Задание 1. Курс “Квантовые явления в наноструктурах”

Задача 1. Исходя из уравнения Ньютона с трением вывести формулы для тензора статической проводимости, в случае движения электрона на двумерной плоскости в перпендикулярном магнитном поле. Электрическое поле приложено в плоскости.

Задача 2. Исходя из уравнения Ньютона с трением вывести формулы для тензора проводимости на конечной частоте, в случае движения электрона на двумерной плоскости в перпендикулярном магнитном поле. Электрическое поле приложено в плоскости.

Задача 3. Эффективный двумерный случайный потенциал имеет вид $V(\boldsymbol{r} = u\sum_{j=1}^{\mathcal{N}}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_j)$, где $\boldsymbol{r}_j$ - это положение j примеси. Используя соотношение $\sum_{j=1}^{\mathcal{N}} e^{i\boldsymbol{q}\boldsymbol{r}_j} = (2\pi\hbar)^2 n_{\rm imp}\delta(\boldsymbol{q})$, где $n_{\rm imp}$ - концентрация примесей, найти чему равны $\langle V(\boldsymbol{r})\rangle$, $\langle V(\boldsymbol{r})V(\boldsymbol{r'})\rangle$ и $\langle V(\boldsymbol{r})V(\boldsymbol{r'})V(\boldsymbol{r''})\rangle$. Определить при каких условиях статистика $V(\boldsymbol{r})$ будет гауссовой.

Задача 4. В объеме V случайным образом расположены N примесей. Считая, что вероятность для примеси оказаться в точке $\boldsymbol{r}_a$ равна $1/V$ и не зависит от остальных примесей, доказать, что в термодинамическом пределе $N\to\infty$, $V\to\infty$ так, что концентрация $n=N/V$ остается постоянной, выполняется следующая формула:

$$\left\langle \prod_{a=1}^{N} e^{f(\boldsymbol{r}_a)} \right\rangle = \exp\left[n\int d^d\boldsymbol{r}\left(e^{f(\boldsymbol{r})}-1\right)\right]$$

где $f(\boldsymbol{r})$ заданная функция.

Задача 5. В объеме V случайным образом расположены N примесей. Считая, что вероятность для примеси оказаться в точке $\boldsymbol{r}_a$ равна $1/V$ и не зависит от остальных примесей, доказать, что в термодинамическом пределе $N\to\infty$, $V\to\infty$ так, что концентрация $n=N/V$ остается постоянной, выполняется следующая формула:

$$\left\langle \prod_{a\neq b} e^{f(\boldsymbol{r}_a)g(\boldsymbol{r}_b)} \right\rangle = \exp\left[n^2\int d^d\boldsymbol{r}d^d\boldsymbol{r'}\left(e^{f(\boldsymbol{r})g(\boldsymbol{r'})}-1\right)\right]$$

где $f(\boldsymbol{r})$ и $g(\boldsymbol{r})$ заданные функции.

Задача 6. Оценить транспортную скорость упругого рассеяния двумерных электронов на кулоновских примесях, расположенных равномерно в области $z>d$, где z - направление перпендикулярное двухмерной плоскости. Считать, что d много больше типичной ширины двухмерного электронного газа.

Задача 7. Оценить транспортное время упругого рассеяния для гетероструктуры со спейсером, когда $\tilde{W}(q)\sim\frac{e^4 n}{q^2\varkappa^2}\exp(-2qd)$. Здесь n - двумерная концентрация электронов, $\varkappa$ – статическая длина экранировки. Считать выполненым условие $dk_F\gg 1$.

Задача 8. Оценить осциллирующую компоненту продольной проводимости, σ_{xx}, в магнитном поле в случае $\tau^{-1}\ll\omega_c\ll\tau_q^{-1}$.

Задача 9. Оценить осциллирующую компоненту поперечной проводимости, σ_{xy}, в магнитном поле в случае $\tau^{-1}\ll\omega_c\ll\tau_q^{-1}$.

Задача 10. Найти как соотносятся между собой ширина циклотронного резонанса, расстояние между уровнями Ландау и их ширина Γ в случае уровней Ландау слабо уширенных беспорядком.

Задача 11. Оценить значение продольной проводимости в точке циклотронного резонанса, $\sigma(\omega=\omega_c)$, для случая слабо уширенных беспорядком уровней Ландау $\omega_c\tau_q\gg 1$.

Задача 12. Оценить значение отношения M-ой гармоники циклотронного резонанса продольной проводимости, $\sigma(\omega=M\omega_c)/\sigma(\omega_c)$, при $M\gg 1$ для случая слабо уширенных беспорядком уровней Ландау $\omega_c\tau_q\gg 1$.

Задача 13. Считая, что основной вклад в проводимость двухмерной электронной системе при наличие микроволнового излучения дается неупругим механизмом определить зависимость проводимости от частоты излучения в случае почти полностью размытых беспорядком уровней Ландау.

Задача 14. Найти распределение электронной плотности двухмерного газа в геометрии корбино с учетом того, что разность работ выхода между левым (правым) металлическим контактом и двумерных газом равна $U_\pm$. Считать проводимость, коэффициент диффузии и плотность состояний известными. Расстояние между контактами равно R.

