



Бурмистров Игорь Сергеевич

**ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ
ЦЕЛОЧИСЛЕННОГО КВАНТОВОГО
ЭФФЕКТА ХОЛЛА**

**Москва
2015**

**МЕЖДИСЦИПЛИНАРНЫЙ ЦЕНТР
ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ**

Бурмистров Игорь Сергеевич

**ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ
ЦЕЛОЧИСЛЕННОГО КВАНТОВОГО
ЭФФЕКТА ХОЛЛА**

Москва 2015

УДК 538.935

ББК 22.31

Б91

Бурмистров И.С. Введение в теорию целочисленного квантового
Б91 эффекта Холла. — Черноголовка. — Редакционно-издательский
отдел ИПХФ РАН. 2015. Рис. 23, библи. назв. 39, 96 с.

В пособии обсуждается физика двумерных электронных систем в перпендикулярном квантующем магнитном поле. Затронутые в пособии вопросы представляют базис, необходимый для понимания явления целочисленного квантового эффекта Холла. Изложение рассчитано на студентов старших курсов и аспирантов, специализирующихся в области теоретической физики. Пособие снабжено задачами для самостоятельного решения.

УДК 538.935

ББК 22.31

ISBN 978-5-9906159-1-5

© Бурмистров И.С., 2015

© МФТИ, 2015

Оглавление

Введение	4
1. Целочисленный квантовый эффект Холла и его экспериментальное наблюдение	8
2. Краевые состояния и калибровочная интерпретация Лафлина	15
3. Электростатика краевых состояний	23
4. Двумерный электронный газ с редкими примесями в магнитном поле	30
5. Плавный случайный потенциал	38
6. Самосогласованное борновское приближение	57
7. Хвосты плотности состояний и динамическая проводимость на нижнем уровне Ландау	75
8. Заключение	88
Список литературы	92

ВВЕДЕНИЕ

Целочисленный и дробный квантовый эффекты Холла — это замечательные и сложные физические явления, которые по своей роли и значению в физике конденсированного состояния можно сравнить с явлениями сверхпроводимости и сверхтекучести. Точное квантование холловской проводимости в единицах e^2/h наблюдается в экспериментах на двумерных электронных системах при низких температурах (0.05—4 К) и в сильных перпендикулярных магнитных полях (1—20 Т). Изначально квантование холловской проводимости явилось полной неожиданностью для экспериментаторов и теоретиков и оказалось противоречащим теоретическому пониманию электронного транспорта не только в металлах, но и в двумерных электронных системах, которое существовало на тот момент времени. Несмотря на свою относительно недавнюю историю, открытие квантового эффекта Холла привело к двум Нобелевским премиям по физике. В 1985 году за открытие целочисленного квантового эффекта Холла Нобелевская премия была вручена К. фон Клитцингу (K. von Klitzing), а в 1998 году за открытие и объяснение дробного квантового эффекта Холла премия была присуждена Х. Стормеру (H. Störmer), Д. Цуи (D. Tsui) и Р. Лафлину (R. Laughlin). Отметим, что кроме огромного фундаментального значения целочисленный квантовый эффект Холла имеет также важное прикладное значение, позволяя измерять отношение мировых констант h/e^2 , а значит и определять постоянную тонкой структуры e^2/hc с высокой точностью.

Несмотря на огромное количество теоретических и экспериментальных работ, исследующих квантовый эффект Холла, и

достигнутый прогресс в его понимании, построение микроскопической теории квантового эффекта Холла в настоящее время далеко от завершения. Имеющийся сейчас набор экспериментальных данных, которые не поняты теоретически, значительно превосходит то, что было предсказано при объяснении эффекта квантования холловской проводимости. Основная причина, по которой законченная теория квантового эффекта Холла не построена, состоит в отсутствии в задаче малого параметра, например, такого, как отношение сверхпроводящей щели к энергии Ферми в теории сверхпроводимости. Последовательная теория квантового эффекта Холла должна учитывать одновременно наличие сильного магнитного поля, случайный потенциал, создаваемый примесями, и электрон-электронное взаимодействие. Кроме того, теория должна адекватно описывать отклик двумерной электронной системы на приложенное внешнее электромагнитное поле.

Традиционно целочисленный и дробный квантовые эффекты Холла изучаются по отдельности. Причина такого искусственного разделения связана с тем, что целочисленный эффект Холла возникает уже в модели невзаимодействующих двумерных электронов в случайном потенциале и в сильном магнитном поле. Для возникновения дробного квантового эффекта Холла необходимо обязательно учитывать влияние электрон-электронного взаимодействия. Подчеркнем, что для объяснения целочисленного квантового эффекта Холла учет электрон-электронного взаимодействия также важен, так как взаимодействие между электронами приводит к ряду качественных изменений по сравнению с моделью без взаимодействия. Наличие электрон-электронного взаимодействия сильно усложняет задачу, и поэтому в пособии мы ограничимся рассмотрением только целочисленного квантового эффекта Холла в рамках модели невзаимодействующих электронов, за одним исключением (см. раздел 3).

В модели невзаимодействующих электронов описание целочисленного квантового эффекта Холла сводится к решению за-

дачи о движении двумерного электрона в случайном потенциале при наличии сильного перпендикулярного магнитного поля. Задача о движении электрона в случайном потенциале, которая называется задачей локализации Андерсона, уже достаточно долго изучалась к моменту открытия целочисленного квантового эффекта Холла. Как известно из общего курса квантовой механики, мелкая потенциальная яма на двумерной плоскости всегда имеет связанное состояние. Таким образом, можно ожидать, что двумерный электрон в случайном потенциале всегда будет локализован и проводимость двумерной электронной системы достаточно больших размеров будет равна нулю. Это утверждение, являющееся следствием скейлинговой теории андерсоновской локализации, и наблюдение целочисленного квантования холловской проводимости, очевидно, противоречат друг другу. Это означает, что магнитное поле оказывает такое сильное влияние на локализацию Андерсона, что она разрушается. Через несколько лет после открытия целочисленного квантового эффекта Холла механизм разрушения локализации Андерсона в сильном магнитном поле и появление делокализованного состояния были поняты. Это позволило построить скейлинговую теорию целочисленного квантового эффекта Холла, которая нашла подтверждение в экспериментальных данных по температурной зависимости тензора проводимости, а также в результатах численного моделирования.

Раздел 1 носит вводный характер. В нем обсуждаются электронные системы, на которых целочисленный квантовый эффект Холла измеряется экспериментально. Также показывается его отличие от квантовых осцилляций проводимости Шубникова – де Гааза в магнитном поле.

В разделе 2 рассматривается задача об уровнях Ландау для двумерного электрона, движение которого ограничено полосой конечной ширины. Показано, что наличие резкой границы приводит к появлению краевых состояний вблизи границы. Также демонстрируется связь между квантованием холловской проводимости и калибровочной инвариантностью.

Раздел 3 посвящен исследованию краевых состояний вблизи границы двумерной области, которую можно считать плавной. Оказывается, что электростатическое экранирование играет принципиальную роль в формировании своеобразной структуры электронной плотности вблизи границы.

В разделе 4 рассматривается задача о движении двумерного электрона во внешнем магнитном поле в присутствии малого количества примесей, взаимным влиянием которых на электрон можно пренебречь. Показано, что примесь отщепляет состояния от уровня Ландау, но не меняет холловский ток.

В разделе 5 изучается поведение двумерного электрона в магнитном поле и плавном случайном потенциале. Подробно объяснена связь этой задачи с задачей о классической перколяции. Учет возможности квантового туннелирования приводит к модели Чалкера-Коддингтона, которая широко используется для численного моделирования целочисленного квантового эффекта Холла.

Раздел 6 посвящен решению задачи о поведении двумерного электрона в магнитном поле и случайном потенциале, создаваемом примесными δ -центрами, в рамках самосогласованного борновского приближения.

В разделе 7 также рассматривается задача о движении двумерного электрона в сильном магнитном поле и случайном потенциале, создаваемом примесными δ -центрами, но в приближении нижнего уровня Ландау.

Изложение материала разделов 1–5 рассчитано на читателя, владеющего стандартным аппаратом квантовой механики, например, на уровне книги [1]. Для понимания материала раздела 6 от читателя потребуются знания основ метода диаграммной техники (см. [2]). В разделе 7 изложение материала построено на использовании грассмановых переменных (см. [3]) и методе функционального интегрирования (см. [4]).

После каждого раздела приведены задачи для самостоятельного решения, более сложные из которых отмечены звездочкой.

1. ЦЕЛОЧИСЛЕННЫЙ КВАНТОВЫЙ ЭФФЕКТ ХОЛЛА И ЕГО ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ НАБЛЮДЕНИЕ

Хорошо известно (см., например, [5]), что тензор проводимости двумерного электронного газа в перпендикулярном внешнем магнитном поле $\mathbf{B}$ дается формулами Друде-Лоренца:

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \frac{e^2 n \tau / m_e}{1 + \omega_c^2 \tau^2}, \quad \sigma_{xy} = -\sigma_{yx} = \omega_c \tau \sigma_{xx}. \quad (1)$$

Здесь $\omega_c = |e|B/m_e c$ – циклотронная частота, e – заряд электрона, c – скорость света, m_e – эффективная масса электрона, τ – транспортное время упругого рассеяния на примесях и n – электронная концентрация. Формулы (1) справедливы при следующих предположениях: а) магнитное поле слабое, $\omega_c \tau \ll 1$; б) транспортное время τ не зависит от энергии; в) изотропный энергетический спектр. Согласно уравнениям (1) тензор сопротивления имеет вид

$$\rho_{xx} = \rho_{yy} = \frac{m_e}{e^2 n \tau}, \quad \rho_{xy} = -\rho_{yx} = \frac{m_e \omega_c}{e^2 n}. \quad (2)$$

Второе из этих уравнений описывает *классический эффект Холла* – холловское сопротивление прямо пропорционально магнитному полю.

В двумерном случае оказывается удобным измерять проводимость в естественных единицах $e^2/h \approx 1/25813\Omega^{-1}$ ($h = 2\pi\hbar$ – постоянная Планка), а сопротивление, соответственно, в единицах $h/e^2 \approx 25813\Omega$. Так, например, формулы (1) можно записать в следующем виде: $\sigma_{ab} = (e^2/h)\bar{\sigma}_{ab}$, где безразмерные величины $\bar{\sigma}_{ab}$ при нулевой температуре $T = 0$ имеют вид:

$$\bar{\sigma}_{xx} = \frac{2E_F \tau / \hbar}{1 + \omega_c^2 \tau^2}, \quad \bar{\sigma}_{xy} = \frac{2E_F \omega_c \tau^2 / \hbar}{1 + \omega_c^2 \tau^2}. \quad (3)$$

Здесь $E_F = \pi \hbar^2 n / m_e$ – энергия Ферми двумерного электронного газа. Выражение холловского сопротивления удобно записать в следующем виде:

$$\rho_{xy} = \frac{h}{e^2} \bar{\rho}_{xy}, \quad \bar{\rho}_{xy} = \frac{1}{\nu}, \quad (4)$$

где безразмерный параметр $\nu = 2\pi l_H^2 n$ называется фактором заполнения, а $l_H = \sqrt{\hbar c / |e| B}$ – магнитной длиной. Заметим, что формула (4) оказывается верной и в области сильных магнитных полей $\omega_c \tau \gg 1$ (см. например, [5]). Удивительно то, что формула (4) не зависит от степени беспорядка в двумерном электронном газе, т.е. от транспортного времени рассеяния. В пределе $1/\tau \rightarrow 0$ классическое рассмотрение движения электрона в магнитном поле перестает работать и необходимо учитывать квантование уровней Ландау. Тогда для фактора заполнения получаем следующий результат

$$\nu = \sum_{n=0}^{\infty} n_F(\hbar\omega_c(n + 1/2) - \mu), \quad (5)$$

где $n_F(E) = [1 + \exp(E/T)]^{-1}$ – функция распределения Ферми-Дирака, а μ – химический потенциал.

В области слабых магнитных полей $\omega_c \tau \ll 1$ квантование уровней Ландау не существенно, и поэтому электронная концентрация, а значит, и фактор заполнения являются плавными функциями химического потенциала. В пределе $1/\tau \rightarrow 0$ и при высоких температурах $T \gg \hbar\omega_c$ фактор заполнения, согласно формуле (5), будет оставаться плавной функцией μ . Однако при нулевой температуре $T = 0$ фактор заполнения станет ступенчатой функцией:

$$\nu = \sum_{n=0}^{\infty} \Theta(\mu - \hbar\omega_c(n + 1/2)), \quad (6)$$

где $\Theta(x)$ – функция Хевисайда. В пределе $1/\tau \rightarrow 0$ при понижении температуры плавная зависимость холловского сопротивления от химического потенциала при фиксированном магнитном поле сменится на ступенчатую, как изображено на рис. 1. Заметим, что при фиксированной электронной плотности, холловское сопротивление даже при нуле температур будет пропорционально магнитному полю.

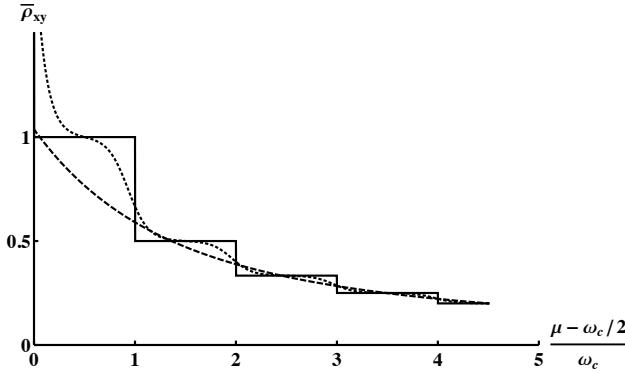


Рис. 1. Зависимость безразмерного холловского сопротивления $\bar{\rho}_{xy}$ от $(\mu - \hbar\omega_c/2)/(\hbar\omega_c)$ при значениях параметра $T/(\hbar\omega_c)$ равного 0 (сплошная кривая), 0.1 (точечная кривая) и 1 (пунктирная кривая).

Зависимость холловского сопротивления от химического потенциала при фиксированном магнитном поле, похожая на изображенную сплошной линией на рис. 1, была экспериментально измерена К. фон Клитцингом [6] в двумерном электронном газе при низких температурах (см. рис. 2). Плато на зависимости ρ_{xy} от напряжения V_g на затворе (от химического потенциала) соответствуют значениям $(h/e^2)/k$, k – целое число. Подчеркнем, что несмотря на схожесть зависимостей холловского сопротивления от химического потенциала в бездиссипативной модели $1/\tau \rightarrow 0$ и в эксперименте их физическая природа совершенно различна. На самом деле, уравнения (4) и (5) описывают хорошо известные квантовые осцилляции Шубникова – де Гааза в двумерном идеальном ферми-газе. В реальном эксперименте транспортное время рассеяния совсем не равно бесконечности, что демонстрирует отличное от нуля сопротивление ρ_{xx} , показанное на рис. 2. Заметим, что в области напряжений, соответствующих плато в ρ_{xy} , сопротивление ρ_{xx} обращается в нуль. Это означает целочисленное квантование холловской проводимости: $\sigma_{xy} = (e^2/h)k$. Таким образом,

основной вопрос, который ставит эксперимент К. фон Клитцинга – это какой физический механизм приводит, как принято говорить, к целочисленному квантованию холловской проводимости в единицах e^2/h и обращению в нуль диссипативной проводимости σ_{xx} при низких температурах в двумерном электронном газе с конечным транспортным временем рассеяния на примесях.¹

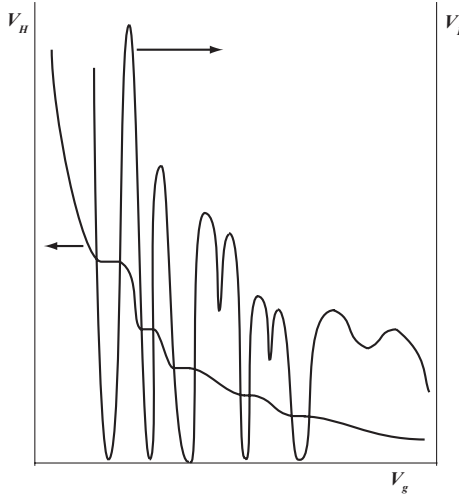


Рис. 2. Схематическое изображение зависимости холловского V_H и продольного V_L напряжений от напряжения на затворе V_g , измеренная в работе [6].

В экспериментах К. фон Клитцинга двумерный электронный газ был реализован в полевом транзисторе на основе оксида кремния. Температура и магнитное поле, при которых производились измерения, равнялись $T = 1.5$ К и $B = 18$ Т соответственно. Концентрация носителей менялась с помощью затвора. Размеры образца были $L_s = 400$ мкм (длина) и $W = 50$ мкм (ширина). Расстояние между контактами было $L = 130$ мкм.

¹Заметим, что, строго говоря, в реальном эксперименте измеряется холловское сопротивление образца, которое и квантуется в единицах h/e^2 .

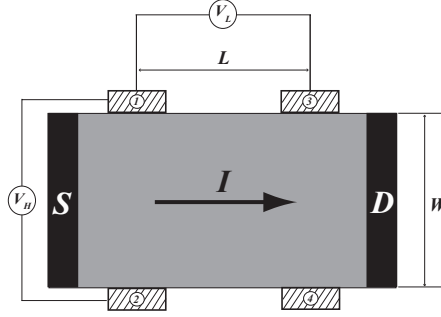


Рис. 3. Схематическое изображение стандартной четырех контактной схемы измерений: $\rho_{xx} = R_L = V_L W/(IL)$ и $\rho_{xy} = R_H = V_H/I$.

Стандартная четырех контактная схема измерений представлена на рис. 3, причем $\rho_{xx} = R_L = V_L W/(IL)$ и $\rho_{xy} = R_H = V_H/I$. В 1981 г. эксперименты К. фон Клитцинга были повторены Д. Цуи и А. Госсардом (А. Gossard) в двумерном электронном газе, созданном в гетероструктуре GaAs-Al_{0.3}Ga_{0.7}As [7]. Эксперименты выполнялись при температуре $T = 4.2$ К, магнитное поле менялось от нуля до 10 Т, подвижность носителей равнялась $10^4 \div 10^5$ см²/В·с, а их концентрация $n = 10^{11} \div 10^{12}$ см⁻². Отметим, что относительная точность квантования была порядка 10^{-5} . В настоящее время достигнута точность квантования равная 10^{-8} . В течение последних 25 лет квантование холловского сопротивления наблюдалось на многих двумерных структурах. Недавно квантовый эффект Холла наблюдался на графене² при комнатных температурах, что связано с большим, порядка 10^3 К, расстоянием между уровнями Ландау [8].

²Графен, представляющий собой монослой графита, интересен тем, что в нем электронный спектр похож на релятивистский спектр Дирака для безмассовой частицы $\varepsilon(p) = \pm vp$, где v – скорость электрона.

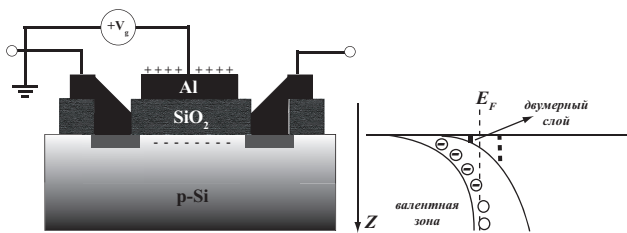


Рис. 4. Схемы кремниевого МОП транзистора (вид сбоку) и энергетических зон.

В заключение этого раздела кратко коснемся вопроса о том, в каких системах обычно создается двумерный электронный газ. Первый вариант – это двумерный электронный слой в кремниевом МОП транзисторе (см., [9]). Его устройство схематически изображено на рис. 4. Когда на металлический затвор из алюминия (Al) подается положительное напряжение, то, так же как и в конденсаторе (роль изоляционной прослойки играет оксид кремния (SiO_2)), из объема кремния (Si), который является полупроводником р-типа, притягивается отрицательный заряд. За счет изгиба зон, вызванного потенциалом на границе раздела, электроны из валентной зоны, притянутые к поверхности, сначала заполняют связанные состояния на акцепторных примесях, которые могут находиться в щели над валентной зоной, а потом попадают на дискретный уровень в зоне проводимости, создавая таким образом двумерный электронный газ. Меняя потенциал затвора, возможно регулировать двумерную концентрацию электронов в широких пределах.

Другой вариант – это инверсионный слой (см. например, [10]) на границе раздела легированного полупроводника n-типа, например, AlGaAs, и полупроводника p-типа, например, GaAs, который играет роль изолятора (рис. 5). Существенный момент в том, что щель в GaAs почти в два раза меньше, чем щель в AlGaAs. Это позволяет электронам в AlGaAs покинуть свои места на донорных примесях и, туннелируя через барьер, ко-

который создается нелегированным полупроводником n-типа, попасть либо на акцепторные примеси в щели над валентной зоной GaAs, либо в зону проводимости. Положительный заряд донорных примесей притягивает электроны, протуннелировавшие в GaAs, к границе раздела двух полупроводников, что приводит к искривлению зон и появлению дискретного уровня вблизи этой границы. В конце концов, уровни Ферми выравниваются и приток электронов из AlGaAs прекращается, дискретный уровень опускается ниже уровня Ферми и оказывается заселенным электронами, движение которых ограничено двумя пространственными измерениями.

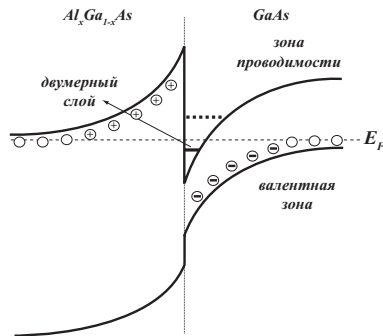


Рис. 5. Схема энергетических зон в $\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}/\text{GaAs}$.

Задача:

Найти спектр двумерного электрона, описываемого гамильтонианом $\mathcal{H} = v\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma}$, где $\mathbf{p} = (p_x, p_y)$ – импульс электрона, а $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y)$ – матрицы Паули, в перпендикулярном магнитном поле B .

2. КРАЕВЫЕ СОСТОЯНИЯ И КАЛИБРОВОЧНАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ЛАФЛИНА

В транспортных измерениях, которые производятся в лаборатории, изучаются образцы конечного размера. Поэтому необходимо понять, как влияет наличие границы на холловскую проводимость даже в бесстолкновительном пределе $1/\tau \rightarrow 0$.

Рассмотрим двумерный электронный газ, который занимает область $-W/2 \leq x \leq W/2$ вдоль оси x и $-L/2 \leq y \leq L/2$ вдоль оси y . Постоянное магнитное поле B приложено вдоль оси z , а вдоль оси x действует постоянное электрическое поле E , создающее между краями разность напряжений $V = EW$ (рис. 6).

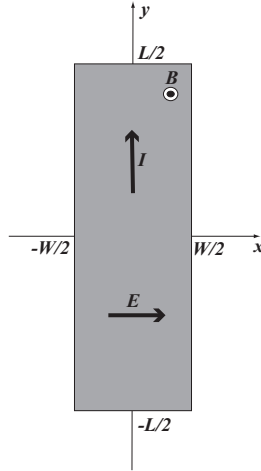


Рис. 6. Геометрия полоски.

Рассмотрим сначала одноэлектронную задачу. Запишем гамильтониан

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m_e} \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 - eEx, \quad (7)$$

где оператор импульса $\mathbf{p} = -i\hbar\nabla$, а $\mathbf{A}$ – векторный потенциал. Для удобства выберем калибровку Ландау: $A_x = A_z = 0$,

$A_y = Bx$. Электронный спин будем считать поляризованным в направлении магнитного поля. Уравнение Шредингера будет иметь вид:

$$\begin{aligned} -\frac{\hbar^2}{2m_e} \frac{\partial^2 \psi(x, y)}{\partial x^2} + \frac{m_e \omega_c^2}{2} \left(x + il_H^2 \frac{\partial}{\partial y} + \frac{eEl_H^2}{\hbar\omega_c} \right)^2 \psi(x, y) = \\ = \left(\mathcal{E} + ieEl_H^2 \frac{\partial}{\partial y} + \frac{e^2 E^2 l_H^2}{2\hbar\omega_c} \right) \psi(x, y). \end{aligned} \quad (8)$$

Если не учитывать конечные размеры полосы, т.е. считать, что $W = L = \infty$, то волновые функции для осциллятора хорошо известны [1]:

$$\psi_{n,k}(x, y) = \frac{1}{\sqrt{L}} e^{iky} \phi_n(x - x_k), \quad (9)$$

$$\phi_n(x) = \left(\frac{1}{2^n n! l_H \sqrt{\pi}} \right)^{1/2} \exp\left(-\frac{x^2}{2l_H^2}\right) H_n\left(\frac{x}{l_H}\right), \quad (10)$$

где координата центра осциллятора $x_k = kl_H^2 - eEl_H^2/\hbar\omega_c$, k – волновой вектор, $H_n(x)$ – полиномы Эрмита, а n – целое положительное число. Соответствующий спектр имеет вид

$$\mathcal{E}_{n,k} = \hbar\omega_c(n + 1/2) + eEl_H^2 k - \frac{e^2 E^2 l_H^2}{2\hbar\omega_c}. \quad (11)$$

Запишем квантово-механическое выражение для плотности тока в состоянии с волновой функцией $\psi_{n,k}$:

$$\mathbf{j}^{(n,k)}(x, y) = \frac{ie\hbar}{2m_e} (\psi_{n,k} \nabla \psi_{n,k}^* - \psi_{n,k}^* \nabla \psi_{n,k}) - \frac{e^2 \mathbf{A}}{m_e c} |\psi_{n,k}|^2. \quad (12)$$

Интегрируя по x , находим полный ток в направлении оси y , который переносит состояние с волновой функцией $\phi_{n,k}$:

$$I_y^{(n,k)} = \int dx j_y^{(n,k)} = -\frac{e}{\hbar L} \frac{\partial \mathcal{E}_{n,k}}{\partial k}. \quad (13)$$

Суммируя по всем состояниям, которые заполнены согласно распределению Ферми, находим ток, текущий вдоль оси y ,

$$I_y = -\frac{e}{\hbar L} \sum_{n,k} \frac{\partial \mathcal{E}_{n,k}}{\partial k} n_F(\mathcal{E}_{n,k} - \mu). \quad (14)$$

Вспоминая, что в образце конечного размера число состояний на уровне Ландау равно $\sum_k = LW/(2\pi l_H^2)$, получаем выражение для холловской проводимости

$$\sigma_{yx} = \frac{I_y}{V} \Big|_{V=0} = -\frac{e^2}{h} \nu, \quad (15)$$

где фактор заполнения ν дается уравнением (5). Таким образом, каждый заполненный электронами уровень Ландау дает вклад e^2/h в холловскую проводимость двумерного электронного газа в чистом пределе.

