

## Задание 1. Курс “Квантовые явления в наноструктурах”

**Задача 1.** Исходя из уравнения Ньютона с трением вывести формулы для тензора проводимости на конечной частоте, в случае движения электрона на двумерной плоскости в перпендикулярном магнитном поле. Электрическое поле приложено в плоскости.

**Задача 2.** Эффективный двумерный случайный потенциал имеет вид  $V(\mathbf{r}) = u \sum_{j=1}^N \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j)$ , где  $\mathbf{r}_j$  - это положение  $j$  примеси. Используя соотношение  $\sum_{j=1}^N e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}_j} = (2\pi\hbar)^2 n_{\text{imp}} \delta(\mathbf{q})$ , где  $n_{\text{imp}}$  - концентрация примесей, найти чему равны  $\langle V(\mathbf{r}) \rangle$ ,  $\langle V(\mathbf{r})V(\mathbf{r}') \rangle$  и  $\langle V(\mathbf{r})V(\mathbf{r}')V(\mathbf{r}'') \rangle$ . Определить при каких условиях статистика  $V(\mathbf{r})$  будет гауссовой.

**Задача 3.** В объеме  $V$  случайным образом расположены  $N$  примесей. Считая, что вероятность для примеси оказаться в точке  $\mathbf{r}_a$  равна  $1/V$  и не зависит от остальных примесей, доказать, что в термодинамическом пределе  $N \rightarrow \infty$ ,  $V \rightarrow \infty$  так, что концентрация  $n = N/V$  остается постоянной, выполняется следующая формула:

$$\left\langle \prod_{a=1}^N e^{f(\mathbf{r}_a)} \right\rangle = \exp \left[ n \int d^d \mathbf{r} \left( e^{f(\mathbf{r})} - 1 \right) \right]$$

где  $f(\mathbf{r})$  заданная функция.

**Задача 4.** В объеме  $V$  случайным образом расположены  $N$  примесей. Считая, что вероятность для примеси оказаться в точке  $\mathbf{r}_a$  равна  $1/V$  и не зависит от остальных примесей, доказать, что в термодинамическом пределе  $N \rightarrow \infty$ ,  $V \rightarrow \infty$  так, что концентрация  $n = N/V$  остается постоянной, выполняется следующая формула:

$$\left\langle \prod_{a \neq b} e^{f(\mathbf{r}_a)g(\mathbf{r}_b)} \right\rangle = \exp \left[ n^2 \int d^d \mathbf{r} d^d \mathbf{r}' \left( e^{f(\mathbf{r})g(\mathbf{r}')} - 1 \right) \right]$$

где  $f(\mathbf{r})$  и  $g(\mathbf{r})$  заданные функции.

**Задача 5.** Оценить транспортную скорость упругого рассеяния двумерных электронов на кулоновских примесях, расположенных равномерно в области  $z > d$ , где  $z$  - направление перпендикулярное двумерной плоскости. Считать, что  $d$  много больше типичной ширины двумерного электронного газа.

**Задача 6.** Оценить транспортное время упругого рассеяния для гетероструктуры со спейсером, когда  $\tilde{W}(q) \sim \frac{e^4 n}{q^2 \kappa^2} \exp(-2qd)$ . Здесь  $n$  - двумерная концентрация электронов,  $\kappa$  - статическая длина экранировки. Считать выполненным условие  $dk_F \gg 1$ .

**Задача 7.** Оценить осциллирующую компоненту продольной проводимости,  $\sigma_{xx}$ , в магнитном поле в случае  $\tau^{-1} \ll \omega_c \ll \tau_q^{-1}$ .

**Задача 8.** Оценить осциллирующую компоненту поперечной проводимости,  $\sigma_{xy}$ , в магнитном поле в случае  $\tau^{-1} \ll \omega_c \ll \tau_q^{-1}$ .

**Задача 9.** Найти как соотносятся между собой ширина циклотронного резонанса, расстояние между уровнями Ландау и их ширина  $\Gamma$  в случае уровней Ландау слабо уширенных беспорядком.

**Задача 10.** Оценить значение продольной проводимости в точке циклотронного резонанса,  $\sigma(\omega = \omega_c)$ , для случая слабо уширенных беспорядком уровней Ландау  $\omega_c \tau_q \gg 1$ .

**Задача 11.** Оценить значение отношения  $M$ -ой гармоники циклотронного резонанса продольной проводимости,  $\sigma(\omega = M\omega_c)/\sigma(\omega_c)$ , при  $M \gg 1$  для случая слабо уширенных беспорядком уровней Ландау  $\omega_c \tau_q \gg 1$ .

**Задача 12.** Два электрона находятся в плоскости  $z = 0$  на расстоянии  $r$ . Найти зависимость статически экранированного кулоновского взаимодействия от  $r$ . Построить график.

**Задача 13.** Для электронов в двойной квантовой яме найти возмущение электронной плотности в первой яме при приложении внешнего поля к электронам во второй яме. Считать ямы узкими, а расстояние между ними большим по сравнению с ширинами ям. Считать коэффициенты диффузии и плотности состояний в каждой из ям известными. Туннелирования электронов между ямами нет.

- Задача 14.** В момент времени  $t = 0$ , в двумерный невзаимодействующий электронный газ добавляют электрон в точку  $\mathbf{r} = 0$ . Считая коэффициент диффузии известным найти как лишний заряд будет рассасываться, т.е. зависимость  $\rho(\mathbf{r}, t)$  при  $t > 0$ .
- Задача 15.** Найти вероятность возврата электрона в точку  $r = 0$  после рассеяния на 2-х, 3-х и т.д. примесях. Считать, что вероятность найти электрон в точке  $r_2$  после рассеяния на примеси в точке  $r_1$  равна  $P(|r_2 - r_1|) = [1/(2\pi|r_2 - r_1|l)] \exp(-|r_2 - r_1|/l)$ , где  $l$  – это длина свободного пробега. Считать, что рассеяние на примеси изотропное и электрон после рассеяния полностью забывает предысторию.
- Задача 16.** Оценить скорость неупругого рассеяния в грязном металле для случая динамически экранированного кулоновского взаимодействия.
- Задача 17.** Оценить величину ферми-жидкостной константы взаимодействия в триплетном канале  $F_t$  в двумерной электронной системе. Считать, что выполнено условие  $\varkappa/k_F \ll 1$ , где  $\varkappa$  – обратная длина статической экранировка.
- Задача 18.** Оценить скорость неупругого рассеяния в квантовой точке с большой энергией Таулесса для случая динамически экранированного кулоновского взаимодействия.