Задача 15. Два электрона находятся в плоскости $z = 0$ на расстоянии r. Найти зависимость статически экранизированного кулоновского взаимодействия от r. Построить график.

Задача 16. Для электронов в двойной квантовой яме найти возмущение электронной плотности в первой яме при приложении внешнего поля к электронам во второй яме. Считать ямы узкими, а расстояние между ними большим по сравнению с ширинами ям. Считать коэффициенты диффузии и плотности состояний в каждой из ям известными. Туннелирования электронов между ямами нет.

Задача 17. Для электронов в двойной квантовой яме оценить зависимость длины экранировки кулоновского взаимодействия от расстояния между ямами. Считать ямы узкими, а расстояние между ними большим по сравнению с ширинами ям. Считать коэффициенты диффузии и плотности состояний в каждой из ям известными. Туннелирования электронов между ямами нет.

Задача 18. Показать, что уравнение Эйлера-Лагранжа для действия

$$S = \frac{1}{2}\int d^D\boldsymbol{q}\int d\omega\Big[\Pi(q,\omega)\phi_{\rm tot}(\boldsymbol{q},\omega)\phi_{\rm tot}(-\boldsymbol{q},-\omega) + \frac{1}{U(q)}\phi(\boldsymbol{q},\omega)\phi(-\boldsymbol{q},-\omega)\Big],$$

где $\phi_{\rm tot} = \phi + \phi_{\rm ext}$, вместе с определением электронной плотности в виде $\rho(\boldsymbol{q},\omega) = -\delta S/\delta\phi_{\rm ext}(-\boldsymbol{q},-\omega)$, приводит к правильным уравнениям электродинамики электронного газа. Показать, что на решениях этих ур-ний действие равно $S = -(1/2)\int d^D\boldsymbol{q}\int d\omega\rho(\boldsymbol{q},\omega)\phi_{\rm ext}(-\boldsymbol{q},-\omega)$.

Задача 19. В момент времени $t = 0$, в двумерный невзаимодействующий электронный газ добавляют электрон в точку $\boldsymbol{r} = 0$. Считая коэффициент диффузии известным найти как лишний заряд будет рассасываться, т.е. зависимость $\rho(\boldsymbol{r},t)$ при $t > 0$.

Задача 20. В момент времени $t = 0$, в двухмерную квантовую точку в виде круга радиуса R, добавляют электрон в центр. Считая коэффициент диффузии известным оценить чему будет равна плотность заряда в центре на временах больших обратной энергии Таулесса.

Задача 21. Найти вероятность возврата электрона в точку $r = 0$ после рассеяния на 2-х, 3-х и т.д. примесях. Считать, что вероятность найти электрон в точке r_2 после рассеяния на примеси в точке r_1 равна $P(|r_2 - r_1|) = [1/(2\pi|r_2 - r_1|l)]\exp(-|r_2 - r_1|/l)$, где l – это длина свободного пробега. Считать, что рассеяние на примеси изотропное и электрон после рассеяния полностью забывает предысторию.

Задача 22. Оценить скорость неупругого рассеяния в грязном металле для случая динамически экранированного кулоновского взаимодействия.

Задача 23. Оценить скорость неупругого рассеяния в грязном металле для случая динамически экранированного короткодействующего взаимодействия.

Задача 24. Оценить величину ферми-жидкостной константы взаимодействия в триплетном канале F_t в двумерной электронной системе. Считать, что выполнено условие $\varkappa/k_F \ll 1$, где $\varkappa$ – обратная длина статической экранировка.

Задача 25. Оценить величину ферми-жидкостной константы взаимодействия, соответствующей экранированному взаимодействию между квантовыми ямами, $F_v = -\nu\langle U_{12}(0)\rangle/2$, для случая $\varkappa \ll 1/d \ll k_F$.

Задача 26. Найти энергию Таулесса для двухмерной квантовой точки в виде круга радиуса R.

Задача 27. Оценить скорость неупругого рассеяния в квантовой точке с большой энергией Таулесса для случая динамически экранированного кулоновского взаимодействия.

Задача 28. Оценить скорость неупругого рассеяния в квантовой точке с большой энергией Таулесса для случая короткодействия.

Задача 29. Оценить поправку к плотности состояний в 2D андерсоновском диэлектрике с кулоновским взаимодействием, считая, что она дается следующим выражением:

$$\frac{\delta\nu(\varepsilon)}{\nu_0} = -\int \frac{d^2\boldsymbol{q}}{(2\pi)^2} \int \frac{d\omega}{2\pi} \frac{1-\cos\omega\tau}{(Dq^2)^2+\omega^2} U(q),$$

где коэффициент диффузии $D = -i\omega\xi^2$, а $\tau \sim 1/\varepsilon$. Здесь ξ - длина локализации.

Задача 30. Оценить экранированное кулоновское взаимодействие в 2D андерсоновском диэлектрике, считая, что коэффициент диффузии равен $D = -i\omega\xi^2$, где ξ - длина локализации.