В приведенном выше рассуждении фактически проигнорирована конечность ширины полосы. В поле $B = 1$ Т магнитная длина l_H равна 26 нм. Для эксперимента фон Клитцинга [6], в котором $B = 18$ Т, а $W = 50$ мкм, отношение $l_H/W \sim 10^{-4}$. Будем считать, что выполняются неравенства $L \gg W \gg l_H$ и попытаемся учесть эффект конечности ширины W .

Для определенности будем считать, что граница полосы представляет собой резкий потенциальный барьер с энергией много большей $\hbar\omega_c$. Такие границы можно промоделировать бесконечными потенциальными стенками, находящимися при $x = \pm W/2$. Тогда граничные условия на стенках

$$\psi(x = \pm W/2, y) = 0. \quad (16)$$

Общим решением уравнением Шредингера (8) в этом случае являются функции параболического цилиндра. Запишем волновые функции и энергетический спектр в следующем виде

$$\psi_{s,k}(x, y) = A_{s,k} e^{iky} \left[\frac{\mathcal{D}_s\left(\frac{x-x_k}{l_H/\sqrt{2}}\right)}{\mathcal{D}_s\left(-\frac{W/2+x_k}{l_H/\sqrt{2}}\right)} - \frac{\mathcal{D}_s\left(-\frac{x-x_k}{l_H/\sqrt{2}}\right)}{\mathcal{D}_s\left(\frac{W/2+x_k}{l_H/\sqrt{2}}\right)} \right], \quad (17)$$

$$\mathcal{E}_{s,k} = \hbar\omega_c \left(s + \frac{1}{2} \right) + eEl_H^2 k - \frac{e^2 E^2 l_H^2}{2\hbar\omega_c}, \quad (18)$$

где $\mathcal{D}_s(z)$ – функция параболического цилиндра с индексом s [11]. Заметим, что пока s – непрерывный параметр, подлежащий дальнейшему определению. В дальнейшем будет удобно использовать следующее представление для функций параболического цилиндра:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_s(z) &= \frac{2^{s/2} \Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1-s}{2})} e^{-z^2/4} {}_1F_1\left(-\frac{s}{2}, \frac{1}{2}, \frac{z^2}{2}\right) \\ &- \frac{2^{s/2} \sqrt{2\pi}}{\Gamma(-\frac{s}{2})} z e^{-z^2/4} {}_1F_1\left(\frac{1-s}{2}, \frac{3}{2}, \frac{z^2}{2}\right). \end{aligned} \quad (19)$$

Здесь ${}_1F_1(\alpha, \gamma, z)$ – вырожденная гипергеометрическая функция, которая удовлетворяет уравнению

$$zy'' + (\gamma - z)y' + \alpha y = 0 \quad (20)$$

и может быть представлена в виде ряда

$${}_1F_1(\alpha, \gamma, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+\alpha)}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(n+\gamma)} \frac{z^n}{n!}. \quad (21)$$

Требование обращения в нуль волновой функции (17) на границе $x = -W/2$ выполнено автоматически, а соответствующее условие на границе $x = W/2$ дает условие

$$\frac{\mathcal{D}_s\left(\frac{W/2-x_k}{l_H/\sqrt{2}}\right)}{\mathcal{D}_s\left(-\frac{W/2+x_k}{l_H/\sqrt{2}}\right)} = \frac{\mathcal{D}_s\left(-\frac{W/2-x_k}{l_H/\sqrt{2}}\right)}{\mathcal{D}_s\left(\frac{W/2+x_k}{l_H/\sqrt{2}}\right)}, \quad (22)$$

из которого определяется квантовое число s . Численное решение (22) дает картину спектра, представленную на рис. 7а. Как

видно, спектр состоит из бесконечного числа ветвей, которые мы будем нумеровать, как и раньше, целым положительным числом n . Конечное значение ширины W приводит к дисперсии спектра, т.е. появляется зависимость энергетического параметра s_n от x_k , а значит и волнового вектора k . При $W \gg l_H$, можно показать, что $s_n(x_k)$ при $x_k = 0$ экспоненциально мало отличается от n , а при $x_k = \pm W/2$ точно равен $2n + 1$ (см. задачи). Как видно из рисунка, $s_n(x_k)$ возрастает по мере увеличения x_k .

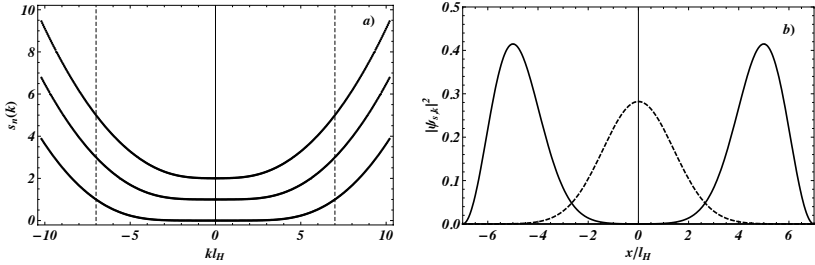


Рис. 7. (а) Три нижних уровня Ландау в полосе конечной ширины $W = 14l_H$. (б) Квадраты модулей волновых функций для состояний с $k = 0$ (пунктирная линия) и $kl_H = \pm 7$ (сплошные линии) на уровне Ландау с $n = 0$.

На рисунке 7б показана волновая функция состояния k при разных n . Подчеркнем, что пространственно она локализована в окрестности радиуса l_H около точки с координатой x_k . Это дает право говорить, что состояние с волновым вектором k находится в точке с координатой x_k . Это означает, что даже если вдали от границы при $|x| \ll W/2$ химический потенциал $\mu \approx \hbar\omega_c(N+1)$, т.е. находится между уровнями Ландау, то вблизи границы существует $(N+1)$ состояние, пересекающее уровень химического потенциала. Эти поверхностные состояния принято называть краевыми [12]. Отметим, что в квазиклассической картине они соответствуют скачущим орбитам [5]. В отсутствие электрического поля положение n -го краевого состояния определяется уравнением

$$s_n(k_n) = \frac{\mu}{\hbar\omega_c} - \frac{1}{2}. \quad (23)$$

Для волновых векторов k вблизи волнового вектора k_n энергетический спектр можно представить в виде

$$\mathcal{E}_{n,k} \approx \mu + \hbar\omega_c \frac{ds_n(k_n)}{dk_n} (k - k_n). \quad (24)$$

Если, как обычно, отсчитывать энергию от уровня химического потенциала, а волновой вектор от значения k_n , то уравнение (24) означает, что имеются возбуждения, локализованные вблизи границы полосы и имеющие линейный закон дисперсии $\epsilon_n(k) = \hbar v_{\text{edge}}^{(n)} k$, где скорость краевого состояния $v_{\text{edge}}^{(n)} = \omega_c ds_n(k_n)/dk_n$. Так как характерный энергетический масштаб, в котором удобно измерять химический потенциал – это циклотронная энергия $\hbar\omega_c$, то скорость краевых состояний можно оценить по размерности как $|v_{\text{edge}}^{(n)}| \sim \omega_c l_H$ (см. задачу). Заметим, что вблизи левой границы полосы при $x = -W/2$ скорость краевого состояния отрицательна и возбуждение распространяется вдоль оси y в сторону отрицательных значений. Для правой границы при $x = W/2$ скорость краевого состояния положительна и возбуждение распространяется вдоль оси y в сторону положительных значений.

Вычислим теперь холловскую проводимость. Заменяя сумму по k на интеграл в выражении (14), которое остается справедливым и для задачи о полоске конечной ширины, с помощью соотношения

$$\sum_k \equiv \int_{-W/2l_H^2}^{W/2l_H^2} \frac{Ldk}{2\pi} \quad (25)$$

находим, что

$$I_y = -\frac{e}{h} \sum_n \int_{-W/2l_H^2}^{W/2l_H^2} dk \left[\omega_c \frac{\partial \hbar s_n(k)}{\partial k} + eEl_H^2 \right] n_F(\mathcal{E}_{n,k} - \mu). \quad (26)$$

Учитывая тот факт, что $s_n(k)$ и $\mathcal{E}_{n,k}$ в формуле (26) зависят от электрического поля E , в пределе $l_H \ll W$, возвращаемся к выражению (15), в котором фактор заполнения определен как

$$\nu = \frac{l_H^2}{W} \int_{-W/2l_H^2}^{W/2l_H^2} dk n_F(\mathcal{E}_{n,k} - \mu). \quad (27)$$

В выражение (26) вносят вклад состояния со всеми k , и роль краевых состояний никак не выделена. Проинтегрируем (14) по частям. Тогда получим

$$I_y = \frac{e}{h} \sum_n \int_{-W/2l_H^2}^{W/2l_H^2} dk \mathcal{E}_{n,k} \frac{\partial \mathcal{E}_{n,k}}{\partial k} \frac{n_F(\mathcal{E}_{n,k} - \mu)}{\partial \mathcal{E}_{n,k}}. \quad (28)$$

При нулевой температуре, пользуясь простым соотношением $\partial n_F(E - \mu)/\partial E = -\delta(E - \mu)$, находим

$$I_y = -\frac{e}{h} \sum_n (\mathcal{E}_{n,k_n} - \mathcal{E}_{n,-k_n}), \quad (29)$$

где сумма по n ограничена теми уровнями Ландау, которые пересекают химический потенциал. Таким образом, при $T = 0$ разность энергий краевых состояний на правой и левой границах полоски определяет холловский ток.

Если вдали от границ двумерного газа химический потенциал лежит в щели между уровнями Ландау, то левые и правые краевые состояния совершенно независимы друг от друга. Каждое из них находится в равновесии с тем резервуаром, из которого выходит, а поэтому $\mathcal{E}_{n,\pm k_n} = \mu_{\pm}$, где $\mu_{\pm}$ – электрохимические потенциалы электронов на правой и левой границе, соответственно. Тогда, так как $\mu_+ - \mu_- = eV$, мы возвращаемся к формуле (15), в которой фактор заполнения равен числу краевых состояний. Это рассуждение позволяет сформулировать простое правило для расчета токов в режиме целочисленного квантового эффекта Холла [13]. Каждое краевое состояние переносит в направлении своего распространения ток, равный

$$I = \frac{e^2}{h} \mu, \quad (30)$$

где μ – это электрохимический потенциал резервуара, из которого оно выходит.

В 1981 г. Лафлином была выдвинута идея о том, что квантование холловской проводимости связано с калибровочной инвариантностью и наличием края подвижности (делокализованных состояний) на уровне Ландау [12, 14].

Сделаем калибровочное преобразование $A_y \rightarrow A_y + 2\pi\phi/L$, где ϕ играет роль магнитного потока. Тогда в выражении (18) для спектра волновой вектор изменится как $k \rightarrow k - (2\pi e/c\hbar)\phi/L$. Заметим, что при $\phi = \phi_0 = c\hbar/|e|$ энергетический спектр сохраняет свой вид, а состояния с волновым вектором k переходят в состояния с волновым вектором $k + 2\pi/L$. Формулу (14) для тока можно записать как

$$I_y = -\frac{e\phi_0}{h} \sum_{n,k} \frac{\partial \mathcal{E}_{n,k}(\phi)}{\partial \phi} n_F(\mathcal{E}_{n,k} - \mu). \quad (31)$$

Далее будем изменять поток ϕ адиабатически от 0 до ϕ_0 . Энергетический спектр при этом не изменится, а только произойдет перераспределение заполнения состояний. Предполагая нулевую температуру, найдем

$$I_y \phi_0 = -\frac{e\phi_0}{h} \sum_n \left(\sum_{k=-k_n+2\pi/L}^{k_n+2\pi/L} \mathcal{E}_{n,k} + \sum_{k=-k_n}^{k_n} \mathcal{E}_{n,k} \right) = \quad (32)$$

$$= -\frac{e\phi_0}{h} \sum_n (\mathcal{E}_{n,k_n+1} - \mathcal{E}_{n,-k_n}). \quad (33)$$

Здесь сумма по n ограничена теми уровнями Ландау, которые пересекают химический потенциал. В пределе $L \rightarrow \infty$ разность $\mathcal{E}_{n,k_n+1} - \mathcal{E}_{n,-k_n} = \mu_+ - \mu_- = eV$, и мы опять возвращаемся к формуле (15), в которой фактор заполнения равен числу краевых состояний. Таким образом, оказывается возможным связать квантование холловской проводимости при нуле температур с калибровочной инвариантностью.

Задачи:

1. Найти дисперсию энергетического спектра для состояний вблизи центра полосы, $|k| \ll W/l_H^2$.
2. Найти зависимость скорости краевых мод от номера уровня Ландау и построить график. Считать, что скорость определяется соотношением $v_{\text{edge}} = \partial \mathcal{E}_{n,k} / \partial k|_{k=W/2l_H^2}$.
3. Для четырех контактной схемы измерений, изображенной на рис. 3, вычислить холловское $R_H = R_{14}$ и продольное $R_L = R_{31}$ сопротивления, где $R_{ij} = (\mu_i - \mu_j)/I$. Считать, что фактор заполнения равен ν . Указание: использовать уравнение (30).
4. Показать, что ур. (26) при $T = 0$ приводит к ответу $\sigma_{xy} = -(e^2/h)(\nu + \delta)$ причем $\delta \propto Nl_H/W$, где N – число краевых состояний, пересекающих уровень Ферми.

3. ЭЛЕКТРОСТАТИКА КРАЕВЫХ СОСТОЯНИЙ

В предыдущем разделе был рассмотрен двумерный электронный газ с границей, которая моделировалась бесконечно высокой стенкой. Рассмотрим теперь противоположный случай модели границы. Пусть двумерный электронный газ помещен в удерживающий потенциал $U_{\text{conf}}(\mathbf{r})$, который меняется на масштабе l_H на величину много меньшую, чем $\hbar\omega_c$. Тогда наличие этого потенциала приводит к плавному поднятию уровней Ландау по мере приближения к границе; при этом расстояние между уровнями Ландау не меняется и остается равным $\hbar\omega_c$.

Рассмотрим вопрос о распределении электронной плотности вблизи такого края, следуя работе Д. Шкловского, Б. Шкловского, Л. Глазмана [15]. При этом будет учтена экранировка, возникающая за счет наличия электрон-электронного (кулоновского) взаимодействия в электронном газе.

Для простоты изложения начнем рассмотрение со случая, когда нет магнитного поля. Будем считать, что граница двумерного слоя формируется бесконечной пластиной затвора, параллельного оси y с напряжением $-V_g$ относительно двумерного электронного газа, находящегося в плоскости $z = 0$ (рис. 9). Также имеется фон положительных зарядов с концентрацией

n_0 от доноров в слое изолятора с диэлектрической проницаемостью $\epsilon \gg 1$. Этот фон положительных зарядов определяет концентрацию электронов при $x \rightarrow +\infty$. Предположим, что в полосе шириной $2l$ на расстоянии от затвора в плоскости двумерного газа плотность электронного заряда равна нулю. Считая, что l больше расстояний от затвора и донорного слоя до двумерного электронного газа, получим эффективную двумерную задачу (рис. 8). Также будем считать, что выполняется условие $a_B \ll l$, где $a_B = \epsilon \hbar^2 / m_e e^2$ – боровский радиус. Неравенство $a_B \ll l$ означает, что электрическое поле хорошо экранируется электронами.

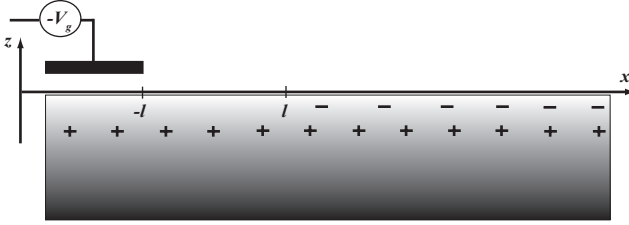


Рис. 8. Схематическое изображение формирования затвором границы двумерного электронного газа.

Электростатический потенциал $\phi(x, z)$ при $z \leq 0$ удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (34)$$

с граничными условиями

$$\phi(x, z = 0) = \begin{cases} -V_g & x < -l, \\ 0 & x > l, \end{cases} \quad (35)$$

$$E_z(x, z = 0_-) = -\left. \frac{\partial \phi}{\partial z} \right|_{z=0_-} = -\frac{4\pi e n_0}{\epsilon}, \quad |x| < l. \quad (36)$$

Последнее условие означает, что в области $|x| < l$ отсутствуют электроны. Условие $\phi(x, 0) = 0$ при $x > l$ означает отсутствие x -й компоненты электрического поля E_x в двумерном электронном газе, что возможно только при полной экранировке как в хорошем металле. Электронная концентрация в двумерном электронном газе находится из следующего очевидного равенства:

$$n_e = n_0 - \frac{\epsilon}{4\pi e} \frac{\partial \phi}{\partial z} \Big|_{z=0^-}. \quad (37)$$

Задача (34)–(36) относится к классу задач, известных в теории функций комплексного переменного как задача Келдыша–Седова [16]. Для ее решения удобно ввести комплексные координату $\zeta = x + iz$ и функцию $F(\zeta)$ так, что $\phi(x, z) = \text{Im } F(\zeta)$. Рассмотрим комплексную плоскость с разрезом от $-l$ до l (рис. 9). Пусть $f(\zeta) = F'(\zeta)g(\zeta)$, где двузначная функция

$$g(\zeta) = \left(\frac{\zeta + l}{\zeta - l} \right)^{1/2} \quad (38)$$

определена так, что при $t > l$

$$g(t) = \left(\frac{t + l}{t - l} \right)^{1/2} \quad (39)$$

и $\arg g(z) = [\arg(l + z) - \arg(l - z)]/2$. Тогда граничные условия (35)–(36) переписываются следующим образом

$$\text{Im } f(x, z = 0) = \begin{cases} \frac{d\phi}{dz} \sqrt{\frac{l+x}{l-x}} & |x| < l, \\ \frac{d\phi}{dx} \sqrt{\frac{l+x}{x-l}} & |x| > l \end{cases} = \frac{4\pi en_0}{\epsilon} \sqrt{\frac{l+x}{l-x}} \Theta(l - |x|). \quad (40)$$

Воспользуемся формулой Шварца для аналитической функции при $\text{Im } \zeta < 0$:

$$f(\zeta) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt \text{Im } f(t)}{t - \zeta} + \text{Re } f(\infty). \quad (41)$$

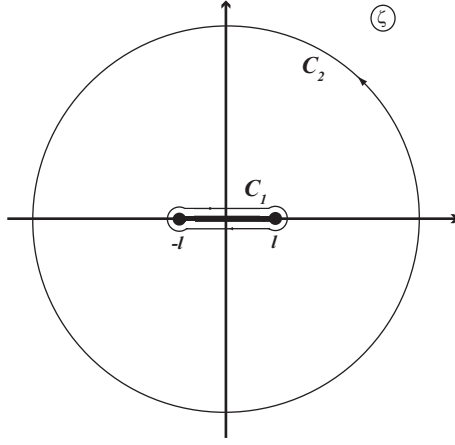


Рис. 9. Контуры интегрирования на комплексной плоскости.

Напомним, что формула Шварца получается после сложения формул Коши для $f(\zeta)$:

$$f(\zeta) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{C_K} \frac{dt f(t)}{t - \zeta} = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt f(t)}{t - \zeta} + \frac{f(\infty)}{2} \quad (42)$$

и для сопряженной ей функции $f^*(\zeta)$

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_K} \frac{dt f^*(t)}{t - \zeta} = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt f^*(t)}{t - \zeta} + \frac{f^*(\infty)}{2}. \quad (43)$$

Используя граничные условия (40), из формулы Шварца находим

$$\begin{aligned} f(\zeta) &= -\frac{1}{\pi} \int_{-l}^l \frac{dt \operatorname{Im} f(t)}{t - \zeta} + \operatorname{Re} f(\infty) = \\ &= -\frac{4en_0}{\epsilon} \int_{-1}^1 \frac{dt}{t - \zeta/l} \sqrt{\frac{1+t}{1-t}}, \end{aligned} \quad (44)$$

где мы предположили, что $\operatorname{Re} f(\infty) = 0$. Рассмотрим интеграл

$$\int_{C_1+C_2} \frac{dt g(t)}{t - \zeta} = 2\pi i g(\zeta), \quad (45)$$

где контур $C_1 + C_2$ показан на рис. 9. Вычисляя интегралы, найдем

$$\int_{C_1} \frac{dt g(t)}{t - \zeta} = (e^{-i\pi/2} - e^{i\pi/2})g(\zeta), \quad \int_{C_2} \frac{dt g(t)}{t - \zeta} = 2\pi i \quad (46)$$

Отсюда получаем следующее выражение для функции $f(\zeta)$:

$$f(\zeta) = \frac{4\pi en_0}{\epsilon} [-1 + g(\zeta)]. \quad (47)$$

Значит,

$$F'(\zeta) = \frac{4\pi en_0}{\epsilon} \left[1 - \frac{1}{g(\zeta)} \right]. \quad (48)$$

Принимая во внимание значения функции $g(\zeta)$ на действительной оси при подходе к ней из нижней полуплоскости:

$$g(t - i0) = \begin{cases} i\sqrt{\frac{t+l}{l-t}} & |t| < l, \\ \sqrt{\frac{t+l}{t-l}} & |t| > l, \end{cases} \quad (49)$$

найдем

$$\begin{aligned} E_z(x) &= -\operatorname{Re} F'(\zeta) \Big|_{z=0^-} = -\frac{4\pi en_0}{\epsilon} \left[1 - \Theta(x-l) \sqrt{\frac{x-l}{x+l}} \right], \\ E_x(x) &= -\operatorname{Im} F'(\zeta) \Big|_{z=0^-} = -\frac{4\pi en_0}{\epsilon} \Theta(l - |x|) \sqrt{\frac{l-x}{x+l}}. \end{aligned} \quad (50)$$

Интегрируя $E_x(x)$ по x , находим выражение для электростатического потенциала

$$\phi(x, z=0) = \frac{4\pi en_0}{\epsilon} \begin{cases} -\pi l & x < -l, \\ \sqrt{l^2 - x^2} - l \arccos(x/l) & |x| < l, \\ 0 & x > l. \end{cases} \quad (51)$$

Из граничного условия (35) для $\phi(x, z=0)$ при $x < -l$ находим, что $l = \epsilon e V_g / (4\pi^2 e^2 n_0)$. Для профиля плотности двумерных электронов окончательно находим

$$n_e(x) = \Theta(x-l) n_0 \sqrt{\frac{x-l}{x+l}}, \quad l = \frac{e V_g \epsilon}{4\pi^2 e^2 n_0}. \quad (52)$$

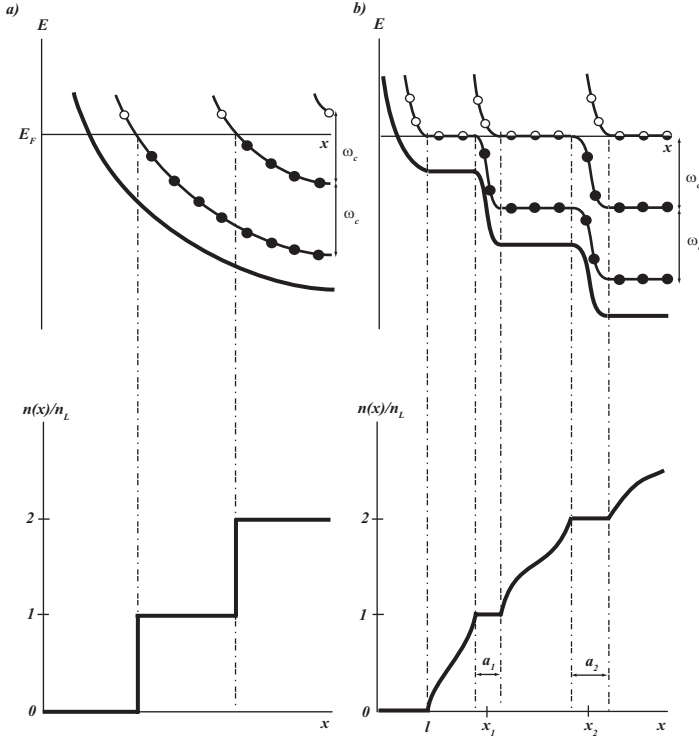


Рис. 10. Структура края при плавном краевом потенциале (из работы [15]): а) в одноэлектронном приближении; б) в самосогласованном электростатическом приближении. $n_L = 1/(2\pi l_H^2)$.

Видно, что условие $a_B \ll l$ оказывается эквивалентным условию $E_F \ll eV_g$, т.е. рассмотренный выше метод применим для достаточно больших напряжений. Отметим, что типичное значение энергии Ферми E_F равно нескольким мэВ. Для типичных значений $V_g = 1$ В, $n_0 = 10^{11}$ см $^{-2}$ и $\epsilon = 12.5$ получим, что $l \approx 2.2 \cdot 10^{-5}$ см, тогда как $a_B \approx 10^{-6}$ см.

