar{\psi}$ по волновым функциям нижнего уровня Ландау (2.13):

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{r}) &= \sum_{m \geq 0} \eta_m \psi_{0,m}(\rho, \theta), & \bar{\psi}(\mathbf{r}) &= \sum_{m \geq 0} \bar{\eta}_m \psi_{0,m}^*(\rho, \theta), \\ \delta\phi(\mathbf{r}) &= \sum_{m \geq 0} a_m \psi_{0,m}(\rho, \theta). \end{aligned} \quad (3.21)$$

Здесь $a_m = u_m + iv_m$ – это набор комплексных переменных, а η_m и $\bar{\eta}_m$ – независимые наборы грассмановых переменных. Тогда получим

$$\delta S_b = \sum_{m \geq 0} (|\epsilon| - 2\gamma J_m) |a_m|^2 - \frac{\gamma}{2} J_0 [a_0^2 + (a_0^*)^2], \quad (3.22)$$

$$\delta S_f = \sum_{m \geq 0} \bar{\eta}_m (|\epsilon| - \gamma J_m) \eta_m, \quad (3.23)$$

где

$$J_m = \int d\mathbf{r} |\phi_{cl}(\mathbf{r})|^2 |\psi_{0,m}(\rho, \theta)|^2. \quad (3.24)$$

Нахождение точного решения уравнения (3.15) представляет собой сложную задачу. Заметим, что функция ϕ_{cl} не может принадлежать только нижнему уровню Ландау. Будем

пренебрегать связанными с этим поправками порядка $|\epsilon|/\omega_c$. Для дальнейшего вычисления применим вариационный метод. Выберем пробную функцию для $\phi_{cl}(\mathbf{r})$ в виде $A_m\psi_{0,m}(\rho, \theta)$. Тогда значение классического действия равно

$$S_{cl}[A_m\psi_{0,m}(\rho, \theta)] = |\epsilon||A_m|^2 - \frac{\Gamma^2}{16} \frac{(2m)!}{4^m(m!)^2} |A_m|^4. \quad (3.25)$$

Как видно, S_{cl} как функция $|A_m|^2$ имеет минимум при $|A_m|^2 = 0$ и максимум, равный

$$S_{cl} = \frac{4\epsilon^2}{\Gamma^2} \frac{4^m(m!)^2}{(2m)!} \quad \text{при} \quad |A_m|^2 = \frac{8|\epsilon|}{\Gamma^2} \frac{4^m(m!)^2}{(2m)!}. \quad (3.26)$$

Минимальное значение среди этих максимумов достигается при $m = 0$. Поэтому будем считать, что $\phi_{cl}(\mathbf{r}) = A_0\psi_{0,0}(\rho, \theta)$. Заметим, что подмешивание к этому решению функций $\psi_{0,m}(\rho, \theta)$ с $m \geq 1$ приводит только к увеличению значения S_{cl} . Выбранное нами решение $\phi_{cl}(\mathbf{r})$ соответствует максимуму действия, что как мы увидим, приведет к бозонной моде с отрицательным собственным значением.

Используя результат $J_m = 2^{-m}(|\epsilon|/\gamma)$, находим

$$\begin{aligned} \delta S_b &= -2|\epsilon|u_0^2 + 0v_0^2 + 0[u_1^2 + v_1^2] + \\ &+ \sum_{m \geq 2} |\epsilon|(1 - 2^{-m+1})[u_m^2 + v_m^2], \end{aligned} \quad (3.27)$$

$$\delta S_f = 0\bar{\eta}_0\eta_0 + \sum_{m \geq 1} \bar{\eta}_m|\epsilon|(1 - 2^{-m})\eta_m. \quad (3.28)$$

В согласии с приведенным выше обсуждением нулевых мод, получились три нулевые бозонные моды (v_0, u_1, v_1) , и одна нулевая фермионная $(\eta_0, \bar{\eta}_0)$. Обратим внимание, что возникла бозонная мода (u_0) с отрицательным собственным значением.

Вычислим величину

$$\int D\delta\phi_1 D\delta\phi_2 e^{-\delta S_b}. \quad (3.29)$$

Перейдем от интегрирования по функциональному пространству $\phi_{1,2}(\mathbf{r})$ к интегрированию по нулевым модам и по массивным модам u_m, v_m . При этом интегралы по нулевым модам необходимо вычислять точно. Для этого вместо переменных v_0, u_1, v_1 будем использовать коллективные координаты $\delta\theta, x_0, y_0$ (см., [45]). Тогда

$$\begin{aligned} \int D\delta\phi_1 D\delta\phi_2 e^{-\delta S_b} &= \int_0^{2\pi} \frac{d\delta\theta}{\sqrt{\pi}} \tilde{\mathcal{J}}_0 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx_0 dy_0}{\pi} \mathcal{J}_1^2 \int \frac{du_0}{\sqrt{\pi}} \mathcal{J}_0 e^{2|\epsilon|u_0^2} \times \\ &\times \prod_{m \geq 2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{du_m dv_m}{\pi} \mathcal{J}_m^2 e^{-|\epsilon|(1-2^{-m+1})[u_m^2 + v_m^2]} \right). \end{aligned} \quad (3.30)$$

Величины \mathcal{J}_m и $\tilde{\mathcal{J}}_0$ представляют собой якобианы соответствующего преобразования. Найдем их с помощью вычисления нормы в функциональном пространстве:

$$\begin{aligned} \int d^2\mathbf{r} |\delta\phi(\mathbf{r})|^2 &= \int d^2\mathbf{r} \left| u_0\psi_{0,0} + i\phi_{cl}\delta\theta + (\partial_\mu + ieA_\mu)\phi_{cl}\delta x_\mu^0 + \right. \\ &\left. + \sum_{m \geq 2} a_m\psi_{0,m} \right|^2 = u_0^2 \mathcal{J}_0^2 + |\delta\theta|^2 \tilde{\mathcal{J}}_0^2 + [(\delta x^0)^2 + (\delta y^0)^2] \mathcal{J}_1^2 + \end{aligned}$$

$$+ \sum_{m \geq 2} [u_m^2 + v_m^2] \mathcal{J}_m^2, \quad (3.31)$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_0^2 &= \int d^2 \mathbf{r} |\psi_{0,0}|^2 = 1, \\ \tilde{\mathcal{J}}_0^2 &= \int d^2 \mathbf{r} |\phi_{cl}|^2 = \frac{8|\epsilon|}{\Gamma^2}, \\ \mathcal{J}_1^2 &= \frac{1}{2} \int d^2 \mathbf{r} |(\partial_\mu + ieA_\mu)\phi_{cl}|^2 = \frac{2\pi|\epsilon|}{\gamma}, \\ \mathcal{J}_m^2 &= \int d^2 \mathbf{r} |\psi_{0,m}|^2 = 1, \quad m \geq 2. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Для вычисления интеграла по переменной u_0 используем результаты нульмерного примера, разобранный в начале раздела. Повернем контур интегрирования на угол $-\pi/2$: $u_0 \rightarrow -iu_0$. Тогда

$$\int du_0 e^{2|\epsilon|u_0^2} = -i \int_0^\infty du_0 e^{-2|\epsilon|u_0^2} = -i \sqrt{\frac{\pi}{8|\epsilon|}}. \quad (3.33)$$

В итоге находим

$$\int D\delta\phi_1 D\delta\phi_2 e^{-\delta S_b} = -i 16\sqrt{\pi} \frac{\mathcal{S}}{2\pi l_H^2 \Gamma^3} \frac{|\epsilon|}{\Gamma^3} \prod_{m \geq 2} [|\epsilon|(1 - 2^{-m+1})]^{-1}. \quad (3.34)$$

Аналогично вычисляем фермионный интеграл:

$$\begin{aligned} \int D\bar{\psi} D\psi \psi(\mathbf{r}) \bar{\psi}(\mathbf{r}') e^{-\delta S_f} &= \int d\bar{\eta}_0 d\eta_0 \mathcal{J}_0 \eta_0 \bar{\eta}_0 \psi_{0,0}(\rho, \theta) \psi_{0,0}^*(\rho', \theta') \\ &\times \prod_{m \geq 1} \int d\bar{\eta}_m d\eta_m \mathcal{J}_m e^{-\bar{\eta}_m |\epsilon| (1 - 2^{-m}) \eta_m} = \\ &= \psi_{0,0}(\rho, \theta) \psi_{0,0}^*(\rho', \theta') \prod_{m \geq 1} [|\epsilon|(1 - 2^{-m})]. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Собирая полученные выше результаты, находим

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{G}_{\mathcal{E}}^R(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \rangle &= -i \psi_{0,0}(\rho, \theta) \psi_{0,0}^*(\rho', \theta') 16\sqrt{\pi} \frac{\mathcal{S}}{2\pi l_H^2 \Gamma^3} e^{-4\epsilon^2/\Gamma^2} \times \\ &\times \prod_{m \geq 2} [|\epsilon|(1 - 2^{-m+1})]^{-1} \prod_{m \geq 1} [|\epsilon|(1 - 2^{-m})] = \\ &= -i \psi_{0,0}(\rho, \theta) \psi_{0,0}^*(\rho', \theta') \frac{8\mathcal{S}}{2\sqrt{\pi} l_H^2 \Gamma^3} e^{-4\epsilon^2/\Gamma^2}. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Окончательно получаем следующее выражение для плотности состояний

$$D(\mathcal{E}) = -\frac{1}{\pi} \int \frac{d^2 \mathbf{r}}{\mathcal{S}} \text{Im} \langle \mathcal{G}_{\mathcal{E}}^R(\mathbf{r}, \mathbf{r}) \rangle = \frac{8}{\pi^{3/2}} \frac{\epsilon^2}{l_H^2 \Gamma^3} \exp\left(-\frac{4\epsilon^2}{\Gamma^2}\right). \quad (3.37)$$

Этот ответ справедлив, когда величина в показателе экспоненты большая, т.е. при $|\epsilon| \gg \Gamma/2$. Получающаяся плотность состояний изображена на рис. 2.8. Оценим, сколько состояний

находится в найденном нами хвосте:

$$2\pi l_H^2 \int_{\Gamma}^{\infty} d\epsilon D(\epsilon) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_2^{\infty} dx x^2 e^{-x^2} \simeq 0.02, \quad (3.38)$$

т.е. около двух процентов.

Согласно результатам вычислений в самосогласованом борновском приближении (см. (2.160) и (2.176)), величина $\sigma_{xx} = 0$, а $\sigma_{xy} = -ecn_e/B$ при энергиях $|\epsilon| > \Gamma$. Однако, как было показано выше, при $\epsilon < -\Gamma$ на нижнем уровне Ландау электронная концентрация экспоненциально мала, $n_e \propto \exp(-4\epsilon^2/\Gamma^2)$. Поэтому естественно было бы ожидать, что статические проводимости экспоненциально малы, $\sigma_{ab} \propto \exp(-4\epsilon^2/\Gamma^2)$. Как мы увидим ниже, это не так: в одноинстантонном приближении статические проводимости все же обращаются в нуль. В такой ситуации необходимо изучить поведение проводимости на конечной частоте ω , как это было сделано в работе [48].

Воспользуемся результатом (2.5.5) задачи из предыдущего раздела и запишем проводимость в виде

$$\sigma_{ab}(\omega) = \sigma_{ab}^{(-)}(\omega) + \sigma_{ab}^{(+)}(\omega), \quad (3.39)$$

где

$$\begin{aligned} \sigma_{ab}^{(\pm)}(\omega) &= \frac{e^2\omega}{4\pi\mathcal{S}} \int d\mathbf{r}d\mathbf{r}' x'_a(x'_b - x_b) \int d\mathcal{E} \left[n_F(\mathcal{E}_+) \pm n_F(\mathcal{E}_-) \right] \times \\ &\quad \times \langle K^{(\pm)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \mathcal{E}, \omega) \rangle, \end{aligned} \quad (3.40)$$

причем $\mathcal{E}_{\pm} = \mathcal{E} \pm \omega/2$ и

$$\begin{aligned} K^{(-)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \mathcal{E}, \omega) &= \sum_{p,p'=\pm} \frac{p-p'-2pp'}{2} \mathcal{G}^p(\mathcal{E}_+; \mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathcal{G}^{p'}(\mathcal{E}_-; \mathbf{r}', \mathbf{r}), \\ K^{(+)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \mathcal{E}, \omega) &= \sum_{p=\pm} p \mathcal{G}^p(\mathcal{E}_+; \mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathcal{G}^p(\mathcal{E}_-; \mathbf{r}', \mathbf{r}). \end{aligned} \quad (3.41)$$

Заметим, что член $\sigma_{ab}^{(-)}(\omega)$ представляет вклад в проводимость от состояний вблизи химического потенциала, а $\sigma_{ab}^{(+)}(\omega)$ вклад в проводимость от всех состояний под уровнем химического потенциала.

Начнем с вычисления величины $\sigma_{ab}^{(+)}(\omega)$. Так как эта величина содержит произведения только запаздывающих или опережающих функций Грина, ее вычисление не сильно отличается от вычисления плотности состояний. При малых значениях ω

$$\begin{aligned} K^{(+)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \mathcal{E}, \omega) &\approx 2i \operatorname{Im} \mathcal{G}^R(\mathcal{E}; \mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathcal{G}^R(\mathcal{E}; \mathbf{r}', \mathbf{r}) + \\ &+ \omega \Re \int d\mathbf{R} \left[\mathcal{G}^R(\mathcal{E}; \mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathcal{G}^R(\mathcal{E}; \mathbf{r}', \mathbf{R}) \mathcal{G}^R(\mathcal{E}; \mathbf{R}, \mathbf{r}) - (\mathbf{r} \leftrightarrow \mathbf{r}') \right]. \end{aligned} \quad (3.42)$$

Тогда при $\omega \rightarrow 0$ находим

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}^{(+)}(\omega) &= \frac{ie^2\omega}{\pi\mathcal{S}} \int d\mathcal{E} n_F(\mathcal{E}) \int d\mathbf{r}d\mathbf{r}' x'(x' - x) \times \\ &\quad \times \operatorname{Im} \langle \mathcal{G}^R(\mathcal{E}; \mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathcal{G}^R(\mathcal{E}; \mathbf{r}', \mathbf{r}) \rangle \end{aligned} \quad (3.43)$$

и

$$\begin{aligned} \sigma_{xy}^{(+)}(\omega) &= \frac{e^2\omega^2}{2\pi\mathcal{S}} \int d\mathcal{E} n_F(\mathcal{E}) \int d\mathbf{r} d\mathbf{r}' d\mathbf{R} \left[x'(y' - y) - x(y - y') \right] \times \\ &\times \Re \langle \mathcal{G}^R(\mathcal{E}; \mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathcal{G}^R(\mathcal{E}; \mathbf{r}', \mathbf{R}) \mathcal{G}^R(\mathcal{E}; \mathbf{R}, \mathbf{r}) \rangle. \end{aligned} \quad (3.44)$$

Аналогично тому, как это было сделано выше для $\langle \mathcal{G}^R(\mathcal{E}; \mathbf{r}, \mathbf{r}') \rangle$, представим $\langle \mathcal{G}^R(\mathcal{E}; \mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathcal{G}^R(\mathcal{E}; \mathbf{r}', \mathbf{r}) \rangle$ в виде функционального интеграла:

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{G}^R(\mathcal{E}; \mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathcal{G}^R(\mathcal{E}; \mathbf{r}', \mathbf{r}) \rangle &= \\ &= \int D\phi_1 D\phi_2 D\bar{\psi} D\psi \phi(\mathbf{r}) \phi^*(\mathbf{r}') \psi(\mathbf{r}') \bar{\psi}(\mathbf{r}) e^{-S}, \end{aligned} \quad (3.45)$$

где действие S определяется согласно (3.14). В главном приближении в предэкспоненте достаточно считать, что $\phi(\mathbf{r}) = \phi_d(\mathbf{r})$, $\psi(\mathbf{r}) = \eta_0 \psi_{0,0}(\mathbf{r})$ и $\bar{\psi}(\mathbf{r}) = \bar{\eta}_0 \psi_{0,0}^*(\mathbf{r})$. Тогда получаем

$$\langle \mathcal{G}^R(\mathcal{E}; \mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathcal{G}^R(\mathcal{E}; \mathbf{r}', \mathbf{r}) \rangle = -\frac{8i\pi|\epsilon|}{\Gamma^2} D(\mathcal{E}) \mathcal{S} |\psi_{0,0}(\mathbf{r})|^2 |\psi_{0,0}(\mathbf{r}')|^2, \quad (3.46)$$

где $D(\mathcal{E})$ - это плотность состояний (см. (3.37)). Производя интегрирование в (3.43) по координатам, окончательно находим

$$\sigma_{xx}^{(+)}(\omega) = -ie^2\omega l_H^2 \int d\mathcal{E} n_F(\mathcal{E}) \frac{8|\epsilon|}{\Gamma^2} D(\mathcal{E}). \quad (3.47)$$

При нуле температур и с учетом условия $|\epsilon| \ll \Gamma$ это выражение сводится к следующему:

$$\sigma_{xx}^{(+)}(\omega) = -ie^2\omega l_H^2 D(\mathcal{E}_F). \quad (3.48)$$

Для вычисления $\sigma_{xy}^{(+)}(\omega)$ представим произведение трех функций Грина в виде функционального интеграла:

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{G}^R(\mathcal{E}; \mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathcal{G}^R(\mathcal{E}; \mathbf{r}', \mathbf{R}) \mathcal{G}^R(\mathcal{E}; \mathbf{R}, \mathbf{r}) \rangle &= \\ &= - \int D\phi_1 D\phi_2 D\bar{\psi} D\psi \psi(\mathbf{r}) \bar{\psi}(\mathbf{r}') \phi(\mathbf{r}') \phi^*(\mathbf{R}) \psi(\mathbf{R}) \bar{\psi}(\mathbf{r}) e^{-S}. \end{aligned} \quad (3.49)$$

В главном приближении в предэкспоненте достаточно считать, что $\phi(\mathbf{r}) = \phi_d(\mathbf{r})$. С фермионными переменными дело обстоит сложнее. Если выбрать их всех равными нулевым модам $\psi(\mathbf{r}) = \eta_0 \psi_{0,0}(\mathbf{r})$ и $\bar{\psi}(\mathbf{r}) = \bar{\eta}_0 \psi_{0,0}^*(\mathbf{r})$, то интеграл обратится в нуль. Поэтому в одной паре фермионных переменных в предэкспоненте необходимо учесть и массивные флуктуации. Тогда

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{G}^R(\mathcal{E}; \mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathcal{G}^R(\mathcal{E}; \mathbf{r}', \mathbf{R}) \mathcal{G}^R(\mathcal{E}; \mathbf{R}, \mathbf{r}) \rangle &= \frac{8i\pi|\epsilon|}{\Gamma^2} D(\mathcal{E}) \mathcal{S} |\psi_{0,0}(\mathbf{R})|^2 \times \\ &\times \psi_{0,0}(\mathbf{r}') \psi_{0,0}^*(\mathbf{r}) \sum_{m \geq 1} \frac{\psi_{0,m}(\mathbf{r}) \psi_{0,m}^*(\mathbf{r}')}{|\epsilon|(1 - 2^{-m})} \end{aligned} \quad (3.50)$$

Интегрирование в (3.44) по координатам оставляет в сумме только член с $m = 1$, и мы находим

$$\sigma_{xy}^{(+)}(\omega) = \frac{8e^2\omega^2 l_H^2}{\Gamma^2} \int d\mathcal{E} n_F(\mathcal{E}) D(\mathcal{E}). \quad (3.51)$$

Используя условие $|\epsilon| \ll \Gamma$, это выражение при нуле температур можно переписать в виде

$$\sigma_{xy}^{(+)}(\omega) = \frac{e^2 \omega^2 l_H^2}{|\epsilon_F|} D(\mathcal{E}_F), \quad (3.52)$$

где $\epsilon_F = \mathcal{E}_F - \omega_c/2$.

Вычисление величин $\sigma_{ab}^{(-)}(\omega)$ представляет собой более сложную задачу, так как необходимо ввести два набора функциональных переменных Φ . Оказывается [48], что при нуле температур в одноинстантонном приближении $\sigma_{ab}^{(-)}(\omega) = \sigma_{ab}^{(+)}(\omega)$. Таким образом, окончательно находим

$$\sigma_{xx}(\omega) = -2ie^2 \omega l_H^2 D(\mathcal{E}_F), \quad \sigma_{xy}(\omega) = \frac{2e^2 \omega^2 l_H^2}{|\epsilon_F|} D(\mathcal{E}_F). \quad (3.53)$$

Выражение для продольной проводимости можно физически проинтерпретировать следующим образом. Для не очень малых частот ($|\omega| \gg (\epsilon^2/\Gamma) \exp(-4\epsilon^2/\Gamma^2)$) коэффициент диффузии, который описывает движение центров электронной орбиты из-за рассеяния электронов на примесях, можно оценить как $\mathcal{D} \sim i\omega l_H^2$. Тогда с помощью соотношения Эйнштейна получаем $\sigma_{xx}(\omega) \sim i\omega e^2 l_H^2 D(\mathcal{E}_F)$. Подчеркнем, что это выражение имеет вид, типичный для диэлектрика.

В рассматриваемом режиме продольное и холловское статические сопротивления можно определить как

$$\rho_{xx} = \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{\sigma_{xx}(\omega)}{\sigma_{xx}^2(\omega) + \sigma_{xy}^2(\omega)}, \quad \rho_{xy} = \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{\sigma_{yx}(\omega)}{\sigma_{xx}^2(\omega) + \sigma_{xy}^2(\omega)}. \quad (3.54)$$

Используя результаты (3.53), находим

$$\rho_{xx} = \infty, \quad \rho_{xy} = -\frac{B}{ecn_e} \left(\frac{\Gamma}{4|\epsilon_F|} \right)^2. \quad (3.55)$$

Как видно, продольное сопротивление обращается в бесконечность, а холловское сопротивление остается конечным, но экспоненциально большим. Состояние электронной системы с таким необычным поведением тензора сопротивления было названо холловским изолятором. Еще раз подчеркнем, в чем состоит необычность холловского изолятора. Обращение в нуль диссипативной и холловской проводимостей показывает, что электронные состояния с энергией вдали от центра уровня Ландау локализованы, а значит, электронная система при нуле температур представляет собой диэлектрик. Однако в таком диэлектрическом состоянии имеется конечное значение постоянной Холла R ($\rho_{xy} = -RB$), равной $R = 1/ecn_{\text{eff}}$, где величину $n_{\text{eff}} = n_e(4|\epsilon_F|/\Gamma)^2$ можно было бы интерпретировать как эффективное число носителей в случае металлического поведения. Экспериментальное наблюдение холловского изолятора затруднено наличием конечной температуры.

Задачи:

3.1.1 Оценить с экспоненциальной точностью плотность состояний в хвосте нижнего уровня Ландау для длинно-коррелированного случайного потенциала: $\langle V(\mathbf{q})V(-\mathbf{q}) \rangle = \gamma \exp(-q^2 d^2/2)$.

3.1.2 Показать, что отличное от нуля значение S_{cl} для $\phi_{cl}(\mathbf{r}) = A_0\psi_{0,0}(\rho, \theta) + A_1\psi_{0,1}(\rho, \theta)$ будет минимально при $A_1 = 0$.

3.1.3 В одноинстантонном приближении найти $\sigma_{ab}^{(-)}(\omega)$ при $\omega \rightarrow 0$.

3.2 Точное решение для плотности состояний на нижнем уровне Ландау

В этой лекции будем изучать привычный гамильтониан двумерной частицы в перпендикулярном магнитном поле в случайном потенциале

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m_e}(\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2 + V(\mathbf{r}). \quad (3.56)$$

Нашей целью будет вычислить среднюю плотность состояний на нижнем уровне Ландау. Как мы увидим, это можно сделать точно в пренебрежении подмешиванием других уровней Ландау.

Случайный потенциал будем характеризовать производящей функцией $g(\alpha)$, определенной в силу следующего равенства:

$$\left\langle \exp\left(-i \int d^2\mathbf{r} \alpha(\mathbf{r}) V(\mathbf{r})\right) \right\rangle = \exp\left(\int d^2\mathbf{r} g[\alpha(\mathbf{r})]\right). \quad (3.57)$$

В случае δ -коррелированного случайного потенциала $g(\alpha) = -\gamma\alpha^2/2$.

Другой характерной производящей функцией, которую часто рассматривают является $g(\alpha) = \rho[e^{-i\lambda\alpha} - 1]$. Она соответствует случаю пуассоновских примесей, когда случайный потенциал равен $V(\mathbf{r}) = \lambda \sum_{j=1}^{\mathcal{N}} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j)$, а вероятность иметь \mathcal{N} примесей равна $\exp(-\rho S)\rho^{\mathcal{N}}/\mathcal{N}!$.

Для вычисления усредненной по беспорядку одночастичной функции Грина будем использовать представление в виде функционального интеграла

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{\mathcal{E}}^R(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= -\frac{i}{Z} \int D\phi D\phi^* \phi(\mathbf{r}) \phi(\mathbf{r}') \exp\left[i \int d\mathbf{r}_1 \phi^*(\mathbf{r}_1) (\mathcal{E} - \mathcal{H} + i0) \phi(\mathbf{r}_1)\right], \\ Z^{-1} &= \int D\psi D\bar{\psi} \exp\left[i \int d\mathbf{r}_1 \bar{\psi}(\mathbf{r}_1) (\mathcal{E} - \mathcal{H} + i0) \psi(\mathbf{r}_1)\right]. \end{aligned} \quad (3.58)$$

Здесь ϕ – комплексное бозонное поле, а ψ и $\bar{\psi}$ – грассмановы (фермионные) поля.

Прежде чем проводить усреднение по случайному потенциалу, спроектируем все выражения на нижний уровень Ландау. Для этого выберем цилиндрическую калибровку $\mathbf{A} = (-By, Bx, 0)/2$ и представим бозонные и фермионные поля в виде разложения по базису волновых функций нижнего уровня Ландау в цилиндрической калибровке, см. ур. (2.13):

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{r}) &= u(z) e^{-|z|^2/(4l_H^2)}, & \phi^*(\mathbf{r}) &= u^*(z^*) e^{-|z|^2/(4l_H^2)}, \\ \psi(\mathbf{r}) &= v(z) e^{-|z|^2/(4l_H^2)}, & \bar{\psi}(\mathbf{r}) &= \bar{v}(z^*) e^{-|z|^2/(4l_H^2)}. \end{aligned} \quad (3.59)$$

Здесь $z = x + iy$ – комплексная координата, а $u(z)$ – произвольная голоморфная функция. Аналогично, $v(z)$ и $\bar{v}(z)$ – голоморфные грассмановы функции. Переходя к интегрированию

по голоморфным функциям, получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{\mathcal{E}}^R(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &\simeq -i \int DuDu^*DvD\bar{v}u^*(z^*)u(z')e^{-(|z|^2+|z'|^2)/4} \exp\left[i\varepsilon \int dz_1dz_1^*e^{-|z_1|^2/2}\right. \\ &\quad \left. \times (u^*(z_1^*)u(z_1) + \bar{v}(z_1^*)v(z_1)) - i \int dz_1dz_1^*V(\mathbf{r}_1)(u^*(z_1^*)u(z_1) + \bar{v}(z_1^*)v(z_1))e^{-|z_1|^2/2}\right]. \end{aligned} \quad (3.60)$$

Здесь $\varepsilon = \mathcal{E} - \omega_c/2 + i0$. Также здесь и далее для удобства мы считаем $l_H = 1$. Размерные единицы будут восстановлены в конечном ответе.

Теперь усредним функцию Грина по случайному потенциалу,

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{G}_{\mathcal{E}}^R(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \rangle &= -i \int DuDu^*DvD\bar{v}u^*(z^*)u(z')e^{-(|z|^2+|z'|^2)/4}e^S, \\ S &= \int dz_1dz_1^* \left\{ i\varepsilon e^{-|z_1|^2/2}(u^*u + \bar{v}v) + g \left[(u^*u + \bar{v}v)e^{-|z_1|^2/2} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (3.61)$$

Введем пару грассмановых координат θ и $\bar{\theta}$ с обычными условиями нормировки:

$$\int d\theta d\bar{\theta} \begin{pmatrix} 1 \\ \theta \\ \bar{\theta} \end{pmatrix} = 0, \quad \int d\theta d\bar{\theta} \bar{\theta}\theta = \frac{1}{\pi}. \quad (3.62)$$

Тогда из бозонных и фермионных полей построим комбинированные поля

$$\Phi(z, \theta) = u(z) + \frac{\theta}{\sqrt{2}}v(z), \quad \bar{\Phi}(z^*, \bar{\theta}) = u^*(z^*) + \bar{v}(z^*)\frac{\bar{\theta}}{\sqrt{2}}. \quad (3.63)$$

С помощью полей Φ и $\bar{\Phi}$ можно записать следующее равенство:

$$u^*(z^*)u(z) + \bar{v}(z^*)v(z) = 2\pi \int d\theta d\bar{\theta} e^{-\theta\bar{\theta}/2} \bar{\Phi}(z^*, \bar{\theta})\Phi(z, \theta). \quad (3.64)$$

Для полей Φ и $\bar{\Phi}$ существует еще одно важное соотношение:

$$\left[2\pi \int d\theta d\bar{\theta} e^{-\theta\bar{\theta}/2} \bar{\Phi}(z^*, \bar{\theta})\Phi(z, \theta) \right]^n = \frac{2\pi}{n} \int d\theta d\bar{\theta} \left[e^{-\theta\bar{\theta}/2} \bar{\Phi}(z^*, \bar{\theta})\Phi(z, \theta) \right]^n. \quad (3.65)$$

Введем функцию

$$h(a) = \int_0^a \frac{d\alpha}{\alpha} g(\alpha), \quad (3.66)$$

тогда действие можно записать в следующем виде

$$S = 2\pi \int dz dz^* d\theta d\bar{\theta} \left[i\varepsilon e^{-(|z|^2+\theta\bar{\theta})/2} \bar{\Phi}\Phi + h\left(e^{-(|z|^2+\theta\bar{\theta})/2} \bar{\Phi}\Phi \right) \right]. \quad (3.67)$$

Полученное действие обладает симметрией относительно поворотов в суперсимметричном пространстве $(\{z, z^*, \theta, \bar{\theta}\})$:

$$\begin{aligned} z &\rightarrow z + \bar{\omega}\theta, & z^* &\rightarrow z^* + \bar{\theta}\omega, \\ \theta &\rightarrow \theta + \omega z, & \bar{\theta} &\rightarrow \bar{\theta} + \bar{\omega}z, \end{aligned} \quad (3.68)$$

где ω и $\bar{\omega}$ бесконечно малые параметры преобразования. Действительно при таком преобразовании

$$|z|^2 + \theta\bar{\theta} \rightarrow |z|^2 + \theta\bar{\theta} + O(\omega\bar{\omega}). \quad (3.69)$$

Другая важная симметрия действия – это трансляционная инвариантность:

$$z \rightarrow z - a, \quad z^* \rightarrow z^* - a^*, \quad \theta \rightarrow \theta - \omega, \quad \bar{\theta} \rightarrow \bar{\theta} - \bar{\omega}. \quad (3.70)$$

При таком преобразовании действие остается инвариантным, если поля Φ и $\bar{\Phi}$ преобразуются следующим образом

$$\begin{aligned} \Phi(z - a, \theta - \omega) &= \Phi(z, \theta) \exp\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}|a|^2 + \frac{1}{2}\omega\bar{\omega} - za^* - \theta\bar{\omega}\right)\right], \\ \bar{\Phi}(z^* - a^*, \bar{\theta} - \bar{\omega}) &= \bar{\Phi}(z^*, \bar{\theta}) \exp\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}|a|^2 + \frac{1}{2}\omega\bar{\omega} - z^*a - \omega\bar{\theta}\right)\right]. \end{aligned} \quad (3.71)$$

Такое правило преобразования полей накладывает ограничение на их парную корреляционную функцию:

$$\langle \bar{\Phi}(z_1^* - a^*, \bar{\theta}_1 - \bar{\omega}) \Phi(z - a, \theta - \omega) \rangle = \langle \bar{\Phi}(z_1^*, \bar{\theta}_1) \Phi(z, \theta) \rangle e^{((z-a)(z_1^*-a^*)+(\theta-\omega)(\bar{\theta}_1-\bar{\omega}))/2} e^{-(zz_1^*+\theta\bar{\theta}_1)/2}. \quad (3.72)$$

Как видно, трансляционная симметрия однозначно фиксирует форму парной корреляционной функции

$$\langle \bar{\Phi}(z_1^*, \bar{\theta}_1) \Phi(z, \theta) \rangle = C e^{(zz_1^*+\theta\bar{\theta}_1)/2}, \quad (3.73)$$

где C – неизвестная константа, которую надо найти. Подчеркнем, что на этом этапе задача свелась к вычислению константы.

Для того, чтобы вычислить константу C посмотрим на ряд теории возмущений, где возмущение это функция h в действии. Начнем с затравочной функции Грина, которая определяется действием S при $h = 0$. Естественно искать затравочную функцию Грина в форме (3.73). Она должна быть обратным оператором к оператору $2\pi\epsilon i \exp[(|z|^2 + \theta\bar{\theta})/2]$. Покажем, что для произвольной функции $f(z, \theta)$ выполняется тождество

$$\int dz_1 dz_1^* d\theta_1 d\bar{\theta}_1 e^{(zz_1^*+\theta\bar{\theta}_1)/2} e^{-(|z_1|^2+\theta_1\bar{\theta}_1)/2} f(z_1, \theta_1) = f(z, \theta), \quad (3.74)$$

которое означает, что $e^{(zz_1^*+\theta\bar{\theta}_1)/2}$ обратный оператор к $e^{-(|z_1|^2+\theta_1\bar{\theta}_1)/2}$. Если представить функцию $f(z, \theta)$ в виде $f(z, \theta) = f_0(z) + \theta f_1(z)$, то соотношение (3.74) сведется к выражению

$$\frac{1}{2\pi} \int dz_1 dz_1^* e^{zz_1^*/2 - |z_1|^2/2} f_{0,1}(z_1) = f_{0,1}(z). \quad (3.75)$$

Имея в виду, что мы работаем с полиномиальными функциями $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ равенство (3.75) легко проверяется. Равенство (3.74) означает, что затравочная функция Грина имеет вид (3.73) с константой $C_0 = 1/(2\pi\epsilon i)$. Заметим, что такое же значение C_0 можно получить из равенства

$$C_0 = \frac{\int d\phi d\phi^* \phi \phi^* \exp[2\pi i \epsilon \phi \phi^*]}{\int d\phi d\phi^* \exp[2\pi i \epsilon \phi \phi^*]}. \quad (3.76)$$

Рассмотрим теперь поправку первого порядка по h в C . Для простоты рассуждений будем рассматривать случай δ -коррелированного потенциала, $h(\alpha) = -\gamma\alpha^2/4$. Эта поправка

дается диаграммой, изображенной на Рис. ??, и имеет вид

$$\begin{aligned} & -\frac{\pi\gamma C_0^3}{2} \int dz_2 dz_2^* d\theta_2 d\bar{\theta}_2 e^{(zz_2^* + \theta_2 \bar{\theta}_2)/2} e^{-(|z_2|^2 + \theta_2 \bar{\theta}_2)} e^{(|z_2|^2 + \theta_2 \bar{\theta}_2)/2} e^{(zz_1^* + \theta_2 \bar{\theta}_1)/2} \\ & = -\frac{\gamma C_0^3}{4} e^{\theta \bar{\theta}_1/2} \int dz_2 dz_2^* e^{-(z_2 - z)(z_2^* - z_1^*)/2 + zz_1^*/2} = -\frac{\gamma}{(4\pi)^2 i \varepsilon^3} e^{(zz_1^* + \theta \bar{\theta}_1)/2}. \end{aligned} \quad (3.77)$$

Во-первых, мы действительно видим, что в теории возмущений форма (3.73) для функции Грина сохраняется. Во-вторых, полученный ответ для поправки к C первого порядка по γ можно получить из разложения по γ следующего выражения

$$C = \frac{\int d\phi d\phi^* \phi \phi^* \exp[2\pi i \varepsilon \phi \phi^* - \pi \gamma (\phi \phi^*)^2/2]}{\int d\phi d\phi^* \exp[2\pi i \varepsilon \phi \phi^* - \pi \gamma (\phi \phi^*)^2/2]}. \quad (3.78)$$

Можно показать, что выражение (3.78) дает точное выражение для C для случая δ -коррелированного случайного потенциала [46]. Дело в том, что из-за суперсимметрии действия вершины в точности сокращают функции Грина и единственно, что остается, это комбинаторные факторы для вкладов соответствующего порядка по γ . Интегралы в ур. (3.78) воспроизводят правильные комбинаторные факторы.

Обобщение на случай произвольной функции $g(\alpha)$ делается прямолинейно. В этом случае величина C равна [47]

$$C = \frac{1}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \ln \int_0^\infty dt e^{2\pi i \varepsilon t + 2\pi h(t)}. \quad (3.79)$$

Соответственно для плотности состояний на нижнем уровне Ландау получаем

$$D(\mathcal{E}) = \frac{1}{2\pi^2 l_H^2} \text{Im} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \ln \int_0^\infty dt e^{2\pi i \varepsilon t + 2\pi h(t)}. \quad (3.80)$$

Если случайного потенциала нет, то $h = 0$ и из выражения (3.80) получается тривиальный ответ $D(\mathcal{E}) = \delta(\mathcal{E} - \omega_c/2)/(2\pi l_H^2)$.

Для случая δ -коррелированного случайного потенциала находим

$$D(\mathcal{E}) = \frac{1}{2\pi l_H^2} \frac{4}{\pi^{3/2} \Gamma} \frac{e^{(2\varepsilon/\Gamma)^2}}{1 + \text{erfi}^2(2\varepsilon/\Gamma)}, \quad \text{erfi}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x dt e^{t^2}. \quad (3.81)$$

Отметим, что в центре уровня Ландау, $\varepsilon = 0$, самосогласованное борновское приближение, см. ур. (2.130), дает параметрически правильный ответ для нижнего уровня Ландау. Однако точный ответ в $2/\sqrt{\pi}$ раз больше ответа из самосогласованного борновского приближения. Точное решение (3.81) при $|\varepsilon| \gg \Gamma$ воспроизводит асимптотику (3.37).

Задачи:

3.2.1 Найти связанную k -точечную корреляционную функцию случайного потенциала для случая пуассоновских примесей.

3.2.2 Доказать соотношение (3.65).

3.2.3 Вычислить значение $d \operatorname{Re} \Sigma_{\mathcal{E}}^R / d\mathcal{E}$ в центре нижнего уровня Ландау для случай δ -коррелированного случайного потенциала. Сравнить с предсказанием самосогласованного борновского приближения.

3.2.4 Вычислить значение полной энергии электрона для заполненной наполовину нижнего уровня Ландау для случай δ -коррелированного случайного потенциала. Сравнить с предсказанием самосогласованного борновского приближения.

3.3 Хвосты плотности состояний на высоких уровнях Ландау

В этом разделе мы начнем выводить нелинейную σ -модель с топологическим членом для двумерного электронного газа с δ -коррелированным случайным потенциалом. При этом будем считать, что примесей достаточно много ($n_{\text{imp}} \gg n_L$) для полного снятия вырождения на уровне Ландау.

