

Задание 1. Курс “Квантовые явления в наноструктурах”

Вам нужно выбрать одну задачу, отличную от выбранных остальными. Срок сдачи 30 марта 2015 г. После этой даты ваш результат умножается на коэффициент $1 - x/300$, где x – это число дней, прошедших после 30 марта. Сдача задания подразумевает аккуратно написанное решение задачи и умение объяснить то, что написано.

- Задача 1.** Оценить транспортную скорость упругого рассеяния двумерных электронов на кулоновских примесях, расположенных равномерно в области $z > d$, где z – направление перпендикулярное двумерной плоскости. Считать, что d много больше типичной ширины двумерного электронного газа.
- Задача 2.** Найти как соотносятся между собой ширина циклотронного резонанса и расстояние между уровнями Ландау в случае уровней Ландау слабо уширенных беспорядком.
- Задача 3.** Считая, что основной вклад в проводимость двумерной электронной системе при наличии микроволнового излучения дается неупругим механизмом определить зависимость проводимости от частоты излучения в случае почти полностью размытых беспорядком уровней Ландау.
- Задача 4.** Найти распределение электронной плотности двумерного газа в геометрии корбино с учетом того, что разность работ выхода между левым (правым) металлическим контактом и двумерным газом равна U_{\pm} . Считать проводимость, коэффициент диффузии и плотность состояний известными. Расстояние между контактами равно R .
- Задача 5.** Два электрона находятся в плоскости $z = 0$ на расстоянии r . Найти зависимость статически экранизованного кулоновского взаимодействия от r . Построить график.
- Задача 6.** Для электронов в двойной квантовой яме найти возмущение электронной плотности в первой яме при приложении внешнего поля к электронам во второй яме. Считать ямы узкими, а расстояние между ними большим по сравнению с ширинами ям. Считать коэффициенты диффузии и плотности состояний в каждой из ям известными. Туннелирования электронов между ямами нет.
- Задача 7.** Для электронов в двойной квантовой яме оценить зависимость длины экранировки кулоновского взаимодействия от расстояния между ямами. Считать ямы узкими, а расстояние между ними большим по сравнению с ширинами ям. Считать коэффициенты диффузии и плотности состояний в каждой из ям известными. Туннелирования электронов между ямами нет.
- Задача 8.** Показать, что уравнение Эйлера-Лагранжа для действия

$$S = \frac{1}{2} \int d^D \mathbf{q} \int d\omega \left[\Pi(\mathbf{q}, \omega) \phi_{\text{tot}}(\mathbf{q}, \omega) \phi_{\text{tot}}(-\mathbf{q}, -\omega) + \frac{1}{U(\mathbf{q})} \phi(\mathbf{q}, \omega) \phi(-\mathbf{q}, -\omega) \right],$$

где $\phi_{\text{tot}} = \phi + \phi_{\text{ext}}$, вместе с определением электронной плотности в виде $\rho(\mathbf{q}, \omega) = -\delta S / \delta \phi_{\text{ext}}(-\mathbf{q}, -\omega)$, приводит к правильным уравнениям электродинамики электронного газа. Показать, что на решениях этих уравнений действие равно $S = -(1/2) \int d^D \mathbf{q} \int d\omega \rho(\mathbf{q}, \omega) \phi_{\text{ext}}(-\mathbf{q}, -\omega)$.

- Задача 9.** В момент времени $t = 0$, в двумерный невзаимодействующий электронный газ добавляют электрон в точку $\mathbf{r} = 0$. Считая коэффициент диффузии известным найти как лишний заряд будет рассасываться, т.е. зависимость $\rho(\mathbf{r}, t)$ при $t > 0$.
- Задача 10.** В момент времени $t = 0$, в двумерную квантовую точку в виде круга радиуса R , добавляют электрон в центр. Считая коэффициент диффузии известным оценить чему будет равна плотность заряда в центре на временах больших обратной энергии Таулесса.
- Задача 11.** Найти вероятность возврата электрона в точку $r = 0$ после рассеяния на 2-х, 3-х и т.д. примесях. Считать, что вероятность найти электрон в точке r_2 после рассеяния на примеси в точке r_1 равна $P(|r_2 - r_1|) = [1/(2\pi|r_2 - r_1|l)] \exp(-|r_2 - r_1|/l)$, где l – это длина свободного пробега. Считать, что рассеяние на примеси изотропное и электрон после рассеяния полностью забывает предысторию.
- Задача 12.** Оценить скорость неупругого рассеяния для случая динамически экранизованного кулоновского взаимодействия.
- Задача 13.** Оценить величину ферми-жидкостной константы взаимодействия в триплетном канале F_t в двумерной электронной системе. Считать, что выполнено условие $\varkappa/k_F \ll 1$, где \varkappa – обратная длина статической экранировки.

Задача 14. Найти энергию Таулесса для двумерной квантовой точки в виде круга радиуса R .

Задача 15. Эффективный двумерный случайный потенциал имеет вид $V(\mathbf{r}) = u \sum_{j=1}^N \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j)$, где \mathbf{r}_j - это положение j примеси. Используя соотношение $\sum_{j=1}^N e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}_j} = (2\pi\hbar)^2 n_{\text{imp}} \delta(\mathbf{q})$, где n_{imp} - концентрация примесей, найти чему равны $\langle V(\mathbf{r}) \rangle$, $\langle V(\mathbf{r})V(\mathbf{r}') \rangle$ и $\langle V(\mathbf{r})V(\mathbf{r}')V(\mathbf{r}'') \rangle$. Определить при каких условиях статистика $V(\mathbf{r})$ будет гауссовой.

Задача 16. Оценить значение продольной проводимости в точке циклотронного резонанса, $\sigma(\omega = \omega_c)$, для случая слабо уширенных беспорядком уровней Ландау $\omega_c \tau_q \gg 1$.

Задача 17. Оценить значение отношения M -ой гармоники циклотронного резонанса продольной проводимости, $\sigma(\omega = M\omega_c)/\sigma(\omega_c)$, при $M \gg 1$ для случая слабо уширенных беспорядком уровней Ландау $\omega_c \tau_q \gg 1$.

Задача 18. Оценить поправку к плотности состояний в 2D андерсоновском диэлектрике с кулоновским взаимодействием, считая, что она дается следующим выражением:

$$\frac{\delta\nu(\varepsilon)}{\nu_0} = - \int \frac{d^2\mathbf{q}}{(2\pi)^2} \int \frac{d\omega}{2\pi} \frac{1 - \cos\omega\tau}{(Dq^2)^2 + \omega^2} U(q),$$

где коэффициент диффузии $D = -i\omega\xi^2$, а $\tau \sim 1/\varepsilon$. Здесь ξ - длина локализации.

Задача 19. Оценить экранированное кулоновское взаимодействие в 2D андерсоновском диэлектрике, считая, что коэффициент диффузии равен $D = -i\omega\xi^2$, где ξ - длина локализации.

Задача 20. Оценить транспортное время упругого рассеяния для гетероструктуры со спейсером, когда $\tilde{W}(q) \sim \frac{\varepsilon^4 n}{q^2 \kappa^2} \exp(-2qd)$. Здесь n - двумерная концентрация электронов, κ - статическая длина экранировки.

Задача 21. Оценить осциллирующую компоненту продольной проводимости, σ_{xx} , в магнитном поле в случае $\tau^{-1} \ll \omega_c \ll \tau_q^{-1}$.

Задача 22. Оценить осциллирующую компоненту поперечной проводимости, σ_{xy} , в магнитном поле в случае $\tau^{-1} \ll \omega_c \ll \tau_q^{-1}$.