Рассмотрим теперь случай, когда вся система помещена в перпендикулярное магнитное поле. Типичные значения циклотронной энергии $\hbar\omega_c \ll eV_g$, поэтому профиль (52), найденный

для задачи без магнитного поля, почти не изменится. Пусть вдали от края при $x \rightarrow +\infty$ фактор заполнения $\nu_0 = 2\pi l_H^2 n_0$ равен целому числу. Тогда при $x \rightarrow +\infty$ электростатический потенциал должен стать равным $\phi(+\infty, 0) = [\nu_0] \hbar \omega_c / e$, где $[X]$ обозначает целую часть числа X . Если фактор заполнения принимает целые значения, $\nu = k$, то экранирование отсутствует, так как электронная концентрация не зависит от химического потенциала: $dn_e/d\mu = 0$. Следовательно, в областях с целочисленным фактором заполнения, которые принято называть несжимаемыми, будет ненулевое электрическое поле E_x . Оказывается, что энергетически выгодно разместить эти области не равномерно вдоль оси x , а в узких полосках ширины a_k с постоянной плотностью $k/(2\pi l_H^2)$ (рис. 10). Положение центра этих полосок x_k можно найти из соотношения $n_e(x_k) = k/(2\pi l_H^2)$, где в левой части электронная плотность определяется выражением (52). Решение уравнения дает

$$x_k = l \frac{\nu_0^2 + k^2}{\nu_0^2 - k^2}, \quad k \leq [\nu_0]. \quad (53)$$

Ширину a_k для k -й полоски можно оценить из следующих простых соображений. Как видно из рис. 10, в области полоски возникает избыточная по сравнению со случаем нулевого магнитного поля электронная концентрация, разных знаков при $x > x_k$ и $x < x_k$, т.е. возникает конденсатор с зарядом на обкладке, который можно оценить как

$$e\Delta n_k \approx \frac{e}{a_k} \int_{0 < x - x_k \lesssim a_k/2} dx [n_e(x_k) - n_e(x)] \sim -e \frac{dn_e(x)}{dx} \Big|_{x=x_k} a_k. \quad (54)$$

Эта избыточная электронная концентрация создает электрическое поле

$$\Delta E_z = \frac{4\pi e \Delta n_k}{\epsilon}. \quad (55)$$

Характерное значение этого поля можно оценить как

$$\Delta E_z \sim \frac{\Delta\phi}{a_k}, \quad (56)$$

где $\Delta\phi = \hbar\omega_c/e$ – падение напряжения на полоске. Собирая выражения (54), (55), (56) вместе, находим следующую оценку для ширины несжимаемой полоски:

$$a_k^2 \sim \frac{\hbar\omega_c\epsilon}{e^2(dn_e/dx)|_{x=x_k}}. \quad (57)$$

Этот результат показывает, что в отличие от координаты положения полоски, которая оказывается порядка характерной длины, на которой меняется плавная часть электронной плотности, $x_k \sim l$, ширина несжимаемых полосок оказывается гораздо меньше $a_k \sim \sqrt{a_B l} \ll l$. Ширина полоски не может быть меньше магнитной длины, что приводит к следующему условию применимости нашего рассмотрения: $l_H \ll \sqrt{a_B l} \ll l$. Приведенная выше оценка не позволяет установить правильный численный коэффициент в выражении (57). Аккуратное вычисление (см. задачу) приводит к следующему ответу

$$a_k^2 = \frac{2}{\pi^2} \frac{\hbar\omega_c\epsilon}{e^2(dn_e/dx)|_{x=x_k}}. \quad (58)$$

Задача:

Найти распределение электронной плотности $n_e(x)$ и электрического потенциала $\phi(x, z = 0)$ в случае, когда вдали от затвора фактор заполнения удовлетворяет условию $1 < \nu_0 < 2$.

4. ДВУМЕРНЫЙ ЭЛЕКТРОННЫЙ ГАЗ С РЕДКИМИ ПРИМЕСЯМИ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Двумерный электронный газ, используемый в реальных экспериментах, окружен диэлектрическими слоями, в которых на-

ходятся примесные атомы. Они создают случайный эффективный двумерный потенциал, на котором рассеиваются электроны из двумерного слоя. Очевидно, что это приводит к конечному значению сопротивления ρ_{xx} . Здесь в первую очередь интересно рассмотреть вопрос о влиянии примесей на спектр двумерных электронов в магнитном поле. В последующем изложении будем следовать работам Бычкова [17] и Баскина, Магрилла и Энтина [18].

Пусть имеется $\mathcal{N}$ одинаковых примесных δ -центров, которые расположены в точках с координатами $(\mathbf{r}_j, z_j)$. Здесь $\mathbf{r} = (x, y)$ координаты в плоскости двумерного газа, а ось z направлена перпендикулярно этой плоскости. Одноэлектронный гамильтониан для этой задачи может быть записан в виде

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m_e} \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 + V(\mathbf{r}, z) + U_{\text{conf}}(\mathbf{r}, z), \quad (59)$$

где $V(\mathbf{r}, z) = u \sum_{j=1}^{\mathcal{N}} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j) \delta(z - z_j)$ – случайный потенциал, создаваемый примесями, а $U_{\text{conf}}(\mathbf{r}, z)$ – удерживающий потенциал, который приводит к образованию двумерного электронного газа. В целях упрощения изложения, будем считать, что удерживающий потенциал U_{conf} зависит только от координаты z . Тогда электронная волновая функция может быть представлена в виде произведения $\Psi(\mathbf{r})\varphi(z)$, где волновая функция $\varphi(z)$ есть нормированная собственная функция гамильтониана

$$\mathcal{H}_{\perp} = -\frac{\hbar^2}{2m_e} \frac{d^2}{dz^2} + U_{\text{conf}}(z) \quad (60)$$

с наименьшим собственным значением. Заметим, что интеграл $1/\int dz \varphi^4(z)$ характеризует эффективную толщину двумерного газа. Волновая функция двумерного движения $\Psi(\mathbf{r})$ удовлетворяет уравнению Шредингера

$$\frac{1}{2m_e} \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 \Psi(\mathbf{r}) + V_{\text{eff}}(\mathbf{r}) \Psi(\mathbf{r}) = E \Psi(\mathbf{r}), \quad (61)$$

где $V_{\text{eff}}(\mathbf{r}) = \sum_{j=1}^{\mathcal{N}} u_j \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j)$. Как видно, дисперсия δ -центров вдоль оси z приводит к зависимости силы потенциала от расстояния до двумерного электронного газа: $u_j = u\varphi^2(z_j)$.

Построим волновую функцию $\Psi(\mathbf{r})$ как линейную комбинацию волновых функций (10) задачи без потенциала $V_{\text{eff}}(\mathbf{r})$:

$$\Psi_n(\mathbf{r}) = \sum_k C_{n,k} \psi_{n,k}(\mathbf{r}). \quad (62)$$

Эта волновая функция соответствует состоянию с энергией $E_n^{(0)} = \hbar\omega_c(n + 1/2)$, где $n = 0, 1, 2, \dots$, если коэффициенты $C_{n,k}$ для каждого n удовлетворяют системе из $\mathcal{N}$ уравнений

$$\Psi_n(\mathbf{r}_j) = \sum_k C_{n,k} \psi_{n,k}(\mathbf{r}_j) = 0, \quad j = 1, \dots, \mathcal{N}. \quad (63)$$

Если число примесей меньше числа состояний на уровне Ландау $\mathcal{N} < \mathcal{S}/(2\pi l_H^2)$, где $\mathcal{S}$ – площадь, занимаемая двумерным электронным слоем, то всегда имеется $\mathcal{S}/(2\pi l_H^2) - \mathcal{N}$ наборов коэффициентов $C_{n,k}$ (при фиксированном n), которые удовлетворяют уравнениям (63). Таким образом, в присутствии примесей остается $\mathcal{S}/(2\pi l_H^2) - \mathcal{N}$ так называемых неотщепленных состояний с энергией $E_n^{(0)} = \hbar\omega_c(n + 1/2)$ и волновой функцией вида (62). Остальные $\mathcal{N}$ состояний имеют другие энергии, т. е. отщепляются от уровня Ландау.

Будем считать, что δ -центры редкие, т. е. выполняется условие

$$n_{\text{imp}} = \mathcal{N}/\mathcal{S} \ll 1/(2\pi l_H^2). \quad (64)$$

Тогда энергию отщепленных состояний проще всего найти из следующих соображений. Перепишем (61) в интегральной форме

$$\Psi(\mathbf{r}) = \int d\mathbf{r}' G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; E) V_{\text{eff}}(\mathbf{r}') \Psi(\mathbf{r}'), \quad (65)$$

где функция Грина $G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; E)$ удовлетворяет уравнению

$$\left[E - \frac{1}{2m_e} \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 \right] G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; E) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (66)$$

Помещая начало координат в точку положения данного δ -центра и пренебрегая остальными в силу условия (64), найдем

$$\Psi(0) = uG_0(0, 0, E)\Psi(0). \quad (67)$$

Это уравнение определяет в неявной форме значение энергии. Воспользовавшись следующим выражением для функции Грина в совпадающих точках (см. задачи)

$$G_0(0, 0, E) = \frac{1}{2\pi l_H^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{E - \hbar\omega_c(n + 1/2)}, \quad (68)$$

получим уравнение

$$\frac{u}{2\pi l_H^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{E - \hbar\omega_c(n + 1/2)} = 1, \quad (69)$$

которое определяет энергию отщепленного состояния. В случае относительно слабого δ -центра, когда выполняется условие $mu/(2\pi\hbar^2) \ll 1$, энергии отщепленных состояний имеют вид

$$E_n = \hbar\omega_c(n + 1/2) + \Delta_{n,0}, \quad \Delta_{n,0} = \frac{u}{2\pi l_H^2} \ll \hbar\omega_c. \quad (70)$$

Таким образом, каждый δ -центр отщепляет ровно одно состояние на уровне Ландау, а всего отщепляется ровно $\mathcal{N}$ состояний, как и должно быть.

Рассмотрим теперь, что дает наличие конечного радиуса действия $a \ll l_H$ у потенциала примеси, т.е. будем считать, что $V_{\text{eff}}(\mathbf{r}) = \sum_{j=1}^{\mathcal{N}} u_j(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|)$. Для простоты изложения ограничимся случаем нижнего уровня Ландау $n = 0$. Выберем опять центр координат в месте расположения данной примеси и пренебрежем остальными примесными центрами. В этом случае удобно работать в цилиндрической системе координат (ρ, θ) . Выбирая калибровку $A_\rho = A_z = 0$ и $A_\theta = B/2\rho$, можно записать волновые функции с определенным значением проекции момента импульса на ось z в виде [1]:

$$\psi_{0,m}(\rho, \theta) = \frac{e^{im\theta}}{l_H \sqrt{2\pi m!}} \left(\frac{\rho^2}{2l_H^2} \right)^{m/2} e^{-\rho^2/4l_H^2}, \quad m = 0, 1, \dots \quad (71)$$

Будем искать решение уравнения (65) в виде следующей линейной комбинации:

$$\Psi(\mathbf{r}) = \sum_{m \geq 0} C_m \psi_{0,m}(\rho, \theta). \quad (72)$$

Пренебрегая всеми уровнями Ландау, кроме нижнего, функцию Грина можно записать как

$$G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; E) = \sum_{m \geq 0} \frac{\psi_{0,m}(\rho, \theta) \psi_{0,m}^*(\rho', \theta')}{E - \hbar\omega_c/2}. \quad (73)$$

Тогда уравнение (65) примет вид

$$C_m = \frac{C_m}{E - \hbar\omega_c/2} \int_0^\infty \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\theta u(\rho) |\psi_{0,m}(\rho, \theta)|^2. \quad (74)$$

Отсюда находим, что энергии отщепленных состояний равны

$$\begin{aligned} E_{0,m} &= \frac{\hbar\omega_c}{2} + \Delta_m, \\ \Delta_m &= \frac{1}{l_H^2 m!} \int_0^\infty d\rho \rho \left(\frac{\rho^2}{2l_H^2} \right)^m u(\rho) \exp\left(-\frac{\rho^2}{2l_H^2}\right). \end{aligned} \quad (75)$$

Прежде всего заметим, что если примесь является δ -центром, $u(\mathbf{r}) = u\delta(\mathbf{r})$ (соответственно, $u(\rho) = u\delta(\rho)/(2\pi\rho)$), то отщепляется только состояние с $m = 0$, и мы возвращаемся к результату (70). Для примеси, которая создает потенциал с конечным радиусом взаимодействия a , число отщепленных состояний больше чем одно. Их число можно оценить из следующих простых соображений. Модуль квадрата волновой функции $\psi_{0,m}(\rho, \theta)$ равен

$$|\psi_{0,m}(\rho, \theta)|^2 = \frac{1}{2\pi l_H^2 m!} \exp\left[-S_m\left(\frac{\rho^2}{2l_H^2}\right)\right], \quad (76)$$

$$S_m(x) = x - m \ln x \quad (77)$$

и достигает максимального значения при $x = m$, которое находится из условия $S'_m(x) = 0$. Таким образом, модуль квадрата волновой функции имеет максимум на окружности радиуса

$R_m = l_H \sqrt{2m}$. Приближение одной примеси работает, когда это расстояние много меньше среднего расстояния между примесями, т.е. $R_m \ll 1/\sqrt{n_{\text{imp}}}$. Это условие означает, что максимальное значение m (число отщепленных состояний), при котором выражение (75) еще остается справедливым, равно $1/(l_H^2 n_{\text{imp}}) \gg 1$.

Рассмотрим для примера цилиндрически симметричный потенциал примеси вида $u(\rho) = u \exp(-\rho^2/2a^2)$, причем будем считать, что $a \ll l_H$. Тогда получаем

$$\Delta_m = u \left(\frac{a}{l_H} \right)^{2m+2}. \quad (78)$$

Отщепленные состояния сосредоточены в интервале энергий $\hbar\omega_c/2 + \Delta_{\min} < E < \hbar\omega_c/2 + \Delta_{\max}$, где

$$\Delta_{\min} = u \left(\frac{a}{l_H} \right)^{2+\gamma/(l_H^2 n_{\text{imp}})}, \quad (79)$$

$$\Delta_{\max} = u \left(\frac{a}{l_H} \right)^2, \quad (80)$$

где γ – неизвестное число порядка единицы. Так как число отщепленных состояний порядка $1/(l_H^2 n_{\text{imp}}) \gg 1$, то удобно их характеризовать плотностью состояний:

$$D(E) = n_{\text{imp}} \frac{dm}{dE} = \frac{n_{\text{imp}}}{2(E - \frac{\hbar\omega_c}{2}) \ln l_H/a}. \quad (81)$$

Заметим, что полученная формула справедлива для энергий в интервале $\Delta_{\min} < E - \hbar\omega_c/2 < \Delta_{\max}$. Неизвестное число γ можно оценить из условия, что почти все состояния являются отщепленными. Тогда, так как

$$\int dE D(E) \approx \frac{\gamma}{2l_H^2}, \quad (82)$$

то $\gamma = 1/\pi$. В заключение отметим, что задача о вычислении плотности состояний на нижнем уровне Ландау решается точно (см., [19, 20, 21]).

Рассмотрим теперь вопрос о том, как влияет наличие примесей на холловскую проводимость. Будем считать, что выполняется условие $n_{\text{imp}} \ll (2\pi l_H^2)^{-1}$, а значит, можно рассматривать задачу с одной примесью, пренебрегая влиянием остальных. Будем следовать работе Прейнджа [22]. Пусть в точке с координатами $(0, 0)$ расположена примесь, создающая потенциал с радиусом действия $a \ll l_H$. Пусть также вдоль оси x приложено электрическое поле E . Тогда вдали от примеси при больших положительных значениях y , $y \gg a$ волновая функция и спектр имеют вид (10) и (11). Рассмотрим при $y \gg a$ состояние с заданными n и k , описываемое волновой функцией равной $\Psi_{n,k}(x, y) = \psi_{n,k}(x, y)$. При больших отрицательных значениях y , $-y \gg a$ это состояние должно обладать той же энергией $\mathcal{E}_{n,k}$, что и при $y \gg a$. Так как энергия состояния явно зависит от k , это означает, что k должно быть тем же самым. Поэтому волновая функция состояния при $-y \gg a$ может отличаться от $\psi_{n,k}(x, y)$ лишь фазовым множителем: $\Psi_{n,k}(x, y) = e^{-i\delta(k)}\psi_{n,k}(x, y)$. Наложим граничные условия вдоль оси y :

$$\Psi_{n,k}(x, -L/2) = e^{-i2\pi\phi/\phi_0}\Psi_{n,k}(x, L/2), \quad (83)$$

где ϕ – свободный параметр. Используя явный вид волновой функции $\psi_{n,k}(x, y)$, получим, что волновые вектора k должны удовлетворять соотношению

$$kL + \delta(k) - \frac{2\pi\phi}{\phi_0} = 2\pi m. \quad (84)$$

Тогда плотность состояний имеет вид

$$D(k) = \frac{\partial m}{\partial k} = \frac{1}{2\pi} (L + \delta'(k)). \quad (85)$$

Используем для тока вдоль оси y формулу (31)

$$\begin{aligned}
I_y &= -\frac{e\phi_0}{h} \sum_n \sum_{k_m=-k_n}^{k_n} \frac{\partial \mathcal{E}_{n,k}}{\partial \phi} = -\frac{e}{\hbar} \int_{k_n}^{k_n} dk \nu(k) \frac{\partial \mathcal{E}_{n,k}}{\partial k} (L + \delta'(k))^{-1} \\
&= -\frac{e}{h} \sum_n [\mathcal{E}_{n,k_n} - \mathcal{E}_{n,-k_n}], \tag{86}
\end{aligned}$$

и возвращаемся к формуле (15). Как видно, холловская проводимость σ_{yx} при наличии примеси удивительным образом не изменилась. Несмотря на то, что, как мы видели выше, примесь уменьшила число токонесящих (неотщепленных) состояний, их вклад в холловский ток увеличился.

Задачи

1. Пусть квадрат волновой функции в z направлении имеет вид $\varphi^2(z) = (A/z_0) \exp(-z/z_0)$ при $z > z_0$. Считая, что δ -центры распределены равномерно с объемной концентрацией n_{imp}^{3D} , вычислить при $E < E_0 \approx Au/(2\pi l_H^2 z_0)$ плотность состояний на нижнем уровне Ландау.
2. Для нижнего уровня Ландау показать, что каждое новое состояние занимает площадь $2\pi l_H^2$.
3. Найти энергии отщепленных состояний на нижнем уровне Ландау при наличии двух слабых δ -центров с силами u_1 и u_2 , расположенных на расстоянии d друг от друга, считая, что $n_L u_{1,2} \ll \omega_c$.
4. Найти энергии отщепленных состояний на нижнем уровне Ландау при наличии слабого магнитного δ -центра, считая, что его взаимодействие с электроном описывается гамильтонианом следующего вида $V_{\text{eff}}(\mathbf{r}) = J\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)\mathbf{S} \cdot \mathbf{s}$, где $\mathbf{s}$ – это оператор спина электрона, а $\mathbf{S}$ – оператор спина $S = 1/2$ магнитной примеси.
5. Найти энергии отщепленных состояний на нижнем уровне Ландау при наличии двух слабых магнитных δ -центров, расположенных на расстоянии $d \ll l_H$. Считать, что их взаимодействие с электроном описывается гамильтонианом $V_{\text{eff}}(\mathbf{r}) = J\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{s} + J\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_2)\mathbf{S}_2 \cdot \mathbf{s}$, где $\mathbf{s}$ – оператор спина электрона, а $\mathbf{S}_{1,2}$ – операторы спина $S = 1/2$ магнитных примесей.

5. ПЛАВНЫЙ СЛУЧАЙНЫЙ ПОТЕНЦИАЛ

Случайный потенциал общего вида можно представить в виде суммы

$$V(\mathbf{r}) = V_w(\mathbf{r}) + V_{\text{scat}}(\mathbf{r}) + V_s(\mathbf{r}). \quad (87)$$

Здесь $V_w(\mathbf{r})$ имеет большой корреляционный радиус, быстро меняется, но мал: $\max |V_w| \ll \hbar\omega_c$. Потенциал $V_{\text{scat}}(\mathbf{r})$ есть сумма потенциалов рассеяния, т.е. потенциалов с малым радиусом взаимодействия. Потенциал $V_s(\mathbf{r})$ – это плавный потенциал, ограниченный условием $|\nabla V_s| \ll \hbar\omega_c/l_H$ (рис. 11). В физической системе, в которой создан двумерный электронный газ, например, в гетероструктуре, V_w создается слабыми примесями, расположенными вдали от двумерного слоя, потенциал V_{scat} возникает от заряженных примесей внутри инверсионного слоя, а также от поверхностных дефектов, и V_s возникает из-за флуктуаций концентрации примесей и из-за наличия крупномасштабных неоднородностей.

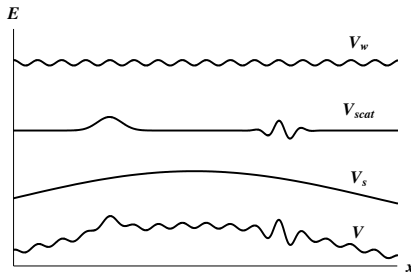


Рис. 11. Одномерное схематическое изображение потенциалов (87).

Случайный потенциал V_w не приводит к интересным эффектам. Действительно, рассмотрим гамильтониан

$$\mathcal{H}_0 + \lambda V_w(\mathbf{r}) = \frac{1}{2m_e} \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 + \lambda V_w(\mathbf{r}), \quad (88)$$

где λ – произвольный параметр. При $\lambda = 0$ спектр гамильтониана есть $\mathcal{E}_n = \hbar\omega_c(n + 1/2)$, $n = 0, 1, \dots$. При произвольном λ

справедливо соотношение

$$\frac{d\mathcal{E}_n(\lambda)}{d\lambda} = (V_w)_{nn}, \quad (89)$$

где $(V_w)_{nn}$ – диагональный матричный элемент потенциала V_w . Отсюда

$$|\mathcal{E}_n(1) - \mathcal{E}_n(0)| = \left| \int_0^1 d\lambda (V_w)_{nn} \right| \leq \max V_w \ll \hbar\omega_c. \quad (90)$$

Полученная оценка гарантирует, что спектр гамильтониана $\mathcal{H} + V_w(\mathbf{r})$ мало отличается от спектра $\hbar\omega_c(n + 1/2)$. В частности, в нем остается конечная щель порядка $\hbar\omega_c$.

Рассмотрим теперь движение электрона в магнитном поле в плавном потенциале $V_s(\mathbf{r})$ (см. [23, 24, 25]). Запишем еще раз гамильтониан

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + V_s(x, y), \quad \mathcal{H}_0 = \frac{1}{2m_e} \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2. \quad (91)$$

Сделаем следующее преобразование координат:

$$\begin{aligned} x &= X + \eta_x, & y &= Y + \eta_y, \\ \eta_{x,y} &= \mp \frac{l_H^2}{\hbar} (p_{y,x} - eA_{y,x}). \end{aligned} \quad (92)$$

Координаты X и Y имеют смысл координат центра классической орбиты и описывают ее дрейф, а $\eta_{x,y}$ отвечают координатам электрона в системе отсчета, в которой классическая орбита покоится.

Легко проверить, что выполняются следующие коммутационные соотношения:

$$\begin{aligned} [X, Y] &= -il_H^2, & [\eta_x, \eta_y] &= il_H^2, & [X, \eta_\alpha] &= 0, \\ [Y, \eta_\alpha] &= 0, & [x, \eta_y] &= il_H^2, & [y, \eta_x] &= -il_H^2. \end{aligned} \quad (93)$$

Тогда гамильтониан можно записать как

$$\mathcal{H} = \frac{\hbar\omega_c}{2l_H^2} (\eta_x^2 + \eta_y^2) + V_s(X + \eta_x, Y + \eta_y). \quad (94)$$

Уравнения движения для операторов $\eta_{x,y}$ имеют вид

$$\dot{\eta}_x = \frac{i}{\hbar}[\mathcal{H}, \eta_x] \approx \omega_c \eta_y + \frac{l_H^2}{\hbar} \frac{\partial V_s}{\partial Y}, \quad (95)$$

$$\dot{\eta}_y = \frac{i}{\hbar}[\mathcal{H}, \eta_y] \approx -\omega_c \eta_x - \frac{l_H^2}{\hbar} \frac{\partial V_s}{\partial X}. \quad (96)$$

Пренебрегая последним членом в этих уравнениях в силу условия плавности потенциала $|\nabla V_s| \ll \hbar \omega_c / l_H$, найдем

$$\dot{\eta}_x = \omega_c \eta_y, \quad \dot{\eta}_y = -\omega_c \eta_x. \quad (97)$$

Уравнения движения для координат X и Y будут следующие:

$$\begin{aligned} \dot{X} &= \frac{i}{\hbar}[\mathcal{H}, X] = -\frac{i}{\hbar}[V_s(x, y), \eta_x] = \\ &= -\frac{i l_H^2}{\hbar^2}[p_y, V_s(x, y)] \approx -\frac{l_H^2}{\hbar} \frac{\partial V_s(X, Y)}{\partial Y}, \end{aligned} \quad (98)$$

$$\begin{aligned} \dot{Y} &= \frac{i}{\hbar}[\mathcal{H}, Y] = -\frac{i}{\hbar}[V_s(x, y), \eta_y] = \\ &= \frac{i l_H^2}{\hbar}[p_x, V_s(x, y)] \approx \frac{l_H^2}{\hbar} \frac{\partial V_s(X, Y)}{\partial X}. \end{aligned} \quad (99)$$

Уравнения (98) и (99) полезно записать в виде

$$\dot{X} = -\frac{1}{m_e \omega_c} \frac{\partial V_s(X, Y)}{\partial Y}, \quad \dot{Y} = \frac{1}{m_e \omega_c} \frac{\partial V_s(X, Y)}{\partial X}. \quad (100)$$

Подчеркнем, что в главном приближении по малому параметру $l_H |\nabla V_s| / \hbar \omega_c \ll 1$ квантовые операторы X и Y подчиняются классическим уравнениям (100) (в них отсутствует $\hbar$). Пренебрегая тем, что X и Y не коммутируют друг с другом, т.е. рассматривая их как классические величины, найдем в адиабатическом приближении, что спектр гамильтониана(91) определяется выражением

$$\mathcal{E}_n = \hbar \omega_c (n + 1/2) + V_s(X, Y), \quad (101)$$

причем X и Y являются решением уравнения

$$\epsilon_n = \mathcal{E}_n - \hbar\omega_c(n + 1/2) = V_s(X, Y), \quad (102)$$

которое есть не что иное, как уравнение эквипотенциальной линии.

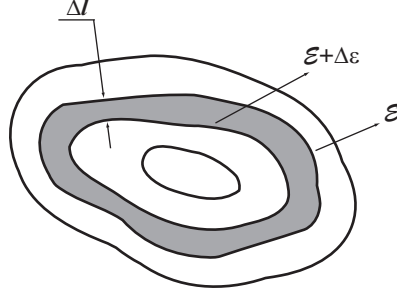


Рис. 12. Уровни плавного потенциала вблизи локального максимума.

Таким образом, можно сказать, что частица с энергией $\mathcal{E}$ совершает быстрое циклотронное вращение в магнитном поле, приводящее к образованию уровней Ландау. При этом центр орбиты дрейфует по эквипотенциальной линии, задаваемой уравнением (102), со скоростью равной $v_d = |\nabla V_s|/m_e\omega_c$, как следует из (100). Из-за наличия магнитного поля скорость дрейфа направлена всегда строго в одну сторону.

На данном уровне Ландау (при фиксированном n) имеется много состояний. Плавный потенциал снимает их вырождение: каждому из них соответствует своя эквипотенциальная линия. Рассмотрим две эквипотенциальные линии, которые соответствуют близким состояниям с энергиями $\mathcal{E}$ и $\mathcal{E} + \Delta\epsilon$ (рис. 12). Площадь, заключенная между этими эквипотенциальными линиями, может быть вычислена как

$$\begin{aligned} \Delta S &= \oint du \Delta l \sqrt{X_u^2 + Y_u^2} = \oint du \frac{\Delta\epsilon}{|\nabla V|} \sqrt{X_u^2 + Y_u^2} = \\ &= \frac{l_H^2}{\hbar} \Delta\epsilon \oint \frac{du}{\dot{u}} = l_H^2 \frac{T \Delta\epsilon}{\hbar}. \end{aligned} \quad (103)$$

Здесь мы считали, что эквипотенциальная линия параметризуется как $X = X(u)$ и $Y = Y(u)$. Используя квазиклассическое условие квантования для периода движения по эквипотенциальной линии T

$$T\Delta\epsilon = 2\pi\hbar, \quad (104)$$

находим площадь между эквипотенциальными линиями

$$\Delta S = 2\pi l_H^2. \quad (105)$$

Таким образом, несмотря на наличие плавного потенциала, в главном приближении по его градиентам, каждое состояние на уровне Ландау занимает площадь $2\pi l_H^2$.