Представим как и в предыдущих лекциях функцию Грина для гамильтониана \mathcal{H} в виде следующего функционального интеграла:

$$\mathcal{G}_{\mathcal{E}}^{R,A}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{i \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \bar{\psi}(\mathbf{r}') \psi(\mathbf{r}) e^{-i \int d\mathbf{r} \bar{\psi}(\mathbf{r})(\mathcal{E} - \mathcal{H} \pm i0)\psi(\mathbf{r})}}{\int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi e^{-i \int d\mathbf{r} \bar{\psi}(\mathbf{r})(\mathcal{E} - \mathcal{H} \pm i0)\psi(\mathbf{r})}}, \quad (3.82)$$

где $\psi(\mathbf{r})$ и $\bar{\psi}(\mathbf{r})$ грассмановы (фермионные) поля. Тогда усредненную по беспорядку плотность состояний можно записать в виде:

$$D(\mathcal{E}) = -\frac{1}{2\pi\mathcal{S}} \lim_{\eta \rightarrow 0} \partial_{\eta} \left\langle \ln \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi e^{-i \int d\mathbf{r} \sum_{p=\pm} \bar{\psi}_p(\mathbf{r})(\mathcal{E} - \mathcal{H} + ip\eta)\psi_p(\mathbf{r})} \right\rangle. \quad (3.83)$$

Здесь мы ввели два набора грассмановых полей, $\psi_+(\mathbf{r})$, $\bar{\psi}_+(\mathbf{r})$ и $\psi_-(\mathbf{r})$, $\bar{\psi}_-(\mathbf{r})$, для того, чтобы одновременно работать с запаздывающей и опережающей функциями Грина.

Для усреднения по случайному потенциалу $V(\mathbf{r})$, который мы предполагаем δ -коррелированным и нормально распределенным, будем использовать метод реплик. Воспользуемся соотношением

$$\ln Z = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{Z^n - 1}{n}. \quad (3.84)$$

Тогда, зная среднее от величины Z^n для всех натуральных значений n и продолжив результат аналитически на все неотрицательные значения n , в пределе $n \rightarrow 0$ мы получим среднее от $\ln Z$. Для вычисления величины Z^n нам понадобится $2n$ грассмановых полей $\psi_{\alpha}^p = (\psi_1^+, \dots, \psi_n^+, \psi_1^-, \dots, \psi_n^-)$. Усредненная по реализациям случайного потенциала плотность состояний может быть записана как

$$D(\mathcal{E}) = -\frac{1}{2\pi n\mathcal{S}} \lim_{\eta \rightarrow 0} \partial_{\eta} \langle Z^n[\eta] \rangle, \quad (3.85)$$

где

$$\begin{aligned} \langle Z^n[\eta] \rangle &= \int \mathcal{D}[V] e^{-\frac{1}{2\gamma} \int d\mathbf{r} V^2(\mathbf{r})} \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi e^{-i \int d\mathbf{r} \sum_{\alpha,p} \bar{\psi}_{\alpha}^p(\mathbf{r})(\mathcal{E} - \mathcal{H}_0 - V(\mathbf{r}) + ip\eta)\psi_{\alpha}^p(\mathbf{r})} \\ &\quad \times \left(\mathcal{D}[V] e^{-\frac{1}{2\gamma} \int d\mathbf{r} V^2(\mathbf{r})} \right)^{-1}. \end{aligned} \quad (3.86)$$

Интегрируя по полю $V(\mathbf{r})$ находим (с точностью до несущественных постоянных множите-

лей):

$$\begin{aligned} \langle Z^n[\eta] \rangle &= \int \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi \exp\left\{-i \int d\mathbf{r} \sum_{\alpha,p} \bar{\psi}_\alpha^p(\mathbf{r})[\mathcal{E} - \mathcal{H}_0 + ip\eta]\psi_\alpha^p(\mathbf{r})\right. \\ &\quad \left. - \frac{\gamma}{2} \int d\mathbf{r} \left[\sum_{\alpha,p} \bar{\psi}_\alpha^p(\mathbf{r})\psi_\alpha^p(\mathbf{r}) \right]^2\right\}. \end{aligned} \quad (3.87)$$

Рассмотрим более подробно четверной (по грассманновым полям) член, записанный во второй строке ур. (3.87). Перейдем в импульсное представление, тогда получим

$$\begin{aligned} \int d\mathbf{r} \left[\sum_{\alpha,p} \bar{\psi}_\alpha^p(\mathbf{r})\psi_\alpha^p(\mathbf{r}) \right]^2 &= \sum_{\alpha\beta,pp'} \int \left(\prod_{j=1}^4 \frac{d\mathbf{q}_j}{(2\pi)^2} \right) (2\pi)^2 \delta \left(\sum_{j=1}^4 \mathbf{q}_j \right) \\ &\quad \times \bar{\psi}_\alpha^p(-\mathbf{q}_1)\psi_\alpha^p(\mathbf{q}_2)\bar{\psi}_\beta^{p'}(-\mathbf{q}_3)\psi_\beta^{p'}(\mathbf{q}_4). \end{aligned} \quad (3.88)$$

Для дальнейшего удобно явно выделить явно один из трех независимых импульсов в ур. (3.88) и считать его малым по-сравнению с остальными. Так как существует всего три возможности, то получим (малый импульс обозначаем \mathbf{q}):

$$\begin{aligned} \text{ур. (3.88)} &\simeq \sum_{\alpha\beta,pp'} \int \frac{d\mathbf{q}_1 d\mathbf{q}_2 d\mathbf{q}}{(2\pi)^6} \left\{ \bar{\psi}_\alpha^p(\mathbf{q}_1)\psi_\alpha^p(\mathbf{q}_2)\bar{\psi}_\beta^{p'}(\mathbf{q}_2 + \mathbf{q})\psi_\beta^{p'}(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}) \right. \\ &\quad + \bar{\psi}_\alpha^p(\mathbf{q}_1)\psi_\alpha^p(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q})\bar{\psi}_\beta^{p'}(\mathbf{q}_2)\psi_\beta^{p'}(\mathbf{q}_2 + \mathbf{q}) \\ &\quad \left. + \bar{\psi}_\alpha^p(\mathbf{q}_1)\psi_\alpha^p(\mathbf{q}_2)\bar{\psi}_\beta^{p'}(-\mathbf{q}_1 - \mathbf{q})\psi_\beta^{p'}(-\mathbf{q}_2 - \mathbf{q}) \right\}. \end{aligned} \quad (3.89)$$

Рассмотрим первый член в формуле (3.89). Вклад от него можно записать в следующем виде $-2 \int d^2\mathbf{r} \sum_{j>k} A_{jk}(\mathbf{r}) \cdot B_{kj}(\mathbf{r})$, где $j = (p, \alpha)$ – комбинированный индекс, символ “ \cdot ” означает, что при фурье-преобразовании соответствующий импульс мал, а кососимметричные матрицы определены как

$$A_{jk} = \begin{cases} \bar{\psi}_j\psi_k, & j > k, \\ 0, & j \leq k, \end{cases}, \quad B_{jk} = \begin{cases} \bar{\psi}_j\psi_k, & j < k, \\ 0, & j \geq k. \end{cases} \quad (3.90)$$

Подчеркнем, что так $\bar{\psi}_j$ и ψ_j совершенно независимые грассмановые переменные, то матрицы A и B никак не связаны друг с другом. Напомним теперь следующие выражения для преобразования Хаббарда-Стратоновича с матрицами:

$$e^{\gamma \text{tr} X^2/2} \sim \int D[P] e^{-\text{tr} P^2/(2\gamma) + \text{tr} X P^T}, \quad e^{-\gamma \text{tr} X^2/2} \sim \int D[R] e^{-\text{tr} R^2/(2\gamma) + i \text{tr} X R^T}. \quad (3.91)$$

Здесь знак \sim означает, что опущен нормировочный множитель. Также $D[P]$ обозначает интегрирование по всем независимым матричным элементам матрицы P . Для сходимости интегралов удобно считать матрицы P и R эрмитовыми, т.к. тогда их собственные значения

действительные. Используя эти формулы запишем

$$\begin{aligned}
& \exp \left[-\frac{\gamma}{2} \sum_{\alpha\beta, pp'} \int \frac{d\mathbf{q}_1 d\mathbf{q}_2 d\mathbf{q}}{(2\pi)^6} \bar{\psi}_\alpha^p(\mathbf{q}_1) \psi_\alpha^p(\mathbf{q}_2) \bar{\psi}_\beta^{p'}(\mathbf{q}_2 + \mathbf{q}) \psi_\beta^{p'}(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}) \right] = \exp \left[\gamma \int d\mathbf{r} \operatorname{tr} A(\mathbf{r}) \cdot B(\mathbf{r}) \right] \\
& = \exp \left[\frac{\gamma}{2} \int d^2\mathbf{r} \operatorname{tr}(A + B)^2 - \frac{\gamma}{2} \int d\mathbf{r} \operatorname{tr}(A - B)^2 \right] = \int \mathcal{D}[P] \mathcal{D}[R] \exp \left[-\frac{1}{2\gamma} \int d\mathbf{r} \operatorname{tr}(P^2 + R^2) \right. \\
& \quad \left. + \int d\mathbf{r} \sum_{j>k} \bar{\psi}_j(P + iR)_{jk} \psi_k + \int d\mathbf{r} \sum_{j<k} \bar{\psi}_j(P - iR)_{jk} \psi_k \right]. \tag{3.92}
\end{aligned}$$

Введем теперь матрицу $Q(\mathbf{r})$ с элементами

$$Q_{jk} = \begin{cases} P_{jk} + iR_{jk}, & j > k \\ S_j, & j = k \\ P_{jk} - iR_{jk}, & j < k, \end{cases} \tag{3.93}$$

где S_j – набор произвольных действительных функций. Построенная таким образом медленная матрица $Q(\mathbf{r})$ является эрмитовой, $Q = Q^\dagger$. С помощью нее преобразование Хаббарда–Стратоновича записывается следующим образом

$$\begin{aligned}
& \exp \left[-\frac{\gamma}{2} \sum_{\alpha\beta, pp'} \int \frac{d\mathbf{q}_1 d\mathbf{q}_2 d\mathbf{q}}{(2\pi)^6} \bar{\psi}_\alpha^p(\mathbf{q}_1) \psi_\alpha^p(\mathbf{q}_2) \bar{\psi}_\beta^{p'}(\mathbf{q}_2 + \mathbf{q}) \psi_\beta^{p'}(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}) \right] \\
& \rightarrow \int \mathcal{D}[Q] \exp \left[\int d\mathbf{r} \bar{\psi}(\mathbf{r}) Q(\mathbf{r}) \psi(\mathbf{r}) - \frac{1}{2\gamma} \int d\mathbf{r} \operatorname{Tr} Q^2(\mathbf{r}) \right]. \tag{3.94}
\end{aligned}$$

Здесь опять опущены несущественные нормировочные множители.

Аналогичным образом можно было бы ввести медленные переменные для членов четвертого порядка по грассманновым переменным в предпоследней и последней строчках ур. (3.89). Однако, в первом случае медленное поле описывало бы медленные флуктуации химического потенциала, которые не приводят к существенным эффектам, так как оставляют реплики невзаимодействующими. Во втором случае, медленное поле описывало бы корреляции в канале частица-частица (корреляции приводящие к сверхпроводимости в присутствие притяжения), которые подавляются перпендикулярным магнитным полем на масштабах больших магнитной длины. Таким образом, опуская эти два вклада, можно записать приближенное равенство

$$\exp \left[-\frac{\gamma}{2} \int d\mathbf{r} \left[\sum_\alpha^p \bar{\psi}_\alpha^p(\mathbf{r}) \psi_\alpha^p(\mathbf{r}) \right]^2 \right] \simeq \int \mathcal{D}Q \exp \left[\int d\mathbf{r} \bar{\psi}(\mathbf{r}) Q(\mathbf{r}) \psi(\mathbf{r}) - \frac{1}{2\gamma} \int d\mathbf{r} \operatorname{tr} Q^2(\mathbf{r}) \right]. \tag{3.95}$$

Если проварьировать правую часть ур. (3.95) по Q , то классические уравнения движения будут иметь вид $Q_{\alpha\beta}^{pp'}(\mathbf{r}) \sim \langle \psi_\alpha^p(\mathbf{r}) \bar{\psi}_\beta^{p'}(\mathbf{r}) \rangle$. Таким образом, матричное поле $Q(\mathbf{r})$ имеет смысл квазиклассической функции Грина – объекта хорошо известного в теории сверхпроводимости.

После введения матричного поля $Q(\mathbf{r})$ согласно ур. (3.94), действие в ур. (3.87) становится квадратичным по грассманновым полям ψ_α^p и $\bar{\psi}_\alpha^p$ так, что по ним легко провести интегрирование. Сдвигая матрицу $Q(\mathbf{r})$: $Q \rightarrow Q - \Lambda$, где матрица Λ определена как

$$\Lambda_{\alpha\beta}^{pp'} = p \delta^{pp'} \delta_{\alpha\beta}. \tag{3.96}$$

Тогда находим

$$\langle Z^n[\eta] \rangle = \int \mathcal{D}Q \exp\left(-S[Q] + \frac{\eta}{\gamma} \text{Tr} \Lambda Q\right), \quad (3.97)$$

где

$$S[Q] = \frac{1}{2\gamma} \text{Tr} Q^2 - \text{Tr} \ln(\mathcal{E} - \mathcal{H}_0 + iQ). \quad (3.98)$$

Здесь Tr обозначает интегрирование по двумерной плоскости и взятие следа по индексам матрицы Q . С помощью действия $S[Q]$ усредненную плотность состояний можно вычислить как

$$\langle \mathcal{D}(\mathcal{E}) \rangle = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi n \mathcal{S}\gamma} \langle \text{Tr} \Lambda Q \rangle_S, \quad (3.99)$$

где среднее $\langle \dots \rangle_S$ в правой части равенства вычисляется с действием $S[Q]$.

Рассмотрим классическое уравнение движения для действия $S[Q]$, т.е. уравнение $\delta S[Q]/\delta Q = 0$. Оно имеет вид

$$\frac{1}{\gamma} Q(\mathbf{r}) = i \langle \mathbf{r} | \frac{1}{\mathcal{E} - \mathcal{H}_0 + iQ} | \mathbf{r} \rangle. \quad (3.100)$$

Будем искать решение этого уравнения в диагональном виде $(Q_{\text{sp}})_{\alpha\beta}^{pp'} = q^p \delta^{pp'} \delta_{\alpha\beta}$. Будем рассматривать предел хорошо разделенных уровней Ландау: $\omega_c \gg \Gamma = 2\sqrt{\gamma n_L}$. Тогда решая ур. (3.100) в для энергии \mathcal{E} , расположенной вблизи центра N -ого уровня Ландау, находим

$$q^p = \frac{i\varepsilon}{2} + \frac{p}{2}\Gamma(\varepsilon), \quad \Gamma(\varepsilon) = \sqrt{\Gamma^2 - \varepsilon^2}, \quad (3.101)$$

где $\varepsilon = \mathcal{E} - \omega_c(N + 1/2)$. Заметим, что на седловом решении q_p не является действительной величиной, т.е. матрица не является эрмитовой. Это означает, что экстремальная точка лежит вне первоначального контура интегрирования ($Q = Q^\dagger$) в функциональном интеграле по Q . Подставляя седловое решение в ур. (3.99), находим усредненную плотность состояний

$$\mathcal{D}(\varepsilon) = 2n_L \Gamma(\varepsilon) / \pi \Gamma^2. \quad (3.102)$$

Как видно, тривиальное решение классических уравнений движения для действия $S[Q]$ приводит к ответу для плотности состояний, который соответствует самосогласованному борновскому приближению, см. ур. (2.130).

Далее с помощью действия $S[Q]$ мы вычислим плотность состояний на высоких уровнях Ландау, $N \gg 1$, для энергий вдали от середины уровня Ландау, $\varepsilon > \Gamma$. Аналогичная задача для нижнего уровня Ландау рассматривалась в предыдущей лекции. В изложении будем следовать работе [49].

Как известно, хвосты плотности состояний связаны с редкими, оптимальными, флуктуациями случайного потенциала [50]. В подходе эффективного действия $S[Q]$ оптимальной флуктуации случайного потенциала соответствует неоднородное решение классических уравнений движения (3.100). Будем искать такое решение в виде малой поправки к однородному решению: $Q(\mathbf{r}) = Q_{\text{sp}} + \Delta(\mathbf{r})$. Будем предполагать, что $\Delta(\mathbf{r})$ меняется на масштабах порядка циклотронного радиуса $R_c = l_H \sqrt{2N + 1}$. В дальнейшем будем также считать, что выполняются условия $0 < \varepsilon - \Gamma \ll \Gamma$. Удобно раскладывать по $\Delta(\mathbf{r})$ не классические урав-

нения движения (3.100), а действие $S[Q]$:

$$S[Q] = S[Q_{\text{sp}}] + \frac{1}{2\gamma} \text{Tr} \left(\Delta + 2Q_{\text{sp}} \right) \Delta - \text{Tr} \ln(1 + i\Delta G_{\text{sp}}) = S[Q_{\text{sp}}] + \frac{1}{2\gamma} \text{Tr} \Delta^2 - \frac{1}{2} \text{Tr} \Delta G_{\text{sp}} \Delta G_{\text{sp}} + \frac{i}{3} \text{Tr} \Delta G_{\text{sp}} \Delta G_{\text{sp}} \Delta G_{\text{sp}} + \dots \quad (3.103)$$

Заметим, что в разложении по Δ нет линейных членов, т.к. Q_{sp} является решением классического уравнения движения. Мы ввели функцию Грина, отвечающую однородному решению, спроектированную на N -ый уровень Ландау, которая для $\varepsilon > \Gamma$ имеет вид (см. ур. (2.129) и задачу 2.4.5):

$$G_{\text{sp}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \langle \mathbf{r} | P_N \frac{1}{\varepsilon - \mathcal{H}_0 + iQ_{\text{sp}}} P_N | \mathbf{r}' \rangle = \frac{2}{\varepsilon + |\Gamma(\varepsilon)|} P_N(\mathbf{r}, \mathbf{r}'). \quad (3.104)$$

Напомним, что проекционный оператор на N -ый уровень Ландау имеет вид, см. ур. (2.112),

$$P_N(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = n_L e^{i(y-y')(x+x')/2l_H^2} e^{-|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2/4l_H^2} L_N \left(\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2}{2l_H^2} \right). \quad (3.105)$$

Подставляя ур. (3.104) в разложение (3.103) и ограничиваясь членами не старше третьей степени по $\Delta(\mathbf{r})$, найдем

$$S[Q] = S[Q_{\text{sp}}] + \frac{1}{2\gamma} \int d\mathbf{r} \text{tr} \Delta^2(\mathbf{r}) - \frac{2}{\Gamma^4} \int d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 P_N(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) P_N(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1) \text{tr} \Delta(\mathbf{r}_1) [\varepsilon - |\Gamma(\varepsilon)|] \times \Delta(\mathbf{r}_2) [\varepsilon - |\Gamma(\varepsilon)|] + \frac{8i}{3\Gamma^6} \int d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 d\mathbf{r}_3 P_N(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) P_N(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) P_N(\mathbf{r}_3, \mathbf{r}_1) \times \text{tr} \Delta(\mathbf{r}_1) [\varepsilon - |\Gamma(\varepsilon)|] \Delta(\mathbf{r}_2) [\varepsilon - |\Gamma(\varepsilon)|] \Delta(\mathbf{r}_3) [\varepsilon - |\Gamma(\varepsilon)|]. \quad (3.106)$$

Считая, что выполняется условие $|\Gamma(\varepsilon)| \ll \Gamma$, и используя асимптотическое поведение полиномов Лагерра при больших значениях индекса, ур. (2.118) (т.е. используя тот факт, что проекционный оператор меняется на масштабах порядка циклотронного радиуса R_c), находим

$$S[Q] \approx S[Q_{\text{sp}}] + \frac{2n_L}{\Gamma^2} \int d\mathbf{r} \text{tr} \Delta^2(\mathbf{r}) - \frac{2n_L^2}{\Gamma^4} (\varepsilon - |\Gamma(\varepsilon)|)^2 \int \frac{d^2\mathbf{q}}{(2\pi)^2} f(\mathbf{q}) \text{tr} \Delta(\mathbf{q}) \Delta(-\mathbf{q}) + \frac{8in_L}{3\Gamma^3} \int d\mathbf{r} \text{tr} \Delta^3(\mathbf{r}). \quad (3.107)$$

При выводе мы использовали следующее простое свойство проекционного оператора:

$$\int d\mathbf{r}_2 P_N(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) P_N(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) = P_N(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_3). \quad (3.108)$$

Функция $f(q)$ определена как

$$f(q) = \int d\mathbf{r} e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}} e^{-r^2/2l_H^2} L_N^2 \left(\frac{r^2}{2l_H^2} \right) = n_L^{-1} e^{-q^2 l_H^2/2} L_N^2 \left(\frac{q^2 l_H^2}{2} \right) \simeq n_L^{-1} J_0^2(qR_c). \quad (3.109)$$

В последнем приближенном равенстве мы использовали асимптотику полиномов Лагерра при больших значениях индекса, ур. (2.118). Таким образом, функция $f(q)$ имеет следующее

разложение при $qR_c \ll 1$:

$$f(q) = n_L^{-1} \left(1 - q^2 R_c^2 / 2 \right). \quad (3.110)$$

Ограничиваясь в итоге членами низшего порядка по $|\Gamma(\varepsilon)|/\Gamma \ll 1$, мы приходим к следующему выражению

$$S[Q] = S[Q_{\text{sp}}] + \frac{n_L R_c^2}{\Gamma^2} \text{Tr}(\nabla \Delta(\mathbf{r}))^2 + \frac{4n_L |\Gamma(\varepsilon)|}{\Gamma^3} \text{Tr} \Delta^2(\mathbf{r}) + \frac{8in_L}{3\Gamma^3} \text{Tr} \Delta^3(\mathbf{r}). \quad (3.111)$$

Варьируя действие $S[Q]$ по $\Delta(\mathbf{r})$, находим классическое уравнение движения:

$$R_c^2 \nabla^2 \Delta_{\text{sp}}(\mathbf{r}) - \frac{4|\Gamma(\varepsilon)|}{\Gamma} \Delta_{\text{sp}}(\mathbf{r}) - \frac{4i\Delta_{\text{sp}}^2(\mathbf{r})}{\Gamma} = 0 \quad (3.112)$$

Значение действия на решении классического уравнения движения равно

$$S[Q_{\text{sp}} + \Delta_{\text{sp}}] = S[Q_{\text{sp}}] - \frac{4in_L}{3\Gamma^3} \text{Tr} \Delta_{\text{sp}}^3(\mathbf{r}). \quad (3.113)$$

Заметим, что величина $S[Q_{\text{sp}}]$ пропорциональна числу реплик n , а значит не дает вклада в репличном пределе $n \rightarrow 0$. Так как, мы хотим найти конечный вклад в действие от решения Δ_{sp} , будем искать его в виде:

$$(\Delta_{\text{sp}})_{\alpha\beta}^{pp'}(\mathbf{r}) = i|\Gamma(\varepsilon)|g(r/r_0)\delta^{pp'}\delta_{\alpha\beta}[1 - \delta_{\alpha\alpha_0}], \quad (3.114)$$

где α_0 – обозначает какую-то одну выделенную реплику, величина $r_0 = (R_c/2)\sqrt{\Gamma/|\Gamma(\varepsilon)|} \gg R_c$, а функция $g(x)$ удовлетворяет следующему уравнению, не содержащему размерных параметров:

$$\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left(x \frac{dg}{dx} \right) - g + g^2 = 0. \quad (3.115)$$

Уравнение (3.115) должно решаться при граничных условиях $\lim_{x \rightarrow 0} xg(x) = 0$ и $g(\infty) = 0$. Для действия на решении $Q_{\text{sp}} + \Delta_{\text{sp}}$ находим

$$S[Q_{\text{sp}} + \Delta_{\text{sp}}] = S[Q_{\text{sp}}] - \frac{2\pi n_L R_c^2 |\Gamma(\varepsilon)|^2}{3\Gamma^2} (n-1)J, \quad J = \int_0^\infty dx xg^3(x). \quad (3.116)$$

Поведение функции $g(x)$ на больших и малых значениях аргумента может быть найдено аналитически:

$$g(x) = \begin{cases} a + (a^2 - a)x^2/4 & , \quad x \rightarrow 0 \\ b x^{-1/2} e^{-x} & , \quad x \rightarrow \infty \end{cases} \quad (3.117)$$

Константа a фиксируется поведением на бесконечности. С помощью численного решения уравнения (3.115), находим, что параметр $a \simeq 2.39$, а величина $J \simeq 4.80$. Поведение решения показано на Рис. 3.2.

Таким образом, мы нашли ненулевой в репличном пределе вклад в действие $S[Q_{\text{sp}}]$. Это означает, что при $|\Gamma(\varepsilon)| \ll \Gamma$ плотность состояний будет вести себя как

$$D(\mathcal{E}) \propto \exp \left[-\frac{2(2N+1)J}{3} \left(\frac{|\varepsilon|}{\Gamma} - 1 \right) \right]. \quad (3.118)$$

Описанный выше подход справедлив, когда выполняется условие $(|\varepsilon| - \Gamma)/\Gamma \ll 1$. Кроме этого необходимо условие $(|\varepsilon| - \Gamma)/\Gamma \gg 1/N$, гарантирующее большое значение величины

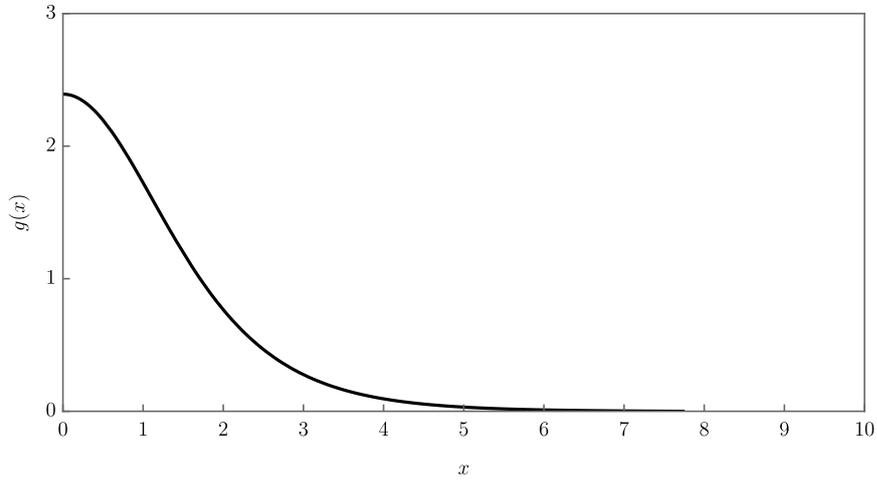


Рис. 3.2: Поведение функции $g(x)$, являющейся решением ур. (3.115).

действия в экспоненте.

Для того, чтобы найти предэкспоненту необходимо учесть гауссовы флуктуации вокруг решения Δ_{sp} . Заметим, что решение Δ_{sp} является решением, соответствующим максимуму действия. Поэтому среди собственных значений флуктуационных мод есть одна с отрицательным собственным значением. Этот факт обеспечит действительность инстантонного вклада в плотность состояний. Аккуратный учет гауссовых флуктуаций приводит к ответу (см. работу [49])

$$D(\mathcal{E}) = \text{const } n_L \left(\frac{|\mathcal{E}| - \Gamma}{\Gamma} \right) \exp \left[-\frac{2(2N+1)J}{3} \left(\frac{|\mathcal{E}|}{\Gamma} - 1 \right) \right] \quad (3.119)$$

В итоге, выход за рамки самосогласованного борновского приближения приводит к появлению хвоста плотности состояний при энергиях $|\mathcal{E}| > \Gamma$, в согласии с тем, что изображено на Рис. 2.8.

Задачи:

3.3.1 Численно исследовать уравнение (3.115) и проверить, что $a \simeq 2.39$.

3.3.2 Показать, что у линейного оператора, соответствующего нелинейному уравнению (3.115),

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left(x \frac{d}{dx} \right) + (1 - 2g(x)),$$

где $g(x)$ – решение ур. (3.115), есть одно отрицательное собственное значение. Найти численно его величину и собственную функцию.

Глава 4

Вывод нелинейной сигма-модели

Введение

4.1 Вывод нелинейной сигма-модели: разделение массивных и безмассовых мод

В этом разделе мы продолжим вывод нелинейной σ -модели с топологическим членом для двумерного электронного газа с δ -коррелированным случайным потенциалом. В этой лекции мы будем следовать работе [51].

Начнем с разделения массивных и безмассовых мод. Последние определяют поведение физических наблюдаемых на больших расстояниях (в гидродинамическом пределе). Их наличие связано с тем, что действие $S[Q]$ в ур. (3.98) имеет очевидную симметрию относительно глобальных унитарных поворотов матрицы: $Q(\mathbf{r}) \rightarrow T^{-1}Q(\mathbf{r})T$, где $T^{-1} = T^\dagger$.

Представим матрицу Q в следующем виде:

$$Q(\mathbf{r}) = T^{-1}(\mathbf{r})P(\mathbf{r})T(\mathbf{r}), \quad (4.1)$$

где матрица P коммутирует с матрицей Λ : $[P, \Lambda] = 0$, а матрица T - нет: $[T, \Lambda] \neq 0$. Это означает, что матрица P имеет следующий, блок-диагональный вид: $P_{\alpha\beta}^{pp'} = P_{\alpha\beta}^p \delta^{pp'}$. Заметим, что для удовлетворения условия $Q = Q^\dagger$ необходимо, чтобы выполнялись соотношения: $T^{-1} = T^\dagger$ и $P = P^\dagger$. После такого разделения ур. (3.97) принимает следующий вид

$$\langle Z^n[\eta] \rangle = \int \mathcal{D}[T] \int \mathcal{D}[P] e^{-\mathcal{S}_0[P] - \mathcal{S}_{\text{int}}[P, T]}, \quad (4.2)$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_0[P] &= -\ln I[P] + \frac{1}{2\gamma} \text{Tr} P^2 - \text{Tr} \ln(\mathcal{E} - \mathcal{H}_0 + iP) \\ \mathcal{S}_{\text{int}}[P, T] &= -\frac{\eta}{\gamma} \text{Tr} T \Lambda T^{-1} P - \text{Tr} \ln(1 + B[T]G). \end{aligned} \quad (4.3)$$

В действие $\mathcal{S}_0[P]$, которое определяет динамику массивных мод P , вносит вклад якобиан преобразования (4.1). Он имеет вид детерминанта Вандермонда:

$$I[P] = \prod_{\alpha, \beta} (p_\alpha^+ - p_\beta^-)^2, \quad (4.4)$$

где p_α^\pm - собственные значения матрицы $P_{\alpha\beta}^\pm$. Также мы ввели функцию Грина в присутствии поля P , и изменение гамильтониана из-за калибровочного поворота на матрицу T :

$$G^{-1} = \mathcal{E} - \mathcal{H}_0 + iP, \quad B[T] = \mathcal{H}_0 - T\mathcal{H}_0T^{-1}. \quad (4.5)$$

Определим эффективное действие для безмассовых мод T следующим образом:

$$\mathcal{S}_{\text{eff}}[T] = -\ln \int \mathcal{D}[P] e^{-\mathcal{S}_0[P] - \mathcal{S}_{\text{int}}[P, T]}. \quad (4.6)$$

Будем считать, что поле T меняется на масштабах $L \gg R_c$, т.е. медленно, тогда эффективное действие может быть найдено с помощью градиентного разложения (аналогично тому, как

делалось в предыдущем разделе):

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_{\text{eff}}[T] &\approx \langle \mathcal{S}_{\text{int}}[P, T] \rangle_P - \frac{1}{2} \langle \langle \mathcal{S}_{\text{int}}[P, T] \cdot \mathcal{S}_{\text{int}}[P, T] \rangle \rangle_P \\
&= -\frac{\eta}{\gamma} \text{Tr} T \Lambda T^{-1} \langle P \rangle_P - \text{Tr} B[T] \langle G \rangle_P \\
&\quad + \frac{1}{2} \text{Tr} \langle B[T] G B[T] G \rangle_P - \frac{1}{2} \langle \langle \text{Tr} B[T] G \cdot \text{Tr} B[T] G \rangle \rangle_P,
\end{aligned} \tag{4.7}$$

где $\langle \dots \rangle_P$ означает усреднение с весом $\exp(-\mathcal{S}_0[P])$, а $\langle \langle A \cdot B \rangle \rangle = \langle AB \rangle - \langle A \rangle \langle B \rangle$ означает приведенное среднее.

Для нахождения эффективного действия $\mathcal{S}_{\text{eff}}[T]$ требуется явное вычисление средних по массивным модам P в ур. (4.7). Для упрощения изложения будем считать, что нас интересует интервал энергий \mathcal{E} вблизи центра N -ого уровня Ландау, так что $|\varepsilon| < \Gamma$. Тогда, представим поле P в виде $P = P_{\text{sp}} + \delta P$, где $P_{\text{sp}} \equiv Q_{\text{sp}}$ - решение седлового уравнения (3.100). Условие $|\varepsilon| < \Gamma$ гарантирует, что плотность состояний в самосогласованном борновском приближении не равна нулю: $D_{\text{sp}}(\mathcal{E}) \neq 0$. Мы специально добавили нижний индекс sp, чтобы подчеркнуть, что это плотность состояний вычисленная в рамках самосогласованного борновского приближения.

Будем строить теорию для переменных P в виде теории возмущений около P_{sp} по полям δP . Для того, чтобы найти квадратичную по полям δP часть действия $\mathcal{S}_0[P]$ нужно разложить якобиан $I[P]$. Тогда, находим

$$\begin{aligned}
\ln I[P_{\text{sp}} + \delta P] &\approx 2n^2 \int d\mathbf{r} \ln(2\pi\gamma D_{\text{sp}}(\mathcal{E})) + \frac{4nn_L \text{Tr} \Lambda \delta P}{\pi\Gamma^2 D_{\text{sp}}(\mathcal{E})} - \frac{4nn_L^2 \text{Tr}(\delta P)^2}{\pi^2\Gamma^4 D_{\text{sp}}^2(\mathcal{E})} \\
&\quad - \frac{4n_L^2}{\pi^2\Gamma^4 D_{\text{sp}}^2(\mathcal{E})} \sum_{\alpha\beta}^{pp'} (1 - \delta^{pp'}) \int d\mathbf{r} \delta P_{\alpha\alpha}^p \delta P_{\beta\beta}^{p'}.
\end{aligned} \tag{4.8}$$

Заметим, что именно для разложения якобиана по δP важно, что плотность состояний, вычисленная на седле (в самосогласованном борновском приближении) не равна нулю, $D_{\text{sp}}(\mathcal{E}) \neq 0$. Тогда в репличном пределе, $n \rightarrow 0$, квадратичная по полям δP часть действия имеет вид:

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_0^{(2)}[P] &= \frac{4n_L^2}{\pi^2\Gamma^4 D_{\text{sp}}^2(\mathcal{E})} \sum_{\alpha\beta}^{pp'} (1 - \delta^{pp'}) \int d\mathbf{r} \delta P_{\alpha\alpha}^p \delta P_{\beta\beta}^{p'} + \frac{2n_L}{\Gamma^2} \text{Tr}(\delta P)^2 \\
&\quad - \frac{1}{2} \text{Tr} \delta P G_{\text{sp}} \delta P G_{\text{sp}},
\end{aligned} \tag{4.9}$$

где функция Грина

$$G_{\text{sp}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \sum_n \frac{P_n(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\mathcal{E} - \omega_c(n + 1/2) + iP_{\text{sp}}} \tag{4.10}$$

учитывает все уровни Ландау. Для члена, типа поляризационного оператора, во второй строке ур. (4.9) находим

$$\begin{aligned}
\text{Tr} \delta P G_{\text{sp}} \delta P G_{\text{sp}} &= \int \frac{d^2\mathbf{q}}{(2\pi)^2} \sum_{\alpha\beta}^p \delta P_{\alpha\beta}^p(\mathbf{q}) \delta P_{\beta\alpha}^p(-\mathbf{q}) \sum_{N_{1,2}} |F_{N_1 N_2}(\mathbf{q})|^2 \\
&\quad \times \frac{n_L}{[\mathcal{E} - \omega_c(N_1 + 1/2) + iq^p][\mathcal{E} - \omega_c(N_2 + 1/2) + iq^p]}.
\end{aligned} \tag{4.11}$$

В итоге находим следующий результат для квадратичной по полям δP части действия:

$$\mathcal{S}_0^{(2)}[P] = \int \frac{d^2 \mathbf{q}}{(2\pi)^2} \sum_{\alpha\beta;\gamma\delta}^{pp'} \delta P_{\alpha\beta}^p(\mathbf{q}) M_{\alpha\beta;\gamma\delta}^{pp'}(q) \delta P_{\gamma\delta}^{p'}(-\mathbf{q}), \quad (4.12)$$

где

$$M_{\alpha\beta;\gamma\delta}^{pp'}(q) = \frac{4n_L^2(1 - \delta^{pp'})\delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\delta}}{\pi^2\Gamma^4\mathcal{D}_{\text{sp}}^2(\mathcal{E})} + M_0^p(q)\delta^{pp'}\delta_{\alpha\delta}\delta_{\beta\gamma}, \quad (4.13a)$$

$$M_0^p(q) = \frac{2n_L}{\Gamma^2} - \sum_{N_{1,2}} \frac{n_L |F_{N_1 N_2}(\mathbf{q})|^2 / 2}{[\mathcal{E} - \omega_c(N_1 + \frac{1}{2}) + iq^p][\mathcal{E} - \omega_c(N_2 + \frac{1}{2}) + iq^p]} \quad (4.13b)$$

Действие $\mathcal{S}_0^{(2)}[P]$ определяет затравочную функцию Грина для полей δP . В пределе $n \rightarrow 0$, находим из ур. (4.12):

$$\begin{aligned} \langle \delta P_{\alpha\beta}^p(\mathbf{q}) \delta P_{\gamma\delta}^{p'}(-\mathbf{q}) \rangle_P &= [M^{-1}]_{\alpha\beta;\gamma\delta}^{pp'}(q) = [M_0^p(q)]^{-1} \delta^{pp'} \delta_{\alpha\delta} \delta_{\beta\gamma} \\ &\quad - \frac{4n_L^2(1 - \delta^{pp'})\delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\delta}}{\pi^2\Gamma^4\mathcal{D}_{\text{sp}}^2(\mathcal{E})} [M_0^+(q)M_0^-(q)]^{-1}. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Построение теории возмущений, а значит и вычисление средних по полям δP , возможно если функция Грина (4.14) имеет конечный радиус корреляций, т.е. не обращается в бесконечность при $q \rightarrow 0$. Это выполняется, т.к. можно показать (см. Задачи), что $\text{Re } M_0^p(q) > 0$.

Теперь вычислим эффективное действие для мод T с помощью разложения по градиентам. Заметим, что величина $B[T]$ может быть представлена в виде

$$B[T] = \frac{1}{2m} T \nabla^2 T^{-1} + i L_\mu \hat{v}_\mu, \quad (4.15)$$

где $L_\mu = T \nabla_\mu T^{-1}$, а $\hat{v}_\mu = (-i \nabla_\mu - e A_\mu / c) / m_e$ – это оператор скорости. Оставляя члены не больше чем с двумя градиентами полей T (члены порядка $q^2 R_c^2$), получим

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{\text{eff}}[T] &= -\frac{\eta}{\gamma} \int d\mathbf{r} \sum_{\alpha\beta}^p (T \Lambda T^{-1})_{\alpha\beta}^{pp} \langle P_{\beta\alpha}^p \rangle_P - \int d\mathbf{r} \sum_{\alpha\beta}^p \frac{(T \nabla^2 T^{-1})_{\alpha\beta}^{pp}}{2m_e} \langle G_{\beta\alpha}^p(\mathbf{r}, \mathbf{r}) \rangle_P \\ &\quad - i \int d\mathbf{r} \sum_{\alpha\beta}^p [L_\mu(\mathbf{r})]_{\alpha\beta}^{pp} \hat{v}_\mu \langle G_{\beta\alpha}^p(\mathbf{r}, \mathbf{r}) \rangle_P \\ &\quad - \frac{1}{2} \int d\mathbf{r} d\mathbf{r}' \sum_{\alpha\beta\gamma\delta}^{pp'} [L_\mu(\mathbf{r})]_{\alpha\beta}^{pp'} [L_\nu(\mathbf{r}')]_{\gamma\delta}^{p'p} \langle \hat{v}_\mu G_{\beta\gamma}^{p'}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \hat{v}_\nu G_{\delta\alpha}^p(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \rangle_P \\ &\quad + \frac{1}{2} \int d\mathbf{r} d\mathbf{r}' \sum_{\alpha\beta\gamma\delta}^{pp'} [L_\mu(\mathbf{r})]_{\alpha\beta}^{pp} [L_\nu(\mathbf{r}')]_{\gamma\delta}^{p'p} \langle \langle \hat{v}_\mu G_{\beta\alpha}^p(\mathbf{r}, \mathbf{r}) \cdot \hat{v}_\nu G_{\delta\gamma}^{p'}(\mathbf{r}', \mathbf{r}') \rangle \rangle_P. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Для вычисления корреляционных функций полей P воспользуем тем фактом, что действие $\mathcal{S}_0[P]$ инвариантно относительно глобального поворота поля P : $P \rightarrow U^{-1} P U$, где U – блок диагональная матрица: $U_{\alpha\beta}^{pp'} = \delta^{pp'} U_{\alpha\beta}^p$. Как следствие такой глобальной симметрии действия,

выполняются следующие точные соотношения:

$$\begin{aligned}\langle P_{\alpha\beta}^p(\mathbf{r}) \rangle_P &= (U^{-1})_{\alpha\gamma}^p \langle P_{\gamma\delta}^p(\mathbf{r}) \rangle_P U_{\delta\beta}^p, \\ \langle G_{\alpha\beta}^p(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \rangle_P &= (U^{-1})_{\alpha\gamma}^p \langle G_{\gamma\delta}^p(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \rangle_P U_{\delta\beta}^p, \\ \langle \hat{v}_\mu G_{\beta\gamma}^{p'}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}'_1) \hat{v}_\nu G_{\delta\alpha}^p(\mathbf{r}'_2, \mathbf{r}_2) \rangle_P &= (U^{-1})_{\beta\beta_1}^{p'} U_{\gamma_1\gamma}^{p'} (U^{-1})_{\delta\delta_1}^p U_{\alpha_1\alpha}^p \langle \hat{v}_\mu G_{\beta_1\gamma_1}^{p'}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}'_1) \hat{v}_\nu G_{\delta_1\alpha_1}^p(\mathbf{r}'_2, \mathbf{r}_2) \rangle_P.\end{aligned}\quad (4.17)$$

Отсюда, находим общую структуру корреляционных функций массивных мод

$$\langle P_{\alpha\beta}^p(\mathbf{r}) \rangle_P = \delta_{\alpha\beta} \hat{q}^p, \quad \langle G_{\alpha\beta}^p(\mathbf{r}, \mathbf{r}) \rangle_P = \delta_{\alpha\beta} m_e \tilde{q}^p, \quad \langle \hat{v}_\mu G_{\alpha\beta}^p(\mathbf{r}, \mathbf{r}) \rangle_P = \delta_{\alpha\beta} m_e g_\mu^p, \quad (4.18)$$

и

$$\begin{aligned}\int d\mathbf{r}' \langle \hat{v}_\mu G_{\beta\gamma}^{p'}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \hat{v}_\nu G_{\delta\alpha}^p(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \rangle_P &= \delta_{\beta\gamma} \delta_{\alpha\delta} K_{0,\mu\nu}^{pp'} + \delta_{\gamma\delta} \delta_{\alpha\beta} \delta^{pp'} K_{1,\mu\nu}^p, \\ \int d\mathbf{r}' \langle \langle \hat{v}_\mu G_{\beta\alpha}^p(\mathbf{r}, \mathbf{r}) \cdot \hat{v}_\nu G_{\delta\gamma}^{p'}(\mathbf{r}', \mathbf{r}') \rangle \rangle_P &= \delta_{\alpha\beta} \delta_{\gamma\delta} C_{0,\mu\nu}^{pp'} + \delta_{\gamma\delta} \delta_{\alpha\beta} \delta^{pp'} C_{1,\mu\nu}^p.\end{aligned}\quad (4.19)$$

Здесь в правых частях стоят неизвестные величины, которые, однако, одинаковы для всех реплик. Используя эти выражения, а также соотношение

$$\int d\mathbf{r} T \nabla^2 T^{-1} = \int d\mathbf{r} \nabla_\mu L_\mu + \int d\mathbf{r} L_\mu L_\mu, \quad (4.20)$$

где использовалось, что $\nabla(T \cdot T^{-1}) = \nabla T \cdot T^{-1} + T \nabla T^{-1} = 0$, получаем

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_{\text{eff}}[T] &\approx -\frac{\eta}{\gamma} \int d\mathbf{r} \sum_{\alpha\beta}^p (T \Lambda T^{-1})_{\alpha\beta}^{pp} \hat{q}^p - i \int d\mathbf{r} \sum_{\alpha}^p [L_\mu(\mathbf{r})]_{\alpha\alpha}^{pp} g_\mu^p - \frac{1}{2} \int d\mathbf{r} \sum_{\alpha}^p [\nabla_\mu L_\mu(\mathbf{r})]_{\alpha\alpha}^{pp} \tilde{q}^p \\ &- \frac{1}{2} \int d\mathbf{r} \sum_{\alpha\beta}^{pp'} \hat{k}_{\nu\mu}^{pp'} [L_\mu(\mathbf{r})]_{\alpha\beta}^{pp'} [L_\nu(\mathbf{r})]_{\beta\alpha}^{p'p} - \frac{1}{2} \int d\mathbf{r} \sum_{\alpha\beta}^{pp'} \tilde{k}_{\nu\mu}^{pp'} [L_\mu(\mathbf{r})]_{\alpha\alpha}^{pp} [L_\nu(\mathbf{r})]_{\beta\beta}^{p'p}.\end{aligned}\quad (4.21)$$

Заметим, что в последней строке выражения (4.21) мы пренебрегли разницей между \mathbf{r}' и \mathbf{r} в аргументах L_μ , так как корреляционные функции $\langle \hat{v}_\mu G_{\beta\gamma}^{p'}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \hat{v}_\nu G_{\delta\alpha}^p(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \rangle_P$ и $\langle \langle \hat{v}_\mu G_{\beta\alpha}^p(\mathbf{r}, \mathbf{r}) \cdot \hat{v}_\nu G_{\delta\gamma}^{p'}(\mathbf{r}', \mathbf{r}') \rangle \rangle_P$ спадают на расстоянии порядка R_c , а нас интересуют существенно большие расстояния.

Дальнейшее вычисление требует нахождения величин

$$\hat{k}_{\nu\mu}^{pp'} = K_{0,\nu\mu}^{pp'} - \delta^{pp'} C_{1,\nu\mu}^{pp} + \delta_{\nu\mu} \frac{\tilde{q}^p + \tilde{q}^{p'}}{2}, \quad \tilde{k}_{\nu\mu}^{pp'} = \delta^{pp'} K_{1,\nu\mu}^p - C_{0,\nu\mu}^{p'p}. \quad (4.22)$$

Оказывается, что $g_\mu^p = 0$, $\hat{k}_{\nu\mu}^{pp} = 0$ и $\tilde{k}_{\nu\mu}^{pp'} = 0$, как следствие тождества Уорда, связанного с наличием калибровочной симметрии действия для массивных мод P . Рассмотрим соответствующее тождество Уорда более подробно. Запишем следующий функционал от матричного поля $U(\mathbf{r})$:

$$F[U] = \ln \int \mathcal{D}[P] I[P] \exp \left[-\frac{1}{2\gamma} \text{Tr} P^2 + \text{Tr} \ln(\mathcal{E} - \mathcal{H}_0 + iU^{-1}PU + h) \right], \quad (4.23)$$

где $h = h(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ – произвольный матричный оператор, а матрица U имеет блок диагональную структуру, $U_{\alpha\beta}^{pp'}(\mathbf{r}) = \delta^{pp'} U_{\alpha\beta}^p(\mathbf{r})$. Тогда $F[U] = F[1]$, так как матрица U может быть устранена

локальным поворотом матрицы P , $P \rightarrow UPU^{-1}$. Представим $F[U]$ в виде

$$F[U] = \int \mathcal{D}[P] \exp \left[-S_0[P, h] + \text{Tr} \ln(1 + B[U]G[h] + (UhU^{-1} - h)G[h]) \right], \quad (4.24)$$

где $G^{-1}[h] = \mathcal{E} - \mathcal{H}_0 + iP + h$, а

$$S_0[P, h] = -\ln I[P] + \frac{1}{2\gamma} \text{Tr} P^2 - \text{Tr} \ln(E - \mathcal{H}_0 + iP + h). \quad (4.25)$$

Выберем матрицу $U(\mathbf{r})$ близкой к единичной, $U(\mathbf{r}) = 1 + it\epsilon(\mathbf{r})$, где $t \rightarrow 0$. При этом $U^{-1}(\mathbf{r}) = 1 - it\epsilon(\mathbf{r})$, а $\epsilon^\dagger = \epsilon$. Тогда, раскладываясь до первого порядка по ϵ , находим

$$B[U] = \frac{1}{2m} U \nabla^2 U^{-1} + iU \nabla_\mu U^{-1} \hat{v}_\mu \approx -\frac{it}{2m} \nabla^2 \epsilon + t \nabla_\mu \epsilon \hat{v}_\mu, \quad (4.26)$$

$$UhU^{-1} - h = it[\epsilon(\mathbf{r})h(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - h(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\epsilon(\mathbf{r}')]. \quad (4.27)$$

Подставляя эти выражения в ур. (4.24) и раскладываясь до первого порядка по t , получаем следующее нетривиальное соотношение

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\partial F}{\partial t} &= \int d\mathbf{r} \text{tr} \left(\left[-\frac{i}{2m} \nabla^2 \epsilon(\mathbf{r}) + \nabla_\mu \epsilon(\mathbf{r}) \hat{v}_\mu \right] \langle G(\mathbf{r}, \mathbf{r}|h) \rangle \right) \\ &+ i \int d\mathbf{r} d\mathbf{r}' \text{tr} \left(\left[\epsilon(\mathbf{r})h(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - h(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\epsilon(\mathbf{r}') \right] \langle G(\mathbf{r}', \mathbf{r}|h) \rangle \right) = 0, \end{aligned} \quad (4.28)$$

где $\langle \dots \rangle$ означает усреднение с действием $S_0[P, h]$. Выражение (4.28) позволяет получить ряд соотношений между корреляционными функциями полей P . Выберем $\epsilon_{\alpha\beta}^p(\mathbf{r}) = \delta_{\alpha\beta} \delta_{\alpha\alpha_0} x_{\mu_0}$ и положим в ур. (4.28) $h = 0$. Тогда, найдем

$$\langle \hat{v}_{\mu_0} G_{\alpha_0\alpha_0}^p(\mathbf{r}, \mathbf{r}|h) \rangle = 0, \quad (4.29)$$

что означает

$$g_\mu^p = 0. \quad (4.30)$$

Теперь продифференцируем соотношение (4.28) по h при $h = 0$. Используя формулу

$$\left. \frac{\delta \langle G_{\beta\alpha}^{pp}(\mathbf{r}, \mathbf{r}|h) \rangle}{\delta h_{\gamma\delta}^{p'p'}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)} \right|_{h=0} = -\delta_{pp'} \langle G_{\beta\gamma}^p(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) G_{\delta\alpha}^p(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}) \rangle + \langle \langle G_{\delta\gamma}^{p'}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1) \cdot G_{\beta\alpha}^p(\mathbf{r}, \mathbf{r}) \rangle \rangle, \quad (4.31)$$

найдем

$$\begin{aligned} \int d\mathbf{r} \sum_{\alpha\beta}^p \left[\frac{i}{2m} \nabla^2 \epsilon_{\alpha\beta}^p(\mathbf{r}) - \nabla_\mu \epsilon_{\alpha\beta}^p(\mathbf{r}) \hat{v}_\mu \right] \left[\delta^{pp'} \langle G_{\beta\gamma}^p(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) G_{\delta\alpha}^p(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}) \rangle - \langle \langle G_{\delta\gamma}^{p'}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1) \cdot G_{\beta\alpha}^p(\mathbf{r}, \mathbf{r}) \rangle \rangle \right] \\ + i \sum_{\beta} \left[\epsilon_{\beta\gamma}^{p'}(\mathbf{r}_1) \langle G_{\delta\beta}^{p'}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1) \rangle - \epsilon_{\delta\beta}^{p'}(\mathbf{r}_2) \langle G_{\beta\gamma}^{p'}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1) \rangle \right] = 0. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Выберем теперь матрицу ϵ в следующем виде

$$\epsilon_{\alpha\beta}^p(\mathbf{r}) = -i\delta_{\alpha a} \delta_{\beta b} \delta^{pq} \varkappa x_{\mu_0} + i\delta_{\alpha b} \delta_{\beta a} \delta^{pq} \varkappa^* x_{\mu_0}. \quad (4.33)$$

Здесь a и b – фиксированные реплики, $q = \pm$ и $x_{\mu_0} = x$ или y . Выделяя в ур. (4.32) члены

пропорциональные \varkappa , найдем

$$\int d\mathbf{r} \left[\delta^{p'q} \langle G_{\delta a}^q(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}) \hat{v}_{\mu_0} G_{b\gamma}^q(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) \rangle - \langle \langle G_{\delta\gamma}^{p'}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1) \cdot \hat{v}_{\mu_0} G_{ba}^q(\mathbf{r}, \mathbf{r}) \rangle \rangle \right] - i\delta^{p'q} \left[x_{1,\mu_0} \delta_{\gamma b} \langle G_{\delta a}^q(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1) \rangle - x_{2,\mu_0} \delta_{\delta a} \langle G_{b\gamma}^q(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1) \rangle \right] = 0. \quad (4.34)$$

Действуя оператором \hat{v}_ν на переменную \mathbf{r}_2 в правой части ур. (4.34), получим

$$\int d\mathbf{r} \left[\delta^{p'q} \langle \hat{v}_\nu G_{\delta b}^q(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}) \hat{v}_\mu G_{a\gamma}^q(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) \rangle - \langle \langle \hat{v}_\nu G_{\delta\gamma}^{p'}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1) \cdot \hat{v}_\mu G_{ab}^q(\mathbf{r}, \mathbf{r}) \rangle \rangle \right] + \delta_{\nu\mu} \delta_{\delta a} \delta^{p'q} \langle G_{b\gamma}^q(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1) \rangle - i\delta^{p'q} \left[x_{1,\mu} \delta_{\gamma b} \langle \hat{v}_\nu G_{\delta a}^q(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1) \rangle - x_{2,\mu} \delta_{\delta a} \langle \hat{v}_\nu G_{b\gamma}^q(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1) \rangle \right] = 0. \quad (4.35)$$

Полагая $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1$, найдём

$$\delta^{p'q} \delta_{b\delta} \delta_{a\gamma} \hat{k}_{\mu\nu}^{qq} + \delta_{ab} \delta_{\delta\gamma} \tilde{k}_{\mu\nu}^{p'q} = 0 \quad (4.36)$$

Выбирая $a = \gamma \neq b = \delta$, получаем, что

$$\hat{k}_{\mu\nu}^{qq} = 0. \quad (4.37)$$

Выбирая $a = b$ и $\gamma = \delta$, найдём, что

$$\tilde{k}_{\mu\nu}^{p'q} = 0. \quad (4.38)$$

Изучим теперь более внимательно член первого порядка по функции Грина и оператору скорости в выражении (4.21):

$$-i \int d\mathbf{r} \operatorname{tr} L_\mu(\mathbf{r}) \hat{v}_\mu \langle G(\mathbf{r}, \mathbf{r}) \rangle_P = -i \int d\mathbf{r} \sum_{\alpha\alpha}^p g_\mu^p [L_\mu(\mathbf{r})]_{\alpha\alpha}^{pp}. \quad (4.39)$$

Согласно, результату (4.30) этот член равен нулю в силу соотношения $g_\mu^p = 0$. Однако, вывод тождеств Уорда подразумевает отсутствие границы, т.к. если матрица Q фиксирована на границе, то поворот U меняет граничное условие. Будем считать, что граница имеется и сделаем ряд преобразований:

$$\begin{aligned} -i \int d\mathbf{r} \operatorname{tr} L_\mu(\mathbf{r}) \hat{v}_\mu \langle G(\mathbf{r}, \mathbf{r}) \rangle_P &= -i \int d\mathbf{r} \sum_{\alpha}^p [L_\mu(\mathbf{r})]_{\alpha\alpha}^{pp} \int_{-\infty}^E dE' \frac{\partial}{\partial E'} \hat{v}_\mu \langle G_{\alpha\alpha}^p(\mathbf{r}, \mathbf{r}) \rangle_P \\ &= -i \int_{-\infty}^E dE' \int d\mathbf{r} d\mathbf{r}' [L_\mu(\mathbf{r})]_{\alpha\alpha}^{pp} W_\mu^p(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \\ &\approx -i \int_{-\infty}^E dE' \int d\mathbf{r} d\mathbf{r}' \left\{ [L_\mu(\mathbf{r}')]_{\alpha\alpha}^{pp} + (\mathbf{r} - \mathbf{r}')_\nu \nabla_\nu [L_\mu(\mathbf{r}')]_{\alpha\alpha}^{pp} \right\} W_\mu^p(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \end{aligned} \quad (4.40)$$

где

$$W_\mu^p(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = - \sum_{\beta} \langle \hat{v}_\mu G_{\alpha\beta}^p(\mathbf{r}, \mathbf{r}') G_{\beta\alpha}^p(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \rangle_P + \sum_{\beta}^{p'} \langle \langle G_{\beta\beta}^{p'}(\mathbf{r}', \mathbf{r}') \cdot \hat{v}_\mu G_{\alpha\alpha}^p(\mathbf{r}, \mathbf{r}) \rangle \rangle_P. \quad (4.41)$$

Отметим, что W_μ^p не зависит от α , а из тождества (4.34) следует, что

$$\int d\mathbf{r} W_\mu^p(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = 0. \quad (4.42)$$

Далее, заметим, что выполняется соотношение

$$\begin{aligned}
\frac{1}{e} \frac{\partial}{\partial B} \langle G_{\beta\beta}^p(\mathbf{r}', \mathbf{r}') \rangle_P &= \int d\mathbf{r} \sum_{\alpha} \langle G_{\beta\alpha}^p(\mathbf{r}', \mathbf{r}) x \hat{v}_y G_{\alpha\beta}^p(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \rangle_P \\
&\quad - \int d\mathbf{r} \sum_{\alpha}^{p'} \langle \langle G_{\beta\beta}^p(\mathbf{r}', \mathbf{r}') \cdot x \hat{v}_y G_{\alpha\alpha}^{p'}(\mathbf{r}, \mathbf{r}) \rangle \rangle_P \\
&= - \int d\mathbf{r} \sum_{\alpha} \langle G_{\beta\alpha}^p(\mathbf{r}', \mathbf{r}) y \hat{v}_x G_{\alpha\beta}^p(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \rangle_P \\
&\quad + \int d\mathbf{r} \sum_{\alpha}^{p'} \langle \langle G_{\beta\beta}^p(\mathbf{r}', \mathbf{r}') \cdot y \hat{v}_x G_{\alpha\alpha}^{p'}(\mathbf{r}, \mathbf{r}) \rangle \rangle_P.
\end{aligned} \tag{4.43}$$

При выводе использовалось, что $\partial \mathcal{H}_0 / \partial B = -ex \hat{v}_y = ey \hat{v}_x$. Тогда, оказывается, что интегралы от W_{μ}^p выражаются через производную по магнитному полю от функции Грина:

$$\begin{aligned}
\int d\mathbf{r} x W_y^p(\mathbf{r} - \mathbf{r}') &= \frac{1}{e} \frac{\partial}{\partial B} \langle G_{\beta\beta}^p(\mathbf{r}', \mathbf{r}') \rangle_P, \\
\int d\mathbf{r} y W_x^p(\mathbf{r} - \mathbf{r}') &= -\frac{1}{e} \frac{\partial}{\partial B} \langle G_{\beta\beta}^p(\mathbf{r}', \mathbf{r}') \rangle_P.
\end{aligned} \tag{4.44}$$

Подставляя в тождество (4.32) выражение

$$\epsilon_{\alpha\beta}^p(\mathbf{r}) = -i\delta_{\alpha a} \delta_{\beta b} \delta^{pq} \epsilon x_{\mu_0}^2 + i\delta_{\alpha b} \delta_{\beta a} \delta^{pq} \epsilon^* x_{\mu_0}^2, \tag{4.45}$$

найдем, что выполняется следующее соотношение:

$$\left[x_{\mu_0} \hat{v}_{\mu_0} - \frac{i}{2m_e} \right] \left[-\delta^{p'q} \langle G_{a\gamma}^q(\mathbf{r}, \mathbf{r}') G_{\delta b}^q(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \rangle_P + \langle \langle G_{\delta\gamma}^{p'}(\mathbf{r}', \mathbf{r}') G_{ab}^q(\mathbf{r}, \mathbf{r}) \rangle \rangle_P \right] = 0. \tag{4.46}$$

Отсюда получаем, что

$$\int d\mathbf{r} x_{\mu_0} W_{\mu_0}^p(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{i}{2m} \frac{\partial}{\partial E'} \langle G_{\alpha\alpha}^p(\mathbf{r}', \mathbf{r}') \rangle_P. \tag{4.47}$$

Подчеркнем, что суммирования по μ_0 нет. Таким образом, член (4.39) может быть переписан в следующем виде:

$$\int d\mathbf{r} \text{tr} L_{\mu}(\mathbf{r}) \hat{v}_{\mu} \langle G(\mathbf{r}, \mathbf{r}) \rangle_P = \int d\mathbf{r}' \sum_{\alpha}^p [\nabla_{\nu} L_{\mu}(\mathbf{r}')]_{\alpha\alpha}^{pp} \int_{-\infty}^E dE' \left[i \frac{\delta_{\mu\nu}}{2m} \frac{\partial}{\partial E'} + \frac{\epsilon_{\nu\mu}}{e} \frac{\partial}{\partial B} \right] \langle G_{\beta\beta}^p(\mathbf{r}', \mathbf{r}') \rangle_P. \tag{4.48}$$

Удобно определить величину

$$\xi^p = -\frac{i}{e} \frac{\partial}{\partial B} \int_{-\infty}^E dE' \langle G_{\beta\beta}^p(\mathbf{r}', \mathbf{r}') \rangle_P. \tag{4.49}$$

Заметим, что в определении ξ^p суммирования по репличному индексу β не производится.

Тогда, можем записать, что

$$\begin{aligned}
-i \int d\mathbf{r} \operatorname{tr} L_\mu(\mathbf{r}) \hat{v}_\mu \langle G(\mathbf{r}, \mathbf{r}) \rangle_P &= \frac{1}{2} \int d\mathbf{r} \sum_\alpha^p [\nabla_\mu L_\mu(\mathbf{r})]_{\alpha\alpha}^{pp} \tilde{q}^p \\
&+ \frac{\xi^+ - \xi^-}{2} \epsilon_{\nu\mu} \operatorname{Tr} \nabla_\nu L_\mu \Lambda + \frac{\xi^+ + \xi^-}{2} \epsilon_{\nu\mu} \operatorname{Tr} \nabla_\nu L_\mu.
\end{aligned} \tag{4.50}$$

Снова используя соотношение $T\nabla T^{-1} = -\nabla T \cdot T^{-1}$, получим ряд равенств

$$\epsilon_{\nu\mu} \nabla_\nu L_\mu = \epsilon_{\nu\mu} L_\mu L_\nu, \quad \epsilon_{\nu\mu} \operatorname{tr} \nabla_\nu L_\mu = 0, \quad \epsilon_{\nu\mu} \operatorname{tr} \Lambda \nabla_\nu L_\mu = \epsilon_{\nu\mu} \operatorname{tr} \Lambda L_\mu L_\nu. \tag{4.51}$$

Учитывая, что

$$\xi^+ - \xi^- = -\frac{2\pi}{e} \frac{\partial}{\partial B} \int_{-\infty}^E dE' \bar{D}(E') = \frac{2\pi}{e^2} \bar{\sigma}_{xy}^{(II)}, \tag{4.52}$$

где $\bar{D}(E)$ и $\bar{\sigma}_{xy}^{(II)}$ обозначают плотность состояний и вклад $\sigma_{xy}^{(II)}$ в холловскую проводимость, вычисленные в теории с $T = 1$ (ср. с ур. (2.172)), окончательно получаем

$$-i \int d\mathbf{r} \operatorname{tr} L_\mu(\mathbf{r}) \hat{v}_\mu \langle G(\mathbf{r}, \mathbf{r}) \rangle_P = \frac{1}{2} \int d\mathbf{r} \sum_\alpha^p [\nabla_\mu L_\mu(\mathbf{r})]_{\alpha\alpha}^{pp} \tilde{q}^p + \frac{\pi}{e^2} \bar{\sigma}_{xy}^{(II)} \epsilon_{\mu\nu} \operatorname{Tr} L_\mu L_\nu \Lambda. \tag{4.53}$$

Далее, заметим, что первый член в правой части ур. (4.21) можно переписать следующим образом:

$$-\frac{\eta}{\gamma} \int d\mathbf{r} \sum_\alpha^p [T\Lambda T^{-1}]_{\alpha\alpha}^{pp} \hat{q}^p = -\pi \bar{D}(\mathcal{E}) \eta \operatorname{Tr} T\Lambda T^{-1} \Lambda, \tag{4.54}$$

где $\bar{D}(\mathcal{E}) = (2\pi L^2 \gamma)^{-1} \sum_p p \hat{q}^p$ – это плотность состояний в теории с $T = 1$. С помощью соотношений (4.37), (4.38) и (4.53) из ур. (4.21) находим, что

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_{\text{eff}}[T] &= -\frac{1}{2} \int d\mathbf{r} \sum_{\alpha\beta}^{pp'} \hat{k}_{\nu\mu}^{pp'} (1 - \delta^{pp'}) [L_\mu(\mathbf{r})]_{\alpha\beta}^{pp'} [L_\nu(\mathbf{r})]_{\beta\alpha}^{p'p} \\
&+ \frac{\pi}{e^2} \bar{\sigma}_{xy}^{(II)} \epsilon_{\mu\nu} \operatorname{Tr} \Lambda L_\mu L_\nu - \pi \bar{D}(\mathcal{E}) \eta \operatorname{Tr} T\Lambda T^{-1} \Lambda.
\end{aligned} \tag{4.55}$$

Учитывая следующие соотношения (см. задачи в конце раздела):

$$K_{0,\mu\mu}^{+-} = K_{0,\mu\mu}^{-+}, \quad K_{0,xy}^{+-} = K_{0,yx}^{-+} = -K_{0,xy}^{-+} = -K_{0,yx}^{+-}, \tag{4.56}$$

получаем

$$\begin{aligned}
\sum_{\mu;\alpha\beta}^{pp'} \hat{k}_{\mu\mu}^{pp'} (1 - \delta^{pp'}) [L_\mu(\mathbf{r})]_{\alpha\beta}^{pp'} [L_\nu(\mathbf{r})]_{\beta\alpha}^{p'p} &= \hat{k}_{xx}^{+-} \sum_{\alpha\beta} \left[(L_\mu)_{\alpha\beta}^{+-} (L_\mu)_{\beta\alpha}^{-+} + (L_\mu)_{\alpha\beta}^{-+} (L_\mu)_{\beta\alpha}^{+-} \right] \\
&= \frac{\hat{k}_{xx}^{+-}}{2} \operatorname{tr} [L_\mu L_\mu - L_\mu \Lambda L_\mu \Lambda] = -\frac{\hat{k}_{xx}^{+-}}{4} \operatorname{tr} (\nabla Q)^2,
\end{aligned} \tag{4.57}$$

где теперь $Q = T^{-1}\Lambda T$. Также, делая аналогичные преобразования, находим

$$\begin{aligned} \sum_{\mu \neq \nu; \alpha\beta}^{pp'} \hat{k}_{\nu\mu}^{pp'} (1 - \delta^{pp'}) [L_\mu(\mathbf{r})]_{\alpha\beta}^{pp'} [L_\nu(\mathbf{r})]_{\beta\alpha}^{p'p} &= 2\hat{k}_{yx}^{+-} \sum_{\alpha\beta} \left[(L_x)_{\alpha\beta}^{+-} (L_y)_{\beta\alpha}^{-+} - (L_y)_{\alpha\beta}^{+-} (L_x)_{\beta\alpha}^{-+} \right] \\ &= \hat{k}_{yx}^{+-} \epsilon_{\mu\nu} \text{tr} L_\mu L_\nu \Lambda = -\frac{\hat{k}_{yx}^{+-}}{4} \epsilon_{\mu\nu} \text{tr} Q \nabla_\mu Q \nabla_\nu Q. \end{aligned} \quad (4.58)$$

В итоге эффективное действие для медленных мод T принимает вид

$$\mathcal{S}_{\text{eff}}[T] = \frac{\hat{k}_{xx}^{+-}}{8} \text{Tr}(\nabla Q)^2 - \frac{1}{8} \left[\hat{k}_{xy}^{+-} + \frac{2\pi}{e^2} \bar{\sigma}_{xy}^{(II)} \right] \epsilon_{\mu\nu} \text{Tr} Q \nabla_\mu Q \nabla_\nu Q - \pi \bar{\mathcal{D}}(\mathcal{E}) \eta \text{Tr} \Lambda Q. \quad (4.59)$$

Здесь, подчеркнем еще раз, $Q = T^{-1}\Lambda T$, т.е. эрмитово матричное поле удовлетворяет нелинейному условию

$$Q^\dagger = Q, \quad Q^2(\mathbf{r}) = 1. \quad (4.60)$$

Именно поэтому полученная матричная теория называется *нелинейной* сигма моделью. Условия (4.60) ограничивают матрицу Q на класс смежности $U(2n)/[U(n) \times U(n)]$. Заметим, что нелинейное условие в ур. (4.60) означает, что $\det Q = \pm 1$. Также отметим, что тот факт, что член пропорциональный $\bar{\sigma}_{xy}^{(II)}$ возник из вклада, который отличается от нуля только в присутствии границы, связан с тем, что $\sigma_{xy}^{(II)}$ описывает вклад в холловскую проводимость, который связан с краевыми токами.

Последний вопрос, который осталось выяснить, это то чему равны и какой физический смысл величин \hat{k}_{xx}^{+-} и \hat{k}_{xy}^{+-} . Это будет сделано в следующем разделе.

Задачи:

4.1.1 Вывести формулу (4.11).

4.1.2 Вывести формулу (4.31).

4.1.3 Доказать неравенство $\text{Re} M_0^p(q) > 0$ и вычислить $\min_q \text{Re} M_0(q)$.

4.1.4 Доказать соотношения (4.56).

4.1.5 Доказать, что в случае числа реплик $n = 1$, матрица Q , удовлетворяющая условиям (4.60) может быть представлена в виде $Q = \pm \mathbf{m} \boldsymbol{\tau}$, где \mathbf{m} - единичный действительный вектор в трёхмерном пространстве, а $\boldsymbol{\tau} = \{\tau_x, \tau_y, \tau_z\}$ вектор стандартных матриц Паули.

4.2 Вывод формул Кубо для проводимости в нелинейной сигма модели

В этом разделе мы установим, чему равны параметры $\hat{k}_{\mu\nu}^{+-}$, входящие в эффективное действие (4.59) для поля $Q = T^{-1}\Lambda T$. Также мы выведем формулы, позволяющие вычислять проводимости σ_{xx} и σ_{xy} через корреляционные функции поля $Q = T^{-1}\Lambda T$. Ниже будем следовать работе [53].

Рассмотрим следующую статистическую сумму, зависящую от матричного поля U :

$$Z^n[\eta, U] = \int \mathcal{D}[V] \mathcal{P}[V] \exp \text{Tr} \ln(E - \mathcal{H}_0 - V + i\eta U^{-1}\Lambda U). \quad (4.61)$$

Если эта матрица коммутирует с матрицей Λ , $[\Lambda, U] = 0$, то $Z^n[\eta, U] = Z^n[\eta, 1]$, где последняя статистическая сумма совпадает с выражением (3.86). Если же $U = U_1 U_0$, где $[U_0, \Lambda] = 0$, то

$$Z^n[\eta, U_1 U_0] = Z^n[\eta, U_1]. \quad (4.62)$$

Будем считать, что матрица $U(\mathbf{r})$ медленно меняется в пространстве так, что $\nabla U(\mathbf{r})$ есть малая величина. Тогда раскладывая $\ln Z^n[U]$ до второй степени по ∇U , найдем

$$\begin{aligned} \ln Z^n[\eta, U] \approx & \frac{1}{2m_e} \text{Tr} U \nabla^2 U^{-1} \langle G \rangle + i \text{Tr} U \nabla_\mu U^{-1} \hat{v}_\mu \langle G \rangle + \frac{1}{2} \text{Tr} \langle U \nabla_\mu U^{-1} \hat{v}_\mu G U \nabla_\nu U^{-1} \hat{v}_\nu G \rangle \\ & - \frac{1}{2} \langle \langle \text{Tr} U \nabla_\mu U^{-1} \hat{v}_\mu G \cdot \text{Tr} U \nabla_\nu U^{-1} \hat{v}_\nu G \rangle \rangle. \end{aligned} \quad (4.63)$$

Здесь среднее $\langle \dots \rangle$ определено по отношению к $Z^n[\eta, 1]$. В пределе $n \rightarrow 0$ это среднее переходит в среднее по случайному потенциалу V . Заметим что по построению функции Грина в ур. (4.63) диагональны в репличном пространстве: $G_{\alpha\beta}^{pp'} = G^p \delta^{pp'} \delta_{\alpha\beta}$.

Выберем в качестве U матрицу специального вида: $U = \exp(ij_x x t_x + ij_y y t_y)$. Здесь j_x и j_y произвольные параметры, а t_x и t_y матрицы, которые мы определим далее. Учитывая, что

$$\begin{aligned} U \nabla_x U^{-1} &= -ij_x t_x + j_x j_y y t_y t_x, & U \nabla_y U^{-1} &= -ij_y t_y + j_x j_y x t_x t_y, \\ U \nabla^2 U^{-1} &= -j_x^2 t_x^2 - j_y^2 t_y^2, \end{aligned} \quad (4.64)$$

получим

$$\begin{aligned} \lim_{j_\mu \rightarrow 0} \frac{\partial^2 \ln Z^n[U]}{\partial j_x \partial j_y} &= i \int d\mathbf{r} \sum_\alpha^p [y \hat{v}_x t_y t_x + x \hat{v}_y t_x t_y]_{\alpha\alpha}^{pp} \langle G^p(\mathbf{r}, \mathbf{r}) \rangle \\ &- \sum_{\alpha\beta}^{pp'} (t_x)_{\alpha\beta}^{pp'} (t_y)_{\beta\alpha}^{p'p} \int d\mathbf{r} d\mathbf{r}' \langle \hat{v}_x G^{p'}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \hat{v}_y G^p(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \rangle \\ &+ \sum_{\alpha\beta}^{pp'} (t_x)_{\alpha\alpha}^{pp} (t_y)_{\beta\beta}^{p'p'} \int d\mathbf{r} d\mathbf{r}' \langle \hat{v}_x G^p(\mathbf{r}, \mathbf{r}) \hat{v}_y G^{p'}(\mathbf{r}', \mathbf{r}') \rangle \end{aligned} \quad (4.65)$$

и

$$\begin{aligned}
\lim_{j_\mu \rightarrow 0} \frac{\partial^2 \ln Z^n[U]}{\partial^2 j_x} &= -\frac{1}{m_e} \sum_\alpha \int d\mathbf{r} (t_x^2)_{\alpha\alpha}^{pp} \langle G^p(\mathbf{r}, \mathbf{r}) \rangle \\
&\quad - \sum_{\alpha\beta}^{pp'} (t_x)_{\alpha\beta}^{pp'} (t_x)_{\beta\alpha}^{p'p} \int d\mathbf{r} d\mathbf{r}' \langle \hat{v}_x G^{p'}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \hat{v}_x G^p(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \rangle \\
&\quad + \sum_{\alpha\beta}^{pp'} (t_x)_{\alpha\alpha}^{pp} (t_x)_{\beta\beta}^{p'p'} \int d\mathbf{r} d\mathbf{r}' \langle \hat{v}_x G^p(\mathbf{r}, \mathbf{r}) \hat{v}_x G^{p'}(\mathbf{r}', \mathbf{r}') \rangle.
\end{aligned} \tag{4.66}$$

Подчеркнем, что полученные соотношения (4.65) и (4.66) справедливы для произвольных матриц t_x и t_y .

Выберем сначала матрицы $t_{x,y}$ в следующем виде

$$(t_{x,y})_{\alpha\beta}^{pp'} = \gamma_{x,y}^+ \delta^{p+} \delta^{p'-} \delta_{\alpha\alpha_0} \delta_{\beta\beta_0} + \gamma_{x,y}^- \delta^{p-} \delta^{p'+} \delta_{\alpha\beta_0} \delta_{\beta\alpha_0}, \tag{4.67}$$

где $\gamma_x^\pm = 1$ и $\gamma_y^\pm = \mp i$, а α_0 и β_0 – обозначают фиксированные репличные индексы. В этом случае матрица t_x (t_y) фактически является матрицей Паули τ_x (τ_y), вставленной в матрицу размера $(2n) \times (2n)$. Тогда, из ур. (4.65) и (4.66) получим

$$\begin{aligned}
\lim_{j_\mu \rightarrow 0} \frac{\partial^2 \ln Z^n[U]}{\partial j_x \partial j_y} &= - \int d\mathbf{r} \epsilon_{\mu\nu} x_\mu \hat{v}_\nu \langle [G^R(\mathbf{r}, \mathbf{r}) - G^A(\mathbf{r}, \mathbf{r})] \rangle + i \int d\mathbf{r} d\mathbf{r}' \left[\langle \hat{v}_x G^R(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \hat{v}_y G^A(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \rangle \right. \\
&\quad \left. - \langle \hat{v}_x G^A(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \hat{v}_y G^R(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \rangle \right].
\end{aligned} \tag{4.68}$$

Используя формулу Смрчка и Стреды для σ_{xy} (см. ур. (2.162) и (2.163)), находим что

$$\lim_{n \rightarrow 0} \lim_{j_\mu \rightarrow 0} \frac{\partial^2 \ln Z^n[U]}{\partial j_x \partial j_y} = 4\pi i \mathcal{S} \sigma_{xy} / e^2. \tag{4.69}$$

Выберем теперь матрицы $t_{x,y}$ в следующем виде

$$(t_{x,y})_{\alpha\beta}^{pp'} = \tau_{x,y}^{pp'} \delta_{\alpha\alpha_0} \delta_{\beta\beta_0} - i \delta^{pp'} \delta_{\alpha\alpha_0} \delta_{\beta\beta_0} \tag{4.70}$$

Здесь $\tau_{x,y}$ обозначают стандартные матрицы Паули. Заметим, что при таком выборе матриц $t_{x,y}$, матрица U отличается от той, которая возникала при выборе матриц $t_{x,y}$ согласно ур. (4.67), только множителем $\exp(j_x x + j_y y)$. Поэтому, величины $Z^n[U]$ для двух вариантов выбора (4.67) и (4.70) совпадают.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \ln Z^n[U]}{\partial j_x^2} &= -4 \int d\mathbf{r} d\mathbf{r}' \langle \hat{v}_x \text{Im} G^R(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \hat{v}_x \text{Im} G^R(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \rangle \\
&\quad + 4 \int d\mathbf{r} d\mathbf{r}' \langle \hat{v}_x \text{Re} G^R(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \hat{v}_x \text{Re} G^R(\mathbf{r}', \mathbf{r}') \rangle \\
&= -4 \int d\mathbf{r} d\mathbf{r}' \langle \hat{v}_x \text{Im} G^R(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \hat{v}_x \text{Im} G^R(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \rangle.
\end{aligned} \tag{4.71}$$

Здесь мы использовали тот факт, что $\text{Tr} \hat{v}_\mu G = i \text{Tr} [x_\mu, G^{-1}] G = 0$. Вспоминая формулу Кубо для продольной проводимости σ_{xx} , ур. (2.150), находим что

$$\lim_{n \rightarrow 0} \lim_{j_x \rightarrow 0} \frac{\partial^2 \ln Z^n[U]}{\partial j_x^2} = -4\pi \mathcal{S} \sigma_{xx} / e^2. \tag{4.72}$$

Формулы (4.69) и (4.72) позволяют выразить точные значения проводимости в виде производных от действия $Z^n[\eta, U]$. Ниже $Z^n[\eta, U]$ будет выражено через эффективное действие для матрицы $Q = T^{-1}\Lambda T$.