Найдем явно волновую функцию, соответствующую состоянию на n -м уровне Ландау. Рассмотрим эквипотенциальную линию $V_s(X, Y) = \mathcal{E}_n - \hbar\omega_c(n + 1/2)$. Сделаем локальный поворот системы координат от (x, y) к (x', y') , так чтобы вблизи точки (X, Y) уравнение эквипотенциальной линии стало $Y' = 0$. Тогда в калибровке $A_{x'} = -By'$, $A_{y'} = A_{z'} = 0$ уравнение Шредингера для гамильтониана (91) примет вид

$$\left[\frac{1}{2m_e} \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial x'} - \frac{eBy'}{c} \right)^2 - \frac{\hbar^2}{2m_e} \frac{\partial^2}{\partial y'^2} + V_s(y') - \mathcal{E} \right] \psi_n(x', y') = 0. \quad (106)$$

Считая, что x' – медленная переменная, пренебрегая в уравнении производными по x' и производными от случайного потенциала, $V_s(y') \approx V_s(0)$, найдем

$$\psi_n(x', y') = C(x')\phi_n(y'), \quad (107)$$

где функция $\phi_n(y)$ определена в (10). Неизвестную функцию $|C(x')|$ можно найти из условия нормировки. Потребуем, чтобы интеграл от модуля квадрата волновой функции (107) вдоль эквипотенциальной линии равнялся единице:

$$\int dx' |C(x')|^2 \sqrt{X_{x'}^2 + Y_{x'}^2} = 1. \quad (108)$$

Тогда получим

$$|C(x')|^2 = \frac{\hbar}{l_H^2 T |\nabla V_s(X, Y)|}. \quad (109)$$

Таким образом, можно сказать, что волновая функция сосредоточена в области ширины порядка l_H от эквипотенциальной линии.

До сих пор мы рассматривали какой-то заданный плавный потенциал. Введем теперь в задачу случайность. Пусть случайный плавный потенциал будет устроен следующим образом. Среднее значение потенциала равно нулю $\langle V_s \rangle = 0$. Вероятность того, что $V_s(X, Y) = \epsilon$ есть $\rho(\epsilon)$:

$$\text{Prob}[V_s(X, Y) = \epsilon] = \rho(\epsilon). \quad (110)$$

Коррелятор $\langle V_s(0, 0) V_s(X, Y) \rangle$ быстро спадает с расстоянием. Здесь $\langle \dots \rangle$ означает усреднение по реализациям случайного потенциала. Тогда если мы закрасим области, где выполняется условие $V_s(X, Y) < \epsilon$, то состояния с энергией ϵ будут сосредоточены у границ этих областей, при этом $\rho(\epsilon)$ дает нормированную на единицу плотность этих состояний. Скажем, если для определенности мы рассматриваем нижний уровень Ландау, то физическая плотность состояний будет $\rho(\epsilon)/2\pi l_H^2$. Очевидно, вероятность того, что точка с координатами (X, Y) закрашена, равна

$$p(\epsilon) = \text{Prob}[V_s(X, Y) < \epsilon] = \int_{-\infty}^{\epsilon} \rho(\epsilon) d\epsilon. \quad (111)$$

Если при данной энергии все эквипотенциальные линии замкнуты, т.е. закрашенные области не пересекаются, то состояния с данной энергией локализованы. Если же имеется эквипотенциальная линия, которая не замкнута, т.е. по закрашенной области можно пересечь весь образец, то состояние с соответствующей энергией делокализовано. Если потенциал $V_s(X, Y)$ и граничные условия симметричны относительно взаимной замены X на Y , то эквипотенциальная линия должна проходить

от края до края образца, как вдоль направления оси X , так и вдоль направления оси Y (рис. 13). Так как эквипотенциальные линии при разных энергиях пересекаться не могут, то обе эквипотенциальные линии должны соответствовать одной энергии ϵ_c . Таким образом, если делокализованное состояние существует, то оно реализуется только при одной энергии ϵ_c .

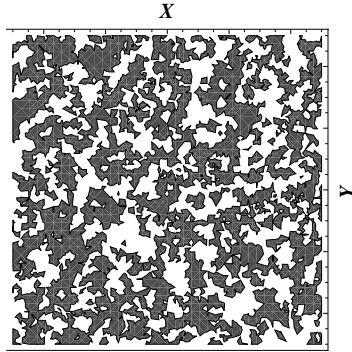


Рис. 13. Случайный потенциал на пороге протекания. Области с $V_s(X, Y) < \epsilon_c$ закрашены. Эквипотенциальные линии $V_s(X, Y) = \epsilon_c$ проходят по границам закрашенной области.

Задача нахождения энергии ϵ_c делокализованного состояния в случайном плавном потенциале сводится к задаче о перколяции [26]. Согласно (111) точка с координатами (X, Y) закрашивается с вероятностью $p(\epsilon)$. Протекание, т.е. появление закрашенной области, по которой можно пройти от одной границы до другой, будет происходить при некотором критическом значении вероятности закрашивания $p_c = p(\epsilon_c)$. При $\epsilon \rightarrow \epsilon_c$ в задаче возникает масштаб, который принято называть корреляционной длиной $\xi_{cl} \sim |\epsilon - \epsilon_c|^{-\nu_{cl}}$, где критический индекс $\nu_{cl} = 4/3$ [27]. В частности, вероятность возникновения связанного закрашенного кластера с размером L большим, чем корреляционная длина, оказывается экспоненциально мала и примерно равна $\exp(-L/\xi_{cl})$. Отметим, что именно расходимость корреляционной длины при $\epsilon = \epsilon_c$ сигнализирует о возможности протекания.

Предположим, что случайный потенциал ограничен по величине $|V_s(X, Y)| < M$. Покажем тогда, что в конечном электрическом поле $|E| \ll \hbar\omega_c/|e|l_H$ доля делокализованных состояний f_∞ удовлетворяет неравенству

$$f_\infty > \frac{|eE|l_H}{\hbar\omega_c}. \quad (112)$$

Рассмотрим двумерный электронный газ, который занимает полосу размера L вдоль оси x и бесконечную вдоль оси y . Будем считать, что электрическое поле направлено вдоль оси y . Пусть функция $G(x) = 1$ для $0 < x < L$, $G(x) = 0$ при $x < -d$ и $x > L + d$, и наконец $G(x)$ гладко переходит из 0 в 1 в промежутках. Тогда определим

$$\tilde{V}_s(X, Y) = V_s(X, Y)G(X) - eEY. \quad (113)$$

Рассмотрим делокализованное состояние с энергией $\epsilon = -eEY_d$. В области $0 < x < L$ эквипотенциальная линия имеет координату Y , удовлетворяющую условию $|Y - Y_d| = |V(X, Y)/eE| < < M/|eE|$. Рассмотрим теперь два делокализованных состояния с энергиями $\epsilon = -eEY_d$ и $\epsilon + \Delta\epsilon = -eE(Y_d + \Delta Y_d)$. Тогда при $0 < x < L$ эти две эквипотенциальные линии находятся на расстоянии δY , которое можно оценить как

$$\delta Y = -\frac{eE\Delta Y_d}{dV_s/dY - eE}. \quad (114)$$

Так как закрашенная площадь соответствует плотности состояний, то при $|eE|l_H \ll \hbar\omega_c$ доля делокализованных состояний будет

$$f_\infty > \frac{|\delta Y|}{|\Delta Y_d|} = \frac{|eE|}{|dV_s/dY|} > \frac{|eEl_H|}{\hbar\omega_c}. \quad (115)$$

Заметим, что в приведенных выше рассуждениях мы нигде не использовали тот факт, что потенциал случайный, т.е. точка с координатами (X, Y) закрашивается с вероятностью $p(\epsilon)$. Для этой ситуации можно предположить, что

$$f_\infty \sim \left(\frac{|eE|l_H}{\hbar\omega_c} \right)^q, \quad (116)$$

где показатель $q \leq 1$. Точный расчет теории перколяции дает значение $q = 41/84$ [24]. При нулевой температуре f_∞ определяет ширину зоны делокализованных состояний в присутствии конечного электрического поля:

$$\delta\epsilon_c \propto \Gamma \left(\frac{|eE|l_H}{\hbar\omega_c} \right)^q, \quad (117)$$

где Γ – ширина уровня Ландау.

Как мы видели выше, центр орбиты частицы с энергией $\epsilon_n = \mathcal{E} - \hbar\omega_c(n + 1/2)$ дрейфует по эквипотенциальным линиям потенциала, определяемым соотношением $V_s(X, Y) = \epsilon_n$. В таком, по существу, классическом рассмотрении, мы полностью пренебрегли некоммутативностью координат: $[X, Y] = -il_H^2$. Это законно, если эквипотенциальные линии находятся друг от друга на расстояниях много больших, чем l_H . Однако бывают случаи, когда это нарушается. Например, две замкнутые эквипотенциальные линии, соответствующие одной и той же энергии ϵ_n , подходят к друг другу на расстояние порядка l_H (рис. 14). При классическом рассмотрении вероятность того, что частица перейдет с одной эквипотенциальной линии на другую, равна нулю. Вероятность будет отлична от нуля, если учесть возможность квантового туннелирования [28]. Для вопроса о существовании делокализованного состояния возможность такого квантового туннелирования принципиальна.

Вернемся к гамильтониану (91), который действует на волновые функции $\psi(x, y)$. Переходя к координатам (X, Y) , (η_x, η_y) и пользуясь малостью градиентов плавного потенциала V_s , получаем с помощью (94) приближенное уравнение Шредингера

$$\left[\frac{\hbar\omega_c}{2l_H^2} \left(-l_H^4 \frac{\partial^2}{\partial \eta_x^2} + \eta_x^2 \right) + V_s \left(X, il_H^2 \frac{\partial}{\partial X} \right) \right] \psi(X, \eta_x) = \mathcal{E} \psi(X, \eta_x). \quad (118)$$

Так как переменные X и η_x разделились, то ищем волновую функцию в виде

$$\psi(X, \eta_x) = C(X)\phi_n(\eta_x). \quad (119)$$

Тогда функция $C(X)$ удовлетворяет уравнению

$$V_s(X, il_H^2 \partial_X) C(X) = \epsilon_n C(X). \quad (120)$$

В квазиклассическом ВКБ приближении решение уравнения (120) будем искать в виде:

$$C(X) = \exp \frac{1}{il_H^2} \left[S_0(X) + il_H^2 S_1(X) + \dots \right]. \quad (121)$$

Подставляя это представление в уравнение (120), получим

$$\begin{aligned} \epsilon_n = & V_s(X, S'_0(X)) + il_H^2 S'_1(X) \frac{\partial V_s(X, Y)}{\partial Y} \Big|_{Y=S'_0(X)} + \\ & + \frac{il_H^2}{2} S''_0(X) \frac{\partial^2 V_s(X, Y)}{\partial Y^2} \Big|_{Y=S'_0(X)} + O(l_H^4). \end{aligned} \quad (122)$$

Определим действительную функцию $Y(X)$ как одно из решений уравнения $V_s(X, Y) = \epsilon_n$. Вообще говоря, таких решений может быть несколько: обозначим их как $Y_i(X)$. Например, если $V_s(X, Y) = V_0(Y^2 + X^2)/a^2$, то $Y_i(X) = \pm \sqrt{a^2 \epsilon_n / V_0 - X^2}$ при $|X| < a\sqrt{\epsilon/V_0}$. Тогда из уравнения (122) находим

$$C_i(X) = P_i(X)^{-1/2} \exp \left(-il_H^{-2} \int^X dx Y_i(x) \right), \quad (123)$$

где функция $P_i(X)$ удовлетворяет уравнению

$$P'_i(X) = P_i(X) Y'_i(X) \frac{\partial}{\partial Y} \ln \frac{\partial V_s(X, Y)}{\partial Y} \Big|_{Y=Y_i(X)}. \quad (124)$$

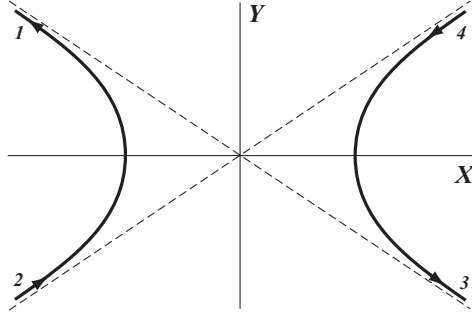


Рис. 14. Схематическое изображение области пространства около седловой точки, где потенциал имеет вид $V(X, Y) = V_0 + U_Y Y^2 - U_X X^2$. Сплошные линии показывают эквипотенциальные линии с энергией $\epsilon < V_0$. (Из работы [28])

Заметим, что если потенциал $V_s(X, Y) = F(X) + G(Y)$, то $P_i(X) = dG(Y_i)/dY_i$.

Рассмотрим окрестность седловой точки, вблизи которой существуют две эквипотенциальные линии, соответствующие одной энергии, $V_s(X, Y) = \epsilon_n < V_0$ (рис. 14). Разлагая потенциал $V_s(X, Y)$ в ряд по степеням координат и ограничиваясь вторым порядком, можно представить его в виде

$$V_s(X, Y) = V_0 + U_Y Y^2 - U_X X^2, \quad U_Y, U_X > 0. \quad (125)$$

Обозначим решения уравнения $V_s(X, Y) = \epsilon_n$ следующим образом (рис. 14):

$$\begin{aligned} Y_{1,2}(X) &= \pm \frac{1}{\sqrt{U_Y}} \sqrt{U_X X^2 + \epsilon_n - V_0}, & X < 0, \\ Y_{3,4}(X) &= \mp \frac{1}{\sqrt{U_Y}} \sqrt{U_X X^2 + \epsilon_n - V_0}, & X > 0. \end{aligned} \quad (126)$$

Удобно ввести безразмерные переменные $\rho = (U_X/U_Y)^{1/4} X/l_H$ и $\gamma = (V_0 - \epsilon_n)/\sqrt{l_H^4 U_X U_Y} > 0$, тогда уравнение (120) примет вид

$$-\partial_\rho^2 C(\rho) - \rho^2 C(\rho) + \gamma C(\rho) = 0. \quad (127)$$

Будем считать, что асимптотика функции $C(X)$ равна

$$C(X) = \begin{cases} a_1 C_1(X) + a_2 C_2(X), & X \rightarrow -\infty, \\ a_3 C_3(X) + a_4 C_4(X), & X \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (128)$$

Функции $C_i(X)$, определенные уравнением (123), будем считать нормированными. При данном выборе знаков в уравнении (126) функции $C_{2,4}(X)$ описывают частицу, налетающую на область вблизи центра координат $X = Y = 0$, а функции $C_{1,3}(X)$ наоборот соответствуют частице, выходящей из этой области. Задача состоит в том, чтобы связать коэффициенты $a_{2,4}$ с коэффициентами $a_{1,3}$. Эту связь удобно описывать трансфер-матрицей:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \mathbb{T} \begin{pmatrix} a_3 \\ a_4 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{T} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix}. \quad (129)$$

Коэффициенты a_j связаны между собой соотношением $|a_1|^2 + |a_3|^2 = |a_2|^2 + |a_4|^2$, которое выражает собой сохранение полной вероятности: частицы не исчезают в области квантового туннелирования. Заметим, что если $a_2 = 1$, а $a_4 = 0$, то тогда у нас возникает обычная задача рассеяния для одномерного уравнения (127). Поэтому коэффициенты $a_3 = t$ и $a_1 = r$, где t и r – это амплитуды прохождения и отражения, соответствующие (127). Приведенные выше рассуждения позволяют выразить элементы трансфер-матрицы через величины t и r :

$$\mathbb{T} = \begin{pmatrix} r/t & 1/t^* \\ 1/t & r^*/t^* \end{pmatrix}. \quad (130)$$

Применяя уравнения (123) для рассматриваемого вида потенциала $V_s(X, Y)$, найдем при $|\rho| \rightarrow \infty$ следующую асимптотику функции $C(\rho)$

$$C(\rho) = \begin{cases} t\rho^{-i\gamma/2-1/2}e^{i\rho^2/2}, & \rho \rightarrow +\infty, \\ |\rho|^{i\gamma/2-1/2}e^{-i\rho^2/2} + r|\rho|^{-i\gamma/2-1/2}e^{i\rho^2/2}, & \rho \rightarrow -\infty. \end{cases} \quad (131)$$

Заметим, что $|t|$ и $|r|$ могут быть найдены из асимптотических выражений (131) с помощью обхода точки $\rho = 0$ в комплексной плоскости (см., [1]). Мы воспользуемся точным решением уравнения (127). Как известно, существует два линейно независимых решения $D_\nu(\sqrt{2}e^{i\pi/4}\rho)$ и $D_\nu(-\sqrt{2}e^{i\pi/4}\rho)$, где $\nu = i\gamma/2 - 1/2$. Запишем волновую функцию в виде их линейной комбинации

$$C(\rho) = c_+ D_\nu(\sqrt{2}e^{i\pi/4}\rho) + c_- D_\nu(-\sqrt{2}e^{i\pi/4}\rho). \quad (132)$$

Пользуясь следующими выражениями для асимптотик функций параболического цилиндра при $z \rightarrow +\infty$:

$$D_\nu(z) = z^\nu e^{-z^2/4}, \quad (133)$$

$$D_\nu(-z) = e^{-i\pi\nu} z^\nu e^{-z^2/4} + \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(-\nu)} z^{-\nu-1} e^{z^2/4}, \quad (134)$$

найдем, что если выбрать коэффициенты $c_\pm$, равными

$$c_+ = \frac{2^{\nu/2} e^{-i\pi\nu/4}}{e^{-i\pi\nu} - e^{i\pi\nu}}, \quad c_- = -\frac{2^{\nu/2} e^{i3\pi\nu/4}}{e^{-i\pi\nu} - e^{i\pi\nu}}, \quad (135)$$

то волновая функция (132) будет иметь нужную нам асимптотику (131). Отсюда находим

$$r = -ie^{-i\phi(\gamma)}[1 + e^{\pi\gamma}]^{-1/2}, \quad t = e^{-i\phi(\gamma)}e^{\pi\gamma/2}[1 + e^{\pi\gamma}]^{-1/2}, \quad (136)$$

$$\phi(\gamma) = \arg \Gamma(1/2 - i\gamma/2) - \frac{\gamma}{2} \ln 2.$$

При выводе мы воспользовались соотношением для гамма-функции

$$\left| \Gamma\left(\frac{1-i\gamma}{2}\right) \right|^2 = \frac{\pi}{\operatorname{ch}(\gamma/2)}. \quad (137)$$

Таким образом, для интересующей нас трансфер-матрицы мы находим следующее выражение

$$\mathbb{T} = \begin{pmatrix} -ie^{-\pi\gamma/2}, & e^{-i\phi(\gamma)}\sqrt{1+e^{-\pi\gamma}} \\ e^{i\phi(\gamma)}\sqrt{1+e^{-\pi\gamma}} & ie^{-\pi\gamma/2} \end{pmatrix}. \quad (138)$$

Сохранение потока вероятности $|a_1|^2 + |a_3|^2 = |a_2|^2 + |a_4|^2$ определяет общий вид трансфер-матрицы:

$$\mathbb{T} = \begin{pmatrix} e^{i\phi_1} & 0 \\ 0 & e^{i\phi_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{sh } \theta & \text{ch } \theta \\ \text{ch } \theta & \text{sh } \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\phi_3} & 0 \\ 0 & e^{i\phi_4} \end{pmatrix}. \quad (139)$$

Для рассматриваемого нами случая

$$\text{sh } \theta = e^{-\pi\gamma/2}, \quad \phi_1 = \phi_3 = -\frac{\pi}{2}, \quad \phi_2 = -\phi_4 = \phi(\gamma). \quad (140)$$

Отметим, что фазы ϕ_i можно исключить из рассмотрения, переопределив амплитуды $a_j \rightarrow a_j e^{-i\phi_j}$. Тогда трансфер-матрица станет действительной. Перепишем результат (130), как

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_4 \end{pmatrix} = \mathbb{T}' \begin{pmatrix} a_3 \\ a_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{T}' = \begin{pmatrix} \text{sh } \theta' & \text{ch } \theta' \\ \text{ch } \theta' & \text{sh } \theta' \end{pmatrix}, \quad (141)$$

где, как легко показать, параметры θ и θ' связаны соотношением

$$\text{sh } \theta' \text{sh } \theta = 1. \quad (142)$$

Матрица $\mathbb{T}'$ соответствует картине, повернутой на $\pi/2$. Однако для ситуации общего положения, когда есть симметрия задачи относительно X и Y , протекание должно быть одновременно возможно, как в направлении оси X , так и в направлении оси Y . Это означает, что частица может с равной вероятностью туннелировать, как вдоль оси X , так и вдоль оси Y . Значение параметра θ , при котором такое возможно, определяет соотношением $\theta'_c = \theta_c$, т.е. $\text{sh } \theta_c = 1$. Отсюда $\theta_c = \ln(1 + \sqrt{2}) \approx 0.88$ и $\epsilon_n^c = V_0$.

Рассмотрим, как учет квантового туннелирования модифицирует результат классической теории перколяции для показателя корреляционной длины [29]. Будем рассматривать случайный потенциал с нулевым средним $\langle V_s(X, Y) \rangle = 0$. Тогда протекание будет возможно при $\epsilon_n^c = 0$. Как упоминалось выше, теория классической перколяции дает следующую зависимость размера кластера одного цвета от энергии $\xi_{\text{cl}}(\epsilon_n) \sim |\epsilon_n|^{-\nu_{\text{cl}}}$, где

показатель $\nu_{\text{cl}} = 4/3$. Нас будет интересовать поведение усредненной по реализациям случайного потенциала функции Грина $\mathcal{G}(X, X'; \epsilon_n)$ для уравнения (120) при $|X - X'| \rightarrow \infty$. Более точно, нас будет интересовать величина

$$\xi^{-1}(\epsilon_n) \sim \lim_{|X - X'| \rightarrow \infty} \frac{\langle \ln |\mathcal{G}(X, X'; \epsilon_n)| \rangle}{|X - X'|}. \quad (143)$$

Существование этого предела означает, что функция Грина экспоненциально затухает с увеличением расстояния $|X - X'|$.

Функция Грина $\mathcal{G}(\rho, \rho')$ для уравнения (127) удовлетворяет уравнению

$$[\partial_\rho^2 + \rho^2 - \gamma] \mathcal{G}(\rho, \rho') = \delta(\rho - \rho') \quad (144)$$

и в квазиклассическом приближении имеет вид

$$\mathcal{G}(\rho, \rho') = -\frac{2i}{\sqrt{p(\rho)p(\rho')}} \exp \left[i \operatorname{sign}[\rho - \rho'] \int_{\rho'}^{\rho} du p(u) \right], \quad (145)$$

где $p(\rho) = \sqrt{\rho^2 - \gamma}$. Введем координаты $R = (\rho + \rho')/2$ и $x = \rho - \rho'$ и будем считать, что координата центра масс R меняется медленно по сравнению с координатой относительного движения x . Тогда

$$\mathcal{G}(\rho, \rho') \approx -\frac{2i}{|p(R)|} \exp [ip(R)|x|]. \quad (146)$$

Возвращаясь к размерным переменным, из формулы (146) получаем, что

$$\xi^{-1}(\epsilon_n) \sim \langle \operatorname{Im} Y(X) \rangle. \quad (147)$$

Вместо усреднения по разным реализациям случайного потенциала будем проводить усреднение по положению седловых точек, в которых $V_s(X, Y) = 0$ и происходит квантовое туннелирование с одной эквипотенциальной линии на другую. Так как в случайном плавном потенциале типичное расстояние между седловыми точками равно корреляционной длине ξ_{cl} теории

классической перколяции, то среднее в уравнении (147) можно оценить как

$$\xi^{-1}(\epsilon_n) \sim \xi_{\text{cl}}^{-1}(\epsilon_n) \text{Im} \int dX Y(X). \quad (148)$$

Учитывая, что $Y(X) = \sqrt{(U_x X^2 + \epsilon_n)/U_Y}$, находим

$$\xi^{-1}(\epsilon_n) \sim \xi_{\text{cl}}^{-1}(\epsilon_n) |\epsilon_n|. \quad (149)$$

Учитывая, что в теории классической перколяции $\xi_{\text{cl}} \sim |\epsilon_n|^{-4/3}$, окончательно получаем

$$\xi(\epsilon_n) \sim |V_0 - \epsilon_n|^{-\nu_q}, \quad \nu_q = 7/3. \quad (150)$$

Как мы видели в предыдущей главе, случайный потенциал может приводить к уширению уровня Ландау, а значит, к сильной зависимости плотности состояний на уровне Ландау от энергии. В проведенном выше рассмотрении этот эффект во внимание не принимался, так как рассматривались состояния с энергией $|\epsilon_n| \ll [\langle V_s^2 \rangle]^{1/2}$, т.е. вблизи центра уровня Ландау, где плотность состояний можно считать постоянной. Здесь $[\langle V_s^2 \rangle]^{1/2}$ – это значение среднеквадратичной флуктуации случайного потенциала. Кроме этого, мы предполагали, что применимо квазиклассическое рассмотрение. Это означает, что все расстояния должны быть велики по сравнению с магнитной длиной l_H . При вычислении корреляционной длины характерное значение X , которое возникает, равно $\sqrt{|\epsilon_n|/U_X}$. Оценивая величину U_X как $[\langle V_s^2 \rangle]^{1/2}/d$, где d – типичная длина, на которой меняется случайный потенциал, получаем неравенство $|\epsilon_n|/[\langle V_s^2 \rangle]^{1/2} \gg l_H^2/d^2$, которое ограничивает применимость формулы (150).

Рассмотрим сеть эквипотенциальных линий случайного плавного потенциала при какой-то энергии вблизи порога протекания. Как видно из рис. 15, сеть состоит из эквипотенциальных линий, окружающих случайно разбросанные холмы и

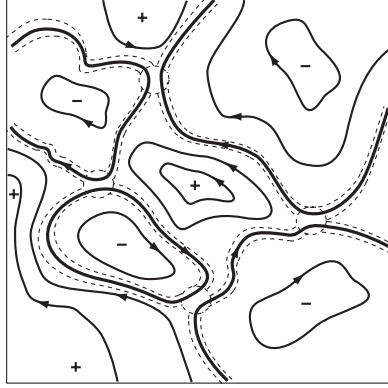


Рис. 15. Схематическое изображение эквипотенциальных линий для случайного потенциала $V_s(X, Y)$. Стрелки указывают направление дрейфа центра орбиты, знаки $+$ и $-$ обозначают максимумы и минимумы потенциала, и жирные линии обозначают эквипотенциальные линии энергии ϵ_n , $V_s(X, Y) = \epsilon_n$. Части эквипотенциальных линий между пунктирными кривыми являются прототипами ребер, а области внутри пунктирных окружностей, где возможно квантовое туннелирование, прототипами узлов в модели Чалкера–Коддингтона (из работы [30]).