Повторяя вывод нелинейной сигма-модели, представленный в предыдущем разделе, можно показать, что

$$Z^n[\eta, U] = \int D[Q] \exp[-\mathcal{S}_{\text{eff}}[UQU^{-1}]] \quad (4.73)$$

где \mathcal{S}_{eff} определяется выражением (4.59). Для дальнейших преобразований удобно переписать \mathcal{S}_{eff} в следующем виде

$$\mathcal{S}_{\text{eff}}[UQU^{-1}] = \frac{\hat{k}_{xx}^{+-}}{8} \text{Tr}(D_\mu Q)^2 - \frac{\check{k}_{xy}^{+-}}{8} \epsilon_{\mu\nu} \text{Tr} Q (D_\mu Q) (D_\nu Q) - \pi \bar{D}(\mathcal{E}) \eta \text{Tr} \Lambda U Q U^{-1}, \quad (4.74)$$

где для краткости введено обозначение $\check{k}_{xy}^{+-} = \hat{k}_{xy}^{+-} + (2\pi/e^2)\bar{\sigma}_{xy}^{II}$ и

$$D_\mu Q = \nabla Q - [Q, A_\mu]_-, \quad A_\mu = U^{-1} \nabla_\mu U. \quad (4.75)$$

Так как мы считаем, что ∇U мало, то можно вычислять $\ln Z^n[\eta, U]$ разложением по неабелеву векторному потенциалу A_μ , ограничившись вторым порядком:

$$\begin{aligned} \ln Z^n[U] = & -\frac{\hat{k}_{xx}^{+-}}{2} \text{Tr} A_\mu \langle Q \nabla_\mu Q \rangle - \frac{\check{k}_{xy}^{+-}}{2} \epsilon_{\mu\nu} \text{Tr} A_\nu \langle \nabla_\mu Q \rangle - \frac{\hat{k}_{xx}^{+-}}{4} \text{Tr} \langle [Q A_\mu Q A_\mu - A_\mu A_\mu] \rangle \\ & - \frac{\check{k}_{xy}^{+-}}{2} \epsilon_{\mu\nu} \text{Tr} \langle Q \rangle A_\mu A_\nu + \frac{1}{8} \left\langle \left\langle \left\{ \text{Tr} A_\nu \left[\hat{k}_{xx}^{+-} \delta_{\mu\nu} Q + \check{k}_{xy}^{+-} \epsilon_{\mu\nu} \right] \nabla_\mu Q \right\}^2 \right\rangle \right\rangle. \end{aligned} \quad (4.76)$$

Используя ур. (4.64), найдем

$$\lim_{j_x \rightarrow 0} \frac{\partial^2 \ln Z^n[U]}{\partial j_x^2} = \frac{\hat{k}_{xx}^{+-}}{4} \text{Tr} \langle [Q, t_x]^2 \rangle - \frac{(\hat{k}_{xx}^{+-})^2}{4} \langle \langle \text{Tr} t_x Q \nabla_x Q \text{Tr} t_x Q \nabla_x Q \rangle \rangle, \quad (4.77)$$

$$\begin{aligned} \lim_{j_\mu \rightarrow 0} \frac{\partial^2 \ln Z^n[U]}{\partial j_x \partial j_y} = & -\frac{\hat{k}_{xx}^{+-}}{2} \text{Tr} \langle y t_y t_x Q \nabla_x Q + x t_x t_y Q \nabla_y Q \rangle - \frac{\check{k}_{xy}^{+-}}{2} \text{Tr} \langle x t_x t_y \nabla_x Q - y t_y t_x \nabla_y Q \rangle \\ & - \frac{(\hat{k}_{xx}^{+-})^2}{4} \langle \langle \text{Tr} t_x Q \nabla_x Q \cdot \text{Tr} t_y Q \nabla_y Q \rangle \rangle, \end{aligned} \quad (4.78)$$

где использовались следующие соотношения $\text{tr} Q = 0$ и $Q^2 = 1$.

Сделаем теперь математическое отступление. Как упоминалось выше важно различать коммутирует матрица U с матрицей Λ или нет. Заметим, что матрица U , которая коммутирует с матрицей Λ , $[U, \Lambda] = 0$, может быть представлена в блок диагональном виде, $U_{\alpha\beta}^{pp'} = U_{\alpha\beta}^p \delta^{pp'}$, т.е. $U \in U(n) \times U(n)$. Если же $[U, \Lambda] \neq 0$, то матрица $U \in U(2n)/U(n) \times U(n)$. Построим явно генераторы для группы $U(2n)$. Рассмотрим $2n^2$ матриц

$$(u_{x,y}^{\alpha_0\beta_0})_{\alpha\beta}^{pp'} = \gamma_{x,y}^+ \delta^{p'+} \delta^{\alpha_0\beta_0} - \delta_{\alpha\alpha_0} \delta_{\beta\beta_0} + \gamma_{x,y}^- \delta^{p'-} \delta^{\alpha_0\beta_0} + \delta_{\alpha\beta_0} \delta_{\beta\alpha_0}, \quad (4.79)$$

где $\alpha_0, \beta_0 = 1, \dots, n$. Любая матрица $U \in U(2n)/U(n) \times U(n)$ может быть представлена в виде линейной комбинации матриц $u_{x,y}^{\alpha_0\beta_0}$:

$$U = \sum_{\alpha_0, \beta_0} C_{\mu}^{\alpha_0, \beta_0} u_{\mu}^{\alpha_0 \beta_0}. \quad (4.80)$$

Матрицы $u_\mu^{\alpha_0\beta_0}$ обладают следующими свойствами

$$\operatorname{tr} u_\mu^{\alpha_0\beta_0} = 0, \quad \operatorname{tr}(u_\mu^{\alpha_0\beta_0})^2 = 2, \quad \sum_{\alpha_0, \beta_0} (u_\mu^{\alpha_0\beta_0})^2 = (2n) \mathbf{1}, \quad (4.81)$$

где $\mathbf{1}$ обозначает единичную матрицу. Перенумеруем матрицы $u_\mu^{\alpha_0\beta_0}$ в виде u_j , где $j = 1, \dots, 2n^2$. Тогда, выполняется следующее тождество:

$$\sum_{j=1}^{2n^2} (u_j)_{\alpha_1\alpha_2}^{p_1p_2} (u_j)_{\alpha_3\alpha_4}^{p_3p_4} = 2\delta^{p_1p_4} \delta^{p_2p_3} \delta_{\alpha_1\alpha_4} \delta_{\alpha_2\alpha_3} \left[\delta^{p_1+} \delta^{p_2-} + \delta^{p_1-} \delta^{p_2+} \right]. \quad (4.82)$$

Построим теперь генераторы для $U(n) \times U(n)$. Рассмотрим $2n^2 - 2n$ матриц вида

$$(v_{x,y}^{\pm; \alpha_0\beta_0})_{\alpha\beta}^{pp'} = \delta^{pp'} \delta^{p\pm} \left[\gamma_{x,y}^+ \delta_{\alpha\alpha_0} \delta_{\beta\beta_0} + \gamma_{x,y}^- \delta_{\alpha\beta_0} \delta_{\beta\alpha_0} \right], \quad (4.83)$$

где $\alpha_0, \beta_0 = 1, \dots, n$, причем $\beta_0 > \alpha_0$. А также $2n - 1$ матрицу вида

$$(v_j)_{\alpha\beta}^{pp'} = \delta^{pp'} \delta_{\alpha\beta} (s_j)_\alpha^p / \sqrt{n}, \quad (4.84)$$

где $j = 1, \dots, (2n - 1)$. Величины $(s_j)_\alpha^p$ равны по модулю единице, $|(s_j)_\alpha^p| = 1$, а знаки выбраны таким образом, чтобы выполнялись соотношения

$$\sum_{\alpha p} (s_j)_\alpha^p = 0, \quad \sum_{j=1}^{2n-1} (s_j)_\alpha^p (s_j)_\beta^{p'} = \begin{cases} 2n - 1, & p = p', \alpha = \beta, \\ -1, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (4.85)$$

Любая матрица $U \in U(n) \times U(n)$ может быть представлена в виде линейной комбинации матриц v :

$$U = \sum_{\beta_0 > \alpha_0; p = \pm} D_\mu^{p; \alpha_0\beta_0} v_\mu^{p; \alpha_0, \beta_0} + \sum_{j=1}^{2n-1} D'_j v_j + D'' \mathbf{1}. \quad (4.86)$$

Матрицы $v_\mu^{\alpha_0\beta_0}$ обладают следующими свойствами

$$\operatorname{tr} v_\mu^{\pm; \alpha_0\beta_0} = 0, \quad \operatorname{tr}(v_\mu^{\pm; \alpha_0\beta_0})^2 = 2, \quad \sum_{\alpha_0 < \beta_0} (v_\mu^{\pm; \alpha_0\beta_0})^2 = (n - 1) \mathbf{1}. \quad (4.87)$$

Перенумеруем матрицы $v_\mu^{\pm; \alpha_0\beta_0}$ в виде v_j , где $j = 2n, \dots, 2n^2 - 1$. Тогда, выполняется следующее тождество

$$\sum_{j=1}^{2n^2-1} (v_j)_{\alpha_1\alpha_2}^{p_1p_2} (v_j)_{\alpha_3\alpha_4}^{p_3p_4} = 2\delta^{p_1p_4} \delta^{p_2p_3} \delta_{\alpha_1\alpha_4} \delta_{\alpha_2\alpha_3} \left[\delta^{p_1+} \delta^{p_2+} + \delta^{p_1-} \delta^{p_2-} \right] - \frac{1}{n} \delta^{p_1p_2} \delta^{p_3p_4} \delta_{\alpha_1\alpha_2} \delta_{\alpha_3\alpha_4}. \quad (4.88)$$

Складывая выражения (4.82) и (4.88), получаем следующее соотношение полноты:

$$\sum_{j=1}^{2n^2} (u_j)_{\alpha_1\alpha_2}^{p_1p_2} (u_j)_{\alpha_3\alpha_4}^{p_3p_4} + \sum_{j=1}^{2n^2-1} (v_j)_{\alpha_1\alpha_2}^{p_1p_2} (v_j)_{\alpha_3\alpha_4}^{p_3p_4} = 2\delta^{p_1p_4} \delta^{p_2p_3} \delta_{\alpha_1\alpha_4} \delta_{\alpha_2\alpha_3} - \frac{1}{n} \delta^{p_1p_2} \delta^{p_3p_4} \delta_{\alpha_1\alpha_2} \delta_{\alpha_3\alpha_4}. \quad (4.89)$$

Заметим, что вместо матрицы t_x , использовавшейся для вывода формулы (4.72) для σ_{xx} , можно выбрать любую матрицу u_j . Если же выбрать вместо t_x матрицу v_j , то так как $[v_j, \Lambda] = 0$, то в правой части ур. (4.72) получится нуль. Поэтому, из ур. (4.77) следует, что

$$-\frac{4\pi\sigma_{xx}\mathcal{S}}{e^2} = \frac{\hat{k}_{xx}^{+-}}{4} \text{Tr}\langle [Q, u_j]^2 \rangle - \frac{(\hat{k}_{xx}^{+-})^2}{4} \langle\langle (\text{Tr } u_j Q \nabla_x Q)^2 \rangle\rangle, \quad (4.90)$$

$$0 = \frac{\hat{k}_{xx}^{+-}}{4} \text{Tr}\langle [Q, v_j]^2 \rangle - \frac{(\hat{k}_{xx}^{+-})^2}{4} \langle\langle (\text{Tr } v_j Q \nabla_x Q)^2 \rangle\rangle. \quad (4.91)$$

Складывая ур. (4.90) и (4.91), и пользуясь соотношением полноты (4.89), находим

$$\frac{2\pi\sigma_{xx}}{e^2} = \hat{k}_{xx}^{+-} + \lim_{n \rightarrow 0} \frac{(\hat{k}_{xx}^{+-})^2}{16n^2\mathcal{S}} \int d\mathbf{r} d\mathbf{r}' \text{tr}\langle\langle Q(\mathbf{r}) \nabla Q(\mathbf{r}) \cdot Q(\mathbf{r}') \nabla Q(\mathbf{r}') \rangle\rangle. \quad (4.92)$$

Отсюда видно, что величина \hat{k}_{xx}^{+-} есть ничто иное, как $(2\pi/e^2)\bar{\sigma}_{xx}$ – диссипативная проводимость, вычисленная в теории, где есть только P моды, т.е. при $Q = \Lambda$.

Вместо матриц t_x и t_y в ур. (4.69) выберем матрицы $u_x^{\alpha_0\beta_0}$ и $u_y^{\alpha_0\beta_0}$. Заметим, что они связаны соотношением: $u_y^{\alpha_0\beta_0} = -i\Lambda u_x^{\alpha_0\beta_0} = iu_x^{\alpha_0\beta_0}\Lambda$. Если же выбрать вместо t_x и t_y матрицы $v_x^{\alpha_0\beta_0}$ и $v_y^{\alpha_0\beta_0}$, то так как $[v_{x,y}^{\alpha_0\beta_0}, \Lambda] = 0$, то в правой части ур. (4.69) получится нуль. Тогда из ур. (4.78) находим следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \frac{4\pi i\sigma_{xy}\mathcal{S}}{e^2} &= \frac{i\hat{k}_{xx}^{+-}}{4} \text{tr}[u_j, \Lambda u_j] \epsilon_{\mu\nu} \langle x_\mu Q \nabla_\nu Q \rangle + \frac{i\check{k}_{xy}^{+-}}{4} \text{tr}[u_j, \Lambda u_j] \langle x_\mu \nabla_\mu Q \rangle \\ &\quad + \frac{i(\hat{k}_{xx}^{+-})^2}{4} \langle\langle \text{Tr } u_j Q \nabla_x Q \cdot \text{Tr } u_j Q \nabla_y Q \Lambda \rangle\rangle, \end{aligned} \quad (4.93)$$

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{i\hat{k}_{xx}^{+-}}{4} \text{tr}[v_j, \Lambda v_j] \epsilon_{\mu\nu} \langle x_\mu Q \nabla_\nu Q \rangle + \frac{i\check{k}_{xy}^{+-}}{4} \text{tr}[v_j, \Lambda v_j] \langle x_\mu \nabla_\mu Q \rangle \\ &\quad + \frac{i(\hat{k}_{xx}^{+-})^2}{4} \langle\langle \text{Tr } v_j Q \nabla_x Q \cdot \text{Tr } v_j Q \nabla_y Q \Lambda \rangle\rangle. \end{aligned} \quad (4.94)$$

Складывая ур. (4.93) и (4.94), и пользуясь соотношениями полноты (4.89), находим

$$\begin{aligned} \frac{2\pi\sigma_{xy}}{e^2} &= -\lim_{n \rightarrow 0} \frac{\check{k}_{xy}^{+-}}{4n\mathcal{S}} \text{Tr } \Lambda x_\mu \langle \nabla_\mu Q \rangle - \lim_{n \rightarrow 0} \frac{\hat{k}_{xx}^{+-}}{4n\mathcal{S}} \text{Tr } \Lambda \epsilon_{\mu\nu} x_\mu \langle Q \nabla_\nu Q \rangle \\ &\quad + \lim_{n \rightarrow 0} \frac{(\hat{k}_{xx}^{+-})^2}{16n^2\mathcal{S}} \int d\mathbf{r} d\mathbf{r}' \text{tr}\langle\langle \epsilon_{\mu\nu} Q(\mathbf{r}) \nabla_\mu Q(\mathbf{r}) \cdot Q(\mathbf{r}') \nabla_\nu Q(\mathbf{r}') \Lambda \rangle\rangle. \end{aligned} \quad (4.95)$$

Обратим внимание на первый член в правой части ур. (4.95). Преобразуем его следующим образом:

$$\text{Tr } \Lambda x_\mu \langle \nabla_\mu Q \rangle = \oint ds(\mathbf{n}\mathbf{r}) \text{tr } \Lambda \langle Q_s \rangle - 2 \text{Tr } \Lambda \langle Q \rangle \quad (4.96)$$

где \mathbf{n} – это вектор нормали к границе, а Q_s значение матрицы Q на границе. Как мы увидим ниже, $\langle Q_s \rangle = \Lambda$, поэтому при интегрировании вдоль границы первый член зануляется и мы окончательно получаем, что

$$\begin{aligned} \frac{2\pi\sigma_{xy}}{e^2} &= \lim_{n \rightarrow 0} \frac{\check{k}_{xy}^{+-}}{2n\mathcal{S}} \text{Tr } \Lambda \langle Q \rangle - \lim_{n \rightarrow 0} \frac{\hat{k}_{xx}^{+-}}{4n\mathcal{S}} \text{Tr } \Lambda \epsilon_{\mu\nu} x_\mu \langle Q \nabla_\nu Q \rangle \\ &\quad + \lim_{n \rightarrow 0} \frac{(\hat{k}_{xx}^{+-})^2}{16n^2\mathcal{S}} \int d\mathbf{r} d\mathbf{r}' \text{tr}\langle\langle \epsilon_{\mu\nu} Q(\mathbf{r}) \nabla_\mu Q(\mathbf{r}) \cdot Q(\mathbf{r}') \nabla_\nu Q(\mathbf{r}') \Lambda \rangle\rangle. \end{aligned} \quad (4.97)$$

Отсюда видно, что \check{k}_{xy}^{+-} есть ничто иное, как $(2\pi/e^2)\bar{\sigma}_{xy}$ - холловская проводимость, вычисленная в теории, где есть только P моды, т.е. при $Q = \Lambda$, а $\hat{k}_{xy}^{+-} = (2\pi/e^2)\bar{\sigma}_{xy}^I$.

Таким образом, нелинейная сигма-модель принимает следующий окончательный вид

$$\mathcal{S}_\sigma[Q] = \frac{\bar{\sigma}_{xx}}{8} \text{Tr}(\nabla Q)^2 - \frac{\bar{\sigma}_{xy}}{8} \epsilon_{\mu\nu} \text{Tr} Q \nabla_\mu Q \nabla_\nu Q - \pi \bar{D}(\mathcal{E}) \eta \text{Tr} \Lambda Q, \quad (4.98)$$

где $Q = T^{-1} \Lambda T$ и $\bar{\sigma}_{jk}$ - безразмерные проводимости в единицах e^2/h , вычисленные в некритической теории, т.е. в теории, где есть только P -моды.

Заметим, что член пропорциональный $\bar{\sigma}_{xy}$ может быть представлен как интеграл по границе двумерной области:

$$\mathcal{C}[Q] = \frac{1}{16\pi i} \epsilon_{\mu\nu} \text{Tr} Q \nabla_\mu Q \nabla_\nu Q = \frac{1}{4\pi i} \oint ds \text{tr} \Lambda T \partial_s T^{-1} \quad (4.99)$$

Физические проводимости σ_{jk} могут быть вычислены по формулам Кубо:

$$\sigma_{xx} = \bar{\sigma}_{xx} + \frac{\bar{\sigma}_{xx}^2}{16n^2} \int d\mathbf{r}' \text{tr} \langle \langle Q(\mathbf{r}) \nabla Q(\mathbf{r}) Q(\mathbf{r}') \nabla Q(\mathbf{r}') \rangle \rangle, \quad (4.100)$$

$$\sigma_{xy} = \bar{\sigma}_{xy} - \frac{\bar{\sigma}_{xx}}{4n} \text{tr} \Lambda \epsilon_{\mu\nu} x_\mu \langle Q \nabla_\nu Q \rangle + \frac{\bar{\sigma}_{xx}^2}{16n^2} \int d\mathbf{r}' \text{tr} \langle \langle \epsilon_{\mu\nu} Q(\mathbf{r}) \nabla_\mu Q(\mathbf{r}) Q(\mathbf{r}') \nabla_\nu Q(\mathbf{r}') \Lambda \rangle \rangle, \quad (4.101)$$

где подразумевается репличный предел, $n \rightarrow 0$. Здесь мы учли, что в репличном пределе $\langle Q \rangle = \Lambda$. Плотность состояний определяется соотношением

$$D(\mathcal{E}) = \frac{\bar{D}(\mathcal{E})}{2n} \text{tr} \Lambda \langle Q \rangle. \quad (4.102)$$

Глава 5

Квантование холловской проводимости

Введение

5.1 Топологический заряд и разделение краевой и объемной теорий

В предыдущих лекциях мы вывели низкоэнергетическое эффективное действие нелинейной сигма модели:

$$S[Q] = \frac{\bar{\sigma}_{xx}}{8} \text{Tr}(\nabla Q)^2 - 2\pi i \bar{\sigma}_{xy} \mathcal{C}[Q] - \pi \bar{D}(\mathcal{E}) \eta \text{Tr} \Lambda Q, \quad (5.1)$$

где

$$\mathcal{C}[Q] = \frac{1}{16\pi i} \text{Tr} \varepsilon_{ab} Q \nabla_a Q \nabla_b Q = \frac{1}{4\pi i} \oint ds \text{tr} \Lambda T(s) \partial_s T^{-1}(s). \quad (5.2)$$

Здесь последний интеграл берется по границе двумерной области.

Покажем, что если матрица Q на границе двумерной области постоянна и равна для определенности матрице Λ , т.е. $Q|_{\text{edge}} = \Lambda$, то $\mathcal{C}[Q]$ может принимать целые значения, т.е. является топологическим зарядом. Рассмотрим сначала случай $n = 1$ и параметризуем матрицу Q в следующем виде:

$$Q = \sigma \mathbf{m} \boldsymbol{\tau}, \quad (5.3)$$

где $\sigma = \pm 1$, $\mathbf{m} = \{\cos \phi \sin \alpha, \sin \phi \sin \alpha, \cos \alpha\}$ – единичный действительный вектор, а $\boldsymbol{\tau} = \{\tau_x, \tau_y, \tau_z\}$ – вектор стандартных матриц Паули. $\text{tr} \tau_j \tau_k \tau_l = 2i \varepsilon_{jkl}$, ε_{jkl} – полностью антисимметричный тензор третьего ранга. Вычисляя $\mathcal{C}[Q]$, находим

$$\mathcal{C}[Q] = \frac{\sigma}{8\pi i} \varepsilon_{jkl} \varepsilon_{ab} \int d^2 \mathbf{r} m_j \nabla_a m_k \nabla_b m_l = -\frac{\sigma}{2\pi} \varepsilon_{ab} \int d^2 \mathbf{r} \nabla_a (\cos \alpha \nabla_b \phi) = -\frac{\sigma}{2\pi} \oint ds \cos \alpha \partial_s \phi. \quad (5.4)$$

Условие $Q|_{\text{edge}} = \Lambda$ означает, что $\alpha = 0$. Выбирая фазу $\phi(s)$, соответствующей намотке k раз при обходе один раз вдоль границы, $\phi(2\pi) = \phi(0) + 2\pi k$, получим, что топологический инвариант $\mathcal{C}[Q] = -\sigma k$. Заметим, что полученный нами для случая $n = 1$ результат, соответствует известному результату теории гомотопии $\pi_2(S_2) = \mathbb{Z}$.

В случае $n > 1$ воспользуемся выражением для топологического числа $\mathcal{C}[Q]$ через матрицу T на границе, ур. (5.2). При этом выберем следующий вид матрицы T на границе:

$$T(s) = \text{diag} \{e^{i\phi(s)}, 1, \dots, 1, e^{-i\phi(s)}, 1, \dots, 1\}, \quad (5.5)$$

причем фаза $\phi(s)$ меняется на при обходе границы на целое кратное 2π : $\phi(2\pi) = \phi(0) + 2\pi k$. Тогда, прямое вычисление приводит к результату $\mathcal{C}[Q] = k$. Возможность целочисленного значения топологического заряда соответствует формальному результату теории гомотопии

$$\pi_2(U(2n)/U(n) \times U(n)) = \pi_1(U(n) \times U(n)) = \mathbb{Z}. \quad (5.6)$$

Заметим, однако, что вывод эффективной теории (5.1) не предполагал каких-либо специальных граничных условий для поля Q . Представим матрицу Q на границе в виде

$$Q|_{\text{edge}} = T^{-1}(s) \Lambda T(s) = t^{-1}(s) \Lambda t(s), \quad (5.7)$$

где мы разделили матрицу $T(s) \in U(2n)$ на две части $T(s) = T_0(s)t(s)$, где $t(s) \in$

$U(2n)/U(n) \times U(n)$ и $T_0(s) \in U(n) \times U(n)$. Тогда, топологический заряд $\mathcal{C}[Q]$ может быть записан в виде

$$\mathcal{C}[Q] = \frac{1}{4\pi i} \oint ds \operatorname{tr} \Lambda T_0(s) \partial_s T_0^{-1}(s) + \frac{1}{4\pi i} \oint ds \operatorname{tr} \Lambda t(s) \partial_s t^{-1}(s). \quad (5.8)$$

Как мы видели выше, первый член принимает целочисленные значения, а второй описывает флуктуации вокруг этого целочисленного значения. Интегрирование по полям Q с произвольными граничными условиями, можно представить в виде

$$\int \mathcal{D}[Q] e^{-S_\sigma[Q]} = \int \mathcal{D}[t] \int_{Q|_{\text{edge}}=t^{-1}\Lambda t} \mathcal{D}[Q] e^{-S_\sigma[Q]}. \quad (5.9)$$

Это равенство означает, что мы сначала вычисляем функциональный интеграл по полям Q при фиксированных граничных условиях, а затем производим суммирование по всем возможным граничным условиям. Удобно ввести матрицу

$$Q_0(x, s) = t(s)Q(x, s)t^{-1}(s), \quad (5.10)$$

где x обозначает координату в направлении перпендикулярном границе (см. Рис. ??). Тогда, на границе матрица Q_0 совпадает с матрицей Λ , $Q_0|_{\text{edge}} = \Lambda$. Так как матрица Q_0 отличается от Q только унитарными вращениями, то мера интегрирования не меняется, $\mathcal{D}[Q] = \mathcal{D}[Q_0]$. Поэтому получаем,

$$\int \mathcal{D}[Q] e^{-S_\sigma[Q]} = \int \mathcal{D}[t] \int_{Q_0|_{\text{edge}}=\Lambda} \mathcal{D}[Q_0] e^{-S_\sigma[t^{-1}Q_0t]}. \quad (5.11)$$

Заметим, что выполняется соотношение

$$\mathcal{C}[t^{-1}Q_0t] = \mathcal{C}[Q_0] + \mathcal{C}[q], \quad q = t^{-1}\Lambda t. \quad (5.12)$$

При этом, величина $\mathcal{C}[Q_0]$ равна *целому числу*, а $\mathcal{C}[q]$ учитывает возможность отличия топологического заряда от целочисленного значения,

$$\mathcal{C}[Q_0] = k \in \mathbb{Z}, \quad -1/2 < \mathcal{C}[q] \leq 1/2. \quad (5.13)$$

Разделим теперь затравочный холловский кондактанс $\bar{\sigma}_{xy}$ на целую k и дробную $\bar{\theta}$ части

$$\bar{\sigma}_{xy} = N + \frac{\bar{\theta}}{2\pi}. \quad (5.14)$$

Здесь, N - целое число, которое совпадает с числом заполненных уровней Ландау, а $\bar{\theta}$ ограничена интервалом $-\pi < \bar{\theta} \leq \pi$. Тогда, выполняется следующее равенство:

$$e^{2\pi i \bar{\sigma}_{xy} \mathcal{C}[t^{-1}Q_0t]} = e^{2\pi i k \mathcal{C}[q] + i \bar{\theta} \mathcal{C}[t^{-1}Q_0t]}. \quad (5.15)$$

В итоге, эффективное действие принимает следующий вид:

$$S_\sigma[Q] = S_{\text{bulk}}[t^{-1}Q_0t] - 2\pi i N \mathcal{C}[q], \quad (5.16)$$

где

$$S_{\text{bulk}}[Q] = \frac{\bar{\sigma}_{xx}}{8} \text{Tr}(\nabla Q)^2 - i\bar{\theta}\mathcal{C}[Q] - \pi\bar{D}(\mathcal{E})\eta \text{Tr} \Lambda Q. \quad (5.17)$$

Определим формально эффективное действие для краевой переменной $t(s)$ с помощью следующего соотношения:

$$e^{-S_{\text{edge}}[q]} = e^{2\pi i N \mathcal{C}[q]} \int_{Q_0|_{\text{edge}}=\Lambda} \mathcal{D}[Q_0] e^{-S_{\text{bulk}}[t^{-1}Q_0 t]}. \quad (5.18)$$

Используя симметрию действия нелинейной сигма модели относительно вращений и медленность переменной t , можно показать, что $S_{\text{edge}}[q]$ должно иметь следующий вид

$$S_{\text{edge}}[q] = \frac{\sigma_{xx}}{8} \int d\mathbf{r} \text{tr}(\nabla q)^2 - i(2\pi N + \theta)\mathcal{C}[q]. \quad (5.19)$$

Такой результат естественен, т.к. означает перенормируемость теории. Так как действие $S_{\text{edge}}[q] - 2\pi N i \mathcal{C}[q]$ представляет собой отклик на неабелев векторный потенциал $t\nabla t^{-1}$, то величины σ_{xx} и θ представляют собой продольную проводимость и дробную часть холловской проводимости, вычисленные на масштабе порядка размера всей системы.

Покажем теперь как из действия (5.19) следует квантование холловской проводимости. Если в теории с действием $S_{\text{bulk}}[Q]$ существует конечная длина корреляций (локализационная длина) ξ , то система должна быть нечувствительна к конкретному виду граничных условий, если размер системы достаточно велик. Другими словами, для $L \gg \xi$ действие $S_{\text{edge}}[q] - 2\pi N i \mathcal{C}[q]$ не должно зависеть от t . Это возможно только, если выполняются следующие соотношения:

$$\lim_{L/\xi \rightarrow \infty} \sigma_{xx}(L) = 0, \quad \lim_{L/\xi \rightarrow \infty} \theta(L) = 0, \quad (5.20)$$

т.е.

$$\lim_{L/\xi \rightarrow \infty} \sigma_{xy}(L) = N. \quad (5.21)$$

При этом, эффективное действие на краю сводится к следующему эффективному действию:

$$S_{\text{edge}}[q] = -\frac{N}{2} \oint ds \text{tr} \Lambda t \partial_s t^{-1} - \pi \eta \rho_{\text{edge}} \oint ds \text{tr} \Lambda q. \quad (5.22)$$

Последний член добавлен для регуляризации краевой теории. Величина ρ_{edge} представляет собой плотность краевых состояний. Покажем, что действие (5.22) является критическим, т.е. переходит само в себя при перенормировании методом фонового поля, а целое число N не меняется. Действительно, выполним преобразование $t \rightarrow t t_0$ и определим эффективное действие для мод $q = t_0^{-1} \Lambda t_0$ следующим образом:

$$e^{-S_{\text{edge}}^{\text{eff}}[q_0]} = \int \mathcal{D}[q] e^{-S_{\text{edge}}[q]}. \quad (5.23)$$

Тогда, в низшем порядке по градиентам находим, что

$$S_{\text{edge}}^{\text{eff}}[q_0] = -\frac{N}{2} \oint ds \text{tr} \langle q \rangle t_0 \partial_s t_0^{-1} - \pi \eta \rho_{\text{edge}} \oint ds \text{tr} \langle q \rangle q_0, \quad (5.24)$$

где среднее $\langle \dots \rangle$ вычисляется по отношению к действию $S_{\text{edge}}[q]$. Если выполняется равен-

ство (ниже мы увидим, что это так)

$$\langle q \rangle = \Lambda, \quad (5.25)$$

то тогда получаем

$$S_{\text{edge}}^{\text{eff}}[q_0] = -\frac{N}{2} \oint ds \operatorname{tr} \Lambda t_0 \partial_s t_0^{-1} - \pi \eta \rho_{\text{edge}} \oint ds \operatorname{tr} \Lambda q_0. \quad (5.26)$$

Таким образом, действие для края $S_{\text{edge}}[q]$ действительно оказывается критическим. Подчеркнем, это означает, что двумерная система с целочисленно квантованным значением холловской проводимости описывается одномерной критической теорией.

Для того, чтобы выяснить физический смысл этой одномерной краевой теории, рассмотрим модель одномерных киральных фермионов в случайном потенциале. После введения n реплик, статистическая сумма такой модели имеет вид:

$$Z^n = \int \mathcal{D}[\psi] \int \mathcal{D}[V] \mathcal{P}[V] e^{-S_{1D}}, \quad (5.27)$$

где

$$S_{1D} = - \oint ds \sum_{\alpha p} \sum_{j, j'=1}^N \psi^{\dagger p \alpha, j}(s) \left[(iv_d \partial_s + i\eta p) \delta_{jj'} - V_{jj'}(s) \right] \psi_{\alpha, j'}^p(s). \quad (5.28)$$

Здесь как и раньше α обозначает репличный индекс, $p = \pm 1$, v_d – это скорость киральных фермионов, $j = 1, \dots, N$ нумерует число краевых каналаов, а $V_{jj'}(s)$ элемент эрмитовой матрицы $V(s)$, который описывает случайное рассеяние между каналами j и j' . Случайный потенциал имеет гауссово распределение:

$$\mathcal{P}[V] \propto \exp \left(-\frac{1}{2\gamma_e} \oint ds \sum_{j, j'} |V_{jj'}(s)|^2 \right). \quad (5.29)$$

Делая стандартные шаги: интегрируя по случайному потенциалу, вводя матрицу \tilde{q} , чтобы расцепить получившийся четырех фермионный член, интегрируя после этого по фермионам, получаем в итоге

$$Z^n = \int \mathcal{D}[\tilde{q}] \exp \left[-\frac{1}{2\gamma_e} \oint ds \operatorname{tr} \tilde{q}^2 + N \oint ds \operatorname{tr} \ln (iv_d \partial_s + i\eta \Lambda + i\tilde{q}) \right]. \quad (5.30)$$

Седловое уравнение для матричного поля \tilde{q} принимает стандартный вид:

$$\tilde{q}_{\text{sp}} = i N \gamma_e \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq}{2\pi} \frac{1}{-v_d q + i\tilde{q}_{\text{sp}}} = N \frac{\gamma_e}{2v_d} \operatorname{sgn} \tilde{q}_{\text{sp}}. \quad (5.31)$$

Здесь мы положили $\eta = 0$. Решение этого уравнения имеет вид $\tilde{q}_{\text{sp}} = \Lambda/(2\tau)$, где $1/\tau = N\gamma_e/v_d$. Сделаем как и раньше преобразование

$$\tilde{q} = \frac{1}{2\tau} t^{-1} P t, \quad P \in U(n) \times U(n). \quad (5.32)$$

Тогда статистическая сумма примет вид

$$Z^n = \int \mathcal{D}[P] I[P] \int \mathcal{D}[t] \exp \left[-\frac{1}{8\gamma_e \tau^2} \oint ds \operatorname{tr} P^2 \right] \exp \left[N \oint ds \operatorname{tr} \ln \left(G_0^{-1} + \frac{i}{2\tau} (P - \Lambda) + B[t] \right) \right], \quad (5.33)$$

где $B[t] = iv_d t \partial_s t^{-1} + i\eta t \Lambda t^{-1}$, а $I[P]$ – это якобиан преобразования (5.32). Его выражение приведено в ур. (4.4). Седловая функция Грина имеет вид $G_0^{-1} = iv_d \partial_s + i\Lambda/(2\tau)$.

Напомним, что якобиан преобразования в квадратичном приближении по $\delta P = P - \Lambda$ имеет вид

$$\ln I[P] \simeq \frac{1}{2} \oint ds \sum_{\alpha\beta} \delta P_{\alpha\alpha}^{++}(s) \delta P_{\beta\beta}^{--}(s). \quad (5.34)$$

а почему не надо учитывать старшие члены разложения из якобиана?

Тогда, как следует из выражения (5.33), парная корреляционная функция для массивных флуктуаций имеет вид

$$\begin{aligned} -\mathcal{S}_{\delta P}^{(2)} = & -\frac{1}{2} \int \frac{dq}{2\pi} \sum_{\alpha\beta} \delta P_{\alpha\alpha}^{++}(q) \delta P_{\beta\beta}^{--}(-q) \\ & -\frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta} \int \frac{dq}{2\pi} \delta P_{\alpha\beta}^{++}(q) \delta P_{\beta\alpha}^{++}(-q) \left(\frac{1}{2\gamma_e \tau^2} + \frac{1}{4\tau^2} \pi_{++}(q) \right) \\ & -\frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta} \int \frac{dq}{2\pi} \delta P_{\alpha\beta}^{--}(q) \delta P_{\beta\alpha}^{--}(-q) \left(\frac{1}{2\gamma_e \tau^2} + \frac{1}{4\tau^2} \pi_{--}(q) \right). \end{aligned} \quad (5.35)$$

Здесь поляризационный оператор $\pi_{++}(q)$ имеет вид

$$\pi_{++}(q) = -\int \frac{dq'}{2\pi} (G_0)_{++}(q+q') (G_0)_{++}(q'). \quad (5.36)$$

Для $\pi_{--}(q)$ есть аналогичное выражение. Заметим, что из того факта, что полюсы функций Грина находятся в одной полуплоскости, следует, что оба поляризационных оператора тождественно равны нулю:

$$\pi_{++}(q) = \pi_{--}(q) = 0. \quad (5.37)$$

Таким образом, действие для массивных мод принимает простой вид:

$$\mathcal{S}[P] = -\ln I[P] + \frac{1}{4\gamma_e \tau^2} \oint ds \operatorname{tr} P^2. \quad (5.38)$$

Отметим, что из-за наличия якобиана, это действие не гауссово для флуктуаций δP .

Действие для поперечных (безмассовых) флуктуаций получается разложением $\operatorname{tr} \ln$ в ряд. В низшем порядке по q находим

$$\begin{aligned} Z_t = & \int \mathcal{D}[q] \exp(-S_{\text{edge}}[q]), \\ S_{\text{edge}}[q] = & -iv_d k \oint_{\partial V} ds \operatorname{tr} \langle G_0[P](s, s) \rangle_{Pt} \partial_s t^{-1} - i\omega k \oint_{\partial V} ds \operatorname{tr} \langle G_0[P](s, s) \rangle_{Pq}, \end{aligned} \quad (5.39)$$

где $\langle \dots \rangle_P$ означает усреднение по отношению к действию для массивных мод (5.38). Ис-

пользуя результаты (5.36), мы получим, что

$$\langle G_0[P](s, s) \rangle_P = G_0(s, s) = -\frac{i}{2v_d} \Lambda. \quad (5.40)$$

Таким образом, окончательно находим

$$\mathcal{S}_{\text{edge}}[q] = -\frac{k}{2} \oint_{\partial V} ds \operatorname{tr} \Lambda t \partial_s t^{-1} - \pi \omega \nu_{\text{edge}} \oint_{\partial V} ds \operatorname{tr} \Lambda q, \quad (5.41)$$

где $\nu_{\text{edge}} = k/2\pi v_d$.

Теперь покажем, что действие (5.41) приводит к следующему результату

$$\langle q(s) \rangle = \Lambda. \quad (5.42)$$

Во-первых, выполним следующее калибровочное преобразование операторов рождения и уничтожения квазичастиц на краю: (5.28)

$$\begin{aligned} \psi_{\alpha,j}^{\dagger p} &\rightarrow \sum_{j'} \psi_{\alpha,j'}^{\dagger p} \exp\left[\frac{i}{v_d} \int_0^s ds V_{j'j}(s)\right], \\ \psi_{\alpha,j}^p &\rightarrow \sum_{j'} \exp\left[-\frac{i}{v_d} \int_0^s ds V_{jj'}(s)\right] \psi_{\alpha,j'}^p. \end{aligned} \quad (5.43)$$

Это преобразование позволяет убрать случайный потенциал из действия (5.28) и свести задачу к действию чистых киральных фермионов:

$$S_{1D}^{\text{pure}} = k \oint ds \sum_{\alpha p} \psi_{\alpha}^{\dagger p}(s) \left[i v_d \partial_s + i \omega p \right] \psi_{\alpha}^p(s). \quad (5.44)$$

Подчеркнем, что выражение (5.44) отражает тот факт, что киральные одномерные фермионы не испытывают локализации Андерсона, т.к. киральность не позволяет рассеяться назад.

Теперь добавим к действию (5.28) член с источником:

$$i \oint ds \sum_{\alpha\beta, pp'} \sum_{j=1}^k \psi_{\alpha,j}^{\dagger p}(s) \eta_{\alpha\beta}^{pp'}(s) \psi_{\beta,j}^{p'}(s). \quad (5.45)$$

После калибровочного преобразования (5.43) этот член принимает вид:

$$i k \oint ds \sum_{\alpha\beta, pp'} \psi_{\alpha}^{\dagger p}(s) \eta_{\alpha\beta}^{pp'}(s) \psi_{\beta}^{p'}(s). \quad (5.46)$$

Наличие члена (5.45) приводит к следующей модификации действия (5.30)

$$\begin{aligned} Z = \int \mathcal{D}[\tilde{q}] \exp &\left[-\frac{1}{\gamma_e} \oint ds \operatorname{tr} \eta^2 + \frac{2}{\gamma_e} \oint ds \operatorname{tr} \eta \tilde{q} - \frac{1}{\gamma_e} \oint ds \operatorname{tr} \tilde{q}^2 \right. \\ &\left. + k \oint ds \operatorname{tr} \ln(i v_d \partial_s + i \omega \Lambda + i \tilde{q}) \right]. \end{aligned} \quad (5.47)$$

Повторяя все шаги вывода действия (5.41), получаем теперь следующее действие

$$Z[\eta] = \int \mathcal{D}[q] \exp \left[-\frac{1}{\gamma_e} \oint ds \operatorname{tr} \eta^2 + \frac{1}{\gamma_e \tau} \oint ds \operatorname{tr} \eta q + S_{\text{edge}}[q] \right]. \quad (5.48)$$

С другой стороны,

$$Z[\eta] = \int \mathcal{D}[\psi] \exp \left[k \oint ds \sum_{\alpha\beta, pp'} \psi_\alpha^{\dagger p}(s) \left((iv_d \partial_s + i\omega p) \delta_{pp'}^{\alpha\beta} + i\eta_{\alpha\beta}^{pp'}(s) \right) \psi_\beta^{p'}(s) \right]. \quad (5.49)$$

Беря вариацию от $\ln Z[\eta]$ по отношению к η в уравнениях (5.48) и (5.49), получаем

$$\left. \frac{\partial \ln Z[\eta]}{\partial \eta_{\beta\alpha}^{p'p}} \right|_{\eta=0} = \frac{k}{2v_d} \langle q_{\alpha\beta}^{pp'}(s) \rangle = ik \langle \psi_\beta^{\dagger p'}(s) \psi_\alpha^p(s) \rangle = ik \delta_{\alpha\beta} \delta^{pp'} g_p(s, s), \quad (5.50)$$

где пропагатор чистых киральных электронов имеет вид

$$g_p(s, s') = \int \frac{dq}{2\pi} \frac{e^{iq(s'-s)}}{-v_d q + i\omega p} = -\frac{ip}{v_d} \vartheta(p(s'-s)) \exp \left(-p \frac{\omega}{v_d} (s'-s) \right). \quad (5.51)$$

Здесь имеется в виду следующая нормировка ступенчатой функции Хевисайда, $\vartheta(0) = 1/2$. В итоге получаем, что действительно выполняется соотношение

$$\langle q(s) \rangle = \Lambda. \quad (5.52)$$

Задачи:

5.1.1 Доказать, что выполняется следующее соотношение

$$\langle q_{pp'}^{\alpha\beta}(s) q_{p'p}^{\beta\alpha}(s') \rangle = \delta^{\alpha\beta} \delta_{pp'} - 4pp' \vartheta(-p(s'-s)) \vartheta(p'(s'-s)) \exp \left[-(p'-p) \frac{\omega}{v_d} (s'-s) \right].$$

5.2 Непрерывный предел модели Чалкера-Коддингтона

В этом разделе мы рассмотрим непрерывный предел модели Чалкера-Коддингтона (см. раздел 2.3) и покажем, что он описывается нелинейной σ -моделью. Напомним, что модель Чалкера-Коддингтона была сформулирована для описания движения электрона в плавном потенциале. В этой лекции будем следовать работе [54]. Более математически строгий подход был развит в работе [55].

Рассмотрим сетку Чалкера-Коддингтона, представленную на Рис. 5.1 (см. также Рис. 2.6). Пусть закрашенные области отвечают областям с фактором заполнения $\nu < 1/2$, а светлые – областям с $\nu > 1/2$. Занумеруем одномерные каналы краевых состояний номером j . Обозначим амплитуду тунелирования с j на $j + 1$ канал через $t_j(y)$. Заметим, что при этом амплитуды t_{2j} и t_{2j+1} будут разными. Действительно тунелирование происходит через области с разным фактором заполнения. Будем считать амплитуды тунелирования случайными, δ - коррелированными величинами

$$\langle t_{j_1}(y_1) \bar{t}_{j_2}(y_2) \rangle = \delta_{j_1 j_2} \delta(y_1 - y_2) \gamma_j(y_1). \quad (5.53)$$

В дальнейшем для упрощения рассмотрения будем считать, что выполняются соотношения:

$$\gamma_{2j} = \gamma_+, \quad \gamma_{2j+1} = \gamma_-. \quad (5.54)$$

Запишем действие для n копий рассматриваемой фермионной системы в стандартном виде

$$\begin{aligned} \mathcal{S} = -i \sum_{\alpha p} \sum_j \int dy \bar{\psi}_{\alpha,p}^j(y) [(-1)^j i v \partial_y + i \omega p] \psi_{\alpha,p}^j(y) + i \sum_{\alpha,p} \sum_j \int dy [t_j(y) \bar{\psi}_{\alpha,p}^{j+1}(y) \psi_{\alpha,p}^j(y) \\ + \bar{t}_j(y) \bar{\psi}_{\alpha,p}^j(y) \psi_{\alpha,p}^{j+1}(y)]. \end{aligned} \quad (5.55)$$

Отметим, что беспорядок в рассматриваемой модели связан с тунелированием из одного канала в другой. Усредняя по статистичке туннельных амплитуд t_j , получим эффективное действие

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{\text{eff}} = - \sum_{\alpha p} \sum_j \int dy \bar{\psi}_{\alpha,p}^j(y) [(-1)^j i v \partial_y + i \omega p] \psi_{\alpha,p}^j(y) \\ + \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta} \sum_{jj'} \int dy \beta_{jj'}(y) \bar{\psi}_{\alpha,p}^j(y) \psi_{\beta,p'}^j(y) \bar{\psi}_{\beta,p'}^{j'}(y) \psi_{\alpha,p}^{j'}(y), \end{aligned} \quad (5.56)$$

где $\beta_{jj'} = \gamma_j \delta_{j',j+1} + \gamma_{j'} \delta_{j,j'+1}$. Как обычно, для расщепления члена четвертого порядка по электронным переменным введем матричное поле Q и, затем, проинтегрируем по ψ :

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{\text{eff}} = \frac{1}{2} \sum_j \int dy [\gamma_j(y) \text{tr} Q_j Q_{j+1} + \gamma_{j-1}(y) \text{tr} Q_j Q_{j-1}] \\ - \sum_j \text{Tr} \ln [i v_j \partial_y + i \omega \Lambda + i \gamma_j Q_{j+1} + i \gamma_{j-1} Q_{j-1}], \end{aligned} \quad (5.57)$$

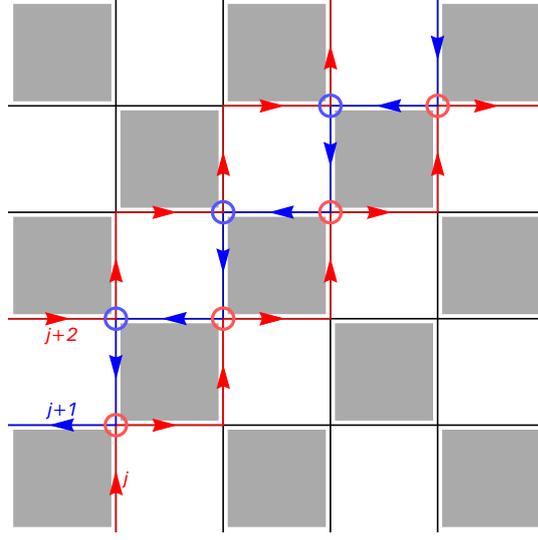


Рис. 5.1: Сетка Чалкера–Коддингтона. Красные и синие линии со стрелочками изображают киральные каналы. Красные (синие) круги изображают области квантового туннелирования с вероятностью γ_+ (γ_-).

где $v_j = (-1)^j v$. Изучим теперь решение седлового уравнения для действия \mathcal{S}_{eff} :

$$\gamma_j(y)Q_{j+1}(y) + \gamma_{j-1}(y)Q_{j-1}(y) = i\gamma_{j-1}(y)G_{j-1}(y, y) + i\gamma_j(y)G_{j+1}(y, y), \quad (5.58)$$

$$G_j^{-1} = iv_j \partial_y + i\omega\Lambda + i\gamma_j Q_{j+1} + i\gamma_{j-1} Q_{j-1}. \quad (5.59)$$

Будем искать решение в виде $Q_j^{\text{sp}}(y) = \xi_j \Lambda/2$, тогда получаем

$$G_j^{\text{sp}}(y, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq}{2\pi} \frac{1}{v_j q + i\omega\Lambda + i\Lambda/(2\tau_j)} = -\frac{i\Lambda}{2|v_j|}, \quad \tau_j^{-1} = \gamma_j \xi_{j+1} + \gamma_{j-1} \xi_{j-1}. \quad (5.60)$$

Отсюда, находим, что параметры $\xi_j = |v_j|^{-1} = v^{-1}$ и

$$\frac{1}{\tau_j} = \frac{\gamma_j + \gamma_{j-1}}{v} = \frac{\gamma_+ + \gamma_-}{v} \quad (5.61)$$

оба не зависят от индекса j . Заметим, что τ играет роль времени рассеяния с одного канала на другой.

Как и раньше, параметризуем матрицу Q в виде, который явно выделяет повороты, которые не коммутируют с матрицей Λ :

$$Q_j(y) = \frac{1}{2v} t_j^{-1}(y) P_j(y) t_j(y), \quad P \in U(n) \times U(n). \quad (5.62)$$

Тогда, считая, что одномерные каналы находятся на малом расстоянии a , разлагаясь до второго порядка по этому расстоянию, находим

$$Q_{j\pm 1}(y) \simeq \frac{1}{2v} \left[t_j^{-1} P_{j\pm 1} t_j \pm a \left(\partial_x t_j^{-1} P_{j\pm 1} t_j + t_j^{-1} P_{j\pm 1} \partial_x t_j \right) + \frac{a^2}{2} \left(\partial_x^2 t_j^{-1} P_{j\pm 1} t_j + t_j^{-1} P_{j\pm 1} \partial_x^2 t_j + 2\partial_x t_j^{-1} P_{j\pm 1} \partial_x t_j \right) \right]. \quad (5.63)$$

Используя это выражение, находим длинное выражение для эффективного действия

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_{\text{eff}} \simeq & -\ln I[P] + \sum_j \int \frac{dy}{8v^2} \text{tr} \left\{ P_j (\gamma_j P_{j+1} + \gamma_{j-1} P_{j-1}) + a (\gamma_j [P_{j+1}, P_j]_{-L_x} - \gamma_{j-1} [P_{j-1}, P_j]_{-L_x}) \right. \\
& + \frac{a^2}{2} \left[\gamma_j (t_j \partial^2 t_j^{-1} P_{j+1} P_j + P_j P_{j+1} \partial^2 t_j t_j^{-1} - 2P_j L_x P_{j+1} L_x) + \gamma_{j-1} (t_j \partial^2 t_j^{-1} P_{j-1} P_j + P_j P_{j-1} \partial^2 t_j t_j^{-1} \right. \\
& \left. \left. - 2P_j L_x P_{j-1} L_x) \right] \right\} - \sum_j \text{Tr} \ln \left[iv_j \partial_y + \frac{i}{2\tau_j} \Lambda + i\omega t_j \Lambda t_j^{-1} + iv_j L_y + \frac{\gamma_j}{2v} (P_{j+1} - \Lambda) + \frac{\gamma_{j-1}}{2v} (P_{j-1} - \Lambda) \right. \\
& + \frac{a}{2v} (\gamma_j [P_{j+1}, L_x]_{-} - \gamma_{j-1} [P_{j-1}, L_x]_{-}) + \frac{a^2}{4v} \left(\gamma_j [t_j \partial^2 t_j^{-1} P_{j+1} + P_{j+1} \partial^2 t_j t_j^{-1} - 2L_x P_{j+1} L_x] \right. \\
& \left. \left. + \gamma_{j-1} [t_j \partial^2 t_j^{-1} P_{j-1} + P_{j-1} \partial^2 t_j t_j^{-1} - 2L_x P_{j-1} L_x] \right) \right]. \tag{5.64}
\end{aligned}$$

Представим эффективное действие в следующем виде

$$\mathcal{S}_{\text{eff}} \approx \mathcal{S}_{\text{eff}}[P] + \delta\mathcal{S}^{(1)} + \delta\mathcal{S}^{(2)}, \tag{5.65}$$

где

$$\mathcal{S}_{\text{eff}}[P] = -\ln I[P] + \sum_j \int \frac{dy}{8v^2} \text{tr} P_j (\gamma_j P_{j+1} + \gamma_{j-1} P_{j-1}) - \sum_j \text{Tr} \ln [iv_j \partial_y + \frac{\gamma_j}{2v} P_{j+1} + \frac{\gamma_{j-1}}{2v} P_{j-1}] \tag{5.66}$$

дает действие для массивных мод P . Действие

$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{S}^{(1)} = & \frac{a}{8v^2} \sum_j \int dy \text{tr} (\gamma_j [P_{j+1}, P_j]_{-L_x} - \gamma_{j-1} [P_{j-1}, P_j]_{-L_x}) - i\omega \sum_j \int dy \text{tr} t_j \Lambda t_j^{-1} \tilde{G}_j \\
& - \sum_j \int dy \text{tr} [iv_j L_y + \frac{a}{2v} (\gamma_j [P_{j+1}, L_x]_{-} - \gamma_{j-1} [P_{j-1}, L_x]_{-})] \tilde{G}_j \tag{5.67}
\end{aligned}$$

описывает взаимодействие мод P с градиентами полей t . Здесь мы ввели функцию Грина, вычисленную в отсутствие полей t :

$$\tilde{G}_j^{-1} = iv_j \partial_y + \frac{i}{2\tau_j} \Lambda + \frac{\gamma_j}{2v} (P_{j+1} - \Lambda) + \frac{\gamma_{j-1}}{2v} (P_{j-1} - \Lambda). \tag{5.68}$$

Действие

$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{S}^{(2)} = & \frac{a^2}{16v^2} \sum_j \int dy \operatorname{tr} \left[\gamma_j (t_j \partial^2 t_j^{-1} P_{j+1} P_j + P_j P_{j+1} \partial^2 t_j t_j^{-1} - 2P_j L_x P_{j+1} L_x) \right. \\
& \left. + \gamma_{j-1} (t_j \partial^2 t_j^{-1} P_{j-1} P_j + P_j P_{j-1} \partial^2 t_j t_j^{-1} - 2P_j L_x P_{j-1} L_x) \right] \\
& - \frac{a^2}{4v} \sum_j \int dy \operatorname{tr} \left(\gamma_j [t_j \partial^2 t_j^{-1} P_{j+1} + P_{j+1} \partial^2 t_j t_j^{-1} - 2L_x P_{j+1} L_x] \right. \\
& \left. + \gamma_{j-1} [t_j \partial^2 t_j^{-1} P_{j-1} + P_{j-1} \partial^2 t_j t_j^{-1} - 2L_x P_{j-1} L_x] \right) \tilde{G}_j \\
& + \frac{1}{2} \sum_j \operatorname{Tr} [i v_j L_y + \frac{a}{2v} (\gamma_j [P_{j+1}, L_x]_- - \gamma_{j-1} [P_{j-1}, L_x]_-)] \tilde{G}_j \\
& \times [i v_j L_y + \frac{a}{2v} (\gamma_j [P_{j+1}, L_x]_- - \gamma_{j-1} [P_{j-1}, L_x]_-)] \tilde{G}_j
\end{aligned} \tag{5.69}$$

описывает вклады второго порядка по градиентам поля t . Эффективное действие для мод t получается интегрированием по модам P :

$$\mathcal{S}_{\text{eff}}[t] = \langle \delta\mathcal{S}^{(1)} \rangle_P + \langle \delta\mathcal{S}^{(2)} \rangle_P - \frac{1}{2} \langle \langle (\delta\mathcal{S}^{(1)})^2 \rangle \rangle_P. \tag{5.70}$$

Рассмотрим вначале теорию для массивных мод P . Обсуждение краевой теории в разделе 5.1 позволяет ожидать, что теория массивных мод будет достаточно простой. Обозначим $\delta P_j = P_j - \Lambda$, тогда во втором порядке по δP находим

$$\ln I[P] \approx -\frac{v^2}{L_y} \sum_j \int dy \sum_{\alpha, \beta, p, p'} (1 - \delta^{pp'}) \delta P_{\alpha\alpha}^p(j, y) \delta P_{\beta\beta}^{p'}(j, y) \tag{5.71}$$

и

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{8v^2} \sum_j \int dy_1 dy_2 \operatorname{tr} \left[\gamma_j(y_1) \delta P_{j+1}(y_1) + \gamma_{j-1}(y_1) \delta P_{j-1}(y_1) \right] G_j^{\text{sp}}(y_1, y_2) \\
& \times \left[\gamma_j(y_2) \delta P_{j+1}(y_2) + \gamma_{j-1}(y_2) \delta P_{j-1}(y_2) \right] G_j^{\text{sp}}(y_2, y_1) = 0.
\end{aligned} \tag{5.72}$$

Этот результат получен в силу блок-диагональной структуры матричного поля, $\delta P^{pp'} \propto \delta^{pp'}$. Тогда в согласии с ожидаемым, действие для полей δP оказывается квадратичным

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_{\text{eff}}[P] = & \sum_{jj'} \int dy \sum_{\alpha\beta; \gamma\delta; jj'}^{pp'} \delta P_{\alpha\beta}^p(j, y) \hat{M}_{\alpha\beta; \gamma\delta; jj'}^{pp'} \delta P_{\gamma\delta}^{p'}(j', y), \\
\hat{M}_{\alpha\beta; \gamma\delta}^{pp'} = & \frac{v^2}{L_y} (1 - \delta^{pp'}) \delta_{jj'} \delta_{\alpha\beta} \delta_{\gamma\delta} + \frac{1}{8v^2} \delta^{pp'} \beta_{jj'} \delta_{\alpha\delta} \delta_{\beta\gamma}.
\end{aligned} \tag{5.73}$$

Соответственно пропагатор полей δP примет вид

$$\langle \delta P_{\alpha\beta}^p(j, y) \delta P_{\gamma\delta}^{p'}(j', y) \rangle_P = 8v^2 (\beta^{-1})_{jj'} \delta^{pp'} \delta_{\alpha\delta} \delta_{\beta\gamma} - (8v^2)^2 \frac{v^2}{L_y} (\beta^{-2})_{jj'} (1 - \delta^{pp'}) \delta_{\alpha\beta} \delta_{\gamma\delta}. \tag{5.74}$$

Используя полученные выше результаты, можно вывести следующие соотношения,

$$\langle \tilde{G}_j(y, y) \rangle_P = G_j^{\text{sp}}(y, y) = -\frac{i\Lambda}{2v}, \quad \langle [\delta P_j, \delta P_{j'}]_{\alpha\beta}^{pp} \rangle = \delta_{\alpha\beta} [(\beta^{-1})_{jj'} - (\beta^{-1})_{j'j}] = 0 \tag{5.75}$$

и

$$\langle [\delta P_{j'}, \tilde{G}_j] \rangle = 0, \quad \langle \delta \mathcal{S}^{(1)} \rangle_P = -\frac{\omega}{2v} \sum_j \int dy \operatorname{tr} \Lambda q_j - \frac{1}{2} \sum_j (-1)^j \int dy \operatorname{tr} \Lambda L_y. \quad (5.76)$$

Здесь матричное поле $q_j = t_j^{-1} \Lambda t_j$. Вычисляя аналогичным образом член второго порядка по градиентам, действующим на поле t , находим

$$\begin{aligned} \langle \delta \mathcal{S}^{(2)} \rangle_P - \frac{1}{2} \langle \langle (\delta \mathcal{S}^{(1)})^2 \rangle \rangle_P &= -\frac{a^2}{16v^2} \sum_j (\gamma_j + \gamma_{j-1}) \left(1 - 2 \frac{(\gamma_j - \gamma_{j-1})^2}{(\gamma_j + \gamma_{j-1})^2} \right) \int dy \operatorname{tr} [L_x, \Lambda]^2 \\ &- \sum_j \frac{v^2}{8(\gamma_j + \gamma_{j-1})} \int dy \operatorname{tr} [L_y, \Lambda]^2 - \sum_j \frac{av_j(\gamma_j - \gamma_{j-1})}{2v(\gamma_j + \gamma_{j-1})} \int dy \operatorname{tr} [L_y, L_x] \Lambda. \end{aligned} \quad (5.77)$$

Как мы видим, полученные выше выражения напоминают те, что мы получали при выводе нелинейной сигма модели в двумерном случае. Однако, есть ряд отличий. Начнем с члена первого порядка по L_y в ур. (5.76). Запишем его в виде:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \sum_j (-1)^j \int dy \operatorname{tr} \Lambda L_y &= -\frac{1}{2} \sum_j \oint_{C_j} ds \operatorname{tr} \Lambda L_s = -\frac{1}{8} \int d^2 \mathbf{r} \nu(\mathbf{r}) \varepsilon_{\mu\nu} \operatorname{tr} q \partial_\mu q \partial_\nu q \\ &\rightarrow -\frac{1}{16} \int d^2 \mathbf{r} \varepsilon_{\mu\nu} \operatorname{tr} q \partial_\mu q \partial_\nu q. \end{aligned} \quad (5.78)$$

Здесь мы ввели контуры C_j , охватывающие закрашенные области на Рис. 5.1. После этого переписали интеграл по границе C_j как интеграл по площади, которую она охватывает. В результате возник фактор заполнения для закрашенных областей. Так как нас интересует предел $a \rightarrow 0$, то его можно заменить на среднее значение равное $1/2$. Именно таким образом, получен последний член в ур. 5.78. Подчеркнем, что он имеет вид топологического члена и, так же как при выводе двумерной нелинейной сигма модели из модели электронов в магнитном поле, возник из краевого вклада. Далее воспользуемся соотношениями,

$$\operatorname{tr} [L_x, \Lambda]^2 = -\frac{1}{4} \operatorname{tr} (\nabla_x q)^2, \quad \operatorname{tr} [L_x, L_y] \Lambda = -\frac{1}{4} \varepsilon_{\mu\nu} \operatorname{tr} q \partial_\mu q \partial_\nu q. \quad (5.79)$$

В итоге эффективное действие для мод t принимает следующий вид

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{\text{eff}}[t] &\simeq \frac{a^2(\gamma_+ + \gamma_-)(1 - R^2)}{16v^2} \sum_j \int dy \operatorname{tr} (\nabla_x q)^2 + \frac{1}{16} \frac{v^2}{\gamma_+ + \gamma_-} \sum_j \int dy \operatorname{tr} (\nabla_y q)^2 \\ &- \frac{1}{16} \int d^2 \mathbf{r} \varepsilon_{\mu\nu} \operatorname{tr} q \partial_\mu q \partial_\nu q + \frac{aR}{16} \sum_j \int dy \varepsilon_{\mu\nu} \operatorname{tr} q \partial_\mu q \partial_\nu q - \frac{\omega}{2v} \sum_j \int dy \operatorname{tr} \Lambda q, \end{aligned} \quad (5.80)$$

где $R = (\gamma_- - \gamma_+)/(\gamma_+ + \gamma_-)$. Для того, чтобы устранить асимметрию направлений вдоль одномерных каналов (y) и поперек (x), сделаем масштабное преобразование $x \rightarrow \lambda_x x$ и $y \rightarrow \lambda_y y$, где

$$\lambda_x = \frac{a^2(\gamma_+ + \gamma_-)(1 - R^2)}{16v^2}, \quad \lambda_y = \frac{1}{16} \frac{v^2}{\gamma_+ + \gamma_-}. \quad (5.81)$$

Наконец делая замену $a \sum_j \rightarrow \int dx$, получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{\text{eff}}[q] &\simeq \frac{\bar{\sigma}_{xx}}{8} \int d^2 \mathbf{r} \operatorname{tr} (\nabla q)^2 - \frac{\bar{\sigma}_{xy}}{8} \int d^2 \mathbf{r} \varepsilon_{\mu\nu} \operatorname{tr} q \partial_\mu q \partial_\nu q - \pi \bar{D} \omega \int d^2 \mathbf{r} \operatorname{tr} \Lambda q, \\ \bar{\sigma}_{xx} &= \frac{1}{2}(1 - R^2), \quad \bar{\sigma}_{xy} = \frac{1}{2}(1 - R), \quad \bar{D} = \frac{1}{2\pi av}. \end{aligned} \quad (5.82)$$

Таким образом, мы доказали, что в непрерывном пределе модель Чалкера–Коддингтона переходит в нелинейную сигма-модель. Отметим, что симметричный случай $\gamma_- = \gamma_+$ соответствует критическому углу θ_c в модели Чалкера–Коддингтона (см. раздел 2.3). В этом случае $R = 0$ и, соответственно, $\bar{\sigma}_{xy} = \bar{\sigma}_{xx} = 1/2$. Таким образом, модель оказывается на линии $\bar{\theta} = \pi$, где, как мы увидим в следующей главе, находится критическая точка, описывающая переход между плато в режиме квантового эффекта Холла. В тоже время, как мы увидим дальше, значение $\bar{\sigma}_{xx} = 1/2$ оказывается меньше значения σ_{xx} в критической точке.

Задачи:

5.2.1 Доказать,

TO ADD PROBLEMS!

Глава 6

Поток продольной и холловской проводимости

Введение

6.1 Пертурбативные локализационные поправки

В этом разделе мы покажем как строится теория возмущений по $1/\bar{\sigma}_{xx}$ в подходе нелинейной сигма-модели. Для формул Кубо (4.100) и (4.101) такая теория возмущений позволяет вычислить квантовые поправки к проводимости. Их вычисление можно проводить и с помощью стандартной крестовой диаграммной техники, но подход нелинейной сигма-модели оказывается более удобным с технической точки зрения. Кроме этого, в рамках нелинейной сигма-модели оказывается более удобным построение ренормализационной группы.

Теория возмущений по $1/\bar{\sigma}_{xx}$ строится разложением Q матрицы по флуктуациям около седлового решения Λ . Выбор матрицы Λ удобен тем, что при $Q = \Lambda$ проводимости совпадают с проводимостями, вычисленными в теории массивных мод P .

Для того, чтобы строить теорию возмущений, матрицу Q необходимо параметризовать, чтобы разрешить условие $Q^2 = 1$. Часто используются следующие параметризации:

$$\begin{aligned} \text{корневая:} \quad & Q = W + \Lambda\sqrt{1 - W^2}, \\ \text{экспоненциальная:} \quad & Q = \Lambda \exp(\Lambda W), \\ \text{дробно-рациональная:} \quad & Q = \Lambda(1 + \Lambda W/2)(1 - \Lambda W/2)^{-1}. \end{aligned} \quad (6.1)$$

Во всех трёх случаях матрица W имеет блок-диагональный вид в RA -пространстве

$$W = \begin{pmatrix} 0 & w \\ w^\dagger & 0 \end{pmatrix}, \quad (6.2)$$

и, следовательно, антикоммутирует с матрицей Λ , $\Lambda W = -W\Lambda$. Здесь w независимая матрица размера $n \times n$. Можно проверить, что для всех трёх параметризаций матрица Q удовлетворяет условию: $Q^2 = 1$.

При переходе от интегрирования по Q к интегрированию по W возникает якобиан: $\int \mathcal{D}[Q] \rightarrow \int \mathcal{D}[W] J[W]$. Оказывается, что этот якобиан может быть вычислен в общем виде [56]. Однако, трудность, связанную с дополнительными вкладками, возникающими из-за якобиана можно обойти, если для регуляризации расходящихся интегралов будем использовать размерную регуляризацию, работая в размерности $d = 2 + \epsilon$. В этом случае якобиан не будет давать вклада в расходящиеся при $\epsilon \rightarrow 0$ члены [57].

Заметим, что для всех трёх параметризаций разложение матрицы Q до второго порядка по W имеет один и тот же вид:

$$Q = \Lambda + W - \frac{1}{2}\Lambda W^2 + \dots \quad (6.3)$$

Подставляя это разложение в действие (4.98) находим, что квадратичная часть действия нелинейной сигма-модели имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_\sigma^{(2)}[Q] &= \frac{\bar{\sigma}_{xx}}{8} \text{Tr}(\nabla W)^2 + \frac{\pi \bar{D}\eta}{2} \text{Tr} W^2 \\ &= \frac{\bar{\sigma}_{xx}}{4} \int \frac{d^2 \mathbf{q}}{(2\pi)^2} \sum_{\alpha\beta} w_{\alpha\beta}(\mathbf{q}) \left[q^2 + h_\eta^2 \right] (w^\dagger)_{\beta\alpha}(-\mathbf{q}). \end{aligned} \quad (6.4)$$

где $h_\eta^2 = 4\pi\bar{D}\eta/\bar{\sigma}_{xx}$. Заметим, что выполняется соотношение $(w^\dagger)_{\beta\alpha}(-\mathbf{q}) = [w_{\alpha\beta}(\mathbf{q})]^*$. Отсюда, находим пропагатор в гауссовой теории:

$$\langle w_{\alpha\beta}(\mathbf{q})(w^\dagger)_{\beta\alpha}(-\mathbf{q}) \rangle = \frac{4}{\bar{\sigma}_{xx}}\mathcal{D}(q), \quad \mathcal{D}(q) = \frac{1}{q^2 + h_\eta^2}. \quad (6.5)$$

Обратим внимание, что в гауссовой теории нет вклада от члена в действии, пропорционального $\bar{\sigma}_{xy}$. Это совершенно естественно, т.к. этот член может быть записан в виде интеграла по границе двумерной области, см. ур.(4.99). Из-за этого свойства этот член вообще не будет давать вклада в теорию возмущений в любом порядке по $1/\bar{\sigma}_{xx}$. Также отметим, что в низшем порядке по $1/\bar{\sigma}_{xx}$ якобиан не дает вклада в любом случае.

Начнем с вычисления поправки к плотности состояний. Используя (6.3), находим

$$\langle Q \rangle \approx \Lambda - \frac{1}{2}\Lambda\langle W^2 \rangle = \Lambda \left[1 - \frac{2n}{\bar{\sigma}_{xx}} \int \frac{d^2\mathbf{q}}{(2\pi)^2} \mathcal{D}(q) \right] \quad (6.6)$$

Отсюда, пользуясь ур. (4.102), находим

$$D(\mathcal{E}) = \bar{D}(\mathcal{E}) \left[1 - \frac{2n}{\bar{\sigma}_{xx}} \int \frac{d^2\mathbf{q}}{(2\pi)^2} \mathcal{D}(q) \right]. \quad (6.7)$$

Заметим, что мы должны были бы устремить число реплик n к нулю, но пока не будем этого делать. Полагая $\eta = 0$ мы видим, что интеграл по импульсам логарифмически расходится. Учитывая, что при нулевой температуре минимальная величина импульса ограничена обратным размером системы L , а максимальная обратным циклотронным радиусом R_c^{-1} , находим

$$D(\mathcal{E}) = \bar{D}(\mathcal{E}) \left[1 - \frac{n}{\pi\bar{\sigma}_{xx}} \ln \frac{L}{R_c} \right]. \quad (6.8)$$

Как мы видим, в репличном пределе $n \rightarrow 0$ точная плотность состояний совпадает с плотностью состояний, вычисленной в P -теории. Оказывается, что этот результат является точным: во всех порядках теории возмущений по $1/\bar{\sigma}_{xx}$ и по всех порядках по непертурбативным поправкам (см. ниже) плотность состояний $D(\mathcal{E}) = \bar{D}(\mathcal{E})$.

Для вычисления продольной проводимости по формуле (4.100) в главном порядке достаточно заменить каждое Q на W :

$$\begin{aligned} \int d\mathbf{r}' \operatorname{tr} \langle \langle Q(\mathbf{r}) \nabla Q(\mathbf{r}) \cdot Q(\mathbf{r}') \nabla Q(\mathbf{r}') \rangle \rangle &\approx \int d\mathbf{r}' \operatorname{tr} \langle \langle W(\mathbf{r}) \nabla W(\mathbf{r}) \cdot W(\mathbf{r}') \nabla W(\mathbf{r}') \rangle \rangle \\ &= -\frac{16n^3}{\bar{\sigma}_{xx}^2} \int \frac{d^2\mathbf{q}}{(2\pi)^2} q^2 \mathcal{D}^2(q). \end{aligned} \quad (6.9)$$

Отсюда, подставляя этот результат в ур. (4.100), находим квантовую поправку к проводимости диссипативной проводимости

$$\sigma_{xx} = \bar{\sigma}_{xx} \left[1 - \frac{2n}{\bar{\sigma}_{xx}} \int \frac{d^2\mathbf{q}}{(2\pi)^2} q^2 \mathcal{D}^2(q) \right]. \quad (6.10)$$

Полагая $\eta = 0$, получаем логарифмически расходящийся интеграл, так что

$$\sigma_{xx} = \bar{\sigma}_{xx} \left[1 - \frac{n}{\pi\bar{\sigma}_{xx}} \ln \frac{L}{R_c} \right]. \quad (6.11)$$

Физически эта поправка соответствует интерференции обращенных по времени траекто-

рий электрона, испытывающего рассеяние на примесях. Однако, так как магнитное поле приводит к разности фаз между обращенными по времени траекториями, интерференция подавляется, что соответствует исчезновению поправки при $n \rightarrow 0$.

Отметим, что поправка первого порядка в h_η отсутствует из-за сокращения поправок в плотность состояний и в проводимость.

Посчитаем теперь поправки следующего порядка по $1/\bar{\sigma}_{xx}$ к плотности состояний и проводимости. Будем использовать корневую параметризацию. Для вычислений нам понадобится выражение для вклада в действие четвертого порядка по W :

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_\sigma^{(4)} = & -\frac{\bar{\sigma}_{xx}}{32} \left(\prod_{j=1}^4 \int \frac{d^2 \mathbf{q}_j}{(2\pi)^2} \right) \delta \left(\sum_{j=1}^4 \mathbf{q}_j \right) \left[(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2)(\mathbf{q}_3 + \mathbf{q}_4) + (\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_4)(\mathbf{q}_2 + \mathbf{q}_3) - 2h_\eta^2 \right] \\ & \times \sum_{\alpha_j} w_{\alpha_1 \alpha_2}(\mathbf{q}_1) w_{\alpha_2 \alpha_3}^\dagger(\mathbf{q}_2) w_{\alpha_3 \alpha_4}(\mathbf{q}_3) w_{\alpha_4 \alpha_1}^\dagger(\mathbf{q}_4). \end{aligned} \quad (6.12)$$

Отметим, что вершины четверные по W (и старше) генерируемые действием нелинейной сигма модели в крестовой диаграммной технике соответствуют хиками-боксам. Используя разложения корня $\sqrt{1 - W^4}$ до четвертого порядка W , получаем два вклада второго порядка по $1/\bar{\sigma}_{xx}$ в среднее Q :

$$\langle Q \rangle^{(2)} = \frac{1}{2} \Lambda \langle \langle W^2 \cdot \mathcal{S}_\sigma^{(4)} \rangle \rangle - \frac{1}{8} \Lambda \langle W^4 \rangle. \quad (6.13)$$

Начнем с вычисления первого вклада

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha_2} \langle \langle w_{\alpha_1 \alpha_2} w_{\alpha_2 \alpha_1}^\dagger \cdot \mathcal{S}_\sigma^{(4)} \rangle \rangle &= \frac{n}{2} \sum_{\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4} \int \frac{d^2 \mathbf{q} d^2 \mathbf{p} d^2 \mathbf{k}}{(2\pi)^6} \langle \langle w_{\alpha_1 \alpha_2}(\mathbf{k}) w_{\alpha_2 \alpha_1}^\dagger(-\mathbf{k}) \cdot w_{\alpha_3 \alpha_4}(\mathbf{p}) w_{\alpha_4 \alpha_3}^\dagger(-\mathbf{p}) \rangle \rangle \\ &\times \mathcal{D}(q) [(\mathbf{q} - \mathbf{p})^2 + 2h_\eta^2] = \frac{8n^2}{\bar{\sigma}_{xx}^2} \int \frac{d^2 \mathbf{q} d^2 \mathbf{p}}{(2\pi)^4} [\mathcal{D}^2(p) + \mathcal{D}(q)\mathcal{D}(p)]. \end{aligned} \quad (6.14)$$

Для второго члена в ур. (6.13), получаем

$$\sum_{\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4} \langle w_{\alpha_1 \alpha_2} w_{\alpha_2 \alpha_3}^\dagger w_{\alpha_3 \alpha_4} w_{\alpha_4 \alpha_1}^\dagger \rangle = \frac{32n^2}{\bar{\sigma}_{xx}^2} \int \frac{d^2 \mathbf{q} d^2 \mathbf{p}}{(2\pi)^4} \mathcal{D}(q)\mathcal{D}(p). \quad (6.15)$$

Собирая все вместе, получаем

$$\langle Q \rangle^{(2)} = \Lambda \frac{4n^2}{\bar{\sigma}_{xx}^2} \int \frac{d^d \mathbf{q}}{(2\pi)^d} \int \frac{d^d \mathbf{p}}{(2\pi)^d} \mathcal{D}^2(p). \quad (6.16)$$

Здесь $d = 2 + \epsilon$, так как мы будем использовать размерную регуляризацию. Отметим, что размерная регуляризация требует продолжения с целых размерностей на нецелые. Такое продолжение определяется как удовлетворяющее следующим свойствам:

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & \int \frac{d^d \mathbf{p}}{(2\pi)^d} F(\mathbf{p} + \mathbf{k}) = \int \frac{d^d \mathbf{p}}{(2\pi)^d} F(\mathbf{p}), \\ \text{(ii)} \quad & \int \frac{d^d \mathbf{p}}{(2\pi)^d} F(\lambda \mathbf{p}) = |\lambda|^{-d} \int \frac{d^d \mathbf{p}}{(2\pi)^d} F(\mathbf{p}), \\ \text{(iii)} \quad & \int \frac{d^d \mathbf{p} d^d \mathbf{k}}{(2\pi)^{2d}} F(\mathbf{p}) G(\mathbf{k}) = \int \frac{d^d \mathbf{p}}{(2\pi)^d} F(\mathbf{p}) \int \frac{d^d \mathbf{k}}{(2\pi)^d} G(\mathbf{k}). \end{aligned} \quad (6.17)$$

Как следствие правила (ii), получается, что

$$\int \frac{d^d \mathbf{p}}{(2\pi)^d} \equiv 0. \quad (6.18)$$

Таким образом, в размерной регуляризации поправка второго порядка по $1/\bar{\sigma}_{xx}$ к плотности состояний отсутствует при любом числе реплик.