впадины потенциала. Между такими эквипотенциальными линиями находятся седловые точки, где возможно квантовое туннелирование. Сделаем существенное упрощение: представим сеть эквипотенциальных линий в виде регулярной сетки так, как изображено на рис. 16. Рассмотрим на этой решетке следующую модель, которая носит имя Чалкера–Коддингтона [30]. Пусть у сетки имеется $2M$ входов слева и, соответственно, $2M$ выходов справа. Зададим на входе в сетку набор из $2M$ комплексных чисел Z_i , $i = 1, \dots, 2M$, тогда на выходе мы получим, вообще говоря, другой набор из $2M$ комплексных чисел Z'_i , который определяется соотношением

$$Z'_i = T_{ij} Z_j. \quad (151)$$

Трансфер-матрицу T размером $2M \times 2M$ удобно определить

как произведение элементарных трансфер-матриц:

$$\mathbb{T} = \prod_{\alpha=1}^N \mathbb{A}_\alpha \mathbb{B} \mathbb{C}_\alpha \mathbb{D}, \quad (152)$$

где N число элементарных блоков сетки (см. рис. 16). Матрицы $\mathbb{A}_\alpha$, $\mathbb{B}$, $\mathbb{C}_\alpha$, и $\mathbb{D}$ размера $2M \times 2M$ устроены следующим образом:

$$[\mathbb{A}_\alpha]_{ij} = \delta_{ij} e^{i\phi_j(\alpha)}, \quad [\mathbb{C}_\alpha]_{ij} = \delta_{ij} e^{i\phi'_j(\alpha)}. \quad (153)$$

Здесь $\phi_j(\alpha)$, $\phi'_j(\alpha)$ – независимые случайные величины, однородно распределенные по полуинтервалу $[0, 2\pi)$. Матрицы $\mathbb{B}$ и $\mathbb{D}$ блок-диагональные, причем

$$\mathbb{B}_{ij} = \begin{cases} \text{ch } \theta' & , \quad i = j, i = 1, \dots, 2M \\ \text{sh } \theta' & , \quad i = 2k, j = 2k - 1, k = 1, \dots, M \\ \text{sh } \theta' & , \quad i = 2k - 1, j = 2k, k = 1, \dots, M \\ 0 & , \quad \text{иначе,} \end{cases}$$

$$\mathbb{D}_{ij} = \begin{cases} \text{ch } \theta & , \quad i = j, i = 2, \dots, 2M - 1 \\ \text{sh } \theta & , \quad i = 2k, j = 2k + 1, k = 1, \dots, M - 1 \\ \text{sh } \theta & , \quad i = 2k + 1, j = 2k, k = 1, \dots, M - 1 \\ 0 & , \quad \text{иначе,} \end{cases} \quad (154)$$

где параметры θ и θ' связаны соотношением $\text{sh } \theta' = 1/\text{sh } \theta$. Граничные условия имеют вид $\mathbb{D}_{11} = \mathbb{D}_{2M,2M} = \text{ch } \theta$, $\mathbb{D}_{1,2M} = \mathbb{D}_{2M,1} = \text{sh } \theta$ для геометрии цилиндра и $\mathbb{D}_{11} = \mathbb{D}_{2M,2M} = 1$ для геометрии полосы.

Согласно теореме Оселедца [31], существует конечный предел $\mathcal{T} = \lim_{N \rightarrow \infty} (\mathbb{T}^\dagger \mathbb{T})^{1/2N}$. Определим для данного значения M следующую величину

$$\xi_M^{-1} = \min_i \langle |\ln t_i| \rangle, \quad (155)$$

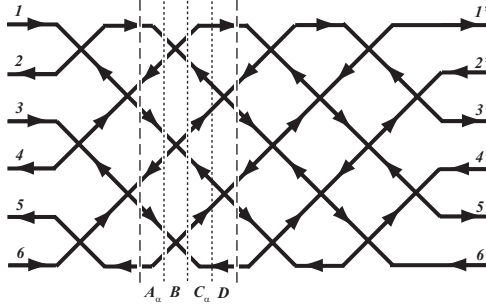


Рис. 16. Сеточная модель для $2M = 6$, $N = 4$. (из работы [30])

где t_i – собственные значения матрицы $T^\dagger T$, а усреднение $\langle \dots \rangle$ производится по случайным фазам $\phi_j(\alpha)$ и $\phi'_j(\alpha)$. Величина ξ_M , которую будем называть корреляционной длиной, определяет как хорошо передается информация от входа сетки к выходу. В частности, соотношение (155) означает, что при $N \gg \xi_M$ значения $|Z'_j| \leq \exp(-N/\xi_M) \max_i |Z_i|$. Корреляционная длина ξ_∞ в бесконечной системе (при $M \rightarrow \infty$) находится из скейлингового соотношения $\xi_M/M = \mathcal{F}(\xi_\infty/M)$, где $\mathcal{F}(x)$ – неизвестная регулярная функция. Численный расчет [30] дает следующий результат для корреляционной длины $\xi_\infty \sim |\theta - \theta_c|^{-\nu}$, где индекс $\nu = 2.35$.

Задачи

1. Доказать, что среднее по времени значение оператора скорости дается выражением $\langle \mathbf{v}(x, y) \rangle = (e\mathbf{E} - \nabla V_s) \times \mathbf{B}/(eB^2)$.
2. Получить асимптотики функции $C(\rho)$ (131) из выражения (123).
3. В квазиклассическом приближении найти функцию Грина $\mathcal{G}(x_1, x_2)$ для гамильтониана осциллятора

$$\mathcal{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{m\omega^2 x^2}{2}. \quad (156)$$

4. Пусть матрица

$$\mathbb{T} = \begin{pmatrix} \alpha e^{-i\phi/2} & \beta e^{i\phi/2} \\ \beta e^{-i\phi/2} & \alpha e^{i\phi/2} \end{pmatrix}, \quad (157)$$

где α , β и ϕ – действительные числа. Считая, что фаза ϕ – случайная гауссова величина с $\langle \phi \rangle = 0$ и $\langle \phi^2 \rangle = \lambda$, найти $\langle \ln \mathbb{T}^\dagger \mathbb{T} \rangle$.

6. САМОСОГЛАСОВАННОЕ БОРНОВСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ

В этом разделе мы будем вычислять плотность состояний $D(E)$ и тензор проводимости σ_{ab} в самосогласованном борновском приближении для δ -коррелированного случайного потенциала. Этот подход в основном был развит в работах Ц. Андо (Т. Ando) и Ю. Уэмура (Y. Uemura) в середине семидесятых годов прошлого века [32, 9].

Напомним, что гамильтониан задачи имеет вид

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m_e}(\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2 + V(\mathbf{r}), \quad V(\mathbf{r}) = u \sum_{j=1}^{\mathcal{N}} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j), \quad (158)$$

где $\mathbf{r}_j$ – это координаты δ -рассеивателей. Как было показано в разделе 4, каждый δ -рассеиватель отщепляет от уровня Ландау одно состояние. Будем считать, что $\mathcal{N} \gg \mathcal{S}/2\pi l_H^2$, тогда вырождение на уровне Ландау полностью снимается.

Считая $\mathcal{N} \gg 1$, вычислим средние $\langle V(\mathbf{r}) \rangle$, $\langle V(\mathbf{r}_1)V(\mathbf{r}_2) \rangle$, $\langle V(\mathbf{r}_1)V(\mathbf{r}_2)V(\mathbf{r}_3) \rangle$ и т.д., где усреднение производится по положению δ -центров. Переходя в импульсное представление и пользуясь соотношением

$$\sum_{j=1}^{\mathcal{N}} \langle e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}_j} \rangle = (2\pi\hbar)^2 n_{\text{imp}} \delta(\mathbf{q}), \quad (159)$$

находим

$$\begin{aligned}
\langle V_1 \rangle &= n_{\text{imp}} u, \\
\langle V_1 V_2 \rangle &= n_{\text{imp}}^2 u^2 + n_{\text{imp}} u^2 \delta_{12}, \\
\langle V_1 V_2 V_3 \rangle &= n_{\text{imp}}^3 u^3 + n_{\text{imp}}^2 u^3 [\delta_{12} + \delta_{23} + \delta_{31}] + n_{\text{imp}} u^3 \delta_{12} \delta_{23}, \\
&\dots
\end{aligned} \tag{160}$$

где для краткости обозначено $V_k \equiv V(\mathbf{r}_k)$, $\delta_{jk} \equiv \delta(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k)$. В дальнейшем будет удобно отсчитывать энергию от значения $\langle V(\mathbf{r}) \rangle = n_{\text{imp}} u$. Также мы пренебрежем всеми вкладками в $\langle V_{k_1} \dots V_{k_n} \rangle$, в которых из-за наличия δ -функций должны совпадать больше двух координат $\mathbf{r}_{k_j}$, например, последним членом в выражении для $\langle V_1 V_2 V_3 \rangle$. Такое приближение называется борновским. Тогда выражения (160) примут вид

$$\begin{aligned}
\langle V_1 \rangle &= 0, \\
\langle V_1 V_2 \rangle &= \gamma \delta_{12}, \\
\langle V_1 V_2 V_3 \rangle &= 0, \\
\langle V_1 V_2 V_3 V_4 \rangle &= \gamma^2 [\delta_{12} \delta_{34} + \delta_{13} \delta_{24} + \delta_{14} \delta_{23}], \\
&\dots
\end{aligned} \tag{161}$$

где $\gamma = n_{\text{imp}} u^2$. Случайный потенциал со средними вида (161) называется гауссовым δ -коррелированным случайным потенциалом.

Будем работать в базисе волновых функций (10), тогда точная запаздывающая и опережающая функции Грина для гамильтониана (158) имеют вид³

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_{\mathcal{E}}^{R,A}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) &= \sum_{nn'; kk'} [\mathcal{G}^{R,A}(\mathcal{E})]_{nn'}^{kk'} \psi_{nk}(\mathbf{r}_1) \psi_{n'k'}^*(\mathbf{r}_2), \\
[[\mathcal{G}^{R,A}(\mathcal{E})]^{-1}]_{nn'}^{kk'} &= \left[\mathcal{E} - \omega_c \left(n + \frac{1}{2} \right) \pm i0 \right] \delta_{nn'} \delta_{kk'} - V_{nn'}^{kk'}. \tag{162}
\end{aligned}$$

³В этом и последующем разделе в промежуточных формулах принята система единиц, в которой $\hbar = c = 1$.

Матричный элемент случайного потенциала удобно представить как

$$\begin{aligned} V_{n_1 n_2}^{k_1 k_2} &= \int d\mathbf{r} \psi_{n_1 k_1}^*(\mathbf{r}) V(\mathbf{r}) \psi_{n_2 k_2}(\mathbf{r}) \\ &= \int \frac{d^2 \mathbf{q}}{(2\pi)^2} \tilde{V}(\mathbf{q}) \delta_{k_1, k_2 + q_y} e^{-iq_x(k_1 + k_2)l_H^2/2} \mathbb{F}_{n_2 n_1}(\mathbf{q}), \end{aligned} \quad (163)$$

где $\tilde{V}(\mathbf{q})$ обозначает фурье-образ случайного потенциала $V(\mathbf{r})$, и

$$\mathbb{F}_{n_1 n_2}(\mathbf{q}) = 2\pi l_H^2 \sum_k \psi_{n_1 k}^*(0) \psi_{n_2 k}(\mathbf{q} l_H^2) e^{iq_x q_y l_H^2/2}. \quad (164)$$

Заметим, что выполняется соотношение $\mathbb{F}_{n_1 n_2}^*(\mathbf{q}) = \mathbb{F}_{n_2 n_1}(-\mathbf{q})$. Величина $\mathbb{F}_{n_1 n_2}(\mathbf{q})$ может быть точно вычислена (см. задачи в конце раздела):

$$\begin{aligned} \mathbb{F}_{n_1 n_2}(\mathbf{q}) &= \left(\frac{n_1!}{n_2!} \right)^{1/2} \left(\frac{q_x + iq_y}{l_H^{-1} \sqrt{2}} \right)^{n_2 - n_1} e^{-q^2 l_H^2/4} \\ &\times L_{n_1}^{n_2 - n_1} \left(\frac{q^2 l_H^2}{2} \right), \end{aligned} \quad (165)$$

где $L_n^{m-n}(x)$ обозначает обобщенный полином Лагерра [33]. В дальнейшем нам понадобится выражение для примесной линии

$$\begin{aligned} I_{n_1 n_2; n_3 n_4}^{k_1 k_2; k_3 k_4} &= \langle V_{n_1 n_2}^{k_1 k_2} V_{n_3 n_4}^{k_3 k_4} \rangle = \gamma \int \frac{d^2 \mathbf{q}}{(2\pi)^2} e^{-iq_x(k_1 - k_4)l_H^2} \\ &\times \delta_{k_1, k_2 + q_y} \delta_{k_4, k_3 + q_y} \mathbb{F}_{n_2 n_1}(\mathbf{q}) \mathbb{F}_{n_4 n_3}(-\mathbf{q}). \end{aligned} \quad (166)$$

Также определим затравочную функцию Грина

$$G_n^{R,A}(\mathcal{E}) = \frac{1}{\mathcal{E} - \omega_c(n + 1/2) \pm i0}. \quad (167)$$

Вычислим функцию Грина $\langle \mathcal{G}(\mathcal{E})^{R,A} \rangle$, усредненную по случайному потенциалу с помощью соотношений (161). В общем

случае это сложная задача, поэтому рассмотрим так называемое самосогласованное борновское приближение. Это приближение, в котором пренебрегается всеми вкладками в $\langle \mathcal{G}(\mathcal{E})^{R,A} \rangle$, которые содержат пересекающиеся примесные линии. Условия применимости этого приближения будут рассмотрены ниже.



Рис. 17. Диаграмма для функции Грина в самосогласованном борновском приближении. Тонкая сплошная линия изображает затравочную функцию Грина $G^R(\mathcal{E})$. Жирная сплошная линия изображает функцию $\langle \mathcal{G}^{R,A}(\mathcal{E}) \rangle$. Пунктирная линия с крестом изображает среднее $\langle V_1 V_2 \rangle$.

В этом приближении усредненная функция Грина удовлетворяет уравнению Дайсона (рис. 17)

$$[\langle \mathcal{G}^R(\mathcal{E}) \rangle]_{nk;n'k'}^{-1} = [G_n^R(\mathcal{E})]^{-1} \delta_{nn'} \delta_{kk'} - \Sigma_{nk;n'k'}^R(\mathcal{E}), \quad (168)$$

где собственно-энергетическая часть имеет вид

$$\Sigma_{n_1 k_1; n_2 k_2}^R(\mathcal{E}) = \sum_{n'n'; kk'} I_{n'n_2; n_1 n}^{k' k_2; k_1 k} \langle \mathcal{G}_{nk; n'k'}^R(\mathcal{E}) \rangle. \quad (169)$$

Будем считать, что выполняется условие $\omega_c \gg |\Sigma_{n_1 k_1; n_2 k_2}^R(\mathcal{E})|$, и поэтому будем искать собственно-энергетическую часть в виде $\Sigma_{nk; n'k'}^R(\mathcal{E}) = \Sigma_n^R(\mathcal{E}) \delta_{nn'} \delta_{kk'}$. Тогда, если $\mathcal{E} = \omega_c(N + 1/2) + \varepsilon$, где $|\varepsilon| \ll \omega_c$, то в главном приближении по малому параметру $|\varepsilon|/\omega_c \ll 1$ получим

$$\Sigma_N^R(\mathcal{E}) = \sum_k I_{NN; NN}^{kk_1; k_1 k} \frac{1}{\mathcal{E} - \omega_c(N + 1/2) - \Sigma_N^R(\mathcal{E})}. \quad (170)$$

С помощью результата

$$\mathbb{F}_{NN}(\mathbf{q}) = l_H^{-1} \exp(-q^2 l_H^2/4) L_N(q^2 l_H^2/2), \quad (171)$$

где $L_N(x)$ обозначает полином Лагерра, находим

$$\sum_k I_{NN;NN}^{kk_1;k_1k} = \gamma \int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^2} |\mathbb{F}_{NN}(\mathbf{q})|^2 = \frac{\gamma}{2\pi l_H^2}. \quad (172)$$

Тогда, решая уравнение (170), получим

$$\Sigma_N^R(\mathcal{E}) = \frac{\mathcal{E} - \omega_c(N + 1/2)}{2} - \frac{i}{2} \sqrt{\Gamma^2 - (\mathcal{E} - \omega_c(N + 1/2))^2}, \quad (173)$$

где знак перед корнем выбран из условия того, что мы ищем собственно-энергетическую часть для запаздывающей функции Грина, а величина

$$\Gamma = 2\sqrt{\frac{\gamma}{2\pi l_H^2}} \ll \omega_c. \quad (174)$$

Далее из уравнения Дайсона находим следующее выражение для запаздывающей функции Грина

$$\langle \mathcal{G}_N^R(\mathcal{E}) \rangle = \frac{2}{\mathcal{E} + i\Gamma(\mathcal{E})}, \quad \Gamma(\mathcal{E}) = \sqrt{\Gamma^2 - \mathcal{E}^2}. \quad (175)$$

Как известно, локальная плотность состояний связана с функцией Грина соотношением:

$$D(\mathcal{E}, \mathbf{r}) = -\frac{1}{\pi} \text{Im} \langle \mathcal{G}_{\mathcal{E}}^R(\mathbf{r}, \mathbf{r}) \rangle. \quad (176)$$

Нас будет интересовать плотность состояний, усредненная по площади, занимаемой двумерным электронным газом:

$$D(\mathcal{E}) = \frac{1}{S} \int d^2\mathbf{r} D(\mathcal{E}, \mathbf{r}) = \sum_{N=0}^{\infty} D_N(\mathcal{E}),$$

$$D_N(\mathcal{E}) = \frac{\Gamma(\epsilon)}{\pi^2 l_H^2 \Gamma^2}. \quad (177)$$

Таким образом, в самосогласованном борновском приближении усредненная плотность состояний представляет собой сумму хорошо разделенных ($\Gamma \ll \omega_c$) уширенных уровней Ландау. Причем профиль плотности состояний для данного уровня Ландау

представляет собой полукруг. Тот факт, что плотность состояний при $|\epsilon| \geq \Gamma$ обращается в нуль, является следствием самосогласованного борновского приближения. Однако это приближение правильно учитывает полное число состояний на уровне Ландау: $\int D_N(\mathcal{E})d\mathcal{E} = 1/2\pi l_H^2$. Как будет обсуждаться ниже, более точное решение задачи показывает существование состояний и при энергиях $|\epsilon| \geq \Gamma$ (рис. (18)).

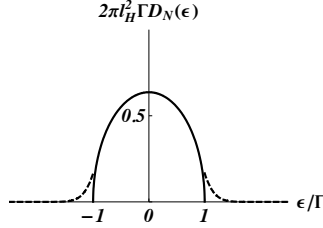


Рис. 18. Плотность состояний на N -м уровне Ландау. Сплошная линия соответствует результату самосогласованного борновского приближения. Пунктирная линия изображает хвосты плотности состояний, которые возникают при выходе за самосогласованное борновское приближение.

Выражение (177) для плотности состояний в самосогласованном борновском приближении позволяет найти фактор заполнения при нуле температур как функцию химического потенциала:

$$\nu(\mu) = 2\pi l_H^2 \sum_{N=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\mu} d\mathcal{E} D_N(\mathcal{E}). \quad (178)$$

Будем считать, что химический потенциал проходит через N -й уровень Ландау, т.е. $|\mu - \omega_c(N + 1/2)| \leq \Gamma$. Тогда, получим

$$\nu(\mu) = N + \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} f\left(\frac{\mu - \omega_c(N + 1/2)}{\Gamma}\right), \quad (179)$$

$$f(x) = \arcsin x + x\sqrt{1 - x^2}.$$

Напомним, что для полного снятия вырождения уровня Ландау число примесей $\mathcal{N}$ должно быть больше, чем число состояний на уровне Ландау, $\mathcal{N} > \mathcal{S}/2\pi l_H^2$. Это условие означает, что ширина уровня Ландау в самосогласованном борновском приближении должна удовлетворять условию $\Gamma > u/(\pi^{3/2}l_H^2)$. Проанализируем ряды теории возмущений для собственной энергетической части. Простейшая диаграмма, неучтенная в самосогласованном борновском приближении представлена на рис. 19а. Ее вклад в $\Sigma^R(\mathcal{E})$ можно оценить по порядку величины как

$$\eta_N \frac{n_{\text{imp}}^2 u^4}{\Gamma^3 l_H^4} \sim \eta_N \frac{n_{\text{imp}}^{1/2} u}{l_H}, \quad (180)$$

где η_N – постоянный множитель, связанный с интегрированием по координатам. Как видно, при фиксированном значении параметра $n_{\text{imp}}^{1/2} l_H \sim 1$ эта диаграмма мала по сравнению с диаграммой самосогласованного борновского приближения, если $\eta_N \ll 1$. Как оказывается это происходит при $N \gg 1$.

Другое приближение, которое было сделано, это пренебрежение многократным рассеянием на одной и той же примеси (переход от уравнений (160) к (161)). Рассмотрим теперь диаграмму, представленную на рис. 19b и учитывающую рассеяние за рамками борновского приближения. Она может быть оценена как

$$\tilde{\eta}_N \frac{n_{\text{imp}}^2 u^5}{\Gamma^4 l_H^6} \sim \tilde{\eta}_N \frac{n_{\text{imp}}^{1/2} u}{l_H} \frac{1}{n_{\text{imp}}^{1/2} l_H}. \quad (181)$$

Эта диаграмма мала по сравнению с диаграммой, представленной на рис. 19а, если

$$\frac{\tilde{\eta}_N}{\eta_N} \frac{1}{n_{\text{imp}}^{1/2} l_H} \ll 1. \quad (182)$$

Можно было бы думать, что если $\tilde{\eta}_N/\eta_N \ll 1$ при $N \gg 1$, то все не борновские диаграммы будут малы при фиксированном

значении параметра $n_{\text{imp}}^{1/2} l_H \sim 1$. Однако это не так. Если рассмотреть диаграмму, представленную на рис. 19с, которая оценивается как

$$\eta'_N \frac{n_{\text{imp}}^2 u^{s+2}}{\Gamma^{s+1} l_H^{2s}} \sim \eta'_N \frac{n_{\text{imp}}^{1/2} u}{l_H} \left(\frac{1}{n_{\text{imp}}^{1/2} l_H} \right)^{s-2}, \quad (183)$$

то получается, что эта диаграмма мала по сравнению с диаграммой, показанной на рис. 19а, если

$$\frac{n_{\text{imp}}}{n_L} \gg \left[\frac{\eta'_N}{\eta_N} \right]^{2/(s-2)}. \quad (184)$$

Устремляя теперь $s \rightarrow \infty$, найдем условие малости диаграмм с многократным рассеянием на одной примеси, типа представленных на рис. 19с:

$$\frac{n_{\text{imp}}}{n_L} \gg 1. \quad (185)$$

Это приводит к условию $\Gamma \gg 2n_L u / \sqrt{\pi}$.

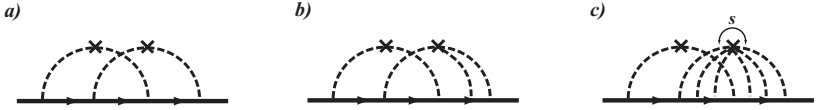


Рис. 19. Диаграммы теории возмущений за рамками самосогласованного борновского приближения: а) диаграмма с пересечением, б), с) - многократное рассеяние.

Подводя итог, можно сказать, что многократное рассеяние на примесях можно не рассматривать, если $2\pi n_{\text{imp}} l_H^2 \gg 1$, а диаграммы с пересечениями примесных линий малы в силу условия $N \gg 1$.

Вычислим теперь тензор проводимости в самосогласованном борновском приближении. Проводимость определяется с помощью поляризационного оператора $\Pi_{ab}^R(\omega)$ как

$$\sigma_{ab} = \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{i}{\omega} (\Pi_{ab}^R(\omega) - \Pi_{ab}^R(0)). \quad (186)$$

Вычисление поляризационного оператора $\Pi_{ab}^R(\omega)$ удобно проводить в технике температурных функций Грина. Мацубаровский поляризационный оператор, усредненный по случайному потенциалу $V(\mathbf{r})$, равен

$$\Pi_{ab}(i\omega_n) = -e^2 \left\langle T \sum_{\varepsilon_k} \text{Tr} \hat{v}_a \mathcal{G}(i\varepsilon_k) \hat{v}_b \mathcal{G}(i\varepsilon_k + i\omega_n) \right\rangle, \quad (187)$$

где $\hat{v} = (\mathbf{p} - e\mathbf{A})/m_e$ – это оператор скорости. Для того чтобы найти $\Pi_{ab}^R(\omega)$, сделаем аналитическое продолжение мацубаровского поляризационного оператора. До вычисления сразу заметим, что сохранение числа частиц приводит к соотношению $\Pi_{ab}^R(0) = -\delta_{ab}e^2 n_e/m_e$. Воспользуемся точными соотношениями

$$\mathcal{G}(i\varepsilon_n; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \int \frac{d\mathcal{E}}{\pi} \frac{\text{Im} \mathcal{G}^R(\mathcal{E}; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)}{\mathcal{E} - i\varepsilon_n}, \quad (188)$$

$$T \sum_{\varepsilon_k} \frac{1}{\mathcal{E} - i\varepsilon_k - i\omega_n} \frac{1}{\mathcal{E}' - i\varepsilon_k} = \frac{n_F(\mathcal{E}') - n_F(\mathcal{E})}{\mathcal{E}' - \mathcal{E} + i\omega_n}, \quad (189)$$

где $n_F(\mathcal{E})$ – распределение Ферми. Далее получим

$$\begin{aligned} \Pi_{ab}^R(\omega) &= \frac{e^2}{4\pi^2} \int d\mathcal{E} d\mathcal{E}' \frac{n_F(\mathcal{E}) - n_F(\mathcal{E}')}{\mathcal{E}' - \mathcal{E} + \omega + i0} \\ &\times \langle \text{Tr} \hat{v}_a [\mathcal{G}^R(\mathcal{E}') - \mathcal{G}^A(\mathcal{E}')] \hat{v}_b [\mathcal{G}^R(\mathcal{E}) - \mathcal{G}^A(\mathcal{E})] \rangle. \end{aligned} \quad (190)$$

Для проводимости находим

$$\sigma_{ab} = \int d\mathcal{E} \left(-\frac{\partial n_F(\mathcal{E})}{\partial \mathcal{E}} \right) \sigma_{ab}(\mathcal{E}), \quad (191)$$

$$\sigma_{ab}(\mathcal{E}) = -\frac{e^2}{4\pi\mathcal{S}} \langle \text{Tr} \hat{v}_a [\mathcal{G}^R(\mathcal{E}) - \mathcal{G}^A(\mathcal{E})] \hat{v}_b [\mathcal{G}^R(\mathcal{E}) - \mathcal{G}^A(\mathcal{E})] \rangle. \quad (192)$$

Заметим, что величина $\sigma_{ab}(\mu)$ представляет собой тензор проводимости при нуле температур $T = 0$.