Перейдем теперь к вычислению поправки второго порядка к проводимости. Для этого удобно представить формулу Кубо для продольной проводимости в несколько другом виде. Воспользуемся формулами (4.82) и (4.90). Тогда получим,

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} = & \bar{\sigma}_{xx} + \frac{\bar{\sigma}_{xx}}{2n} \langle \text{tr} \Lambda(Q - \Lambda) \rangle + \frac{\bar{\sigma}_{xx}}{8n^2} \left\langle \left[\text{tr} \Lambda(Q - \Lambda) \right]^2 \right\rangle \\ & + \frac{\bar{\sigma}_{xx}^2}{16n^2 d} \int d\mathbf{r}' \text{tr} \langle \langle Q \nabla Q \cdot Q \nabla Q - \Lambda Q \nabla Q \cdot \Lambda Q \nabla Q \rangle \rangle. \end{aligned} \quad (6.19)$$

Эта формула написана для произвольной размерности. Как мы увидим в дальнейшем для вычисления поправки второго порядка по $1/\bar{\sigma}_{xx}$ это важно. Формула (6.19) удобна тем, что поправка первого порядка определяется простым выражением

$$\sigma_{xx} \simeq \bar{\sigma}_{xx} - \frac{\bar{\sigma}_{xx}}{4n} \langle \text{tr} W^2 \rangle = \bar{\sigma}_{xx} - 2n \int \frac{d^d \mathbf{q}}{(2\pi)^d} \mathcal{D}(q). \quad (6.20)$$

Поправка второго порядка по $1/\bar{\sigma}_{xx}$ определяется следующим выражением

$$\delta_2 \sigma_{xx} = \frac{\bar{\sigma}_{xx}}{4n} \langle \langle \text{tr} W^2 \cdot \mathcal{S}_\sigma^{(4)} \rangle \rangle - \frac{\bar{\sigma}_{xx}}{16n} \langle \text{tr} W^4 \rangle + \frac{\bar{\sigma}_{xx}}{32n^2} \langle (\text{tr} W^2)^2 \rangle - \frac{\bar{\sigma}_{xx}^2}{32n^2 d} \int d\mathbf{r}' \langle \langle W^2 \nabla W \cdot W^2 \nabla W \rangle \rangle. \quad (6.21)$$

Производя вычисления аналогичные тем, что приведены выше, находим (см. ур. (6.14))

$$\frac{\bar{\sigma}_{xx}}{4n} \langle \langle \text{tr} W^2 \cdot \mathcal{S}_\sigma^{(4)} \rangle \rangle = \frac{4n^2}{\bar{\sigma}_{xx}} \int \frac{d^d \mathbf{q} d^d \mathbf{p}}{(2\pi)^{2d}} \left[\mathcal{D}(q) \mathcal{D}(p) + \mathcal{D}^2(q) \right], \quad (6.22)$$

затем

$$\frac{\bar{\sigma}_{xx}}{16n} \langle \text{tr} W^4 \rangle = \frac{4n^2}{\bar{\sigma}_{xx}} \int \frac{d^d \mathbf{q} d^d \mathbf{p}}{(2\pi)^{2d}} \mathcal{D}(q) \mathcal{D}(p), \quad \frac{\bar{\sigma}_{xx}}{32n^2} \langle (\text{tr} W^2)^2 \rangle = \frac{2(1+n^2)}{\bar{\sigma}_{xx}} \int \frac{d^d \mathbf{q} d^d \mathbf{p}}{(2\pi)^{2d}} \mathcal{D}(q) \mathcal{D}(p) \quad (6.23)$$

и, наконец,

$$-\frac{\bar{\sigma}_{xx}^2}{32n^2 d} \int d\mathbf{r}' \langle \langle W^2 \nabla W \cdot W^2 \nabla W \rangle \rangle = -\frac{4(1+n^2)}{d\bar{\sigma}_{xx}} \int \frac{d^d \mathbf{q} d^d \mathbf{p}}{(2\pi)^{2d}} (\mathbf{p} + \mathbf{q})^2 \mathcal{D}(q) \mathcal{D}(p) \mathcal{D}(\mathbf{p} + \mathbf{q}). \quad (6.24)$$

В итоге для поправки второго порядка к проводимости получаем

$$\begin{aligned} \delta_2 \sigma_{xx} = & \frac{2(d-2)(1+n^2)}{d\bar{\sigma}_{xx}} \left(\frac{d^d \mathbf{q}}{(2\pi)^d} \mathcal{D}(q) \right)^2 + \frac{2n^2}{\bar{\sigma}_{xx}} \int \frac{d^d \mathbf{q} d^d \mathbf{p}}{(2\pi)^{2d}} \mathcal{D}^2(q) \\ & + \frac{4(1+n^2)h_\eta^2}{d\bar{\sigma}_{xx}} \int \frac{d^d \mathbf{q} d^d \mathbf{p}}{(2\pi)^{2d}} \mathcal{D}(q) \mathcal{D}(p) \mathcal{D}(\mathbf{p} + \mathbf{q}) \end{aligned} \quad (6.25)$$

Заметим, что последний вклад в выражении выше является конечным при $\epsilon \rightarrow 0$ ($d \rightarrow$

2), поэтому его можно не рассматривать. Предпоследний вклад содержит интегрирование по импульсу от единицы, а значит в размерной регуляризации зануляется. Воспользуемся равенством

$$\int \frac{d^d \mathbf{q}}{(2\pi)^d} \mathcal{D}(q) = \frac{S_d h_\eta^\epsilon}{2(2\pi)^d} \int_0^\infty \frac{dx x^{d/2-1}}{x+1} = -\frac{S_d h_\eta^\epsilon}{(2\pi)^d} \frac{\Gamma(1-\epsilon/2)\Gamma(1+\epsilon/2)}{\epsilon}, \quad (6.26)$$

где $S_d = 2\pi^{d/2}/\Gamma(d/2)$ – площадь сферы в d -мерном пространстве. Введем переменную $\bar{t} = 2S_d \Gamma(1-\epsilon/2)\Gamma(1+\epsilon/2)/[(2\pi)^d \bar{\sigma}_{xx}]$. Тогда поправки первого и второго порядка к проводимости можно записать в виде:

$$\sigma_{xx} \simeq \bar{\sigma}_{xx} \left[1 + a_1 \frac{\bar{t} h_\eta^\epsilon}{\epsilon} + \frac{\bar{t}^2 h_\eta^{2\epsilon}}{\epsilon^2} (b_1 + \epsilon b_2) \right], \quad a_1 = n, \quad b_1 = 0, \quad b_2 = \frac{1+n^2}{4}. \quad (6.27)$$

Так как σ_{xx} физическая проводимость, то она не должна содержать расходящихся в пределе $\epsilon \rightarrow 0$. Этого можно добиться за счет переопределения \bar{t} . Выразим \bar{t} через безразмерную переменную t , которая будет зависеть от произвольной длины ℓ :

$$\bar{t} = \ell^\epsilon t Z(t). \quad (6.28)$$

Подчеркнем, что t от ℓ (в силу произвольности этого масштаба длины) не зависит. Подберем теперь $Z(t)$ таким образом, чтобы в зависимости σ_{xx} от t расходящихся не было. Естественно выбор функции $Z(t)$ не единственный, но мы оставим в ней только расходящиеся в пределе $\epsilon \rightarrow 0$ члены. Такая схема называется схемой минимального вычитания (minimal subtraction scheme) [57]. Тогда получим

$$Z(t) = 1 + a_1 \frac{t}{\epsilon} + \frac{t^2}{\epsilon^2} (b_1 + a_1^2 + \epsilon b_2). \quad (6.29)$$

Используя условие независимости \bar{t} от ℓ , получим уравнение на зависимость t от ℓ :

$$\frac{dt}{d \ln \ell} = -\frac{\epsilon t}{1 + t d \ln Z/dt} \simeq -\epsilon t + a_1 t^2 + \frac{b_1 t^3}{2\epsilon} + 2b_2 t^3 + O(t^4). \quad (6.30)$$

Отметим, член пропорциональный b_1 . При отличном от нуля b_1 этот член расходится в пределе $\epsilon \rightarrow 0$, что сигнализирует о проблемах с перенормируемостью теории. В нашем вычислении $b_1 = 0$ и предел $\epsilon \rightarrow 0$ существует. В итоге для $d = 2$ получаем следующее уравнение ренормализационной группы:

$$\frac{dt}{d \ln \ell} = n t^2 + \frac{1+n^2}{2} t^3 + O(t^4). \quad (6.31)$$

Отметим, что это же уравнение может быть получено из ур. (6.27) дифференцированием обеих сторон по $\ln h_\eta$ и с последующим отождествлением $\bar{\sigma}_{xx}$ с σ_{xx} , а $\ln h_\eta$ с $-\ln L$. Таким образом, получится уравнение на зависимость σ_{xx} от размера системы при конечном числе реплик:

$$\frac{d\sigma_{xx}}{d \ln L} = -\frac{n}{\pi} - \frac{1+n^2}{2\pi^2 \sigma_{xx}} - \frac{n(7+3n^2)}{8\pi^3 \sigma_{xx}^2} - \frac{24+55n^2+19n^4}{48\pi^4 \sigma_{xx}^3} + O(1/\sigma_{xx}^4). \quad (6.32)$$

Здесь мы добавили известные из литературы члены следующих порядков малости [58, 59].

Отметим, что зануление поправки типа слабой локализации из-за разрушения квантовой интерференции магнитным полем, приводит к следующему явлению. Определим длину

локализации ξ_{loc} как длину, на которой проводимость становится порядка единицы (в безразмерных единицах e^2/h). Из ур. (6.32) находим $\xi_{\text{loc}} \simeq R_c \text{bar} \sigma_{xx}^{-2} \exp(\pi^2 \bar{\sigma}_{xx}^2)$. Отметим, что логарифм длины локализации растет как квадрат проводимости на масштабе R_c . В случае отсутствия магнитного поля, вместо квадрата была бы первая степень. Это означает, что стартуя с ситуации слабого магнитного поля, когда заполнено много уровней Ландау и $\bar{\sigma}_{xx}$ велико, для достижения режима, в котором квантовые эффекты важны, требуются большие размеры системы. Последнее принципиально важно для численных экспериментов.

В заключение этой лекции приведем формулу для перенормировки плотности состояний в старших порядках [60]

$$\frac{d \ln D}{d \ln L} = -\frac{n}{\pi \sigma_{xx}} - \frac{3n(1+n^2)}{8\pi^3 \sigma_{xx}^3} + O(1/\sigma_{xx}^4). \quad (6.33)$$

Как указывалось выше в репличном пределе $n = 0$ перенормировка плотности состояний отсутствует.

Задачи:

- 6.1.1 Вычислить якобиан для дробно-рациональной параметрации.
- 6.1.2 Вычислить трех-петлевую поправку к плотности состояний в размерной регуляризации, см. ур. (6.33) .

6.2 Инстантоны и их вклад в статистическую сумму

В этом разделе мы покажем как можно вычислить вклад инстантонных конфигураций в свободную энергию рассматриваемой системы.

В отсутствие членов, нарушающих симметрию, существование классических решений (т.е. решений уравнений движения) следует из неравенства Шварца–Богомольного

$$\text{tr} (\nabla_x Q \pm iQ \nabla_y Q)^2 \geq 0. \quad (6.34)$$

Это очевидное неравенство может быть переписано в виде

$$\frac{1}{8} \text{Tr}(\nabla Q)^2 \geq 2\pi |\mathcal{C}[Q]|. \quad (6.35)$$

Конфигурации поля Q , которые реализуют нижнюю границу неравенства (6.35), называются *инстантонами*. Классическое действие на инстантонах равно

$$\mathcal{S}_\sigma^{\text{inst}} = 2\pi \bar{\sigma}_{xx} |\mathcal{C}[Q]| - i\bar{\theta} \mathcal{C}[Q]. \quad (6.36)$$

Мы положили $\eta = 0$, так как для регуляризации расходящихся вкладов от флуктуаций поля Q будем использовать регуляризацию Паули–Вилларса, а не размерную регуляризацию.

В этой лекции нас будут интересовать только инстантоны, соответствующие минимальному по модулю топологическому заряду, $\mathcal{C}[Q] = \pm 1$. Удобное представление для инстантона имеет вид [52, 53]

$$Q_{\text{inst}}(\mathbf{r}) = T^{-1} \Lambda_{\text{inst}}(\mathbf{r}) T, \quad \Lambda_{\text{inst}}(\mathbf{r}) = \Lambda + \rho(\mathbf{r}). \quad (6.37)$$

Здесь матрица $\rho_{\alpha\beta}^{pq}(\mathbf{r})$ имеет только четыре ненулевых элемента

$$\rho_{11}^{11} = -\rho_{-1-1}^{11} = -\frac{2\lambda^2}{|z - z_0|^2 + \lambda^2}, \quad \rho_{1-1}^{11} = \bar{\rho}_{-11}^{11} = \frac{2\lambda(z - z_0)}{|z - z_0|^2 + \lambda^2}, \quad (6.38)$$

где $z = x + iy$, а верхняя черта означает комплексное сопряжение. Комплексная величина z_0 является свободным параметром и соответствует положению центра инстантона. Параметра λ также является свободным параметром и соответствует размеру инстантона. Эти три действительных параметра вместе с параметрами, параметризующими глобальные повороты $T \in U(2n)$, описывают пространство состояний инстантона. Анти-инстантон, т.е. инстантон с топологическим зарядом $\mathcal{C}[Q] = -1$, получается комплексным сопряжением.

Инстантонное решение удобно параметризовать следующим образом. Перепишем инстантонное решение Λ_{inst} в ур. (6.37) и (6.38) как унитарное вращение R вокруг тривиального решения Λ

$$\Lambda_{\text{inst}} = R^{-1} \Lambda R \quad (6.39)$$

где

$$R_{\alpha\beta}^{pp'} = \begin{pmatrix} \delta^{\alpha\beta} + (\bar{e}_1 - 1)\delta^{\alpha 1}\delta^{\beta 1} & e_0\delta^{\alpha 1}\delta^{\beta 1} \\ -e_0\delta^{\alpha 1}\delta^{\beta 1} & \delta^{\alpha\beta} + (e_1 - 1)\delta^{\alpha 1}\delta^{\beta 1} \end{pmatrix}_{pp'}. \quad (6.40)$$

Величины e_0 и e_1 определены следующим образом

$$e_0 = \frac{\lambda}{\sqrt{|z - z_0|^2 + \lambda^2}}, \quad e_1 = \frac{z - z_0}{\sqrt{|z - z_0|^2 + \lambda^2}}. \quad (6.41)$$

Вид матрицы $R_{\alpha\beta}^{pp'}$ показан на Рис. 6.1.

Посчитаем число параметров, которыми фиксируется инстантонное решение. Заметим, что так как классическое действие не зависит от них, то это нулевые моды. Вращения T удобно разделить на вращения из $U(2n)/(U(n) \times U(n))$ и из $U(n) \times U(n)$. Первые не коммутируют с Λ и поэтому дают

$\overbrace{\hspace{2cm}}^m$		$\overbrace{\hspace{2cm}}^n$		
e_1	0	e_0	0	} m
0	1_{m-1}	0	0	
$-e_0$	0	e_1	0	} n
0	0	0	1_{n-1}	

Рис. 6.1: Структура матрицы R .

$2n^2$ действительных параметров. Вторые коммутируют с Λ , но $4n - 3$ из них не коммутируют с R . Кроме этого мы должны учесть 3 действительные переменных из-за λ и z_0 . Итак, всего инстантонное решение определяется $2n^2 + 4n$ действительными параметрами. Отметим, что в случае $n = 1$ имеется 6 действительных нулевых моды, которые соответствуют λ и z_0 , а также 3м углам Эйлера, параметризующим повороты.

Общий вид матрицы Q с топологическим зарядом $\mathcal{C}[Q] = 1$ можно представить в виде

$$Q = T^{-1} R^{-1} q R T, \quad q^2 = 1. \quad (6.42)$$

При этом для матрицы q можно использовать одну из стандартных параметризаций, например, корневую

$$q = W + \Lambda \sqrt{1 - W^2}, \quad W = \begin{pmatrix} 0 & v \\ v^\dagger & 0 \end{pmatrix}. \quad (6.43)$$

Матричные поля v^\dagger и v описывают флуктуации около инстантонного решения. Ниже мы изучим их подробно.

Воспользуемся следующим удобным представлением

$$\frac{\bar{\sigma}_{xx}}{8} \text{Tr}(\nabla Q)^2 = \frac{\bar{\sigma}_{xx}}{8} \text{Tr}[\nabla + \mathbf{A}, q]^2, \quad (6.44)$$

где матрица \mathbf{A} содержит информацию о инстантонном решении

$$\mathbf{A} = R T \nabla (T^{-1} R^{-1}) = R \nabla R^{-1}. \quad (6.45)$$

Оператор	Число полей $v_{\alpha\beta}$	Вырождение
$O^{(0)}$	$(n-1)^2$	1
$O^{(1)}$	$2(n-1)$	2
$O^{(2)}$	1	3

Таблица 6.1: Подсчет числа нулевых мод

Раскладывая матрицу q в ур. Eq. (6.44) до второго порядка по v и v^\dagger , находим

$$\delta\mathcal{S}_\sigma = \frac{\bar{\sigma}_{xx}}{8} \int d\mathbf{r} \operatorname{tr}[\nabla + \mathbf{A}, q]^2 = \frac{\bar{\sigma}_{xx}}{4} \int d\mathbf{r} \mu^2(\mathbf{r}) \left[v_{11} O^{(2)} v_{11}^\dagger + \sum_{\alpha=2}^n v_{\alpha 1} O^{(1)} v_{1\alpha}^\dagger + \sum_{\beta=2}^n v_{1\beta} O^{(1)} v_{\beta 1}^\dagger + \sum_{\alpha=2}^n \sum_{\beta=2}^n v_{\alpha\beta} O^{(0)} v_{\beta\alpha}^\dagger \right]. \quad (6.46)$$

Здесь три дифференциальных оператора, определены как

$$O^{(a)} = \frac{(r^2 + \lambda^2)^2}{4\lambda^2} \left[\nabla_b + \frac{ia\varepsilon_{bc} r_c}{r^2 + \lambda^2} \right]^2 + \frac{a}{2}, \quad a = 0, 1, 2. \quad (6.47)$$

Также мы ввели функцию

$$\mu(\mathbf{r}) = \frac{2\lambda}{r^2 + \lambda^2}, \quad (6.48)$$

которая играет роль пространственной меры. Это связано с тем, что инстантон для флуктуаций эффективно создает пространство с метрикой сферы радиуса λ . Удобно перейти к стереографическим координатам

$$\eta = \frac{r^2 - \lambda^2}{r^2 + \lambda^2}, \quad -1 < \eta < 1, \quad \theta = \tan^{-1} \frac{y}{x}, \quad 0 \leq \theta < 2\pi, \quad (6.49)$$

и воспользоваться соотношениям

$$\int d\mathbf{r} \mu^2(\mathbf{r}) = \int d\eta d\theta. \quad (6.50)$$

Также удобно переписать функции $e_{0,1}$ через стереографические координаты:

$$e_0 = \sqrt{\frac{1-\eta}{2}}, \quad e_1 = \sqrt{\frac{1+\eta}{2}} e^{i\theta}. \quad (6.51)$$

Дифференциальные операторы в новых координатах принимают следующий вид

$$O^{(a)} = -\frac{\partial}{\partial \eta} \left[(1-\eta^2) \frac{\partial}{\partial \eta} \right] - \frac{1}{1-\eta^2} \frac{\partial^2}{\partial^2 \theta} + \frac{ia}{1-\eta} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{a^2}{4} \frac{1+\eta}{1-\eta} - \frac{a}{2}, \quad a = 0, 1, 2. \quad (6.52)$$

Наконец, используя ур. (6.46) можно подсчитать число полей $v_{\alpha\beta}$, на которые действует каждый из операторов $O^{(a)}$ (см. Таблицу 6.2).

Для нахождения спектра и собственных функций дифференциальных операторов $O^{(a)}$ надо решить спектральную задачу

$$O^{(a)} \Phi^{(a)}(\eta, \theta) = E^{(a)} \Phi^{(a)}(\eta, \theta), \quad (6.53)$$

где собственные функции $\Phi^{(a)}$ предполагаются ортонормированными в смысле стандартного ска-

лярного произведения

$$\bar{\Phi}_1^{(a)} \cdot \Phi_2^{(a)} = \int d\eta d\theta \bar{\Phi}_1^{(a)}(\eta, \theta) \Phi_2^{(a)}(\eta, \theta). \quad (6.54)$$

Оказывается, что собственные энергии и собственные функции операторов $O^{(a)}$ параметризуются угловым моментом J и его проекцией M :

$$\begin{aligned} E_J^{(0)} &= J(J+1), & J &= 0, 1, \dots \\ E_J^{(1)} &= (J-1)(J+1), & J &= 1, 2, \dots \\ E_J^{(2)} &= (J-1)(J+2), & J &= 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (6.55)$$

then the eigenfunctions are labelled by (J, M) and can be written as follows

$$\begin{aligned} \Phi_{J,M}^{(0)} &= C_{J,M}^{(0)} e^{-iM\theta} \sqrt{(1-\eta^2)^M} P_{J-M}^{M,M}(\eta), & M &= -J, \dots, J, \\ \Phi_{J,M}^{(1)} &= C_{J,M}^{(1)} e^{-iM\theta} \sqrt{(1-\eta^2)^M} \sqrt{1-\eta} P_{J-M-1}^{M+1,M}(\eta), & M &= -J, \dots, J-1, \\ \Phi_{J,M}^{(2)} &= C_{J,M}^{(2)} e^{-iM\theta} \sqrt{(1-\eta^2)^M} (1-\eta) P_{J-M-1}^{M+2,M}(\eta), & M &= -J-1, \dots, J-1. \end{aligned} \quad (6.56)$$

Здесь зависимость от η определяется обобщенными полиномами Якоби:

$$P_n^{\alpha,\beta}(\eta) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} (1-\eta)^{-\alpha} (1+\eta)^{-\beta} \frac{d^n}{d\eta^n} (1-\eta)^{n+\alpha} (1+\eta)^{n+\beta}, \quad (6.57)$$

а постоянные нормировки равны

$$\begin{aligned} C_{J,M}^{(0)} &= \frac{\sqrt{\Gamma(J-M+1)\Gamma(J+M+1)(2J+1)}}{2^{M+1} \sqrt{\pi} \Gamma(J+1)}, \\ C_{J,M}^{(1)} &= \frac{\sqrt{\Gamma(J-M)\Gamma(J+M+1)}}{2^{M+1} \sqrt{\pi} \Gamma(J)}, \\ C_{J,M}^{(2)} &= \frac{\sqrt{\Gamma(J-M)\Gamma(J+M+2)(2J+1)}}{2^{M+2} \sqrt{\pi} \Gamma(J) \sqrt{J(J+1)}}. \end{aligned} \quad (6.58)$$

Как видно из ур. (6.55), для каждого из операторов существуют собственные состояния с нулевой энергией: нулевые моды. Соответствующие собственные функции можно выписать явно

$$\begin{aligned} O^{(0)} &\implies \Phi_{0,0}^{(0)} = 1, \\ O^{(1)} &\implies \Phi_{1,-1}^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e_1, \quad \Phi_{1,0}^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e_0, \\ O^{(2)} &\implies \Phi_{1,-2}^{(2)} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} e_1^2, \quad \Phi_{1,-1}^{(2)} = \sqrt{\frac{3}{2\pi}} e_0 e_1, \quad \Phi_{1,0}^{(2)} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} e_0^2. \end{aligned} \quad (6.59)$$

Число нулевых мод для каждого из операторов $O^{(a)}$ перечислено в таблице 6.2. Полное число нулевых мод равно $2n^2 + 4n$ в согласии с подсчетом на основе общего вида решения для инстантона.

Как обычно, для интегрирования по нулевым модам мы не можем использовать гауссово, квадратичное приближение. Поэтому нам нужно связать выражения для нулевых мод, полученное в гауссовом приближении, с параметрами, которые параметризуют инстантонное решение. Для этого запишем формально инстантонное решение в виде

$$Q_{\text{inst}}(\xi_i) = U^{-1}(\xi_i) \Lambda U(\xi_i), \quad (6.60)$$

где $U = RT$, а ξ_i включают в себя z_0 , λ и генераторы вращений T . Тогда изменение параметров $\xi_i \rightarrow \xi_i + \varepsilon_i$ в инстантонном решении Q_{inst} может быть записано в форме ур. (6.42):

$$Q_{\text{inst}}(\xi_i + \varepsilon_i) = U^{-1}(\xi_i) q_\varepsilon U(\xi_i), \quad q_\varepsilon \approx \Lambda - \varepsilon_i [U \partial_{\varepsilon_i} U^{-1}, \Lambda]. \quad (6.61)$$

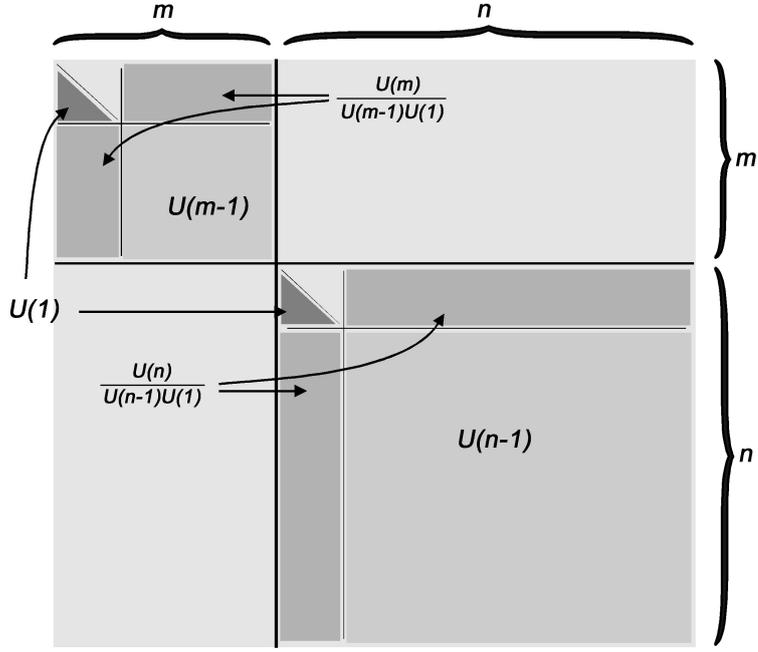


Рис. 6.2: Структура нарушения симметрии инстантоном.

Отметим, что

$$-\varepsilon_i [U \partial_{\varepsilon_i} U^{-1}, \Lambda]_{\alpha\beta} = 2\varepsilon_i \begin{pmatrix} 0 & [U \partial_{\varepsilon_i} U^{-1}]_{\alpha\beta}^{1,-1} \\ -[U \partial_{\varepsilon_i} U^{-1}]_{\alpha\beta}^{-1,1} & 0 \end{pmatrix}. \quad (6.62)$$

Сравнивая это выражение с выражением (6.42), находим следующее соответствие

$$v_{\alpha\beta} = 2\varepsilon_i [RT \partial_{\varepsilon_i} T^{-1} R^{-1}]_{\alpha\beta}^{1,-1}, \quad v_{\alpha\beta}^\dagger = -2\varepsilon_i [RT \partial_{\varepsilon_i} T^{-1} R^{-1}]_{\alpha\beta}^{-1,1}. \quad (6.63)$$

Обозначая через t бесконечно малый $U(2n)$ поворот $T = 1_{2n} + it$, а $\delta\lambda$ и δz_0 бесконечно малые изменения размера инстантона и его положения,

$$R(\lambda + \delta\lambda, z_0 + \delta z_0) = R(\lambda, z_0) [1_{2n} + \delta\lambda R^{-1} \partial_\lambda R + \delta z_0 R^{-1} \partial_{z_0} R], \quad (6.64)$$

получаем явные формулы, связывающие их с гауссовыми флуктуациями:

$$\begin{aligned} v_{\alpha\beta} &= 2it_{\alpha\beta}^{1,-1} \bar{\Phi}_{0,0}^{(0)} \\ \begin{bmatrix} v_{\alpha 1} \\ v_{1\beta} \end{bmatrix} &= 2\sqrt{2\pi}i \begin{pmatrix} t_{\alpha 1}^{1,-1} & -t_{\alpha 1}^{1,1} \\ t_{1\beta}^{1,-1} & t_{1\beta}^{-1,-1} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\Phi}_{1,-1}^{(1)} \\ \bar{\Phi}_{1,0}^{(1)} \end{bmatrix} \\ v_{11} &= 4\sqrt{\frac{\pi}{3}} \left[it_{11}^{-1,1}, \left(it_{11}^{-1,-1} - it_{11}^{1,1} - \frac{\delta\lambda}{\lambda} \right), -it_{11}^{1,-1} + \frac{\delta z_0}{\lambda} \right] \begin{bmatrix} \bar{\Phi}_{1,-2}^{(2)} \\ \bar{\Phi}_{1,-1}^{(2)} \\ \bar{\Phi}_{1,0}^{(2)} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6.65)$$

Из полученного выше выражения можно сделать вывод, что кроме размера инстантона λ и его положения z_0 , пространство параметров инстантона задается $t_{\alpha\beta}^{1,-1}$ и $t_{\alpha\beta}^{-1,1}$, которые являются генераторами класса смежности $U(2n)/[U(n) \times U(n)]$. Также пространство параметров инстантона задается величинами $t_{1\alpha}^{1,1}$ и $t_{\alpha 1}^{1,1}$ при $\alpha > 1$, которые являются генераторами класса смежности $U(n)/[U(n-1) \times U(1)]$. (Аналогично для $t_{1\alpha}^{-1,-1}$ и $t_{\alpha 1}^{-1,-1}$) Наконец, флуктуации зависят от комбинации $t_{1,1}^{11} - t_{11}^{-1,-1}$, которая описывает вращение $O(3)$ относительно оси z . Структура иерархии нарушения симметрии инстантоном показана на Рис. 6.2.

Зная структуру флуктуаций около инстантонного решения, мы можем вычислить поправку к

свободной энергии от инстантонов. Воспользуемся разложением для статистической суммы по топологическим секторам

$$Z = \sum_W Z_W, \quad (6.66)$$

где Z_W – статистическая сумма в секторе с топологическим зарядом $\mathcal{C}[Q] = W$. Имея в виду, что $Z_W \sim \exp(-2\pi\bar{\sigma}_{xx}|W|)$, можно для свободной энергии получить приближенное выражение:

$$\ln Z \simeq \ln Z_0 + \frac{Z_1 + Z_{-1}}{Z_0} + \dots \quad (6.67)$$

Нас будет интересовать первый исчезающий вклад, $(Z_1 + Z_{-1})/Z_0$, который определяется инстантовыми конфигурациями. Запишем выражение для этого вклада в следующем виде:

$$\frac{Z_{\pm 1}}{Z_0} = \frac{\int \mathcal{D}[Q_{\text{inst}}] Z_{\pm 1}^{(\text{mass})}}{\int \mathcal{D}[Q_0] Z_0^{(\text{mass})}}. \quad (6.68)$$

Здесь первая дробь в правой части равенства учитывает интегрирование по нулевым модам инстантона (числитель) и тривиального решения (знаменатель). Вторая дробь – это отношение вкладов в статистические суммы за счет массивных мод.

Параметризуем массивные моды в следующем виде

$$v_{\alpha\beta}(\eta, \theta) = \frac{2}{\sqrt{\bar{\sigma}_{xx}}} \sum_{J,M} u_{JM}^{\alpha\beta} \bar{\Phi}_{J,M}(\eta, \theta), \quad v_{\alpha\beta}^\dagger(\eta, \theta) = \frac{2}{\sqrt{\bar{\sigma}_{xx}}} \sum_{J,M} \bar{u}_{JM}^{\beta\alpha} \Phi_{J,M}(\eta, \theta) \quad (6.69)$$

Тогда, получим явное выражение для вклада от массивных мод.

$$\begin{aligned} \frac{Z_{\pm 1}^{(\text{mass})}}{Z_0^{(\text{mass})}} &= e^{-2\pi\bar{\sigma}_{xx} \pm i\bar{\theta}} \frac{\left[\prod_{J=1}^{\infty} \prod_{M=-J}^J \int \frac{du_{JM}^{\alpha\beta} d\bar{u}_{JM}^{\alpha\beta}}{\pi} e^{-\sum_{J=1}^{\infty} \sum_{M=-J}^J E_J^{(0)} |u_{JM}^{\alpha\beta}|^2} \right]^{(n-1)^2}}{\left[\prod_{J=1}^{\infty} \prod_{M=-J}^J \int \frac{du_{JM}^{\alpha\beta} d\bar{u}_{JM}^{\alpha\beta}}{\pi} e^{-\sum_{J=1}^{\infty} \sum_{M=-J}^J E_J^{(0)} |u_{JM}^{\alpha\beta}|^2} \right]^{(n-1)^2}} \\ &\times \frac{\left[\prod_{J=2}^{\infty} \prod_{M=-J}^{J-1} \int \frac{du_{JM}^{\alpha\beta} d\bar{u}_{JM}^{\alpha\beta}}{\pi} e^{-\sum_{J=2}^{\infty} \sum_{M=-J}^{J-1} E_J^{(1)} |u_{JM}^{\alpha\beta}|^2} \right]^{2(n-1)}}{\left[\prod_{J=1}^{\infty} \prod_{M=-J}^J \int \frac{du_{JM}^{\alpha\beta} d\bar{u}_{JM}^{\alpha\beta}}{\pi} e^{-\sum_{J=1}^{\infty} \sum_{M=-J}^J E_J^{(0)} |u_{JM}^{\alpha\beta}|^2} \right]^{2(n-1)}} \\ &\times \frac{\left[\prod_{J=2}^{\infty} \prod_{M=-J-1}^{J-1} \int \frac{du_{JM}^{\alpha\beta} d\bar{u}_{JM}^{\alpha\beta}}{\pi} e^{-\sum_{J=2}^{\infty} \sum_{M=-J-1}^{J-1} E_J^{(2)} |u_{JM}^{\alpha\beta}|^2} \right]}{\left[\prod_{J=1}^{\infty} \prod_{M=-J}^J \int \frac{du_{JM}^{\alpha\beta} d\bar{u}_{JM}^{\alpha\beta}}{\pi} e^{-\sum_{J=1}^{\infty} \sum_{M=-J}^J E_J^{(0)} |u_{JM}^{\alpha\beta}|^2} \right]}. \end{aligned} \quad (6.70)$$

Отметим, что здесь нормировка интегрирования по $u_{JM}^{\alpha\beta}$ с $1/\pi$ объясняется выражением (3.4) для представления функции Грина в виде интеграла. После взятия гауссовых интегралов находим

$$\frac{Z_{\pm 1}^{(\text{mass})}}{Z_0^{(\text{mass})}} = \exp\left(-2\pi\bar{\sigma}_{xx} \pm i\bar{\theta} - 2(n-1)D^{(1)} - D^{(2)}\right), \quad (6.71)$$

где

$$D^{(r)} = \sum_{J=2}^{\infty} (2J+r-1) \ln E_J^{(r)} - \sum_{J=1}^{\infty} (2J+1) \ln E_J^{(0)}. \quad (6.72)$$

Воспользуемся теперь соотношениями между собственными модами $u_{JM}^{\alpha\beta}$ и генераторами преобра-

зований, соответствующих нулевым модам,

$$u_{0,0}^{\alpha\beta} = i\sqrt{4\pi\bar{\sigma}_{xx}}t_{\alpha\beta}^{1,-1}, \quad \alpha, \beta > 1, \quad (6.73)$$

$$u_{1\alpha}^{1,-1} = i\sqrt{2\pi\bar{\sigma}_{xx}}t_{1\alpha}^{1,-1}, \quad u_{1,0}^{1\alpha} = i\sqrt{2\pi\bar{\sigma}_{xx}}t_{1\alpha}^{-1,-1}, \quad \alpha > 1, \quad (6.74)$$

$$u_{1,-1}^{\alpha 1} = i\sqrt{2\pi\bar{\sigma}_{xx}}t_{\alpha 1}^{1,-1}, \quad u_{1,0}^{\alpha 1} = -i\sqrt{2\pi\bar{\sigma}_{xx}}t_{\alpha 1}^{1,1}, \quad \alpha > 1, \quad (6.75)$$

$$u_{1,-2}^{11} = i\sqrt{\frac{4\pi\bar{\sigma}_{xx}}{3}}t_{11}^{-1,1}, \quad u_{1,-1}^{11} = \sqrt{\frac{4\pi\bar{\sigma}_{xx}}{3}}(it_{11}^{-1,-1} - it_{11}^{1,1} - \frac{\delta\lambda}{\lambda}), \quad (6.76)$$

$$u_{1,0}^{11} = \sqrt{\frac{4\pi\bar{\sigma}_{xx}}{3}}(-it_{11}^{1,-1} + \frac{\delta\bar{z}}{\lambda}). \quad (6.77)$$

С помощью этих выражений можно вычислить якобиан преобразования от $u_{JM}^{\alpha\beta}$ к $t_{\alpha\beta}^{pp'}$, z_0 и λ . В итоге получим

$$\begin{aligned} \frac{Z_{\pm 1}}{Z_0} &= \int d\mathbf{r}_0 \int \frac{d\lambda}{\lambda^3} \left(\frac{2\pi\bar{\sigma}_{xx}}{\pi}\right)^{4(n-1)} \left(\frac{4\pi\bar{\sigma}_{xx}}{3\pi}\right)^3 \left(\frac{4\pi\bar{\sigma}_{xx}}{\pi}\right)^{-2(n-1)} \left(\frac{4\pi\bar{\sigma}_{xx}}{\pi}\right)^{-1} \text{vol}[U(1)] \\ &\times \text{vol}\left[\frac{U(n)}{U(1) \times U(n-1)}\right] \text{vol}\left[\frac{U(n)}{U(1) \times U(n-1)}\right] e^{-2\pi\bar{\sigma}_{xx}\pm i\bar{\theta}-2(n-1)D^{(1)}-D^{(2)}}. \end{aligned} \quad (6.78)$$

Отметим, что полученный выше ответ не является еще окончательным, так как величины $D^{(1,2)}$ имеют ультра-фиолетовые расходимости. Так как инстантонное решение (также как и топологический член) существуют строго в размерности $d = 2$, то мы не можем применить метод размерной регуляризации. Вместо этого мы применим метод регуляризации Паули–Вилларса [?]. В этом методе мы заменим $\delta\mathcal{S}_\sigma$ на

$$\delta\mathcal{S}_\sigma^{(\text{reg})} = \delta\mathcal{S}_\sigma + \sum_{f=1}^K \hat{e}_f \delta\mathcal{S}_\sigma^{(f)}. \quad (6.79)$$

Здесь $\delta\mathcal{S}_\sigma^{(f)}$ получается из $\delta\mathcal{S}_\sigma$ заменой операторов $O^{(a)}$ на $O^{(a)} + \mathcal{M}_f^2$, где $\mathcal{M}_f \gg 1$. Параметры \hat{e}_f равные по модулю единице и их число K подбираются так, чтобы сократить расходимости. Их конкретные значения определим ниже. В итоге регуляризованное значение величины $D^{(r)}$ определяется следующим образом:

$$D_{\text{reg}}^{(r)} = \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \left[\Phi_{\text{reg}}^{(\Lambda)}\left(\frac{1+r}{2}\right) - \Phi_{\text{reg}}^{(\Lambda)}\left(\frac{1}{2}\right) \right], \quad (6.80)$$

где

$$\Phi_{\text{reg}}^{(\Lambda)}(p) = \sum_{J=p+1}^{\Lambda} 2J \ln(J^2 - p^2) + \sum_{f=1}^K e_f \sum_{J=p}^{\Lambda} 2J \ln(J^2 - p^2 + \mathcal{M}_f^2), \quad (6.81)$$

причем мы считаем выполненным условие $\Lambda \gg \mathcal{M}_f$. В присутствие большого параметра \mathcal{M}_f , можно вычислять вторую сумму по J в $\Phi_{\text{reg}}^{(\Lambda)}(p)$ с помощью формулы Эйлера–Маклорена

$$\sum_{J=p+1}^{\Lambda} g(J) = \int_p^{\Lambda} dx g(x) + \frac{1}{2}g(x)\Big|_p^{\Lambda} + \frac{1}{12}g'(x)\Big|_p^{\Lambda}. \quad (6.82)$$

Прямым вычислением выражения (6.81) получаем

$$\begin{aligned} \Phi_{\text{reg}}^{(\Lambda)}(p) &= 4 \sum_{J=1}^{\Lambda} J \ln J + 2p^2 - 2 \sum_{J=1}^{2p} (J-p) \ln J - 2p^2 \ln \Lambda + \sum_{f=1}^K \hat{e}_f \left[2\Lambda(\Lambda+1) \ln \Lambda - \Lambda^2 + \frac{\ln e\Lambda}{3} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1-6p}{3} \sum_{f=1}^K \hat{e}_f \ln \mathcal{M}_f - 2\mathcal{M}_f^2 \ln \mathcal{M}_f + 2\mathcal{M}_f^2 \ln \Lambda - 2p^2 \ln \Lambda \right]. \end{aligned} \quad (6.83)$$

Для того, чтобы сделать величину $\Phi_{\text{reg}}^{(\Lambda)}(p)$ расходящейся не быстрее чем $\ln \mathcal{M}_f$, наложим следующие

условия

$$\sum_{f=1}^K \hat{e}_f = -1, \quad \sum_{f=1}^K \hat{e}_f \mathcal{M}_f^2 = 0, \quad \sum_{f=1}^K \hat{e}_f \mathcal{M}_f^2 \ln \mathcal{M}_f = 0. \quad (6.84)$$

Для того, чтобы удовлетворить этим трём условиям достаточно выбрать $K = 3$. Также введем следующее определение

$$\sum_{f=1}^K \hat{e}_f \ln \mathcal{M}_f = -\ln \mathcal{M}. \quad (6.85)$$

В итоге, получаем

$$\Phi_{\text{reg}}^{(\Lambda)}(p) = 4 \sum_{J=1}^{\Lambda} J \ln J + 2p^2 - 2 \sum_{J=1}^{2p} (J-p) \ln J - 2\Lambda(\Lambda+1) \ln \Lambda + \Lambda^2 - \frac{\ln e\Lambda}{3} + \frac{1-6p}{3} \ln \mathcal{M}. \quad (6.86)$$

Подставляя это выражение в ур. (6.80), находим

$$D_{\text{reg}}^{(1)} = -\ln \mathcal{M} + \frac{3}{2} - 2 \ln 2, \quad D_{\text{reg}}^{(2)} = -2 \ln \mathcal{M} + 4 - 3 \ln 3 - \ln 2. \quad (6.87)$$

Для окончательного вычисления поправки к свободной энергии воспользуемся известным соотношением для объема класса смежности [?]

$$\text{vol} \left[\frac{U(k)}{U(1) \times U(k-1)} \right] = \frac{\pi^{k-1}}{\Gamma(k)}. \quad (6.88)$$

В итоге для инстантонной поправки к статистической сумме, получаем следующее выражение

$$\frac{Z_{\pm 1}}{Z_0} = \frac{n^2}{2} D_n \int d\mathbf{r}_0 \int \frac{d\lambda}{\lambda^3} (2\pi \bar{\sigma}_{xx})^{2n} e^{-2\pi \bar{\sigma}_{xx}(\mathcal{M}) \pm i\bar{\theta}}, \quad D_n = \frac{4}{\pi e} e^{-2n(\gamma+3/2-\ln 2)} \Gamma^{-2}(1+n). \quad (6.89)$$

Здесь величина

$$\bar{\sigma}_{xx}(\mathcal{M}) = \bar{\sigma}_{xx} \left[1 - \frac{n}{\pi \bar{\sigma}_{xx}} \ln \mathcal{M} e^\gamma \right] \quad (6.90)$$

в точности представляет собой выражение для однопетлевой пертурбативной поправки, вычисленной в регуляризации Паули-Вилларса.

Отметим, что инстантонная поправка к статистической сумме оказывается пропорциональна числу реплик в квадрате, $\sim n^2$. Это означает, что в репличном пределе, $n \rightarrow 0$, инстантонной поправки к свободной энергии не возникает.

Задачи:

- 6.2.1 Вычислить однопетлевую пертурбативную поправку к продольной проводимости в регуляризации Паули-Вилларса.
- 6.2.2 Вычислить однопетлевую пертурбативную поправку к плотности состояний в регуляризации Паули-Вилларса.
- 6.2.3 Вычислить диагональные матричные элементы от функций e_0^2 и $|e_1|^2$ по собственным состояниям оператора $O(1)$.

6.2.4 Вычислить диагональные матричные элементы от функций e_0^2 и $|e_1|^2$ по собственным состояниям оператора $O(2)$.

6.3 Вклад инстантонов в поправки к проводимости

В этом разделе мы применим полученные в предыдущем разделе формулы для инстантонной поправки к статистической сумме для вычисления инстантонной поправки к проводимости. Несмотря на их экспоненциальную малость, $\sim \exp(-2\pi\bar{\sigma}_{xx})$, эти поправки важны по следующим причинам. Во-первых, инстантонная поправка к σ_{xx} будет зависеть от $\bar{\theta}$ в отличие от пертурбативных поправок. Во-вторых, инстантоны – это единственный источник поправок к σ_{xy} , так как пертурбативные поправки к холловской проводимости отсутствуют.

Рассмотрим произвольный оператор $A[Q]$. Его среднее значение с действием нелинейной сигма-модели можно представить в виде разложения по топологическим секторам

$$\langle A \rangle = \langle A \rangle_0 \left(1 - \frac{Z_1 + Z_{-1}}{Z_0} \right) + \frac{A_1 + A_{-1}}{Z_0} + \dots = \langle A \rangle_0 + \langle A \rangle_{\text{inst}} + \dots \quad (6.91)$$

Здесь $\langle A \rangle_0 = A_0/Z_0$ – это среднее значение оператора A , вычисленное в тривиальном топологическом секторе. Величина

$$\langle A \rangle_{\text{inst}} = \frac{A_1 + A_{-1}}{Z_0} - \frac{A_0}{Z_0} \frac{Z_1 + Z_{-1}}{Z_0} \quad (6.92)$$

представляет инстантонную поправку, которая учитывает одноинстантонное решение.

Если у оператора A есть не нулевое значение на классическом решении, соответствующем инстантону, $A[Q_{\text{inst}}] \neq 0$, то тогда в главном приближении $\langle A \rangle_{\text{inst}}$ может быть представлена в следующем виде

$$\langle A \rangle_{\text{inst}} = (\langle A[Q_{\text{inst}}] \rangle_{\text{zm}} - A[\Lambda]) \frac{Z_1}{Z_0} + (\langle A[\bar{Q}_{\text{inst}}] \rangle_{\text{zm}} - A[\Lambda]) \frac{Z_{-1}}{Z_0}. \quad (6.93)$$

Здесь $\langle \dots \rangle_{\text{zm}}$ обозначает усреднение по нулевым модам инстантона.

Для вычисления инстантонной поправки к продольной проводимости σ_{xx} воспользуемся формулой (4.100). Рассмотрим оператор

$$A_{xx}[Q] = \int dr dr' \text{tr} Q(\mathbf{r}) \nabla Q(\mathbf{r}) Q(\mathbf{r}') \nabla Q(\mathbf{r}'). \quad (6.94)$$

Используя выражения (6.37) и (6.39), находим

$$A_{xx}[Q_{\text{inst}}] = \text{tr} Y_\mu Y_\mu, \quad Y_\mu = \int dr R^{-1} [\Lambda, R \nabla_\mu R^{-1}] \Lambda R \quad (6.95)$$

Заметим, что матрица Y в репличном пространстве имеет ненулевые матричные элементы только в канале первой реплики, $Y^{\alpha\beta} \propto \delta^{\alpha 1} \delta^{\beta 1}$. Используя выражение (6.40) для матрицы R , находим

$$Y_x = -2\pi i \lambda \tau_y, \quad Y_y = -2\pi i \lambda \tau_x, \quad (6.96)$$

где $\tau_{x,y}$ – стандартные матрицы Паули, действующие в RA-пространстве. В итоге, находим

$$A_{xx}[Q_{\text{inst}}] = -16\pi^2 \lambda^2. \quad (6.97)$$

Используя выражение (4.100) и формулу (6.89), получаем

$$\sigma_{xx} = \bar{\sigma}_{xx} - \pi^2 D_0 \int \frac{d\lambda}{\lambda} \bar{\sigma}_{xx}^2 e^{-2\pi\bar{\sigma}_{xx}(\mathcal{M})} \cos \bar{\theta}. \quad (6.98)$$

В полученном выражении есть несколько проблем. Во-первых, подынтегральное выражение зависит от безразмерной массы Паули-Вилларса, \mathcal{M} а интегрирование идет по размеру инстантона λ . Во-вторых, неопределены пределы интеграла по λ . Первый вопрос решается следующим образом. Взять безразмерный параметр \mathcal{M} и размер инстантона λ . Единственный возможный вариант для связи безразмерного параметра \mathcal{M} и размера инстантона λ , как это следует из ур. (6.11) и (6.90) – это $\mathcal{M} = \zeta \lambda / l$, где ζ – число порядка единицы, а $l \sim R_c$ – масштаб, на котором определены

затравочные параметры $\bar{\sigma}_{xx}$ и $\bar{\theta}$. Заметим, что величина ζ может быть определена из требования, чтобы $\sigma_{xx}(\zeta\lambda/l)$ совпадало с однопетлевой поправкой к проводимости, вычисленной в размерной регуляризации.

Таким образом, получаем

$$\sigma_{xx}(\lambda') = \bar{\sigma}_{xx}(\lambda') - \pi^2 D_0 \int^{\lambda'} \frac{d\lambda}{\lambda} \bar{\sigma}_{xx}^2 e^{-2\pi\bar{\sigma}_{xx}(\lambda)} \cos \bar{\theta}, \quad (6.99)$$

где

$$\bar{\sigma}_{xx}(\lambda) = \bar{\sigma}_{xx} - \frac{n}{\pi} \ln \zeta e^\gamma \lambda/l. \quad (6.100)$$

Масштаб $\lambda' \sim 1/L$. Заметим, что интеграл по λ сходится при $\lambda \rightarrow 0$. Однако, наше рассмотрение имеет смысл, только при $\lambda > l$, т.к. иначе поле Q меняется на масштабах меньших l , что противоречит предположению при выводе сигма-модели. Учет следующих порядков теории возмущении вокруг инстантонного решения приведет к зависимости $\bar{\sigma}_{xx}$ в предэкспоненте от λ . Таким, образом

$$\sigma_{xx}(\lambda') = \bar{\sigma}_{xx} - \int_l^{\lambda'} \frac{d\lambda}{\lambda} \left[\frac{n}{\pi} + \pi^2 D_0 \bar{\sigma}_{xx}^2(\lambda) e^{-2\pi\bar{\sigma}_{xx}(\lambda)} \cos \bar{\theta} \right]. \quad (6.101)$$

Здесь в предэкспоненте мы заменили затравочное значение $\bar{\sigma}_{xx}$ на перенормированное в рамках однопетлевого приближения. Также отметим принципиальное отличие инстантонной поправки от пертурбативных поправок. В отличие от последних инстантонная поправка не расходится в пределе малых λ . Для вычисления инстантонной поправки к холловской проводимости, см. ур. (4.101), рассмотрим оператор

$$A_{xy}[Q] = \epsilon_{\mu\nu} \int dr dr' \text{tr} Q(\mathbf{r}) \nabla_\mu Q(\mathbf{r}) Q(\mathbf{r}') \nabla_\nu Q(\mathbf{r}') \Lambda. \quad (6.102)$$

Аналогично тому, что было написано выше, находим

$$A_{xy}[Q_{\text{inst}}] = \text{tr}[Y_x, Y_y] \Lambda = 16\pi^2 \lambda i. \quad (6.103)$$

Используя этот результат, аналогично изложенному выше, получаем инстантонную поправку к холловской проводимости:

$$\frac{\theta(\lambda')}{2\pi} = \frac{\bar{\theta}}{2\pi} - \int_l^{\lambda'} \frac{d\lambda}{\lambda} \left[0 + \pi^2 D_0 \bar{\sigma}_{xx}^2(\lambda) e^{-2\pi\bar{\sigma}_{xx}(\lambda)} \sin \bar{\theta} \right]. \quad (6.104)$$

Заметим, что член в ур. (4.101), пропорциональный $1/n$ вклада в репличном пределе не дает.

Заметим, что $\sigma_{xx}(\lambda')$ отличается от $\bar{\sigma}_{xx}(\lambda)$, так как последняя содержит только пертурбативные поправки. Для того, чтобы показать, что $\bar{\sigma}_{xx}(\lambda)$ в экспоненте в ур. (6.101) и (6.104) содержат и инстантонные поправки необходимо решить более сложную задачу. А именно, в флуктуациях около инстантона с размером λ учесть нептурбативные вклады в перенормировку классического действия, приходящие от инстантонов с размерами меньшими λ . Если поверить, что такая перенормировка действительно реализуется, то можно $\bar{\sigma}_{xx}(\lambda)$ заменить на $\sigma_{xx}(\lambda)$ и $\bar{\theta}$ на $\theta(\lambda)$. Тогда ур. (6.101) и (6.104) можно интерпретировать как неявные интегральные уравнения

$$\sigma_{xx}(\lambda') = \bar{\sigma}_{xx} - \int_l^{\lambda'} \frac{d\lambda}{\lambda} \beta_\sigma(\sigma_{xx}(\lambda), \theta(\lambda)), \quad (6.105)$$

$$\frac{\theta(\lambda')}{2\pi} = \frac{\bar{\theta}}{2\pi} - \int_l^{\lambda'} \frac{d\lambda}{\lambda} \beta_\theta(\sigma_{xx}(\lambda), \theta(\lambda)). \quad (6.106)$$

Здесь функции

$$\begin{aligned}\beta_\sigma(\sigma_{xx}, \theta) &= -\frac{d\sigma_{xx}}{d \ln \lambda} = \frac{1}{2\pi^2 \sigma_{xx}} + \mathcal{D} \sigma_{xx}^2 e^{-2\pi \sigma_{xx}} \cos \theta, \\ \beta_\theta(\sigma_{xx}, \theta) &= -\frac{d(\theta/2\pi)}{d \ln \lambda} = \mathcal{D} \sigma_{xx}^2 e^{-2\pi \sigma_{xx}} \sin \theta.\end{aligned}\tag{6.107}$$

могут быть интерпретированы как β -функции, описывающие ренормгрупповой поток σ_{xx} и θ . Отметим, что мы добавили пертурбативную двухпетлевую поправку к σ_{xx} . Постоянная $\mathcal{D} = \pi^2 D_0 = 4\pi/e$. Отметим, что в работах [61, 62] для коэффициента \mathcal{D} было ошибочно получено значение в 4 раза больше.

Задачи:

6.3.1 Используя ур. (6.107) найти зависимость σ_{xx} и θ от λ в области $\sigma_{xx} \gg 1$.

Глава 7

Физические явления в ЦКЭХ

Введение

7.1 Делокализованные состояния и их всплывание. Квантовохолловские осцилляции

В предыдущей лекции были получены непертурбативные уравнения ренорм-группы, которые описывают зависимость продольной и холловской проводимости, σ_{xx} и σ_{xy} , от размера системы L . Для удобства читателя, воспроизведем эти уравнения еще раз:

$$\beta_\sigma(\sigma_{xx}, \sigma_{xy}) = -\frac{d\sigma_{xx}}{d\ln L} = \frac{1}{2\pi^2\sigma_{xx}} + \frac{1}{2\pi^4\sigma_{xx}^3} + \mathcal{D}\sigma_{xx}^2 e^{-2\pi\sigma_{xx}} \cos 2\pi\sigma_{xy}, \quad (7.1)$$

$$\beta_\theta(\sigma_{xx}, \sigma_{xy}) = -\frac{d\sigma_{xy}}{d\ln L} = \mathcal{D}\sigma_{xx}^2 e^{-2\pi\sigma_{xx}} \sin 2\pi\sigma_{xy}, \quad (7.2)$$

где $\mathcal{D} = 4\pi/e$ и мы добавили 4-х петлевой пертурбативный результат. Уравнения (7.1)-(7.2) должны решаться при начальных условиях $\sigma_{xx}(l) = \bar{\sigma}_{xx}$ и $\sigma_{xy}(l) = \bar{\sigma}_{xy}$. Отметим, что мы перешли от переменной θ к полной холловской проводимости σ_{xy} .

Несмотря на то, что уравнения (7.1)-(7.2) получены в пределе «слабой связи», $1/\pi\sigma_{xx} \ll 1$, они имеют правильное качественное поведение. Холловская проводимость неперенормируется при целых, $\sigma_{xy} = N$, и полужелых, $\sigma_{xy} = N + 1/2$, значениях. При этом линия $\sigma_{xy} = N$ ($\sigma_{xy} = N + 1/2$) является устойчивой (неустойчивой) с точки зрения ренорм-группового потока в область больших L (см. Рис. 7.1). При $\sigma_{xy} = N$ инстантонная поправка в β_σ положительна, т.е. также как и пертурбативные поправки приводит к уменьшению σ_{xx} . При $\sigma_{xy} = N + 1/2$ инстантонная поправка меняет знак и инстантоны приводят к антилокализации в отличие от локализационных пертурбативных поправок. Таким образом, можно ожидать, что точный инстантонный вклад будет компенсировать пертурбативные поправки и β_σ обратится в нуль при некотором $\sigma_{xx} = \sigma_{xx}^*$ и $\sigma_{xy} = N + 1/2$:

$$\beta_\sigma(\sigma_{xx}^*, \sigma_{xy}^*) = \beta_\theta(\sigma_{xx}^*, \sigma_{xy}^*) = 0, \quad \sigma_{xy}^* = N + 1/2. \quad (7.3)$$

Отметим, что одноинстантонного вклада не достаточно, чтобы в рамках ур. (7.1) получить нуль β_σ . Неустойчивая фиксированная точка $(\sigma_{xx}^*, \sigma_{xy}^*)$ соответствует переходу между плато с $\sigma_{xy} = N$ и $\sigma_{xy} = N + 1$. Существенным предсказанием теории является, что значение σ_{xx}^* одинаковое для всех N .

Решение ур. (7.1)-(7.2) может быть записано в виде

$$\sigma_{ab} = G_{ab}(L/l, \bar{\sigma}_{xx}, \bar{\sigma}_{xy}). \quad (7.4)$$

Скейлинговая гипотеза означает, что на самом деле σ_{ab} не должна зависеть от l . Это приводит к уравнению Каллана-Симанчика

$$l \frac{\partial G_{ab}}{\partial l} - \beta_\sigma(\bar{\sigma}_{xx}, \bar{\sigma}_{xy}) \frac{\partial G_{ab}}{\partial \bar{\sigma}_{xx}} - \beta_\theta(\bar{\sigma}_{xx}, \bar{\sigma}_{xy}) \frac{\partial G_{ab}}{\partial \bar{\sigma}_{xy}} = 0. \quad (7.5)$$

Отметим, что фактически уравнения ренорм-группы – это решение уравнения Каллана-Симанчика методом характеристик. Удобно ввести следующие переменные, описывающие отклонение стартовых значений проводимости от значений проводимости в неустойчивой фиксированной точке:

$$\Delta_\theta = \bar{\sigma}_{xy} - N - \frac{1}{2}, \quad \Delta_\sigma = \bar{\sigma}_{xx} - \sigma_{xx}^*. \quad (7.6)$$

Рис. 7.1:

Считая их малыми, перепишем уравнение (7.5) в следующем виде

$$-t \frac{\partial G_{ab}}{\partial t} + \frac{1}{\nu} \Delta_\theta \frac{\partial G_{ab}}{\partial \Delta_\theta} + y_\sigma \Delta_\sigma \frac{\partial G_{ab}}{\partial \Delta_\sigma} = 0, \quad (7.7)$$

где $t = L/l$ и

$$\nu^{-1} = - \left(\frac{d\beta_\theta}{d\sigma_{xy}} \right)^* > 0, \quad y_\sigma = - \left(\frac{d\beta_\sigma}{d\sigma_{xx}} \right)^* < 0. \quad (7.8)$$

Отметим, что критические индексы ν и y_σ одинаковые для всех N . Общее решение уравнения (7.7) имеет скейлинговый вид

$$G_{ab} = G_{ab}(X, Y), \quad X = \left(\frac{L}{l} \right)^{1/\nu} \Delta_\theta, \quad Y = \Delta_\sigma \left(\frac{L}{l} \right)^{y_\sigma}. \quad (7.9)$$

Заметим, что переменная X растет с ростом L , а переменная Y наоборот убывает. Пренебрегая зависимостью от Y в пределе $L \rightarrow \infty$,

$$\sigma_{ab}(L) = G_{ab}(L/\xi, 0) \quad (7.10)$$

где $\xi = l|\Delta_\theta|^{-\nu}$ - корреляционная длина, которая расходится в точке $\Delta_\theta = 0$. Индекс ν называется индексом корреляционной длины. Численный эксперимент дает значение $\nu = 2.593 \pm 0.006$ [63]. Критический индекс y_σ известен с гораздо меньшей точностью $-0.6 < y_\sigma < -0.4$ [64].

Отметим, что критический индекс ν измерялся в экспериментах. Мы детально обсудим это в лекции 7.3. Также отметим, что экспериментально были измерены скейлинговые функции $G_{ab}(X, Y)$. Экспериментальные данные для перехода между плато $\sigma_{xy} = 0$ и $\sigma_{xy} = 1$ удалось аппроксимировать следующими соотношениями [65],

$$G_{xx}(X, Y) = \frac{e^{-X}}{e^{-2X} + 1 + 2Ye^{-X}}, \quad G_{xy}(X, Y) = \frac{1 + Ye^{-X}}{e^{-2X} + 1 + 2Ye^{-X}}. \quad (7.11)$$

Так что в точке перехода, $\Delta_\theta = 0$, при конечном L , $G_{xx} < 1/2$, а $G_{xy} = 1/2$. В пределе $L \rightarrow \infty$, G_{xx} стремится к значению $1/2$. Отметим, что такое значение продольной проводимости в критической точке получалось при отображении модели Чалкера-Коддингтона на нелинейную сигма-модель, см. ур. (5.82).

Обсудим теперь физические следствия из существования фиксированной точки σ_{xx}^* при $\sigma_{xy}(L) = N + 1/2$. Так как продольная проводимость стремится к конечному пределу σ_{xx}^* при $L \rightarrow \infty$, то должно существовать делокализованное состояние. Проследим как зависит энергия этого делокализованного состояния от магнитного поля. Будем следовать работам [66, 67]. Делокализованное состояние должно находиться при таком значении энергии ¹, что выполняется соотношение

$$\bar{\sigma}_{xy}(\varepsilon) = N + 1/2. \quad (7.12)$$

Используя выражение (2.178) для холловской проводимости в самосогласованном борновском приближении в сильном магнитном поле

$$\bar{\sigma}_{xy}(\varepsilon) = N + \frac{2}{\pi\Gamma^2} \int_{-\Gamma}^{\varepsilon} d\varepsilon' \sqrt{\Gamma^2 - \varepsilon'^2} - \frac{2}{\pi} (N + 1/2) \frac{\Gamma^3(\varepsilon)}{\omega_c \Gamma^2} \frac{\tau_0^2}{\tau_{\text{tr},1}^2}. \quad (7.13)$$

¹Здесь мы будем говорить про энергию, но так как обсуждается задача без взаимодействия, то это же есть и химический потенциал. Для задачи с взаимодействием говорить можно только про положение химического потенциала.

Решая полученное уравнение на ε в приближении $\omega_c \gg N\Gamma\tau_0^2/\tau_{\text{tr},1}^2$, получим

$$\mathcal{E} \simeq \omega_c(N + 1/2) \left(1 + \frac{\Gamma^2 \tau_0^2}{\omega_c^2 \tau_{\text{tr},1}^2} \right) = \omega_c(N + 1/2) + \frac{2(N + 1/2)\tau_0}{\pi\tau_{\text{tr},1}^2}. \quad (7.14)$$

Таким образом, мы видим, что, во-первых, на каждом уровне Ландау имеется одно делокализованное состояние, и, во-вторых, наличие беспорядка в сильном магнитном поле сдвигает положение делокализованного уровня энергии выше середины уровня Ландау.

Возникает вопрос, что происходит с этими делокализованными уровнями по мере уменьшения магнитного поля, т.е. в пределе $\omega_c \rightarrow 0$? Для ответа на этот вопрос воспользуемся формулой (2.177) для холловской проводимости в слабом магнитном поле. Пренебрегая осцилляциями Шубникова-де Гааза и оценивая плотность электронов как $n_e \simeq m_e \mathcal{E}/(2\pi)$, находим положение делокализованных уровней энергии

$$\mathcal{E} = \omega_c(N + 1/2) + \frac{(N + 1/2)}{\omega_c \tau_{\text{tr},1}^2} \quad (7.15)$$

Отметим, что в пределе $\omega_c \rightarrow 0$ при фиксированном N , энергия делокализованного состояния стремится к бесконечности, т.е. делокализованное состояние всплывает над уровнем Ферми. Это согласуется с отсутствием края подвижности в двумерной системе в нулевом магнитном поле.

Заметим, что положение энергий делокализованных состояний в слабом поле, ур. (7.15), не совпадает с центрами уровней Ландау, и значит с максимумами в плотности состояний. В этом режиме слабых магнитных полей, при изменении каким-то параметром $\bar{\sigma}_{xy}$, согласно формулам (6.107) должно наблюдаться периодическое изменение холловской проводимости, связанное с периодическим прохождением через энергии делокализованных состояний. Такие осцилляции называются кванто-холловскими осцилляциями [67].

Рассмотрим решение уравнения Каллана-Симанчика в случае $\sigma_{xx} \gg 1$:

$$\left[t \frac{\partial}{\partial t} + \left[\frac{1}{2\pi^2 \bar{\sigma}_{xx}} + \mathcal{D} \bar{\sigma}_{xx}^2 e^{-2\pi \bar{\sigma}_{xx}} \cos \bar{\theta} \right] \frac{\partial}{\partial \bar{\sigma}_{xx}} + 2\pi \mathcal{D} \bar{\sigma}_{xx}^2 e^{-2\pi \bar{\sigma}_{xx}} \sin \bar{\theta} \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}} \right] G_{ab} = 0 \quad (7.16)$$

Будем искать решение в виде тригонометрического ряда по $\bar{\theta}$:

$$G_{xx} = g_0(t, \bar{\sigma}_{xx}) + g_c(t, \bar{\sigma}_{xx}) \cos \bar{\theta}, \quad G_{xy} = \frac{\bar{\theta}}{2\pi} + g_s(t, \bar{\sigma}_{xx}) \sin \bar{\theta}, \quad (7.17)$$

Из ур. (7.16) находим следующие уравнения для функций g_0 , g_c и g_s :

$$\left[t \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2\pi^2 \bar{\sigma}_{xx}} \frac{\partial}{\partial \bar{\sigma}_{xx}} \right] g_0 = 0, \quad \left[t \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2\pi^2 \bar{\sigma}_{xx}} \frac{\partial}{\partial \bar{\sigma}_{xx}} \right] g_c = -\mathcal{D} \bar{\sigma}_{xx}^2 e^{-2\pi \bar{\sigma}_{xx}} \frac{\partial g_0}{\partial \bar{\sigma}_{xx}}, \quad (7.18)$$

$$\left[t \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2\pi^2 \bar{\sigma}_{xx}} \frac{\partial}{\partial \bar{\sigma}_{xx}} \right] g_s = -\mathcal{D} \bar{\sigma}_{xx}^2 e^{-2\pi \bar{\sigma}_{xx}}. \quad (7.19)$$

Решая эти уравнения, находим

$$g_0 = g_0(Y_0), \quad Y_0 = t e^{-\pi^2 \bar{\sigma}_{xx}^2} \equiv L/\xi_\sigma, \quad g_c = \left[\tilde{f}_\sigma(Y_0) - 2\pi^3 \mathcal{D} \bar{\sigma}_{xx}^4 e^{-2\pi \bar{\sigma}_{xx}} \right] Y_0 g_0'(Y_0), \quad (7.20)$$

$$g_s = f_\theta(Y_0) + \pi \mathcal{D} \bar{\sigma}_{xx}^3 e^{-2\pi \bar{\sigma}_{xx}}. \quad (7.21)$$

здесь $\xi_\sigma = l \exp(\pi^2 \bar{\sigma}_{xx}^2)$ - динамически появляющаяся длина локализации, а g_0 , \tilde{f}_σ , и f_θ - произвольные регулярные функции своих аргументов. Окончательно находим скейлинговые зависимости

$$G_{xx} = g_0(Y) + f_\sigma(Y) \cos(X/Y), \quad G_{xy} = \frac{X}{2\pi Y} + f_\theta(Y) \sin(X/Y) \quad (7.22)$$

$$Y = (L/l) e^{-\pi^2 \bar{\sigma}_{xx}^2} [1 - 2\pi^3 \mathcal{D} \bar{\sigma}_{xx}^4 e^{-2\pi \bar{\sigma}_{xx}} \cos \bar{\theta}], \quad X = Y \bar{\theta} \quad (7.23)$$

Заметим, что функции g_0 , f_σ и f_θ нельзя определить из уравнения Каллана-Симанчика. Найдем

эти функции напрямую, предполагая, что G_{ab} совпадает с $\sigma_{ab}(L)$. Тогда интегрируя уравнения

$$\sigma_{xx}(L) = \bar{\sigma}_{xx} - \int_l^L \frac{d\lambda}{\lambda} \left[\frac{1}{2\pi^2\sigma_{xx}} + D\sigma_{xx}^2 e^{-2\pi\sigma_{xx}} \cos\theta \right], \quad \sigma_{xy}(L) = - \int_l^L \frac{d\lambda}{\lambda} D\sigma_{xx}^2 e^{-2\pi\sigma_{xx}} \sin\theta \quad (7.24)$$

Пренебрегая инстантонными вкладами находим

$$g_0(Y) = \frac{1}{\pi} \sqrt{\ln 1/Y} \quad (7.25)$$

Интегрируя инстантонный вклад с учетом соотношения $d \ln \lambda = -2\pi^2 \sigma_{xx} d\sigma_{xx}$, находим

$$f_\sigma(Y) = f_\theta(Y) = -\pi D g_0^3(Y) e^{-2\pi g_0(Y)} \quad (7.26)$$

Еще раз подчеркнем, что рассмотренные осцилляции продольной и холловской проводимости с магнитным полем (θ) являются отличными от осцилляций Шубникова-де Гааза. Последние связаны с периодической структурой плотности состояний в магнитном поле. Квантово-холльные осцилляции связаны с периодической структурой делокализованных состояний и могут существовать даже в случае независимой от магнитного поля плотности состояний. Именно они при увеличении размера системы (или при понижении температуры) переходят в плато квантового эффекта Холла. Возможно они наблюдались экспериментально в работе [68, 69].

Задачи:

7.1.1 Вывести выражение для энергии делокализованных состояний в слабом магнитном поле с учетом поправки от осцилляций Шубникова-Де Гааза.

7.2 Мезоскопические флуктуации локальной плотности состояний

Понятие мультифрактальности с математической точки зрения можно определить как случайный процесс $s(x)$, который удовлетворяет следующему свойству

$$\lim_{a \rightarrow 0} [s(x+a) - s(x)] \sim a^{h(x)}. \quad (7.27)$$

Если $h(x)$ не зависит от x , то процесс называется фрактальным. Для математического обзора по мультифракталам можно рекомендовать книгу [70].

Оказывается, что явление мультифрактальности возникает в электронной системе с беспорядком. Ниже мы будем обсуждать мультифрактальность в двумерной системе при наличии магнитного поля, однако, схожие явления возникают и в других ситуациях (классах симметрии). Идея о мультифрактальности волновых функций в задаче о Андерсоновской локализации впервые появилась в работе [71], хотя фактически это явление было открыто в работе [72]. Более детально вопросы обсуждаемые в этой лекции изложены в обзорах [73] и [74].

Рассмотрим моменты волновых функций усредненные по беспорядку (inverse participation ratios) для системы конечного объема L^d ,

$$P_q(\mathcal{E}) = \frac{1}{L^d D(\mathcal{E})} \int d\mathbf{r} \sum_a \langle |\phi_a(\mathbf{r})|^{2q} \delta(\mathcal{E} - E_a) \rangle, \quad q = 0, 1, 2, \dots \quad (7.28)$$

где $\phi_a(\mathbf{r})$ и E_a – это собственные функции и энергии электрона в случайном потенциале. Заметим, что $P_0(\mathcal{E}) = L^d$, а $P_1(\mathcal{E}) = 1$, так что интересного можно ждать для $q \geq 2$.

Считая, что энергия контролирует близость к критической точке, например, положению делокализованного состояния \mathcal{E}_c , которые обсуждались в предыдущей лекции, можно записать такое скейлинговое выражение

$$P_q(\mathcal{E}) \sim \xi^{-\tau_q} F_q(L/\xi) = L^{-\tau_q} \tilde{F}_q(L/\xi), \quad \tau_q = d(q-1) + \Delta_q, \quad \xi \sim |\mathcal{E} - \mathcal{E}_c|^{-\nu}. \quad (7.29)$$

Величины Δ_q называются аномальными размерностями, причем $\Delta_0 = \Delta_1 = 0$. Как мы увидим ниже, $\Delta_q < 0$ для $q \geq 2$. Иногда вместо τ_q вводят фрактальную размерность $D_q = \tau_q/(q-1)$.

Для того, чтобы понять физический смысл индексов τ_q , рассмотрим >плотность вероятности для вероятности нахождения частицы в точке \mathbf{r} ,

$$\mathcal{P}(u) = \frac{1}{L^d D(\mathcal{E})} \sum_a \langle \delta(|\phi_a|^2 - u) \delta(\mathcal{E} - E_a) \rangle. \quad (7.30)$$

С помощью введенной функции распределения $\mathcal{P}(u)$ средний момент плотности состояний можно записать как

$$P_q(\mathcal{E}) \sim L^d \int_0^\infty du u^q \mathcal{P}(u). \quad (7.31)$$

Предположим, что функции распределения имеет следующий вид

$$\mathcal{P}(u) \sim \frac{1}{u \ln L} L^{-d+f(-\ln u/\ln L)}, \quad (7.32)$$

где $f(x)$ – произвольная функция. Тогда подставляя такой анзац в ур. (7.31), находим в пределе $L \rightarrow \infty$,

$$P_q \sim \int d\alpha L^{f(\alpha) - \alpha q} \sim L^{-\tau_q}, \quad \tau_q = q\alpha - f(\alpha), \quad q = f'(\alpha). \quad (7.33)$$

Здесь мы сделали подстановку $u = L^{-\alpha}$ и вычислили интеграл по α методом перевала. Из формул

выше, видно, что функция $f(\alpha)$ имеет следующий смысл. Число точек, в которых $|\phi(\mathbf{r})|^2 \sim L^{-\alpha}$, имеет объем $L^{f(\alpha)}$. Функция $f(\alpha)$ называется спектром сингулярности (singularity spectrum) и связана преобразованием Лежандра с τ_q . Функция $f(\alpha)$ определена при $\alpha \geq 0$, причем $f''(\alpha) \leq 0$ как следует из сходимости интеграла в правой части ур. (7.33). Существует точка α_0 ($q = 0$), в которой $f(\alpha)$ достигает максимума $f(\alpha_0) = d$. Также есть точка α_1 ($q = 1$), в которой $f(\alpha_1) = \alpha_1$ и $f'(\alpha_1) = 1$.

Типичный вид функции $f(\alpha)$ представлен на Рис. ???. Отметим, что существуют два значения α_{\pm} , в которых $f(\alpha)$ обращается в нуль. Отметим, что так как для таких значений α объем соответствующих состояний стремиться к нулю в термодинамическом пределе, среднее от моментов волновых функций с соответствующими q теряет смысл [74]. Фактически есть только одно редкое состояние, которое и определяет соответствующий момент волновой функции. В этом случае говорить о среднем значении становится бессмысленно.