Найдем матричные элементы оператора скорости, которые нам понадобятся в дальнейшем:

$$\begin{aligned} [\hat{v}_a]_{n'n}^{k'k} &= \int d^2\mathbf{r} \psi_{n'k'}^*(\mathbf{r}) \hat{v}_a \psi_{nk}(\mathbf{r}) = \\ &= \frac{1}{ml_H \sqrt{2}} \delta_{k,k'} [\beta_a \sqrt{n} \delta_{n',n-1} + \gamma_a \sqrt{n'} \delta_{n',n+1}], \end{aligned} \quad (193)$$

где

$$\beta_x = -i, \quad \beta_y = -1, \quad \gamma_x = i, \quad \gamma_y = -1. \quad (194)$$

Основная трудность при вычислении тензора проводимости – это то, что согласно уравнению (192) необходимо произвести усреднение произведения двух точных функций Грина по случайному потенциалу. Начнем с вычисления продольной проводимости $\sigma_{xx}(\mathcal{E})$. Простейшая диаграмма представлена на рис. 20а. Она соответствует тому, что среднее от произведения двух точных функций Грина заменено на произведение двух усредненных функций Грина, найденных в самосогласованном борновском приближении. Вклад от диаграммы записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}^{(a)} &= -\frac{e^2}{4\pi} \sum_{p_{1,2}=\pm 1} \sum_{n_{1,2}; k_{1,2}} p_1 p_2 [\hat{v}_x]_{n_1 n_2}^{k_1 k_2} \langle \mathcal{G}_{n_2}^{p_2}(\mathcal{E}) \rangle [\hat{v}_x]_{n_2 n_1}^{k_2 k_1} \langle \mathcal{G}_{n_1}^{p_1}(\mathcal{E}) \rangle = \\ &= -\frac{e^2 \omega_c^2}{8\pi^2} \sum_{p_{1,2}=\pm 1} \sum_{n=0}^{\infty} p_1 p_2 (n+1) \langle \mathcal{G}_n^{p_1}(\mathcal{E}) \rangle \langle \mathcal{G}_{n+1}^{p_2}(\mathcal{E}) \rangle \end{aligned} \quad (195)$$

Здесь $\langle \mathcal{G}_n^{\pm}(\mathcal{E}) \rangle \equiv \langle \mathcal{G}_n^{R,A}(\mathcal{E}) \rangle$. Заметим, что согласно определению (176), выполняется соотношение

$$\sum_{p=\pm 1} p \langle \mathcal{G}_n^p(\mathcal{E}) \rangle = -4i\pi^2 l_H^2 D_n(\mathcal{E}). \quad (196)$$

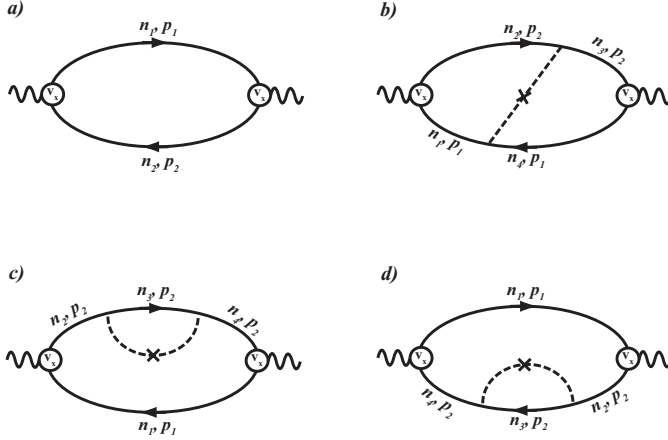


Рис. 20. Диаграммы для проводимости σ_{xx} в самосогласованном борновском приближении.

Поэтому,

$$\sigma_{xx}^{(a)}(\mathcal{E}) = -\frac{2\pi^2 e^2}{m_e^2} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) D_n(\mathcal{E}) D_{n+1}(\mathcal{E}) \equiv 0, \quad (197)$$

так как в самосогласованном борновском приближении уширенные уровни Ландау не перекрываются.

Следующий по простоте тип диаграмм представлен на рис. 20b-d. Кроме усредненных функций Грина в них участвует одна примесная линия. Вклад в проводимость от диаграммы, представленной на рис. 20b, записывается следующим образом:

$$\begin{aligned}
\sigma_{xx}^{(b)} &= -\frac{e^2}{4\pi\mathcal{S}} \sum_{p_{1,2}=\pm 1} \sum_{n_j; k_j} p_1 p_2 [\hat{v}_x]_{n_1 n_2}^{k_1 k_2} \langle \mathcal{G}_{n_2}^{p_2}(\mathcal{E}) \rangle \langle \mathcal{G}_{n_3}^{p_2}(\mathcal{E}) \rangle \times \\
&\times [\hat{v}_x]_{n_3 n_4}^{k_3 k_4} \langle \mathcal{G}_{n_4}^{p_1}(\mathcal{E}) \rangle \langle \mathcal{G}_{n_1}^{p_1}(\mathcal{E}) \rangle I_{n_2 n_3; n_4 n_1}^{k_2 k_3; k_4 k_1} = \\
&= \frac{e^2 \omega_c}{4\pi m_e \mathcal{S}} \sum_{p_{1,2}=\pm 1} \sum_{n_{1,2}; k_{1,2}} p_1 p_2 \sqrt{(n_1+1)(n_2+1)} \langle \mathcal{G}_{n_1}^{p_2}(\mathcal{E}) \rangle \times \\
&\times \langle \mathcal{G}_{n_1+1}^{p_1}(\mathcal{E}) \rangle \left\{ \langle \mathcal{G}_{n_2+1}^{p_1}(\mathcal{E}) \rangle \langle \mathcal{G}_{n_2}^{p_2}(\mathcal{E}) \rangle \text{Re } I_{n_1+1, n_2+1; n_2, n_1}^{k_1 k_2; k_2 k_1} - \right. \\
&- \left. \langle \mathcal{G}_{n_2}^{p_1}(\mathcal{E}) \rangle \langle \mathcal{G}_{n_2+1}^{p_2}(\mathcal{E}) \rangle \text{Re } I_{n_1+1, n_2; n_2+1, n_1}^{k_1 k_2; k_2 k_1} \right\}. \quad (198)
\end{aligned}$$

Пользуясь уравнением (165), легко показать, что

$$\sum_{k_{1,2}} I_{n_1+1, n_2; n_2+1, n_1}^{k_1 k_2; k_2 k_1} = 0, \quad \sum_{k_{1,2}} I_{n_1+1, n_2+1; n_2, n_1}^{k_1 k_2; k_2 k_1} = 0, \quad (199)$$

поэтому $\sigma_{xx}^{(b)}(\mathcal{E}) = 0$.

Следующая диаграмма представлена на рис. 20с. Можно было бы думать, что она уже учтена в собственно-энергетической части (173). Это не так, потому что номера уровней Ландау n_2 , n_3 и n_4 , вообще говоря, различны. Эта диаграмма может быть записана как

$$\begin{aligned}
\sigma_{xx}^{(c)} &= -\frac{e^2}{4\pi\mathcal{S}} \sum_{p_{1,2}=\pm 1} \sum_{n_j; k_j} p_1 p_2 [\hat{v}_x]_{n_1 n_2}^{k_1 k_2} \langle \mathcal{G}_{n_2}^{p_2}(\mathcal{E}) \rangle \langle \mathcal{G}_{n_3}^{p_2}(\mathcal{E}) \rangle \times \\
&\times \langle \mathcal{G}_{n_4}^{p_2}(\mathcal{E}) \rangle [\hat{v}_x]_{n_4 n_1}^{k_4 k_1} \langle \mathcal{G}_{n_1}^{p_1}(\mathcal{E}) \rangle I_{n_2 n_3; n_3 n_4}^{k_2 k_3; k_3 k_4} = \\
&= -\frac{e^2 \omega_c^2 l_H^2}{8\pi\mathcal{S}} \sum_{p_{1,2}=\pm 1} \sum_{n_{1,2}; k_{1,2}} p_1 p_2 (n_1+1) \langle \mathcal{G}_{n_2}^{p_2}(\mathcal{E}) \rangle \times \\
&\times \left\{ \langle \mathcal{G}_{n_1+1}^{p_1}(\mathcal{E}) \rangle \langle \mathcal{G}_{n_1}^{p_2}(\mathcal{E}) \rangle \langle \mathcal{G}_{n_1}^{p_2}(\mathcal{E}) \rangle I_{n_1, n_2; n_2, n_1}^{k_1 k_2; k_2 k_1} + \right. \\
&+ \left. \langle \mathcal{G}_{n_1}^{p_1}(\mathcal{E}) \rangle \langle \mathcal{G}_{n_1+1}^{p_2}(\mathcal{E}) \rangle \langle \mathcal{G}_{n_1+1}^{p_2}(\mathcal{E}) \rangle I_{n_1+1, n_2; n_2, n_1+1}^{k_1 k_2; k_2 k_1} - \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - 2\sqrt{\frac{n_1+2}{n_1+1}} \langle \mathcal{G}_{n_1}^{p_2}(\mathcal{E}) \rangle \langle \mathcal{G}_{n_1+1}^{p_1}(\mathcal{E}) \rangle \langle \mathcal{G}_{n_1+2}^{p_2}(\mathcal{E}) \rangle \times \\
& \times \operatorname{Re} I_{n_1+2, n_2; n_2, n_1}^{k_1 k_2; k_2 k_1} \Big\}. \tag{200}
\end{aligned}$$

Пользуясь выражением (165), можно показать, что

$$\sum_{k_{1,2}} I_{n_1+2, n_2; n_2, n_1}^{k_1 k_2; k_2 k_1} = 0, \quad \sum_{k_{1,2}} I_{n_1, n_2; n_2, n_1}^{k_1 k_2; k_2 k_1} = \frac{\gamma \mathcal{S}}{(2\pi l_H^2)^2}. \tag{201}$$

Тогда, используя выражение (196), мы получим

$$\begin{aligned}
\sigma_{xx}^{(c)}(\mathcal{E}) &= \frac{e^2 \omega_c^2 \gamma i}{8\pi} \sum_{p=\pm} \sum_{n_{1,2}} p D_{n_1}(\mathcal{E}) \langle \mathcal{G}_{n_2}^p(\mathcal{E}) \rangle \times \\
&\times \left\{ n_1 \left[\langle \mathcal{G}_{n_1-1}^p(\mathcal{E}) \rangle \right]^2 + (n_1+1) \left[\langle \mathcal{G}_{n_1+1}^p(\mathcal{E}) \rangle \right]^2 \right\}. \tag{202}
\end{aligned}$$

Как и раньше, будем считать, что энергия $\mathcal{E} = \omega_c(N + 1/2) + \epsilon$, где $|\epsilon| \ll \omega_c$. Тогда находим, что

$$\sigma_{xx}^{(c)}(\mathcal{E}) = \frac{e^2}{2\pi^2} \left(N + \frac{1}{2} \right) \frac{\Gamma^2(\epsilon)}{\Gamma^2}. \tag{203}$$

Вклад от последней диаграммы, представленной на рис. (20)d, совпадает с $\sigma_{xx}^{(c)}$. Поэтому окончательно получаем, что

$$\sigma_{xx}(\mathcal{E}) = \frac{e^2}{\pi^2 \hbar} \left(N + \frac{1}{2} \right) \frac{\Gamma^2(\epsilon)}{\Gamma^2}. \tag{204}$$

Уравнение (204) может быть физически интерпретировано следующим образом. Коэффициент диффузии для электрона с энергией ϵ можно оценить как $\mathcal{D}(\epsilon) \sim N l_H^2 \Gamma(\epsilon)$. Выражая проводимость через коэффициент диффузии и плотность состояний с помощью соотношения Эйнштейна, получим следующую оценку $\sigma_{xx} = e^2 D(\epsilon) \mathcal{D}(\epsilon) \sim e^2 N \Gamma^2(\epsilon) / \Gamma^2$.

Рассмотрим теперь вычисление холловской проводимости $\sigma_{xy}(\mathcal{E})$ в самосогласованном борновском приближении. Для этого удобно провести следующее разделение [34]

$$\sigma_{xy}(\mathcal{E}) = \sigma_{xy}^{(I)}(\mathcal{E}) + \sigma_{xy}^{(II)}(\mathcal{E}), \quad (205)$$

где

$$\sigma_{xy}^{(I)}(\mathcal{E}) = \frac{e^2}{4\pi} \langle \text{Tr}[\hat{v}_y \mathcal{G}^R(\mathcal{E}) \hat{v}_x \mathcal{G}^A(\mathcal{E}) - \hat{v}_y \mathcal{G}^A(\mathcal{E}) \hat{v}_x \mathcal{G}^R(\mathcal{E})] \rangle \quad (206)$$

и

$$\begin{aligned} \sigma_{xy}^{(II)}(\mathcal{E}) &= -\frac{e^2}{4\pi} \left\langle \text{Tr}[\hat{v}_y \mathcal{G}^R(\mathcal{E}) \hat{v}_x \mathcal{G}^R(\mathcal{E}) + \hat{v}_y \mathcal{G}^A(\mathcal{E}) \hat{v}_x \mathcal{G}^A(\mathcal{E}) - \right. \\ &\quad \left. - 2\hat{v}_y \mathcal{G}^A(\mathcal{E}) \hat{v}_x \mathcal{G}^R(\mathcal{E})] \right\rangle. \end{aligned} \quad (207)$$

Начнем вычисление с величины $\sigma_{xy}^{(II)}(\mathcal{E})$. Используем определение оператора скорости $\hat{v}_a = i[\mathcal{H}, \hat{x}_a] = i[\hat{x}_a, (\mathcal{G}^{R,A})^{-1}]$, чтобы получить

$$\begin{aligned} \sigma_{xy}^{(II)}(\mathcal{E}) &= -\frac{e^2}{4\pi} \left\langle \text{Tr}[\hat{x}[\mathcal{G}^R(\mathcal{E})]^{-1} \hat{y} \mathcal{G}^R(\mathcal{E}) - \hat{x} \mathcal{G}^R(\mathcal{E}) \hat{y} [\mathcal{G}^R(\mathcal{E})]^{-1} + \right. \\ &\quad \left. + \hat{x} \mathcal{G}^A(\mathcal{E}) \hat{y} [\mathcal{G}^A(\mathcal{E})]^{-1} - \hat{x} [\mathcal{G}^A(\mathcal{E})]^{-1} \hat{y} \mathcal{G}^A(\mathcal{E})] \right\rangle. \end{aligned} \quad (208)$$

С другой стороны, можно проверить, что выполняются следующие соотношения

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\hat{x} \hat{v}_y - \hat{y} \hat{v}_x) \mathcal{G}^R(\mathcal{E}) &= i \text{Tr} \hat{x} \mathcal{G}^R(\mathcal{E}) \hat{y} [\mathcal{G}^R(\mathcal{E})]^{-1} - \\ &- i \text{Tr} \hat{x} [\mathcal{G}^R(\mathcal{E})]^{-1} \hat{y} \mathcal{G}^R(\mathcal{E}) \end{aligned} \quad (209)$$

и

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\hat{v}_y \hat{x} - \hat{v}_x \hat{y}) \mathcal{G}^A(\mathcal{E}) &= i \text{Tr} \hat{x} \mathcal{G}^A(\mathcal{E}) \hat{y} [\mathcal{G}^A(\mathcal{E})]^{-1} - \\ &- i \text{Tr} \hat{x} [\mathcal{G}^A(\mathcal{E})]^{-1} \hat{y} \mathcal{G}^A(\mathcal{E}). \end{aligned} \quad (210)$$

Используя эти соотношения, выражение (207) можно записать в виде:

$$\begin{aligned}\sigma_{xy}^{(II)}(\mathcal{E}) &= -\frac{ie^2}{4\pi} \text{Tr}(\hat{x}\hat{v}_y - \hat{y}\hat{v}_x)[\mathcal{G}^R(\mathcal{E}) - \mathcal{G}^A(\mathcal{E})] = \\ &= \frac{ie^2}{4\pi} \int_{-\infty}^{\mathcal{E}} d\mathcal{E}' \sum_{p=\pm 1} p \text{Tr} \mathcal{G}^p(\mathcal{E}')(\hat{x}\hat{v}_y - \hat{y}\hat{v}_x)\mathcal{G}^p(\mathcal{E}'),\end{aligned}\quad (211)$$

где мы использовали соотношение $\text{Tr} \mathcal{H}\hat{v}_x\hat{y} = -\text{Tr} \mathcal{H}\hat{x}\hat{v}_y$. С другой стороны, можно вычислить производную плотности состояний по магнитному полю:

$$\begin{aligned}\frac{\partial D(\mathcal{E})}{\partial B} &= \frac{i}{2\pi\mathcal{S}} \sum_{p=\pm 1} p \text{Tr} \frac{\partial \mathcal{G}^p(\mathcal{E})}{\partial B} = \sum_{p=\pm 1} \frac{ip}{2\pi} \text{Tr} \mathcal{G}^p(\mathcal{E}) \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial B} \mathcal{G}^p(\mathcal{E}) = \\ &= -\frac{ie}{4\pi} \sum_{p=\pm 1} p \text{Tr} \mathcal{G}^p(\mathcal{E})(\hat{x}\hat{v}_y - \hat{y}\hat{v}_x)\mathcal{G}^p(\mathcal{E}),\end{aligned}\quad (212)$$

где было использовано соотношение

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial B} = \frac{e}{4} (\hat{v}_x\hat{y} + \hat{y}\hat{v}_x - \hat{v}_y\hat{x} - \hat{x}\hat{v}_y). \quad (213)$$

Сравнивая выражения (211) и (212), окончательно находим

$$\sigma_{xy}^{(II)}(\mathcal{E}) = -ec \frac{\partial}{\partial B} \int_{-\infty}^{\mathcal{E}} d\mathcal{E}' \sum_{N=0}^{\infty} D_N(\mathcal{E}') = -ec \frac{\partial n_e(\mathcal{E})}{\partial B}, \quad (214)$$

где $n_e(\mathcal{E})$ – электронная концентрация при нуле температур и значении химического потенциала $\mathcal{E}$. Подчеркнем, что формула (214) является общей; при ее выводе не было сделано никаких приближений.

Общая формула (214) позволяет вычислить $\sigma_{xy}^{(II)}(\mathcal{E})$ в самосогласованном борновском приближении. Используя уравнение (179), находим

$$\sigma_{xy}^{(II)}(\mathcal{E}) = -\frac{ecn_e(\mathcal{E})}{B} - \frac{e^2}{\pi^2\hbar} \left[\left(N + \frac{1}{2} \right) \frac{\omega_c \Gamma(\epsilon)}{\Gamma^2} + \frac{\epsilon \Gamma(\epsilon)}{2\Gamma^2} \right]. \quad (215)$$

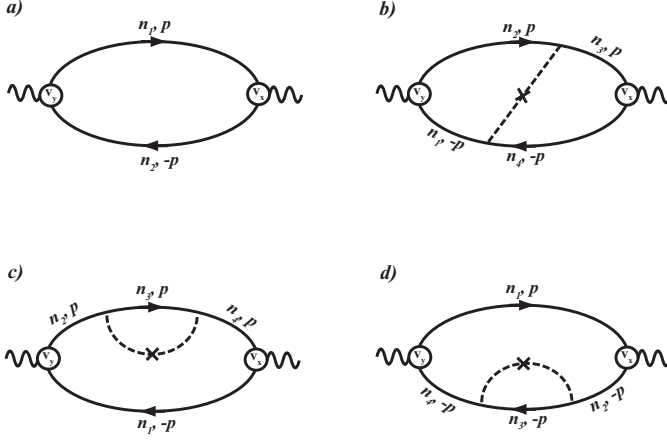


Рис. 21. Диаграммы для проводимости $\sigma_{xy}^{(I)}$ в самосогласованном борновском приближении.

Расчет величины $\sigma_{xy}^{(I)}(\mathcal{E})$ можно проводить аналогично тому, как это делалось для $\sigma_{xx}(\mathcal{E})$. Простейшая диаграмма, в которой среднее от произведения двух функций Грина заменено на произведение средних функций Грина $\mathcal{G}(\mathcal{E})$, представлена на рис. 21a:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{xy}^{(I,a)} &= \frac{e^2}{4\pi} \sum_{p=\pm 1} p \sum_{n_{1,2}; k_{1,2}} [\hat{v}_y]_{n_1 n_2}^{k_1 k_2} \langle \mathcal{G}_{n_2}^p(\mathcal{E}) \rangle [\hat{v}_x]_{n_2 n_1}^{k_2 k_1} \langle \mathcal{G}_{n_1}^{-p}(\mathcal{E}) \rangle = \\
 &= \frac{e^2 \omega_c^2 i}{8\pi^2} \sum_{p=\pm 1} p \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \langle \mathcal{G}_{n+1}^p(\mathcal{E}) \rangle \langle \mathcal{G}_n^{-p}(\mathcal{E}) \rangle. \quad (216)
 \end{aligned}$$

Используя выражение (196), находим

$$\begin{aligned}
 \sigma_{xy}^{(I,a)}(\mathcal{E}) &= \frac{e^2 \omega_c^2 l_H^2}{2} D_N(\mathcal{E}) \left(\frac{N}{\omega_c + \epsilon} + \frac{N+1}{\omega_c - \epsilon} \right) \simeq \quad (217) \\
 &\simeq \frac{e^2}{\pi^2 \hbar} \frac{\Gamma(\epsilon)}{\Gamma^2} \left[\left(N + \frac{1}{2} \right) \omega_c + \frac{\epsilon}{2} + \left(N + \frac{1}{2} \right) \frac{\epsilon^2}{\omega_c} \right].
 \end{aligned}$$

Диаграмма, изображенная на рис. 21b, дает вклад

$$\begin{aligned}
\sigma_{xy}^{(I,b)} &= \frac{e^2}{4\pi} \sum_{p=\pm 1} p \sum_{n_j; k_j} [\hat{v}_y]_{n_1 n_2}^{k_1 k_2} \langle \mathcal{G}_{n_2}^p(\mathcal{E}) \rangle \langle \mathcal{G}_{n_3}^p(\mathcal{E}) \rangle [\hat{v}_x]_{n_3 n_4}^{k_3 k_4} \times \\
&\times \langle \mathcal{G}_{n_4}^{-p}(\mathcal{E}) \rangle \langle \mathcal{G}_{n_1}^{-p}(\mathcal{E}) \rangle I_{n_2 n_3; n_4 n_1}^{k_2 k_3; k_4 k_1} = \\
&= -\frac{e^2 \omega_c}{4\pi m_e} \sum_{p=\pm 1} p \sum_{n_1, 2; k_1, 2} \sqrt{(n_1 + 1)(n_2 + 1)} \times \\
&\times \langle \mathcal{G}_{n_1+1}^p(\mathcal{E}) \rangle \langle \mathcal{G}_{n_1}^{-p}(\mathcal{E}) \rangle \langle \mathcal{G}_{n_2}^p(\mathcal{E}) \rangle \langle \mathcal{G}_{n_2+1}^{-p}(\mathcal{E}) \rangle \times \\
&\times \left\{ \text{Im } I_{n_1+1, n_2; n_2+1, n_1}^{k_1 k_2; k_2 k_1} - i \text{Re } I_{n_1+1, n_2+1; n_2, n_1}^{k_1 k_2; k_2 k_1} \right\}. \quad (218)
\end{aligned}$$

Пользуясь соотношениями (199), мы получим, что $\sigma_{xy}^{(I,b)} = 0$.

Следующая диаграмма изображена на рис. 21c. Выражение, соответствующее ей, имеет вид:

$$\begin{aligned}
\sigma_{xy}^{(I,c)} &= \frac{e^2}{4\pi} \sum_{p=\pm 1} \sum_{n_j; k_j} p [\hat{v}_y]_{n_1 n_2}^{k_1 k_2} \langle \mathcal{G}_{n_2}^p(\mathcal{E}) \rangle \langle \mathcal{G}_{n_3}^p(\mathcal{E}) \rangle \langle \mathcal{G}_{n_4}^p(\mathcal{E}) \rangle \times \\
&\times [\hat{v}_x]_{n_4 n_1}^{k_4 k_1} \langle \mathcal{G}_{n_1}^{-p}(\mathcal{E}) \rangle I_{n_2 n_3; n_3 n_4}^{k_2 k_3; k_3 k_4} = \frac{e^2 \omega_c i}{8\pi m_e} \sum_{p=\pm 1} \sum_{n_1, 2; k_1, 2} p \times \\
&\times \langle \mathcal{G}_{n_2}^p(\mathcal{E}) \rangle \left\{ \left[\langle \mathcal{G}_{n_1}^p(\mathcal{E}) \rangle \right]^2 I_{n_1, n_2; n_2, n_1}^{k_1 k_2; k_2 k_1} \left[(n_1 + 1) \langle \mathcal{G}_{n_1+1}^{-p}(\mathcal{E}) \rangle - \right. \right. \\
&- \left. n_1 \langle \mathcal{G}_{n_1-1}^{-p}(\mathcal{E}) \rangle \right] + 2i \sqrt{(n_1 + 1)(n_2 + 1)} \langle \mathcal{G}_{n_1}^p(\mathcal{E}) \rangle \\
&\times \left. \langle \mathcal{G}_{n_1+1}^{-p}(\mathcal{E}) \rangle \langle \mathcal{G}_{n_1+2}^{-p}(\mathcal{E}) \rangle \text{Im } I_{n_1+2, n_2; n_2, n_1}^{k_1 k_2; k_2 k_1} \right\}. \quad (219)
\end{aligned}$$

Пользуясь соотношениями (201), мы получим

$$\begin{aligned}
\sigma_{xy}^{(I,c)}(\mathcal{E}) &= \frac{e^2 \omega_c^2 \gamma i}{32\pi^3 l_H^2} \sum_{p=\pm 1} p \sum_{n_2 \neq n_1} \langle \mathcal{G}_{n_2}^p(\mathcal{E}) \rangle \left[\langle \mathcal{G}_{n_1}^p(\mathcal{E}) \rangle \right]^2 \\
&\times \left[(n_1 + 1) \langle \mathcal{G}_{n_1+1}^{-p}(\mathcal{E}) \rangle - n_1 \langle \mathcal{G}_{n_1-1}^{-p}(\mathcal{E}) \rangle \right]. \quad (220)
\end{aligned}$$

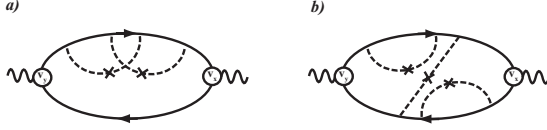


Рис. 22. Примеры диаграмм, которые дают вклад в $\Delta\sigma_{xy}^{(I)}$.

Отметим, что вклад с $n_2 = n_1$ уже учтен в выражении для собственно-энергетической части в самосогласованном борновском приближении. Можно показать, что

$$\sigma_{xy}^{(I,c)}(\mathcal{E}) = \mathcal{O}\left(\frac{\Gamma}{\omega_c}\right). \quad (221)$$

Оказывается, что для вычисления вкладов в $\sigma_{xy}(\mathcal{E})$ порядка $\mathcal{O}(\Gamma/\omega_c)$ необходимо также учесть диаграммы с большим числом примесных линий, например, такие как на рис. 22. Собирая выражения (215) и (217), находим

$$\sigma_{xy}(\mathcal{E}) = -\frac{ecn_e(\mathcal{E})}{B} + \Delta\sigma_{xy}(\mathcal{E}), \quad (222)$$

где, как было показано в работе [35],

$$\Delta\sigma_{xy}(\mathcal{E}) = \frac{\Gamma(\epsilon)}{\omega_c} \sigma_{xx}(\mathcal{E}) = \frac{e^2}{\pi^2 \hbar} \left(N + \frac{1}{2}\right) \frac{\Gamma^3(\epsilon)}{\omega_c \Gamma^2}. \quad (223)$$

Уравнение (222) физически может быть интерпретировано следующим образом. При приложении внешнего электрического поля $\mathbf{E}$ вдоль оси y центр электронной орбиты дрейфует со скоростью $v_x = -cE_y/B$. Это приводит к вкладу в проводимость σ_{xy} , равному $-ecn_e(\mathcal{E})/B$. Кроме вклада от дрейфа электронов есть еще вклад от силы трения, $F_x \simeq m_e v_x \Gamma(\epsilon)$, возникающей из-за смещения центра орбиты при рассеянии электрона на примесях. Эта дополнительная сила, действующая на электрон, приводит к дополнительному току $\Delta j_x = \sigma_{xx}(\mathcal{E}) F_x / e$, который соответствует следующему вкладу в холловскую проводимость $\Delta\sigma_{xy}(\mathcal{E}) = \sigma_{xx}(\mathcal{E}) \Gamma(\epsilon) / \omega_c$.

Как видно из уравнений (179) и (222), в сильном магнитном поле $\omega_c \gg \Gamma$ классический эффект Холла сохраняется с точностью до членов порядка $\mathcal{O}(\Gamma/\omega_c)$. Таким образом, самосогласованного борновского приближения совершенно недостаточно для объяснения целочисленного квантового эффекта Холла.

Задачи

1. Вывести соотношение (165).
2. Вычислить диаграмму, представленную на рис. 19а. Показать, что $\eta_N \ll 1$ при $N \gg 1$.
3. Вычислить плотность состояний на N -м уровне Ландау в самосогласованном борновском приближении для длинно-коррелированного случайного потенциала с $\langle V(\mathbf{q})V(-\mathbf{q}) \rangle = \gamma \exp(-q^2 d^2/2)$.
- 4.* Получить поправку $\Delta\sigma_{xy}(\mathcal{E})$ в уравнении (223).
5. Вывести следующую формулу для проводимости системы невзаимодействующих электронов

$$\begin{aligned} \sigma_{ab}(\omega) &= \frac{e^2}{2\pi\mathcal{S}} \int d\mathcal{E} n_F(\mathcal{E}) \text{Tr} \left\{ \hat{v}_a \left[\mathcal{G}^R(\mathcal{E}) - \mathcal{G}^A(\mathcal{E}) \right] \hat{v}_b \mathcal{G}^R(\mathcal{E} + \omega) \times \right. \\ &\quad \times \left. \mathcal{G}^R(\mathcal{E}) - \hat{v}_a \mathcal{G}^A(\mathcal{E} - \omega) \mathcal{G}^A(\mathcal{E}) \hat{v}_b \left[\mathcal{G}^R(\mathcal{E}) - \mathcal{G}^A(\mathcal{E}) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (224)$$

6. Вывести следующую формулу для проводимости системы невзаимодействующих электронов в магнитном поле

$$\begin{aligned} \sigma_{ab}(\omega) &= \frac{e^2\omega}{2\pi\mathcal{S}} \int d\mathbf{r} d\mathbf{r}' x'_a (x'_b - x_b) \int d\mathcal{E} \left\{ \left[n_F(\mathcal{E}) - n_F(\mathcal{E} - \omega) \right] \times \right. \\ &\quad \times \mathcal{G}^R(\mathcal{E}; \mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathcal{G}^A(\mathcal{E} - \omega; \mathbf{r}', \mathbf{r}) + n_F(\mathcal{E}) \left[\mathcal{G}^R(\mathcal{E} + \omega; \mathbf{r}, \mathbf{r}') \times \right. \\ &\quad \times \left. \left. \mathcal{G}^R(\mathcal{E}; \mathbf{r}', \mathbf{r}) - \mathcal{G}^A(\mathcal{E}; \mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathcal{G}^A(\mathcal{E} - \omega; \mathbf{r}', \mathbf{r}) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (225)$$

7. ХВОСТЫ ПЛОТНОСТИ СОСТОЯНИЙ И ДИНАМИЧЕСКАЯ ПРОВОДИМОСТЬ НА НИЖНЕМ УРОВНЕ ЛАНДАУ

В предыдущем разделе мы отметили, что на N -м уровне Ландау существуют состояния, которые лежат там, где вычисления в

самосогласованном борновском приближении дают нулевой результат. Проследим, как они возникают на примере нижнего уровня Ландау. Будем следовать работам Л. Иоффе, А. Ларкина [36] и И. Аффлека (I. Affleck) [37].

Для иллюстрации рассмотрим сначала следующий, как говорят, нульмерный пример. Рассмотрим интеграл

$$D_0(\mathcal{E}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\gamma}} \int_{-\infty}^{\infty} dV e^{-V^2/2\gamma} \delta(\mathcal{E} - V) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\gamma}} e^{-\mathcal{E}^2/2\gamma}. \quad (226)$$

При выполнении условий $\mathcal{E}^2 \gg \gamma \gg 1$ получим этот очевидный результат другим способом. Функцию $D_0(\mathcal{E})$ можно представить в виде

$$D_0(\mathcal{E}) = -\frac{1}{\pi} \text{Im } G^R(\mathcal{E}), \quad (227)$$

$$G^R(\mathcal{E}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\gamma}} \int_{-\infty}^{\infty} dV e^{-V^2/2\gamma} \frac{1}{\mathcal{E} - V + i0}. \quad (228)$$

Воспользуемся представлением

$$\frac{1}{\mathcal{E} - V + i0} = -\frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\phi_1 d\phi_2 e^{i\phi^*(\mathcal{E}-V+i0)\phi}, \quad (229)$$

где $\phi = \phi_1 + i\phi_2$, а $\phi_{1,2}$ – это две действительные переменные. Производя гауссово интегрирование по переменной V , получим

$$G^R(\mathcal{E}) = -\frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\phi_1 d\phi_2 e^{i(\mathcal{E}+i0)|\phi|^2 - \gamma|\phi|^4/2}. \quad (230)$$

Перейдем к интегрированию по переменной $r = |\phi|^2$, тогда

$$G^R(\mathcal{E}) = -i \int_0^{\infty} dr e^{ir(\mathcal{E}+i0) - \gamma r^2/2}. \quad (231)$$

Будем для определенности считать, что $\mathcal{E} > 0$, и вычислим интеграл в выражении (231) приближенно с помощью метода перевала. Выражение в экспоненте имеет максимум при

$r_* = i\mathcal{E}/\gamma$. Деформируем контур интегрирования так, чтобы он проходил через точку r_* (рис. 23). Представим r в виде $r = r_* + x$, где величину x будем считать малой. Тогда получим

$$G^R(\mathcal{E}) = -ie^{-\mathcal{E}^2/(2\gamma)} \int dx e^{-\gamma x^2/2}. \quad (232)$$

Здесь интегрирование идет по контуру C вблизи точки r_* . Легко проверить, что интеграл по вертикальной части контура не дает вклад в $\text{Im } G^R(\mathcal{E})$. Пользуясь условием $\gamma \gg 1$, интеграл по горизонтальной части контура можно распространить до бесконечности:

$$\text{Im } G^R(\mathcal{E}) = -e^{-\mathcal{E}^2/(2\gamma)} \int_0^\infty dx e^{-\gamma x^2/2} = -\frac{\pi}{\sqrt{2\pi\gamma}} e^{-\mathcal{E}^2/(2\gamma)}. \quad (233)$$

Отсюда получаем выражение (226). Таким образом, выражение для $D_0(\mathcal{E})$ при больших значениях $\mathcal{E}$ можно получить методом перевала.

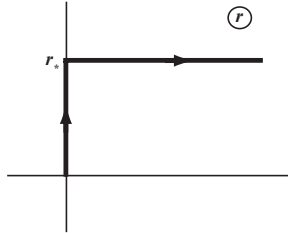


Рис. 23. Контур интегрирования.

Применим идею, изложенную выше, для вычисления хвостов плотности состояний на нижнем уровне Ландау. Представим запаздывающую функцию Грина с помощью функционального интеграла по бозонным ($\phi(\mathbf{r}), \phi^*(\mathbf{r})$) и фермионным ($\psi(\mathbf{r}), \bar{\psi}(\mathbf{r})$) переменным:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{\mathcal{E}}^R(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= \langle \mathbf{r} | \frac{1}{E - \mathcal{H} + i0} | \mathbf{r}' \rangle = -i \int D\phi_1 D\phi_2 D\bar{\psi} D\psi \psi(\mathbf{r}) \bar{\psi}(\mathbf{r}') \\ &\times \exp \left[i \int d\mathbf{r} \bar{\Phi}(\mathbf{r}) (\mathcal{E} - \mathcal{H} + i0) \Phi(\mathbf{r}) \right], \end{aligned} \quad (234)$$

где $\mathcal{H}$ определен, например, выражением (158), а $\bar{\Phi} = (\phi^*, \bar{\psi})$ и $\Phi = (\phi, \psi)$, причем $\phi = \phi_1 + i\phi_2$ и $\phi_{1,2}$ – это две действительные функциональные переменные. Пользуясь соотношением

$$\left\langle \exp \left(\int d\mathbf{r} f(\mathbf{r}) V(\mathbf{r}) \right) \right\rangle = \exp \left(\frac{\gamma}{2} \int d\mathbf{r} f^2(\mathbf{r}) \right), \quad (235)$$

которое следует из (161), находим усредненную функцию Грина

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{G}_{\mathcal{E}}^R(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \rangle &= -i \int D\phi_1 D\phi_2 D\bar{\psi} D\psi \psi(\mathbf{r}) \bar{\psi}(\mathbf{r}') \exp \int d\mathbf{r} \times \\ &\times \left[i\bar{\Phi}(\mathbf{r})(\mathcal{E} - \mathcal{H}_0 + i0)\Phi(\mathbf{r}) - \frac{\gamma}{2}(\bar{\Phi}(\mathbf{r})\Phi(\mathbf{r}))^2 \right]. \end{aligned} \quad (236)$$

Будем считать, что $\epsilon = \mathcal{E} - \omega_c/2 < 0$ и удовлетворяет условию $\omega_c \gg |\epsilon| \gg \Gamma = \sqrt{2\gamma/\pi l_H^2}$. При этих условиях интеграл по бозонным переменным $\phi_{1,2}(\mathbf{r})$ может быть вычислен методом перевала. Так как $|\epsilon|$ больше γ , то удобно сделать поворот контура интегрирования на угол, равный $-\pi/4$:

$$\bar{\Phi} \rightarrow e^{-i\pi/4}\bar{\Phi}, \quad \Phi \rightarrow e^{-i\pi/4}\Phi. \quad (237)$$

Тогда получим

$$\langle \mathcal{G}_{\mathcal{E}}^R(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \rangle = \int D\phi_1 D\phi_2 D\bar{\psi} D\psi \psi(\mathbf{r}) \bar{\psi}(\mathbf{r}') \exp(-S), \quad (238)$$

$$S = - \int d\mathbf{r} \left[\bar{\Phi}(\mathbf{r})(\mathcal{E} - \mathcal{H}_0 + i0)\Phi(\mathbf{r}) + \frac{\gamma}{2}(\bar{\Phi}(\mathbf{r})\Phi(\mathbf{r}))^2 \right]. \quad (239)$$

Классическое уравнение движения для бозонной части действия S имеет вид

$$\frac{\delta S}{\delta \phi^*(\mathbf{r})} = (\mathcal{E} - \mathcal{H}_0)\phi(\mathbf{r}) + \gamma|\phi(\mathbf{r})|^2\phi(\mathbf{r}) = 0. \quad (240)$$

Обозначим решение уравнения (240) как $\phi_{cl}(\mathbf{r})$ и положим $\phi(\mathbf{r}) = \phi_{cl}(\mathbf{r}) + \delta\phi(\mathbf{r})$. Затем разложим действие S до второго порядка по $\delta\phi(\mathbf{r})$ и фермионным переменным $\bar{\psi}, \psi$. Тогда

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{G}_{\mathcal{E}}^R(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \rangle &= e^{-S_{cl}} \int D\bar{\psi} D\psi \psi(\mathbf{r}) \bar{\psi}(\mathbf{r}') e^{-\delta S_f} \times \\ &\times \int D\delta\phi_1 D\delta\phi_2 e^{-\delta S_b}, \end{aligned} \quad (241)$$

где

$$S_{cl} = - \int d\mathbf{r} \left[\phi_{cl}^*(\mathbf{r})(\mathcal{E} - \mathcal{H}_0)\phi_{cl}(\mathbf{r}) + \frac{\gamma}{2} |\phi_{cl}(\mathbf{r})|^4 \right], \quad (242)$$

$$\delta S_f = - \int d\mathbf{r} \bar{\psi}(\mathbf{r})(\mathcal{E} - \mathcal{H}_0 + \gamma |\phi_{cl}(\mathbf{r})|^2)\psi(\mathbf{r}), \quad (243)$$

$$\begin{aligned} \delta S_b = & - \int d\mathbf{r} \left[\delta\phi^*(\mathbf{r})(\mathcal{E} - \mathcal{H}_0 + 2\gamma |\phi_{cl}(\mathbf{r})|^2)\delta\phi(\mathbf{r}) + \right. \\ & \left. + \frac{\gamma}{2} |\phi_{cl}(\mathbf{r})|^2 [(\delta\phi^*(\mathbf{r}))^2 + (\delta\phi(\mathbf{r}))^2] \right]. \end{aligned} \quad (244)$$

Прежде чем вычислять дальше, найдем нулевые моды, т.е. такие $\psi(\mathbf{r})$ и $\delta\phi(\mathbf{r})$, при которых δS_f и δS_b обращаются в нуль. Очевидно, что если мы выберем $\psi(\mathbf{r}) = \eta_0 \phi_{cl}(\mathbf{r})$ и, соответственно, $\bar{\psi}(\mathbf{r}) = \bar{\eta}_0 \phi_{cl}^*(\mathbf{r})$, где η_0 и $\bar{\eta}_0$ – грассмановы переменные, то $\delta S_f = 0$. Можно показать, что больше фермионных нулевых мод нет. Будем считать, что $\phi_{cl}(\mathbf{r})$ – это действительная функция, и тогда выберем $\delta\phi(\mathbf{r}) = i\delta\theta\phi_{cl}(\mathbf{r})$, где $\delta\theta$ – действительное число. В результате имеем $\delta S_b = 0$. Эта нулевая бозонная мода описывает инвариантность бозонного действия относительно глобального поворота $\phi: \phi(\mathbf{r}) \rightarrow \phi(\mathbf{r})e^{i\theta}$. Выберем теперь

$$\delta\phi = (\partial_\mu + iA_\mu)\phi_{cl}(\mathbf{r})x_\mu^0, \quad (245)$$

где $x_\mu^0 = (x^0, y^0)$ – это два действительных числа. Тогда можно показать, что $\delta S_b = 0$. Эти две бозонные моды связаны с инвариантностью действия относительно преобразования $\phi(\mathbf{r}) \rightarrow \exp[ieB\epsilon_{\nu\mu}x_\nu x_\mu^0/2]\phi(\mathbf{r} + \mathbf{r}^0)$.

Прежде чем решать уравнение (240), найдем спектр флуктуаций $\delta\phi(\mathbf{r})$ и $\psi(\mathbf{r})$. Разложим $\delta\phi, \psi, \bar{\psi}$ по волновым функциям нижнего уровня Ландау (71):

$$\psi(\mathbf{r}) = \sum_{m \geq 0} \eta_m \psi_{0,m}(\rho, \theta), \quad \bar{\psi}(\mathbf{r}) = \sum_{m \geq 0} \bar{\eta}_m \psi_{0,m}^*(\rho, \theta), \quad (246)$$

$$\delta\phi(\mathbf{r}) = \sum_{m \geq 0} a_m \psi_{0,m}(\rho, \theta).$$

Здесь $a_m = u_m + iv_m$ – это набор комплексных переменных, а η_m и $\bar{\eta}_m$ – независимые наборы грассмановых переменных. Тогда получим

$$\delta S_b = \sum_{m \geq 0} (|\epsilon| - 2\gamma J_m) |a_m|^2 - \frac{\gamma}{2} J_0 [a_0^2 + (a_0^*)^2], \quad (247)$$

$$\delta S_f = \sum_{m \geq 0} \bar{\eta}_m (|\epsilon| - \gamma J_m) \eta_m, \quad (248)$$

где

$$J_m = \int d\mathbf{r} |\phi_{cl}(\mathbf{r})|^2 |\psi_{0,m}(\rho, \theta)|^2. \quad (249)$$

Нахождение точного решения уравнения (240) представляет собой сложную задачу. Заметим, что функция ϕ_{cl} не может принадлежать только нижнему уровню Ландау. Будем пренебрегать связанными с этим поправками порядка $|\epsilon|/\omega_c$. Для дальнейшего вычисления применим вариационный метод. Выберем пробную функцию для $\phi_{cl}(\mathbf{r})$ в виде $A_m \psi_{0,m}(\rho, \theta)$. Тогда значение классического действия равно

$$S_{cl}[A_m \psi_{0,m}(\rho, \theta)] = |\epsilon| |A_m|^2 - \frac{\Gamma^2}{16} \frac{(2m)!}{4^m (m!)^2} |A_m|^4. \quad (250)$$

Как видно, S_{cl} как функция $|A_m|^2$ имеет минимум при $|A_m|^2 = 0$ и максимум, равный

$$S_{cl} = \frac{4\epsilon^2}{\Gamma^2} \frac{4^m (m!)^2}{(2m)!} \quad \text{при} \quad |A_m|^2 = \frac{8|\epsilon|}{\Gamma^2} \frac{4^m (m!)^2}{(2m)!}. \quad (251)$$

Минимальное значение среди этих максимумов достигается при $m = 0$. Поэтому будем считать, что $\phi_{cl}(\mathbf{r}) = A_0 \psi_{0,0}(\rho, \theta)$. Заметим, что подмешивание к этому решению функций $\psi_{0,m}(\rho, \theta)$ с $m \geq 1$ приводит только к увеличению значения S_{cl} . Выбранное нами решение $\phi_{cl}(\mathbf{r})$ соответствует максимуму действия, что как мы увидим, приведет к бозонной моде с отрицательным собственным значением.

Используя результат $J_m = 2^{-m}(|\epsilon|/\gamma)$, находим

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{S}_b &= -2|\epsilon|u_0^2 + 0v_0^2 + 0[u_1^2 + v_1^2] + \\ &+ \sum_{m \geq 2} |\epsilon|(1 - 2^{-m+1})[u_m^2 + v_m^2],\end{aligned}\quad (252)$$

$$\delta\mathcal{S}_f = 0\bar{\eta}_0\eta_0 + \sum_{m \geq 1} \bar{\eta}_m|\epsilon|(1 - 2^{-m})\eta_m. \quad (253)$$

В согласии с приведенным выше обсуждением нулевых мод, получились три нулевые бозонные моды (v_0, u_1, v_1) , и одна нулевая фермионная $(\eta_0, \bar{\eta}_0)$. Обратим внимание, что возникла бозонная мода (u_0) с отрицательным собственным значением.

Вычислим величину

$$\int D\delta\phi_1 D\delta\phi_2 e^{-\delta\mathcal{S}_b}. \quad (254)$$

Перейдем от интегрирования по функциональному пространству $\phi_{1,2}(\mathbf{r})$ к интегрированию по нулевым модам и по массивным модам u_m, v_m . При этом интегралы по нулевым модам необходимо вычислять точно. Для этого вместо переменных v_0, u_1, v_1 будем использовать коллективные координаты $\delta\theta, x_0, y_0$ (см., [38]). Тогда

$$\begin{aligned}\int D\delta\phi_1 D\delta\phi_2 e^{-\delta\mathcal{S}_b} &= \int_0^{2\pi} \frac{d\delta\theta}{\sqrt{\pi}} \tilde{\mathcal{J}}_0 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx_0 dy_0}{\pi} \mathcal{J}_1^2 \int \frac{du_0}{\sqrt{\pi}} \mathcal{J}_0 e^{2|\epsilon|u_0^2} \times \\ &\times \prod_{m \geq 2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{du_m dv_m}{\pi} \mathcal{J}_m^2 e^{-|\epsilon|(1-2^{-m+1})[u_m^2 + v_m^2]} \right).\end{aligned}\quad (255)$$

Величины $\mathcal{J}_m$ и $\tilde{\mathcal{J}}_0$ представляют собой якобианы соответствующего преобразования. Найдем их с помощью вычисления нормы в функциональном пространстве:

$$\begin{aligned}\int d^2\mathbf{r} |\delta\phi(\mathbf{r})|^2 &= \int d^2\mathbf{r} \left| u_0\psi_{0,0} + i\phi_{cl}\delta\theta + (\partial_\mu + ieA_\mu)\phi_{cl}\delta x_\mu^0 + \right. \\ &\left. + \sum_{m \geq 2} a_m\psi_{0,m} \right|^2 = u_0^2\mathcal{J}_0^2 + |\delta\theta|^2 \tilde{\mathcal{J}}_0^2 + [(\delta x^0)^2 + (\delta y^0)^2]\mathcal{J}_1^2 +\end{aligned}$$

$$+ \sum_{m \geq 2} [u_m^2 + v_m^2] \mathcal{J}_m^2, \quad (256)$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_0^2 &= \int d^2 \mathbf{r} |\psi_{0,0}|^2 = 1, \\ \tilde{\mathcal{J}}_0^2 &= \int d^2 \mathbf{r} |\phi_{cl}|^2 = \frac{8|\epsilon|}{\Gamma^2}, \\ \mathcal{J}_1^2 &= \frac{1}{2} \int d^2 \mathbf{r} |(\partial_\mu + ieA_\mu)\phi_{cl}|^2 = \frac{2\pi|\epsilon|}{\gamma}, \\ \mathcal{J}_m^2 &= \int d^2 \mathbf{r} |\psi_{0,m}|^2 = 1, \quad m \geq 2. \end{aligned} \quad (257)$$

Для вычисления интеграла по переменной u_0 используем результаты нульмерного примера, разобранный в начале раздела. Повернем контур интегрирования на угол $-\pi/2$: $u_0 \rightarrow -iu_0$. Тогда

$$\int du_0 e^{2|\epsilon|u_0^2} = -i \int_0^\infty du_0 e^{-2|\epsilon|u_0^2} = -i \sqrt{\frac{\pi}{8|\epsilon|}}. \quad (258)$$

В итоге находим

$$\int D\delta\phi_1 D\delta\phi_2 e^{-\delta S_b} = -i 16 \sqrt{\pi} \frac{\mathcal{S}}{2\pi l_H^2} \frac{|\epsilon|}{\Gamma^3} \prod_{m \geq 2} [|\epsilon|(1 - 2^{-m+1})]^{-1}. \quad (259)$$

Аналогично вычисляем фермионный интеграл:

$$\begin{aligned} \int D\bar{\psi} D\psi \psi(\mathbf{r}) \bar{\psi}(\mathbf{r}') e^{-\delta S_f} &= \int d\bar{\eta}_0 d\eta_0 \mathcal{J}_0 \eta_0 \bar{\eta}_0 \psi_{0,0}(\rho, \theta) \psi_{0,0}^*(\rho', \theta') \\ &\times \prod_{m \geq 1} \int d\bar{\eta}_m d\eta_m \mathcal{J}_m e^{-\bar{\eta}_m |\epsilon| (1 - 2^{-m}) \eta_m} = \\ &= \psi_{0,0}(\rho, \theta) \psi_{0,0}^*(\rho', \theta') \prod_{m \geq 1} [|\epsilon|(1 - 2^{-m})]. \end{aligned} \quad (260)$$

Собирая полученные выше результаты, находим

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{G}_{\mathcal{E}}^R(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \rangle &= -i\psi_{0,0}(\rho, \theta)\psi_{0,0}^*(\rho', \theta')16\sqrt{\pi}\frac{\mathcal{S}}{2\pi l_H^2}\frac{|\epsilon|}{\Gamma^3}e^{-4\epsilon^2/\Gamma^2} \times \\
&\times \prod_{m \geq 2} [|\epsilon|(1 - 2^{-m+1})]^{-1} \prod_{m \geq 1} [|\epsilon|(1 - 2^{-m})] = \\
&= -i\psi_{0,0}(\rho, \theta)\psi_{0,0}^*(\rho', \theta')\frac{8\mathcal{S}}{2\sqrt{\pi}l_H^2}\frac{\epsilon^2}{\Gamma^3}e^{-4\epsilon^2/\Gamma^2}. \quad (261)
\end{aligned}$$

Окончательно получаем следующее выражение для плотности состояний

$$D(\mathcal{E}) = -\frac{1}{\pi} \int \frac{d^2\mathbf{r}}{\mathcal{S}} \text{Im} \langle \mathcal{G}_{\mathcal{E}}^R(\mathbf{r}, \mathbf{r}) \rangle = \frac{8}{\pi^{3/2}} \frac{\epsilon^2}{l_H^2 \Gamma^3} \exp\left(-\frac{4\epsilon^2}{\Gamma^2}\right). \quad (262)$$

Этот ответ справедлив, когда величина в показателе экспоненты большая, т.е. при $|\epsilon| \gg \Gamma/2$. Получающаяся плотность состояний изображена на рис. 18. Оценим, сколько состояний находится в найденном нами хвосте:

$$2\pi l_H^2 \int_{\Gamma}^{\infty} d\epsilon D(\epsilon) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_2^{\infty} dx x^2 e^{-x^2} \simeq 0.02, \quad (263)$$

т.е. около двух процентов.