Функция $f(\alpha)$ имеет нетривиальное свойство симметрии [75]

$$f(2d - \alpha) = f(\alpha) + d - \alpha \quad \Leftrightarrow \quad \Delta_q = \Delta_{1-q}. \quad (7.34)$$

С учетом соотношения (7.34), вблизи максимума, расположенного в точке α_0 , функцию $f(\alpha)$ можно аппроксимировать параболой

$$f(\alpha) = d - \frac{(\alpha - \alpha_0)^2}{4(\alpha_0 - d)}, \quad \tau_q = d(q - 1) - (\alpha_0 - d)q(q - 1) \quad (7.35)$$

Заметим, что аномальное поведение с размером волновых функций в данной точке пространства означает наличие пространственных корреляций. В частности можно вывести следующее общее соотношение

$$L^{d(q_1+q_2)} \langle |\phi_a(\mathbf{r}_1)|^{2q_1} |\phi_a(\mathbf{r}_2)|^{2q_2} \rangle \sim L^{-\Delta_{q_1} - \Delta_{q_2}} \left(\frac{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}{L} \right)^{\Delta_{q_1+q_2} - \Delta_{q_1} - \Delta_{q_2}}. \quad (7.36)$$

Изучение скейлинга усредненных моментов волновых функций удобно при численном анализе. Для аналитических расчетов более удобно изучать средние моменты локальной плотности состояний,

$$\rho(\mathcal{E}, \mathbf{r}) = \sum_a |\phi_a(\mathbf{r})|^2 \delta(\mathcal{E} - E_a). \quad (7.37)$$

Для того, чтобы отличать локальную плотность состояний от глобальной плотности состояний мы используем другое обозначение. Отметим, что средняя локальная плотность состояний совпадает со средней плотностью состояний, введенной ранее, $\rho_0 = \langle \rho(\mathcal{E}, \mathbf{r}) \rangle \equiv D(\mathcal{E})$. Найдем скейлинг квадрата плотности состояний с размером системы:

$$\begin{aligned} \langle \rho^2(\mathcal{E}, \mathbf{r}) \rangle &= \sum_{a,b} \langle |\phi_a(\mathbf{r})|^2 |\phi_b(\mathbf{r})|^2 \delta(\mathcal{E} - E_a) \delta(\mathcal{E} - E_b) \rangle = \frac{1}{\pi\gamma} \sum_a \langle |\phi_a(\mathbf{r})|^4 \delta(\mathcal{E} - E_a) \rangle \\ &+ \frac{1}{\pi} \sum_{a \neq b} \langle |\phi_a(\mathbf{r})|^2 |\phi_b(\mathbf{r})|^2 \frac{\gamma}{\gamma^2 + (E_b - E_a)^2} \delta(\mathcal{E} - E_a) \rangle = \frac{L^{-\tau_2} D(\mathcal{E})}{\pi\gamma} \\ &+ \frac{\gamma}{\Delta^2} \sum_{a \neq b} \langle |\phi_a(\mathbf{r})|^2 |\phi_b(\mathbf{r})|^2 \delta(\mathcal{E} - E_a) \rangle. \end{aligned} \quad (7.38)$$

Здесь мы ввели среднее расстояние между уровнями $\Delta \simeq 1/(L^d D(\mathcal{E}))$, аппроксимировали δ -функцию лоренцианом с шириной $\gamma \sim 1/(L^d D(\mathcal{E}))$ и использовали ур. (7.29), предполагая, что энергия \mathcal{E} находится близко к \mathcal{E}_c так, что $L \ll \xi$. Предполагая выполнение условия $\gamma \ll \Delta$, можно пренебречь последним членом с суммой по разным состояниям. Тогда получаем,

$$\langle \rho^2(\mathcal{E}, \mathbf{r}) \rangle \sim \rho_0^2 L^{-\Delta_2}. \quad (7.39)$$

Аналогичное соотношение получается для q -ого момента локальной плотности состояний

$$\langle \rho^q(\mathcal{E}, \mathbf{r}) \rangle \sim \rho_0^q L^{-\Delta_q} \sim L^{-x(q)}, \quad x(q) = qx(1) + \Delta_q. \quad (7.40)$$

Здесь мы ввели индекс $x(1)$, который определяет скейлинг средней локальной плотности состояний $\rho_0 \sim L^{-x(1)}$. Отметим, что в рассматриваемом случае электронов в перпендикулярном магнитном поле (класс А), средняя плотность состояний тривиальна, $x(1) = 0$.

Обсудим теперь, как критические индексы $x(q)$ можно вычислять с помощью подхода нелинейной сигма модели. Для простоты будем рассматривать второй момент локальной плотности состояний. Запишем его в следующем виде

$$\langle \rho^2(\mathcal{E}, \mathbf{r}) \rangle \sim \left\langle \int D\bar{\psi} D\psi \sum_{p,p'=\pm} pp' \psi_\alpha^p(\mathbf{r}) \bar{\psi}_\alpha^p(\mathbf{r}) \psi_\beta^{p'}(\mathbf{r}) \bar{\psi}_\beta^{p'}(\mathbf{r}) e^{-i \int d\mathbf{r}' \bar{\psi}(\mathcal{E} - H + i\eta\Lambda)\psi} \right\rangle, \quad (7.41)$$

где $\alpha \neq \beta$ два фиксированных, но не равных, репличных индекса. Отметим, что разные реплики – это типичная ситуация при изучении мезоскопических флуктуаций. Для удобства, мы не будем следить за правильным коэффициентом пропорциональности, а восстановим его в конце. Воспользуемся тем, что в нелинейной сигма модели матрица $Q_{\alpha\beta}^{pp'} \sim \langle \bar{\psi}_\alpha^p \psi_\beta^{p'} \rangle$. Тогда не производя долгих вычислений можно получить, что

$$\langle \rho^2(\mathcal{E}, \mathbf{r}) \rangle \sim \sum_{p,p'=\pm} pp' \langle Q_{\alpha\alpha}^{pp} Q_{\beta\beta}^{p'p'} - Q_{\alpha\beta}^{pp'} Q_{\beta\alpha}^{p'p} \rangle \quad (7.42)$$

Так как фиксированные реплики $\alpha \neq \beta$ ничем не выделены, то от их выбора ответ не зависит. Поэтому удобно произвести усреднение выражения (7.42) по унитарным вращениям в репличном пространстве U , действующим независимо в RA пространстве на каждый из блоков, т.е. $U_{\alpha\beta}^{pp'} = \delta^{pp'} U_{(p);\alpha\beta}$. Заменим Q на $U^{-1}QU$ и усредним по U . Тогда получим

$$\begin{aligned} \sum_{\gamma,\gamma',\delta,\delta'} \sum_{p,p'=\pm} pp' \langle U_{(p),\alpha\gamma}^{-1} Q_{\gamma\gamma'}^{pp} U_{(p),\gamma'\beta} U_{(p'),\beta\delta}^{-1} Q_{\delta\delta'}^{p'p'} U_{(p'),\delta'\alpha} \rangle_U &= \frac{1}{2} [V_1^2 + V_{1,1}] (\text{tr } \Lambda Q)^2 + \frac{V_2}{2} \text{tr}[Q^2 + (\Lambda Q)^2], \\ \sum_{\gamma,\gamma',\delta,\delta'} \sum_{p,p'=\pm} pp' \langle U_{(p),\alpha\gamma}^{-1} Q_{\gamma\gamma'}^{pp'} U_{(p'),\gamma'\beta} U_{(p'),\beta\delta}^{-1} Q_{\delta\delta'}^{p'p} U_{(p),\delta'\alpha} \rangle_U &= \frac{1}{2} [V_1^2 + V_{1,1}] \text{tr}(\Lambda Q)^2 + \frac{V_2}{2} (\text{tr } \Lambda Q)^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} [V_{1,1} - V_1^2] \text{tr } Q^2. \end{aligned} \quad (7.43)$$

Здесь мы использовали следующие соотношения [76, 77]

$$\langle U_{(p),\alpha\gamma}^{-1} U_{(p),\gamma'\beta} \rangle_U = V_1 \delta_{\alpha\beta} \delta_{\gamma\gamma'}, \quad V_1 = \frac{1}{n}, \quad (7.44)$$

и

$$\begin{aligned} \langle U_{(p),\alpha_1\gamma_1}^{-1} U_{(p),\gamma_1\beta_1} U_{(p),\alpha_2\gamma_2}^{-1} U_{(p),\gamma_2\beta_2} \rangle_U &= V_{1,1} [\delta_{\alpha_1\beta_1} \delta_{\gamma_1\gamma_1'} \delta_{\alpha_2\beta_2} \delta_{\gamma_2\gamma_2'} + \delta_{\alpha_1\beta_2} \delta_{\gamma_1\gamma_2'} \delta_{\alpha_2\beta_1} \delta_{\gamma_2\gamma_1'}] \\ &\quad + V_2 [\delta_{\alpha_1\beta_2} \delta_{\gamma_1\gamma_1'} \delta_{\beta_1\alpha_2} \delta_{\gamma_2\gamma_2'} + \delta_{\alpha_1\beta_1} \delta_{\gamma_1'\gamma_2} \delta_{\alpha_2\beta_2} \delta_{\gamma_2'\gamma_1}] \\ V_{1,1} &= \frac{1}{n^2 - 1}, \quad V_2 = -\frac{1}{n(n^2 - 1)}. \end{aligned} \quad (7.45)$$

В итоге получаем следующее выражение для среднего второго момента плотности состояний

$$\langle \rho^2(\mathcal{E}, \mathbf{r}) \rangle = \rho_0^2 \langle K_{(2)}[Q] \rangle = \frac{\rho_0^2}{8n^2(n-1)} \left[(2n-1) \left\langle (\text{tr } \Lambda Q)^2 - \text{tr}(\Lambda Q)^2 \right\rangle - \text{tr } 1 \right]. \quad (7.46)$$

Отметим, здесь мы восстановили знак равенства, исходя из условия, чтобы при $Q = \Lambda$, усредненный бо беспорядку второй момент локальной плотности состояний совпадал с квадратом средней

плотности состояний ².

Проверим теперь как оператор в правой части равенства (7.46) преобразуется под действием ренормгруппы. Для этого используем метод фонового поля для матричных теорий. Запишем матрицу Q в виде

$$Q = T_0 Q_f T_0^{-1}, \quad Q_f = W + \Lambda \sqrt{1 - W^2}. \quad (7.47)$$

Здесь Q_f представляет собой матричное поле, которое быстро меняется в пространстве (т.е. имеет компоненты импульса большие некоторого масштаба $1/\lambda$), а $Q_0 = T_0^{-1} \Lambda T_0$ меняется в пространстве медленно. Разлагая Q_f до второго порядка по W и используя ур. (6.5), находим

$$\begin{aligned} \langle \text{tr} \Lambda Q \Lambda Q \rangle &\simeq \text{tr} \Lambda Q_0 \Lambda Q_0 - \text{tr} \langle W^2 \rangle Q_0 \Lambda Q_0 + \langle \text{tr} W Q_0 W Q_0 \rangle + \dots \\ &= \left[1 - \frac{4n}{\bar{\sigma}_{xx}} \int \frac{d^2 \mathbf{p}}{(2\pi)^2} \mathcal{D}(p) \right] \text{tr} \Lambda Q_0 \Lambda Q_0 - \frac{2}{\bar{\sigma}_{xx}} \int \frac{d^2 \mathbf{p}}{(2\pi)^2} \mathcal{D}(p) (\text{tr} \Lambda Q_0)^2 \end{aligned} \quad (7.48)$$

и

$$\begin{aligned} \langle (\text{tr} \Lambda Q)^2 \rangle &\simeq (\text{tr} \Lambda Q_0)^2 - \text{tr} \langle W^2 \rangle Q_0 \Lambda \text{tr} \Lambda Q_0 + \langle \text{tr} W Q_0 \text{tr} W Q_0 \rangle + \dots \\ &= \left[1 - \frac{4n}{\bar{\sigma}_{xx}} \int \frac{d^2 \mathbf{p}}{(2\pi)^2} \mathcal{D}(p) \right] (\text{tr} \Lambda Q_0)^2 - \frac{2}{\bar{\sigma}_{xx}} \int \frac{d^2 \mathbf{p}}{(2\pi)^2} \mathcal{D}(p) \text{tr} [(\Lambda Q_0)^2 - Q_0^2]. \end{aligned} \quad (7.49)$$

Отметим, что в интегралах по импульсу подразумевается, что они берутся по импульсу, удовлетворяющим условию $p > 1/\lambda$. Заметим, что операторы $\text{tr}(\Lambda Q)^2$ и $(\text{tr} \Lambda Q)^2$ перемешиваются в процессе перенормировки.

Подставляя найденные выше формулы в ур. (7.46), мы находим, что оператор $K_{(2)}$ переходит при ренормгрупповом преобразовании сам в себя:

$$K_{(2)}[Q] \rightarrow \left[1 - \frac{(2n-1)}{\pi \bar{\sigma}_{xx}} \ln \frac{\lambda}{l} \right] K_{(2)}[Q_0]. \quad (7.50)$$

Операторы, которые переходят сами в себя в процессе перенормировки, называются собственными относительно ренормгруппового преобразования. Соотношение (7.50) позволяет записать следующий результат

$$\langle K_{(2)}[Q] \rangle = M_{(2)} K_{(2)}[\Lambda], \quad \langle \rho^2(\mathcal{E}, \mathbf{r}) \rangle = \rho_0^2 M_{(2)}. \quad (7.51)$$

где $M_{(2)}$ удовлетворяет следующему однопетлевому ренормгрупповому уравнению

$$\frac{d \ln M_{(2)}}{d \ln \lambda} = -\gamma_{(2)} = -\frac{(2n-1)}{\pi \sigma_{xx}}. \quad (7.52)$$

Заметим, что можно определить еще один собственный оператор на основе линейной комбинации операторов $\text{tr}(\Lambda Q)^2$ и $(\text{tr} \Lambda Q)^2$:

$$\begin{aligned} K_{(1,1)}[Q] &= \frac{1}{8n^2(n+1)} \left\{ (2n+1) \left[(\text{tr} \Lambda Q)^2 + \text{tr}(\Lambda Q)^2 \right] - \text{tr} 1 \right\}, \\ K_{(1,1)}[Q] &\rightarrow \left[1 - \frac{(2n+1)}{\pi \bar{\sigma}_{xx}} \ln \frac{\lambda}{l} \right] K_{(1,1)}[Q_0], \quad \langle K_{(1,1)}[Q] \rangle = M_{(1,1)} K_{(1,1)}[\Lambda]. \end{aligned} \quad (7.53)$$

Величина $M_{(1,1)}$ подчиняется следующему уравнению ренормгруппы в однопетлевом приближении

$$\frac{d \ln M_{(1,1)}}{d \ln \lambda} = -\gamma_{(1,1)} = -\frac{(2n+1)}{\pi \sigma_{xx}}. \quad (7.54)$$

Для среднего момента произвольной степени плотности состояний в репличном пределе $n \rightarrow 0$

²Отметим, что есть мезоскопические флуктуации локальной плотности состояний на баллистических масштабах [?], но мы их для простоты в ρ_0 не учитываем.

можно получить, что [78, 79, 80]

$$\frac{d \ln M_{(q)}}{d \ln \lambda} = -\gamma_{(q)} = \frac{q(q-1)}{2\pi\sigma_{xx}} + \frac{3q(q-1)}{16\pi^3\sigma_{xx}^3} + \dots \quad (7.55)$$

Отметим, что аномальные размерности Δ_q совпадают со значениями $\gamma_{(q)}$ в критической точке. Симметрия $\gamma_{(q)}$ при замене q на $1-q$ отвечает общей симметрии (7.34).

Рассмотрим теперь вычисление инстантонной поправки к среднему второму моменту локальной плотности состояний. Представим инстантонное решение (6.42) в виде

$$Q_{\text{inst}} = \Lambda + U^{-1}\rho U, \quad (7.56)$$

где блок-диагональная матрица U учитывает нулевые моды инстантона, связанные с вращением в репличном пространстве. Подставляя Q_{inst} в выражение (7.46), находим

$$\begin{aligned} K_{(2)}[Q_{\text{inst}}] - K_{(2)}[\Lambda] &= \frac{2n-1}{8n^2(n-1)} \left[2(2n-1) \text{tr} \Lambda \rho + (\text{tr} \Lambda \rho)^2 - \text{tr}(\Lambda \rho)^2 \right] \\ &= -\frac{2(2n-1)}{n^2} \frac{\lambda^2}{|z-z_0|^2 + \lambda^2}. \end{aligned} \quad (7.57)$$

Используя результат (6.89), находим в репличном пределе $n \rightarrow 0$

$$\langle K_{(2)}[Q] - K_{(2)}[\Lambda] \rangle_{\text{inst}} = 2D_0 \int \frac{d\lambda}{\lambda} \int d\mathbf{r}_0 \frac{1}{|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}|^2 + \lambda^2} e^{-2\pi\sigma_{xx}(\lambda)} \cos \theta. \quad (7.58)$$

Обратим внимание на расходящийся логарифмически интеграл по r_0 . Для того, чтобы разобраться с этой логарифмической расходимостью необходимо учесть в предэкспоненте флуктуации около инстантона. Их учет приводит к следующему ответу

$$\begin{aligned} \langle K_{(2)}[Q] - K_{(2)}[\Lambda] \rangle_{\text{inst}} &= D_0 \int \frac{d\lambda}{\lambda} \int d\mathbf{r}_0 \frac{\mu(r_0)}{\lambda} M_{(2)}(\mu(r_0)) e^{-2\pi\sigma_{xx}(\lambda)} \cos \theta \\ &= -2\pi D_0 \int \frac{d\lambda}{\lambda} \int_0^{\mu(0)} \frac{d\mu(r_0)}{\mu(r_0)} M_{(2)}(\lambda) [\mu(r_0)/\mu(0)]^{(2n-1)/(\pi\bar{\sigma}_{xx})} e^{-2\pi\sigma_{xx}(\lambda)} \cos \theta \\ &= 2\pi^2 D_0 \int \frac{d\lambda}{\lambda} \sigma_{xx}(\lambda) e^{-2\pi\sigma_{xx}(\lambda)} \cos \theta. \end{aligned} \quad (7.59)$$

Отметим, что в промежуточном вычислении мы восстановили зависимость однопетлевого вклада в аномальную размерность $M_{(2)}$, чтобы сделать интеграл по $\mu(r_0)$ сходящимся при $r_0 \rightarrow \infty$. Заметим, что эту же проблему можно решить и другим способом [61].

Аналогичные вычисления можно проделать и для произвольного момента $q \geq 2$ локальной плотности состояний, так что

$$\frac{d \ln M_{(q)}}{d \ln \lambda} = -\gamma_{(q)} = \frac{q(q-1)}{2\pi\sigma_{xx}} + \frac{3q(q-1)}{16\pi^3\sigma_{xx}^3} + \frac{8\pi}{e} \sigma_{xx} e^{-2\pi\sigma_{xx}} \cos \theta. \quad (7.60)$$

Таким образом, инстантонные конфигурации вносят вклад и в аномальные размерности собственных операторов.

Задачи:

7.2.1 Доказать соотношение (7.34).

7.2.2 Найти поведение с размером системы $L \rightarrow \infty$ величины

$$\mathcal{N} = \frac{1}{D(\mathcal{E})} \int d\mathbf{r} \sum_a \langle \min\{L^d \phi_a^2(\mathbf{r}), 1\} \delta(\mathcal{E} - E_a) \rangle.$$

Выразить ответ через функцию $f(\alpha)$.

7.2.3 Пользуясь соотношением симметрии (7.34), выразить α_1 через α_0 .

7.2.4 Доказать следующее соотношение $\alpha_1 < d < \alpha_0$.

7.2.5 Используя скейлинговые аргументы доказать справедливость соотношения (7.36).

7.2.6 Записать выражение для среднего по беспорядку,

$$\langle [\text{Im } G^R(\mathcal{E}, \mathbf{r}, \mathbf{r}) \text{Im } G^R(\mathcal{E}, \mathbf{r}', \mathbf{r}') - \text{Im } G^R(\mathcal{E}, \mathbf{r}, \mathbf{r}') \text{Im } G^R(\mathcal{E}, \mathbf{r}', \mathbf{r})] \rangle,$$

в диффузионном режиме через Q – матрицы. Считать выполненным условие $\lambda_F \ll |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \ll l$, где l – длина свободного пробега. Представить соответствующий оператор в инвариантном виде относительно $U(n) \times U(n)$ вращений. Проверить является ли полученный оператор собственным относительно ренормгруппы.

7.2.7 Записать выражение для среднего по беспорядку,

$$\langle [3\rho(\mathcal{E}, \mathbf{r})\rho(\mathcal{E}, \mathbf{r}') - \rho(\mathcal{E}, \mathbf{r})\rho(\mathcal{E}, \mathbf{r})] \rangle,$$

в диффузионном режиме через Q – матрицы. Считать выполненным условие $\lambda_F \ll |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \ll l$, где l – длина свободного пробега. Представить соответствующий оператор в инвариантном виде относительно $U(n) \times U(n)$ вращений. Проверить является ли полученный оператор собственным относительно ренормгруппы.

7.2.8 Получить формулу аналогичную (7.59) для оператора $K_{(1,1)}$.

7.3 Обобщенная мультифрактальность и время сбоя фазы

Глава 8

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Целочисленный квантовый эффект Холла – физическое явление, которое наблюдается в двумерном электронном газе в присутствии перпендикулярного магнитного поля при низких температурах. Это явление заключается в целочисленном квантовании значений холловской проводимости σ_{xy} в единицах e^2/h при изменении приложенного перпендикулярного магнитного поля или электронной концентрации. Как было объяснено в разделе 1, целочисленный квантовый эффект Холла принципиально отличается от квантовых осцилляций проводимости Шубникова – де Гааза в магнитном поле. В части II пособия будет показано, что при нулевой температуре целочисленное квантование холловской проводимости может наблюдаться даже в ситуации, когда уровни Ландау настолько уширены случайным потенциалом, что плотность состояний можно считать функцией, независимой от энергии электрона. В таких условиях амплитуда квантовых осцилляций проводимости Шубникова – де Гааза экспоненциально подавлена в силу большого значения температуры Дингла по сравнению с циклотронной энергией $\hbar\omega_c$.

Существенную роль в понимании целочисленного квантового эффекта Холла играют краевые состояния (скачущие орбиты электронов), которые образуются вблизи границы двумерного электронного газа. При нулевой температуре оказывается, что весь ток переносится краевыми состояниями, число которых совпадает с числом заполненных уровней Ландау вдали от границы. Как было показано в разделе 2, в случае резкой границы краевые состояния локализованы в направлении, перпендикулярном границе в тех точках, где электронная концентрация испытывает скачок на $1/(2\pi l_H^2)$. Картина качественно меняется в случае плавной границы двумерного электронного газа при учете электростатического экранирования (см. разд. 3). Изменение электронной концентрации на величину $1/(2\pi l_H^2)$ происходит в области конечной ширины в направлении, перпендикулярном границе. Несмотря на то что уже нельзя сказать, где локализовано краевое состояние, как показывает эксперимент, описание электронного транспорта с помощью модели одномерных краевых состояний работает удовлетворительно.

В реальном эксперименте на движение двумерного электрона во внешнем магнитном поле оказывают влияние примеси. Если количество примесей настолько мало и их взаимным влиянием на движение электрона можно пренебречь, то первый эффект, к которому приводит наличие примесей, – это появление состояний, отщепленных от уровня Ландау и локализованных вблизи каждой примеси. На первый взгляд, появление локализованных на примесях состояний должно уменьшать холловский ток, т.е. разрушать целочисленное квантование холловской проводимости. Однако, как показано в разделе 4, это не так: холловский ток не меняется.

Другой предельный случай – плавный случайный потенциал, т.е. потенциал, меняющийся на масштабе много большем магнитной длины, был рассмотрен в разделе 5. Движение двумерного электрона в таком плавном потенциале оказывается почти всюду квазиклассическим: быстрое циклотронное вращение вокруг центра орбиты, который смещается в одном направлении по эквипотенциальным линиям потенциала, соответствующим энергии электрона. Тот факт, что движение электрона описывается уравнением Шредингера, приводит к возможности туннелирования электрона с одной эквипотенциальной линии на другую эквипотенциальную линию той же энергии в

области, где обе линии подходят к друг другу на расстояние порядка магнитной длины. Наличие конечной продольной проводимости при нуле температуры возможно, если при данной энергии электрон может пройти от одной границы двумерного слоя до другой. Оказывается, что такое возможно строго при одном значении энергии. Движение двумерного электрона в магнитном поле и в плавном случайном потенциале может быть исследовано численно в модели Чалкера–Коддингтона, в которой случайная сетка эквипотенциальных линий заменена на регулярную, но при движении по ребрам сетки электрон приобретает случайную фазу.

Технически наиболее удобный для вычислений тип случайного потенциала – это гауссовый δ -коррелированный случайный потенциал. Простейшее приближение, в котором могут быть вычислены плотность состояний, продольная и холловская проводимость, – это самосогласованное борновское приближение (см. разд. 6). Оно оправдано, когда при нулевой температуре заполнено $N \gg 1$ уровней Ландау и число δ -центров велико по сравнению с максимально возможным числом состояний на уровне Ландау. Однако самосогласованное борновское приближение приводит к плотности состояний, в которой уровни Ландау уширены, но отделены друг от друга целью порядка циклотронной энергии. Это приближение приводит также к обратно пропорциональной зависимости холловской проводимости от магнитного поля при фиксированной электронной концентрации. Таким образом, самосогласованного борновского приближения совершенно недостаточно для объяснения целочисленного квантования холловской проводимости. Выход за рамки самосогласованного борновского приближения может быть сделан в случае настолько сильного магнитного поля, что при нулевой температуре заполнен только самый нижний уровень Ландау и то частично (см. разд. 7). В этом случае плотность состояний для нижнего уровня Ландау нигде не обращается в нуль, а имеет экспоненциально малый хвост, в котором находится около 2% от максимально возможного числа состояний на уровне Ландау. Как будет показано в части II, такое поведение плотности состояний справедливо для уровня Ландау с произвольным номером. Несмотря на конечную плотность состояний, статические продольная и холловская проводимости обращаются в нуль для состояний, лежащих в хвосте самого нижнего уровня Ландау. Это означает, что состояния в хвосте плотности состояний локализованы. Динамические продольная и холловская проводимости отличны от нуля и имеют вид типичный для диэлектрика. В пределе малых частот постоянная Холла сохраняет конечное значение, что оказывается неожиданным с точки зрения обычного диэлектрического состояния. Этот факт специфичен для состояний в хвосте плотности состояний для самого нижнего уровня Ландау.

В части II для движения двумерного электрона в магнитном поле и в гауссовом δ -коррелированном случайном потенциале будет изложена последовательная теория, которая обобщает скейлинговую теорию локализации Андерсона на случай присутствия внешнего магнитного поля. В рамках этой теории будет рассмотрен ряд проблем и задач, связанных с целочисленным квантовым эффектом Холла.

Литература

- [1] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Квантовая механика. М.: Наука, 1974.
- [2] *Абрикосов А.А., Горьков Л.П., Дзялошинский И.Е.* Методы квантовой теории поля в статистической физике. М.: Физматгиз, 1962.
- [3] *Березин Ф.А.* Введение в алгебру и анализ с антикоммутирующими переменными. М.: МГУ, 1983.
- [4] *Фейнман Р., Хибс А.* Квантовая механика и интегралы по траекториям. М.: Мир, 1968.
- [5] *Абрикосов А.А.* Основы теории металлов. М.: Наука, 1987.
- [6] *Klitzing K. von, Dorda G., Pepper M.* New method for high-accuracy determination of the fine-structure constant based on quantized Hall resistance // *Phys. Rev. Lett.*, 1980. Vol. 45. P. 494.
- [7] *Tsui D.C., Gossard A.C.* Resistance standard using quantization of the Hall resistance of GaAs-Al_xGa_{1-x}As heterostructures // *Appl. Phys. Lett.*, 1981. Vol. 38. P. 550.
- [8] *A.K. Geim, K.S. Novoselov* The rise of graphene // *Nature Mater.*, 2007. Vol. 6. P. 183.
- [9] *Ando T., Fowler A.B., Stern F.* Electronic properties of two-dimensional systems // *Rev. Mod. Phys.*, 1982. Vol. 54. P. 437.
- [10] Квантовый эффект Холла, *под ред. Прейндж Р., Гурвин С.* М.: Мир, 1989.
- [11] *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. М.: Наука, 1974. Т. 2. С. 122.
- [12] *Halperin B.* Quantized Hall conductance, current-carrying edge states, and the existence of extended states in a two-dimensional disordered potential // *Phys. Rev. B*, 1982. Vol. 25. P. 2185.
- [13] *Büttiker M.* Absence of backscattering in the quantum Hall effect in multiprobe conductors // *Phys. Rev. B*, 1988. Vol. 38. P. 9375.
- [14] *Laughlin R.* Quantized Hall conductivity in two dimensions // *Phys. Rev. B*, 1981. Vol. 23. P. 5632.
- [15] *Y. Aharonov, D. Bohm*, Significance of Electromagnetic Potentials in the Quantum Theory // *Phys. Rev.*, 1959. Vol. 115, P. 485.
- [16] *N. Byers, C. N. Yang*, Theoretical considerations concerning quantized magnetic flux in superconducting cylinders // *Phys. Rev. Lett.*, 1961. Vol. 7, P. 46.
- [17] *Chklovskii D.B., Shklovskii B.I., Glazman L.I.* Electrostatics of edge channels // *Phys. Rev. B*, 1992. Vol. 46, P. 4026.
- [18] *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Методы теории функций комплексного переменного, М.: Наука, 1973. С. 304.
- [19] *I. L. Aleiner, L. I. Glazman* Novel edge excitations of two-dimensional electron liquid in a magnetic field // *Phys. Rev. Lett.*, 1994 Vol. 72, P. 2935.

- [20] *R. Cohen, M. Goldstein* Hall and dissipative viscosity effects on edge magnetoplasmons // Phys. Rev. B, 2018, Vol. 98, P. 235103.
- [21] *Бычков Ю.А.* Квантовая теория электропроводности металлов в сильных магнитных полях // ЖЭТФ, 1960. Т. 39. С. 689.
- [22] *Баскин Э.М., Магрилл Л.И., Энтин М.В.* Двумерная электрон-примесная система в сильном магнитном поле // ЖЭТФ, 1978. Т. 75. С. 723.
- [23] *Wegner F.* Exact density of states for lowest Landau level in white noise potential superfield representation for interacting systems // Z. Phys. B 1983. Vol. 51. P. 279.
- [24] *Brezin E., Gross D.J., Itzykson C.* Density of states in the presence of a strong magnetic field and random impurities // Nucl. Phys. B 1984. Vol. 235. P. 24.
- [25] *Burmistrov I.S., Skvortsov M.A.* On the effect of far impurities on the density of states of two-dimensional electron gas in a strong magnetic field // Письма в ЖЭТФ, 2003. Т. 78. С. 188.
- [26] *Prange R.E.* Quantized Hall resistance and the measurement of the fine-structure constant // Phys. Rev. B, 1981. Vol. 23. P. 4802.
- [27] *Tsukada M.* On the tail states of the Landau subbands in MOS structures under strong magnetic field // J. Phys. Soc. Jpn., 1976. Vol. 41. P. 1466;
Iordansky S.V. On the conductivity of two-dimensional electron in a strong magnetic field // Solid State Commun., 1982. Vol. 43. P. 1;
Kazarinov R.F., Luryi S. Quantum percolation and quantization of Hall resistance in two-dimensional electron gas // Phys. Rev. B, 1982. Vol. 25. P. 7626;
Prange R.E., Joynt R. Conduction in a strong field in two dimensions: The quantum Hall effect // Phys. Rev. B, 1982. Vol. 25. P. 2943.
- [28] *Trugman S.A.* Localization, percolation, and the quantum Hall effect // Phys. Rev. B, 1983. Vol. 27. P. 7539.
- [29] *Huckestein B.* Scaling Theory of The Integer Quantum Hall Effect // Rev. Mod. Phys., 1995. Vol. 67. P. 357.
- [30] *Stauffer D.* Scaling theory of percolation clusters // Phys. Rep., 1979. Vol. 54. P. 2.
- [31] *Nijs M.P.M. den* A relation between the temperature exponents of the eight-vertex and q-state Potts model // J. Phys. A, 1979. Vol. 12. P. 1857;
Black J.L., Emery V.J. Critical properties of two-dimensional models // Phys. Rev. B, 1981. Vol. 23. P. 429.
- [32] *Fertig H.A.* Semiclassical description of a two-dimensional electron in a strong magnetic field and an external potential // Phys. Rev. B, 1988. Vol. 38. P. 996.
- [33] *Мильников Г.В., Соколов И.М.* О квазиклассической локализации в магнитном поле // Письма в ЖЭТФ, 1988. Т. 48. С. 494.
- [34] *Chalker J.T., Coddington P.D.* Percolation, quantum tunneling and the integer quantum Hall effect // J. Phys. C: Solid State Phys., 1988. Vol. 21. P. 2665.
- [35] *В. И. Оселедец* Мультипликативная эргодическая теорема. Характеристические показатели Ляпунова // Труды ММО, 1968. Т. 19. С. 197.
- [36] *K. Slevin, T. Ohtsuki* Critical exponent for the quantum Hall transition // Phys. Rev. B 2009, Vol. 80, P. 041304(R).

- [37] *Ando T., Uemura Y.* Theory of quantum transport in a two-dimensional electron system under magnetic fields. I. Characteristics of level broadening and transport under strong fields // J. Phys. Soc. Japan, 1974. Vol. 36. P. 959.
Ando T. Theory of quantum transport in a two-dimensional electron system under magnetic fields. II. Single site approximation under strong fields // J. Phys. Soc. Japan, 1974. Vol. 36. P. 1521.
Ando T. Theory of quantum transport in a two-dimensional electron system under magnetic fields. III. Many-site approximation // J. Phys. Soc. Japan, 1974. Vol. 37. P. 622.
Ando T. Theory of quantum transport in a two-dimensional electron system under magnetic fields. IV. Oscillatory conductivity // J. Phys. Soc. Japan, 1974. Vol. 37. P. 1233.
- [38] *M. E. Raikh, T. V. Shahbazyan,* High Landau levels in a smooth random potential for two-dimensional electrons // Phys. Rev. B 1993. Vol. 47. P. 1522.
- [39] *B. Laikhtman, E. L. Altshuler* Quasiclassical Theory of Shubnikov-de Haas Effect in 2D Electron Gas // Ann. Phys. (N.Y.) 1994. Vol. 232. P. 332.
- [40] *Градиштейн И.С., Рыжук И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1963. С. 1051.
- [41] *Smrčka L., Strěda P.* Transport coefficients in strong magnetic field // J. Phys. C: Solid State Phys., 1977. Vol. 10. P. 2153.
- [42] *Ando T., Matsumoto Y., Uemura Y.* Theory of Hall effect in a two-dimensional electron system // J. Phys. Soc. Japan, 1975. Vol. 39. P. 279.
- [43] *Иоффе Л.Б., Ларкин А.И.* Флуктуационные уровни и циклотронный резонанс в случайном потенциале // ЖЭТФ, 1981. Т. 81. С. 1048.
- [44] *I. Affleck* Density of states in a uniform magnetic field and a white noise potential // J. Phys. C: Solid State Phys., 1984. Vol. 17. P. 2323.
- [45] *Поляков А.М.* Калибровочные поля и струны: Пер. с англ. - Черноголовка, ИТФ им. Л.Д. Ландау, 1995.
- [46] *F. Wegner* Exact density of states for lowest Landau level in white noise potential: superfield representation for interacting systems // Z. Phys. B, 1983. Vol. 51. P. 279
- [47] *E. Brézin, D. J. Gross, C. Itzykson* Density of states in the presence of a strong magnetic field and random impurities // Nucl. Phys. B, 1984. Vol. 235. P. 24.
- [48] *Viehweger O., Efetov K.B.* Low frequency behavior of kinetic coefficients in localization regimes in strong magnetic fields // Phys. Rev. B 1991. Vol. 44. P. 1168.
- [49] *K. B. Efetov, V.G. Marikhin* Effect of impurities on electron motion in two dimensions in a strong magnetic field // Phys. Rev. B 1989 Vol. 40. P. 12126.
- [50] *И. М. Лифшиц, С. А. Гредескул, Л. А. Пастур* Введение в теорию неупорядоченных систем // М.: Наука, 1982.
- [51] *A. M. M. Pruisken* On Localization in the theory of the Quantized Hall Effect: A two-dimensional realization of the *theta*-vacuum // Nucl. Phys. B 1984 Vol. 235[FS11]. P. 277.
- [52] *A. M. M. Pruisken* Quasiparticle in the theory of integral quantum Hall effect (I) // Nucl. Phys. B 1987 Vol. 285[FS19]. P. 719.
- [53] *A. M. M. Pruisken* Quasiparticle in the theory of integral quantum Hall effect (II) // Nucl. Phys. B 1987 Vol. 290[FS20]. P. 61.

- [54] *D.-H. Lee* Network models of quantum percolation and their field-theory representations // Phys. Rev. B 1994 Vol. 50. P. 10788.
- [55] *M.R. Zirnbauer* Towards a theory of the integer quantum Hall transition: Continuum limit of the Chalker-Coddington model // J. Math. Phys. 1997 Vol. 38 P. 2007.
- [56] *D. A. Ivanov and M. A. Skvortsov* Quantum mechanics with a time-dependent random unitary Hamiltonian: A perturbative study of the nonlinear Keldysh sigma-model // Nucl. Phys. B 2006 Vol. 737. P. 304.
- [57] *D. J. Amit* Field Theory, the Renormalization Group and Critical Phenomena // World Scientific, 1984.
- [58] *S. Hikami* Isomorphism and the β -function of the non-linear σ model in symmetric spaces // Nucl. Phys. B 1983 Vol. 215. P. 555.
- [59] *F. Wegner* Four-loop-order β -function of nonlinear σ -models in symmetric spaces // Nucl. Phys. B 1989 Vol. 316. P. 663.
- [60] *D. Höf and F. Wegner* Calculation of anomalous dimensions for the nonlinear sigma model // Nucl. Phys. B 1986 Vol. 275. P. 561.
- [61] *A.M.M. Pruisken, I.S. Burmistrov*, The instanton vacuum of generalized CP(N-1) models // Ann. Phys. (N.Y.) 2005 Vol. 316. P. 285.
- [62] *I.S. Burmistrov, A.M.M. Pruisken*, Theta-renormalization, electron-electron interactions and super universality in the quantum Hall regime // Ann. Phys. (N.Y.) 2007 Vol. 322. P. 1265.
- [63] *K. Slevin and T. Ohtsuki* Critical exponent for the quantum Hall transition // Phys. Rev. B 2009 Vol. 80 P. 041304(R).
- [64] *H. Obuse, I. A. Gruzberg, and F. Evers* Finite-size effects and irrelevant corrections to scaling near the integer quantum Hall transition // Phys. Rev. Lett. 2012 Vol. 109 P. 206804.
- [65] *R. T. F. van Schaaijk, A. de Visser, S. M. Olsthoorn, H. P. Wei, and A. M. M. Pruisken* Probing the plateau-insulator quantum phase transition in the quantum Hall regime // Phys. Rev. Lett. 2000 Vol. 84 P. 1567.
- [66] *R. B. Laughlin* Levitation of extended-state bands in a strong magnetic field // Phys. Rev. Lett. 1984 Vol. 52 P. 2304.
- [67] *D. E. Khmel'nitskii* Quantum Hall effect and additional oscillations of conductivity in weak magnetic fields // Phys. Lett. A 1984 Vol. 106. P. 182.
- [68] *S.S. Murzin, A.G.M. Jansen, and I. Claus* Topological Oscillations of the Magnetoconductance in Disordered GaAs Layers // Phys. Rev. Lett. 2004 Vol. 92. P. 016802..
- [69] *A.M.M. Pruisken, I.S. Burmistrov* Comment on "Topological oscillations of the magnetoconductance in disordered GaAs layers" // Phys. Rev. Lett. 2005 Vol. 95. P. 189701.
- [70] *D. Harte* Multifractals // London: Chapman & Hall. 2001.
- [71] *C. Castellani and L. Peliti* Multifractal wavefunction at the localisation threshold // J. Phys. A: Math. Gen. 1986. Vol. 19. P. L429.
- [72] *F. Wegner* Inverse participation ratio in $2 + \varepsilon$ dimensions // Z. Phys. B 1979. Vol. 36. P. 209.
- [73] *A. D. Mirlin* Statistics of energy levels and eigenfunctions in disordered systems // Phys. Rep. 2000. Vol. 326. P. 259.

- [74] *F. Evers and A. D. Mirlin* Anderson transitions // Rev. Mod. Phys. 2008. Vol. 80. P. 1355.
- [75] *I. A. Gruzberg, A. D. Mirlin, and M. R. Zirnbauer* Classification and symmetry properties of scaling dimensions at Anderson transitions // Phys. Rev. B 2013. Vol. 87. P. 125144.
- [76] *P.A. Mello* Averages on the unitary group and applications to the problem of disordered conductors // J. Phys. A 1990. Vol. 23. P. 4061.
- [77] *P.W. Brouwer and C.W.J. Beenakker* Diagrammatic method of integration over the unitary group, with applications to quantum transport in mesoscopic systems // J. Math. Phys. 1996. Vol. 36. P. 4904.
- [78] *D. Höf, F. Wegner* ? // Nucl. Phys. B 1986. Vol. 275. P. 561.
- [79] *F. Wegner* ? // Nucl. Phys. B 1987. Vol. 280 P. 193.
- [80] *F. Wegner* ? // Nucl. Phys. B 1987. Vol. 280 P. 210.