Согласно результатам вычислений в самосогласованом борновском приближении (см. (204) и (222)), величина $\sigma_{xx} = 0$, а $\sigma_{xy} = -ecn_e/B$ при энергиях $|\epsilon| > \Gamma$. Однако, как было показано выше, при $\epsilon < -\Gamma$ на нижнем уровне Ландау электронная концентрация экспоненциально мала, $n_e \propto \exp(-4\epsilon^2/\Gamma^2)$. Поэтому естественно было бы ожидать, что статические проводимости экспоненциально малы, $\sigma_{ab} \propto \exp(-4\epsilon^2/\Gamma^2)$. Как мы увидим ниже, это не так: в одноинстантонном приближении статические проводимости все же обращаются в нуль. В такой ситуации необходимо изучить поведение проводимости на конечной частоте ω , как это было сделано в работе [39].

Воспользуемся результатом (225) задачи из предыдущего раздела и запишем проводимость в виде

$$\sigma_{ab}(\omega) = \sigma_{ab}^{(-)}(\omega) + \sigma_{ab}^{(+)}(\omega), \quad (264)$$

где

$$\begin{aligned} \sigma_{ab}^{(\pm)}(\omega) = & \frac{e^2\omega}{4\pi\mathcal{S}} \int d\mathbf{r}d\mathbf{r}' x'_a(x'_b - x_b) \int d\mathcal{E} \left[n_F(\mathcal{E}_+) \pm n_F(\mathcal{E}_-) \right] \times \\ & \times \langle K^{(\pm)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \mathcal{E}, \omega) \rangle, \end{aligned} \quad (265)$$

причем $\mathcal{E}_{\pm} = \mathcal{E} \pm \omega/2$ и

$$\begin{aligned} K^{(-)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \mathcal{E}, \omega) &= \sum_{p, p' = \pm} \frac{p - p' - 2pp'}{2} \mathcal{G}^p(\mathcal{E}_+; \mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathcal{G}^{p'}(\mathcal{E}_-; \mathbf{r}', \mathbf{r}), \\ K^{(+)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \mathcal{E}, \omega) &= \sum_{p = \pm} p \mathcal{G}^p(\mathcal{E}_+; \mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathcal{G}^p(\mathcal{E}_-; \mathbf{r}', \mathbf{r}). \end{aligned} \quad (266)$$

Заметим, что член $\sigma_{ab}^{(-)}(\omega)$ представляет вклад в проводимость от состояний вблизи химического потенциала, а $\sigma_{ab}^{(+)}(\omega)$ вклад в проводимость от всех состояний под уровнем химического потенциала.

Начнем с вычисления величины $\sigma_{ab}^{(+)}(\omega)$. Так как эта величина содержит произведения только запаздывающих или опережающих функций Грина, ее вычисление не сильно отличается от вычисления плотности состояний. При малых значениях ω

$$\begin{aligned} K^{(+)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \mathcal{E}, \omega) &\approx 2i \text{Im} \mathcal{G}^R(\mathcal{E}; \mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathcal{G}^R(\mathcal{E}; \mathbf{r}', \mathbf{r}) + \\ &+ \omega \text{Re} \int d\mathbf{R} \left[\mathcal{G}^R(\mathcal{E}; \mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathcal{G}^R(\mathcal{E}; \mathbf{r}', \mathbf{R}) \mathcal{G}^R(\mathcal{E}; \mathbf{R}, \mathbf{r}) - (\mathbf{r} \leftrightarrow \mathbf{r}') \right]. \end{aligned} \quad (267)$$

Тогда при $\omega \rightarrow 0$ находим

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}^{(+)}(\omega) &= \frac{ie^2\omega}{\pi\mathcal{S}} \int d\mathcal{E} n_F(\mathcal{E}) \int d\mathbf{r}d\mathbf{r}' x'(x' - x) \times \\ &\times \text{Im} \langle \mathcal{G}^R(\mathcal{E}; \mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathcal{G}^R(\mathcal{E}; \mathbf{r}', \mathbf{r}) \rangle \end{aligned} \quad (268)$$

и

$$\sigma_{xy}^{(+)}(\omega) = \frac{e^2 \omega^2}{2\pi \mathcal{S}} \int d\mathcal{E} n_F(\mathcal{E}) \int d\mathbf{r} d\mathbf{r}' d\mathbf{R} \left[x'(y' - y) - x(y - y') \right] \times \\ \times \text{Re} \langle \mathcal{G}^R(\mathcal{E}; \mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathcal{G}^R(\mathcal{E}; \mathbf{r}', \mathbf{R}) \mathcal{G}^R(\mathcal{E}; \mathbf{R}, \mathbf{r}) \rangle. \quad (269)$$

Аналогично тому, как это было сделано выше для $\langle \mathcal{G}^R(\mathcal{E}; \mathbf{r}, \mathbf{r}') \rangle$, представим $\langle \mathcal{G}^R(\mathcal{E}; \mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathcal{G}^R(\mathcal{E}; \mathbf{r}', \mathbf{r}) \rangle$ в виде функционального интеграла:

$$\langle \mathcal{G}^R(\mathcal{E}; \mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathcal{G}^R(\mathcal{E}; \mathbf{r}', \mathbf{r}) \rangle = \\ = \int D\phi_1 D\phi_2 D\bar{\psi} D\psi \phi(\mathbf{r}) \phi^*(\mathbf{r}') \psi(\mathbf{r}') \bar{\psi}(\mathbf{r}) e^{-S}, \quad (270)$$

где действие S определяется согласно (239). В главном приближении в предэкспоненте достаточно считать, что $\phi(\mathbf{r}) = \phi_{cl}(\mathbf{r})$, $\psi(\mathbf{r}) = \eta_0 \psi_{0,0}(\mathbf{r})$ и $\bar{\psi}(\mathbf{r}) = \bar{\eta}_0 \psi_{0,0}^*(\mathbf{r})$. Тогда получаем

$$\langle \mathcal{G}^R(\mathcal{E}; \mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathcal{G}^R(\mathcal{E}; \mathbf{r}', \mathbf{r}) \rangle = -\frac{8i\pi|\epsilon|}{\Gamma^2} D(\mathcal{E}) \mathcal{S} |\psi_{0,0}(\mathbf{r})|^2 |\psi_{0,0}(\mathbf{r}')|^2, \quad (271)$$

где $D(\mathcal{E})$ - это плотность состояний (см. (262)). Производя интегрирование в (268) по координатам, окончательно находим

$$\sigma_{xx}^{(+)}(\omega) = -ie^2 \omega l_H^2 \int d\mathcal{E} n_F(\mathcal{E}) \frac{8|\epsilon|}{\Gamma^2} D(\mathcal{E}). \quad (272)$$

При нуле температур и с учетом условия $|\epsilon| \ll \Gamma$ это выражение сводится к следующему:

$$\sigma_{xx}^{(+)}(\omega) = -ie^2 \omega l_H^2 D(\mathcal{E}_F). \quad (273)$$

Для вычисления $\sigma_{xy}^{(+)}(\omega)$ представим произведение трех функций Грина в виде функционального интеграла:

$$\langle \mathcal{G}^R(\mathcal{E}; \mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathcal{G}^R(\mathcal{E}; \mathbf{r}', \mathbf{R}) \mathcal{G}^R(\mathcal{E}; \mathbf{R}, \mathbf{r}) \rangle = \\ = - \int D\phi_1 D\phi_2 D\bar{\psi} D\psi \psi(\mathbf{r}) \bar{\psi}(\mathbf{r}') \phi(\mathbf{r}') \phi^*(\mathbf{R}) \psi(\mathbf{R}) \bar{\psi}(\mathbf{r}) e^{-S}. \quad (274)$$

В главном приближении в предэкспоненте достаточно считать, что $\phi(\mathbf{r}) = \phi_{cl}(\mathbf{r})$. С фермионными переменными дело обстоит сложнее. Если выбрать их всех равными нулевым модам $\psi(\mathbf{r}) = \eta_0 \psi_{0,0}(\mathbf{r})$ и $\bar{\psi}(\mathbf{r}) = \bar{\eta}_0 \psi_{0,0}^*(\mathbf{r})$, то интеграл обратится в нуль. Поэтому в одной паре фермионных переменных в предэкспоненте необходимо учесть и массивные флуктуации. Тогда

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{G}^R(\mathcal{E}; \mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathcal{G}^R(\mathcal{E}; \mathbf{r}', \mathbf{R}) \mathcal{G}^R(\mathcal{E}; \mathbf{R}, \mathbf{r}) \rangle &= \frac{8i\pi|\epsilon|}{\Gamma^2} D(\mathcal{E}) \mathcal{S} |\psi_{0,0}(\mathbf{R})|^2 \times \\ &\times \psi_{0,0}(\mathbf{r}') \psi_{0,0}^*(\mathbf{r}) \sum_{m \geq 1} \frac{\psi_{0,m}(\mathbf{r}) \psi_{0,m}^*(\mathbf{r}')}{|\epsilon|(1 - 2^{-m})} \end{aligned} \quad (275)$$

Интегрирование в (269) по координатам оставляет в сумме только член с $m = 1$, и мы находим

$$\sigma_{xy}^{(+)}(\omega) = \frac{8e^2\omega^2 l_H^2}{\Gamma^2} \int d\mathcal{E} n_F(\mathcal{E}) D(\mathcal{E}). \quad (276)$$

Используя условие $|\epsilon| \ll \Gamma$, это выражение при нуле температур можно переписать в виде

$$\sigma_{xy}^{(+)}(\omega) = \frac{e^2\omega^2 l_H^2}{|\epsilon_F|} D(\mathcal{E}_F), \quad (277)$$

где $\epsilon_F = \mathcal{E}_F - \omega_c/2$.

Вычисление величин $\sigma_{ab}^{(-)}(\omega)$ представляет собой более сложную задачу, так как необходимо ввести два набора функциональных переменных Φ . Оказывается [39], что при нуле температур в одноинстантонном приближении $\sigma_{ab}^{(-)}(\omega) = \sigma_{ab}^{(+)}(\omega)$. Таким образом, окончательно находим

$$\sigma_{xx}(\omega) = -2ie^2\omega l_H^2 D(\mathcal{E}_F), \quad \sigma_{xy}(\omega) = \frac{2e^2\omega^2 l_H^2}{|\epsilon_F|} D(\mathcal{E}_F). \quad (278)$$

Выражение для продольной проводимости можно физически проинтерпретировать следующим образом. Для не очень

малых частот ($|\omega| \gg (\epsilon^2/\Gamma) \exp(-4\epsilon^2/\Gamma^2)$) коэффициент диффузии, который описывает движение центров электронной орбиты из-за рассеяния электронов на примесях, можно оценить как $\mathcal{D} \sim i\omega l_H^2$. Тогда с помощью соотношения Эйнштейна получаем $\sigma_{xx}(\omega) \sim i\omega e^2 l_H^2 D(\mathcal{E}_F)$. Подчеркнем, что это выражение имеет вид, типичный для диэлектрика.

В рассматриваемом режиме продольное и холловское статические сопротивления можно определить как

$$\rho_{xx} = \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{\sigma_{xx}(\omega)}{\sigma_{xx}^2(\omega) + \sigma_{xy}^2(\omega)}, \quad \rho_{xy} = \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{\sigma_{yx}(\omega)}{\sigma_{xx}^2(\omega) + \sigma_{xy}^2(\omega)}. \quad (279)$$

Используя результаты (278), находим

$$\rho_{xx} = \infty, \quad \rho_{xy} = -\frac{B}{ecn_e} \left(\frac{\Gamma}{4|\epsilon_F|} \right)^2. \quad (280)$$

Как видно, продольное сопротивление обращается в бесконечность, а холловское сопротивление остается конечным, но экспоненциально большим. Состояние электронной системы с таким необычным поведением тензора сопротивления было названо холловским изолятором. Еще раз подчеркнем, в чем состоит необычность холловского изолятора. Обращение в нуль диссипативной и холловской проводимостей показывает, что электронные состояния с энергией вдали от центра уровня Ландау локализованы, а значит, электронная система при нуле температур представляет собой диэлектрик. Однако в таком диэлектрическом состоянии имеется конечное значение постоянной Холла R ($\rho_{xy} = -RB$), равной $R = 1/ecn_{\text{eff}}$, где величину $n_{\text{eff}} = n_e(4|\epsilon_F|/\Gamma)^2$ можно было бы интерпретировать как эффективное число носителей в случае металлического поведения. Экспериментальное наблюдение холловского изолятора затруднено наличием конечной температуры.

Задачи

1. Оценить с экспоненциальной точностью плотность состояний в хвосте нижнего уровня Ландау для длинно-коррелированного случайно-

го потенциала: $\langle V(\mathbf{q})V(-\mathbf{q}) \rangle = \gamma \exp(-q^2 d^2/2)$.

2. Показать, что отличное от нуля значение S_{cl} для $\phi_{cl}(\mathbf{r}) = A_0\psi_{0,0}(\rho, \theta) + A_1\psi_{0,1}(\rho, \theta)$ будет минимально при $A_1 = 0$.

3. В одноинстантонном приближении найти $\sigma_{ab}^{(-)}(\omega)$ при $\omega \rightarrow 0$.

8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Целочисленный квантовый эффект Холла – физическое явление, которое наблюдается в двумерном электронном газе в присутствии перпендикулярного магнитного поля при низких температурах. Это явление заключается в целочисленном квантовании значений холловской проводимости σ_{xy} в единицах e^2/h при изменении приложенного перпендикулярного магнитного поля или электронной концентрации. Как было объяснено в разделе 1, целочисленный квантовый эффект Холла принципиально отличается от квантовых осцилляций проводимости Шубникова – де Гааза в магнитном поле. В части II пособия будет показано, что при нулевой температуре целочисленное квантование холловской проводимости может наблюдаться даже в ситуации, когда уровни Ландау настолько уширены случайным потенциалом, что плотность состояний можно считать функцией, независимой от энергии электрона. В таких условиях амплитуда квантовых осцилляций проводимости Шубникова – де Гааза экспоненциально подавлена в силу большого значения температуры Дингла по сравнению с циклотронной энергией $\hbar\omega_c$.

Существенную роль в понимании целочисленного квантового эффекта Холла играют краевые состояния (скачущие орбиты электронов), которые образуются вблизи границы двумерного электронного газа. При нулевой температуре оказывается, что весь ток переносится краевыми состояниями, число которых совпадает с числом заполненных уровней Ландау вдали от границы. Как было показано в разделе 2, в случае резкой границы краевые состояния локализованы в направлении, перпендикулярном границе в тех точках, где электронная концентрация

испытывает скачок на $1/(2\pi l_H^2)$. Картина качественно меняется в случае плавной границы двумерного электронного газа при учете электростатического экранирования (см. разд. 3). Изменение электронной концентрации на величину $1/(2\pi l_H^2)$ происходит в области конечной ширины в направлении, перпендикулярном границе. Несмотря на то что уже нельзя сказать, где локализовано краевое состояние, как показывает эксперимент, описание электронного транспорта с помощью модели одномерных краевых состояний работает удовлетворительно.

В реальном эксперименте на движение двумерного электрона во внешнем магнитном поле оказывают влияние примеси. Если количество примесей настолько мало и их взаимным влиянием на движение электрона можно пренебречь, то первый эффект, к которому приводит наличие примесей, – это появление состояний, отщепленных от уровня Ландау и локализованных вблизи каждой примеси. На первый взгляд, появление локализованных на примесях состояний должно уменьшать холловский ток, т.е. разрушать целочисленное квантование холловской проводимости. Однако, как показано в разделе 4, это не так: холловский ток не меняется.

Другой предельный случай – плавный случайный потенциал, т.е. потенциал, меняющийся на масштабе много большем магнитной длины, был рассмотрен в разделе 5. Движение двумерного электрона в таком плавном потенциале оказывается почти всюду квазиклассическим: быстрое циклотронное вращение вокруг центра орбиты, который смещается в одном направлении по эквипотенциальным линиям потенциала, соответствующим энергии электрона. Тот факт, что движение электрона описывается уравнением Шредингера, приводит к возможности туннелирования электрона с одной эквипотенциальной линии на другую эквипотенциальную линию той же энергии в области, где обе линии подходят к друг другу на расстояние порядка магнитной длины. Наличие конечной продольной проводимости при нуле температуры возможно, если при данной энергии электрон может пройти от одной границы двумерно-

го слоя до другой. Оказывается, что такое возможно строго при одном значении энергии. Движение двумерного электрона в магнитном поле и в плавном случайном потенциале может быть исследовано численно в модели Чалкера–Коддингтона, в которой случайная сетка эквипотенциальных линий заменена на регулярную, но при движении по ребрам сетки электрон приобретает случайную фазу.

Технически наиболее удобный для вычислений тип случайного потенциала – это гауссовый δ -коррелированный случайный потенциал. Простейшее приближение, в котором могут быть вычислены плотность состояний, продольная и холловская проводимость, – это самосогласованное борновское приближение (см. разд. 6). Оно оправдано, когда при нулевой температуре заполнено $N \gg 1$ уровней Ландау и число δ -центров велико по сравнению с максимально возможным числом состояний на уровне Ландау. Однако самосогласованное борновское приближение приводит к плотности состояний, в которой уровни Ландау уширены, но отделены друг от друга щелью порядка циклотронной энергии. Это приближение приводит также к обратно пропорциональной зависимости холловской проводимости от магнитного поля при фиксированной электронной концентрации. Таким образом, самосогласованного борновского приближения совершенно недостаточно для объяснения целочисленного квантования холловской проводимости. Выход за рамки самосогласованного борновского приближения может быть сделан в случае настолько сильного магнитного поля, что при нулевой температуре заполнен только самый нижний уровень Ландау и то частично (см. разд. 7). В этом случае плотность состояний для нижнего уровня Ландау нигде не обращается в нуль, а имеет экспоненциально малый хвост, в котором находится около 2% от максимально возможного числа состояний на уровне Ландау. Как будет показано в части II, такое поведение плотности состояний справедливо для уровня Ландау с произвольным номером. Несмотря на конечную плотность состояний, статические продольная и холловская проводимости

обращаются в нуль для состояний, лежащих в хвосте самого нижнего уровня Ландау. Это означает, что состояния в хвосте плотности состояний локализованы. Динамические продольная и холловская проводимости отличны от нуля и имеют вид типичный для диэлектрика. В пределе малых частот постоянная Холла сохраняет конечное значение, что оказывается неожиданным с точки зрения обычного диэлектрического состояния. Этот факт специфичен для состояний в хвосте плотности состояний для самого нижнего уровня Ландау.

В части II для движения двумерного электрона в магнитном поле и в гауссовом δ -коррелированном случайном потенциале будет изложена последовательная теория, которая обобщает скейлинговую теорию локализации Андерсона на случай присутствия внешнего магнитного поля. В рамках этой теории будет рассмотрен ряд проблем и задач, связанных с целочисленным квантовым эффектом Холла.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Квантовая механика. М.: Наука, 1974.
2. *Абрикосов А.А., Горьков Л.П., Дзялошинский И.Е.* Методы квантовой теории поля в статистической физике. М.: Физматгиз, 1962.
3. *Березин Ф.А.* Введение в алгебру и анализ с антикоммутирующими переменными. М.: МГУ, 1983.
4. *Фейнман Р., Хибс А.* Квантовая механика и интегралы по траекториям. М.: Мир, 1968.
5. *Абрикосов А.А.* Основы теории металлов. М.: Наука, 1987.
6. *Klitzing K. von, Dorda G., Pepper M.* New method for high-accuracy determination of the fine-structure constant based on quantized Hall resistance // *Phys. Rev. Lett.*, 1980. Vol. 45. P. 494.
7. *Tsui D.C., Gossard A.C.* Resistance standard using quantization of the Hall resistance of GaAs-Al_xGa_{1-x}As heterostructures // *Appl. Phys. Lett.*, 1981. Vol. 38. P. 550.
8. *A.K. Geim, K.S. Novoselov* The rise of graphene // *Nature Mater.*, 2007. Vol. 6. P. 183.
9. *Ando T., Fowler A.B., Stern F.* Electronic properties of two-dimensional systems // *Rev. Mod. Phys.*, 1982. Vol. 54. P. 437.
10. Квантовый эффект Холла, *под ред. Прейндж Р., Гирвин С.* М.: Мир, 1989.

11. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. М.: Наука, 1974. Т. 2. С. 122.
12. *Halperin B.* Quantized Hall conductance, current-carrying edge states, and the existence of extended states in a two-dimensional disordered potential // *Phys. Rev. B*, 1982. Vol. 25. P. 2185.
13. *Büttiker M.* Absence of backscattering in the quantum Hall effect in multiprobe conductors // *Phys. Rev. B*, 1988. Vol. 38. P. 9375.
14. *Laughlin R.* Quantized Hall conductivity in two dimensions // *Phys. Rev. B*, 1981. Vol. 23. P. 5632.
15. *Chklovskii D.B., Shklovskii B.I., Glazman L.I.* Electrostatics of edge channels // *Phys. Rev. B*, 1992. Vol. 46, P. 4026.
16. *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Методы теории функций комплексного переменного, М.: Наука, 1973. С. 304.
17. *Бычков Ю.А.* Квантовая теория электропроводности металлов в сильных магнитных полях // *ЖЭТФ*, 1960. Т. 39. С. 689.
18. *Баскин Э.М., Магрилл Л.И., Энтин М.В.* Двумерная электрон-примесная система в сильном магнитном поле // *ЖЭТФ*, 1978. Т. 75. С. 723.
19. *Wegner F.* Exact density of states for lowest Landau level in white noise potential superfield representation for interacting systems, *Z. Phys. B* 1983. Vol. 51. P. 279.
20. *Brezin E., Gross D.J., Itzykson C.* Density of states in the presence of a strong magnetic field and random impurities // *Nucl. Phys. B* 1984. Vol. 235. P. 24.
21. *Burmistrov I.S., Skvortsov M.A.* On the effect of far impurities on the density of states of two-dimensional electron gas in a

- strong magnetic field // Письма в ЖЭТФ, 2003. Т. 78. С. 188.
22. *Prange R.E.* Quantized Hall resistance and the measurement of the fine-structure constant // Phys. Rev. B, 1981. Vol. 23. P. 4802.
 23. *Tsukada M.* On the tail states of the Landau subbands in MOS structures under strong magnetic field // J. Phys. Soc. Jpn., 1976. Vol. 41. P. 1466;
Iordansky S.V. On the conductivity of two-dimensional electron in a strong magnetic field // Solid State Commun., 1982. Vol. 43. P. 1;
Kazarinov R.F., Luryi S. Quantum percolation and quantization of Hall resistance in two-dimensional electron gas // Phys. Rev. B, 1982. Vol. 25. P. 7626;
Prange R.E., Joynt R. Conduction in a strong field in two dimensions: The quantum Hall effect // Phys. Rev. B, 1982. Vol. 25. P. 2943.
 24. *Trugman S.A.* Localization, percolation, and the quantum Hall effect // Phys. Rev. B, 1983. Vol. 27. P. 7539.
 25. *Huckestein B.* Scaling Theory of The Integer Quantum Hall Effect // Rev. Mod. Phys., 1995. Vol. 67. P. 357.
 26. *Stauffer D.* Scaling theory of percolation clusters // Phys. Rep., 1979. Vol. 54. P. 2.
 27. *Nijs M.P.M. den* A relation between the temperature exponents of the eight-vertex and q-state Potts model // J. Phys. A, 1979. Vol. 12. P. 1857;
Black J.L., Emery V.J. Critical properties of two-dimensional models // Phys. Rev. B, 1981. Vol. 23. P. 429.
 28. *Fertig H.A.* Semiclassical description of a two-dimensional electron in a strong magnetic field and an external potential // Phys. Rev. B, 1988. Vol. 38. P. 996.

29. *Мильников Г.В., Соколов И.М.* О квазиклассической локализации в магнитном поле // Письма в ЖЭТФ, 1988. Т. 48. С. 494.
30. *Chalker J.T., Coddington P.D.* Percolation, quantum tunneling and the integer quantum Hall effect // J. Phys. C: Solid State Phys., 1988. Vol. 21. P. 2665.
31. *В. И. Оселедец* Мультипликативная эргодическая теорема. Характеристические показатели Ляпунова // Труды ММО, 1968. Т. 19. С. 197.
32. *Ando T., Uemura Y.* Theory of quantum transport in a two-dimensional electron system under magnetic fields. I. Characteristics of level broadening and transport under strong fields // J. Phys. Soc. Japan, 1974. Vol. 36. P. 959.
Ando T. Theory of quantum transport in a two-dimensional electron system under magnetic fields. II. Single site approximation under strong fields // J. Phys. Soc. Japan, 1974. Vol. 36. P. 1521.
Ando T. Theory of quantum transport in a two-dimensional electron system under magnetic fields. III. Many-site approximation // J. Phys. Soc. Japan, 1974. Vol. 37. P. 622.
Ando T. Theory of quantum transport in a two-dimensional electron system under magnetic fields. IV. Oscillatory conductivity // J. Phys. Soc. Japan, 1974. Vol. 37. P. 1233.
33. *Градиштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1963. С. 1051.
34. *Smrčka L., Strěda P.* Transport coefficients in strong magnetic field // J. Phys. C: Solid State Phys., 1977. Vol. 10. P. 2153.
35. *Ando T., Matsumoto Y., Uemura Y.* Theory of Hall effect in a two-dimensional electron system // J. Phys. Soc. Japan, 1975. Vol. 39. P. 279.

- 36. *Иоффе Л.Б., Ларкин А.И.* Флуктуационные уровни и циклотронный резонанс в случайном потенциале // ЖЭТФ, 1981. Т. 81. С. 1048.
- 37. *I. Affleck* Density of states in a uniform magnetic field and a white noise potential // J. Phys. C: Solid State Phys., 1984. Vol. 17. P. 2323.
- 38. *Поляков А.М.* Калибровочные поля и струны: Пер. с англ. - Черногловка, ИТФ им. Л.Д. Ландау, 1995.
- 39. *Viehweger O., Efetov K.B.* Low frequency behavior of kinetic coefficients in localization regimes in strong magnetic fields // Phys. Rev. B 1991. Vol. 44. P. 1168.