

## Задание 2. Курс “Квантовые явления в наноструктурах”

**Задача 1.** Определить к какому классу симметрии по классификации Вигнера-Дайсона относятся следующие гамильтонианы: (а)  $H = \frac{p^2}{2m} + V(\mathbf{r})$ , (б)  $H = \frac{p^2}{2m} + \mathbf{h}(\mathbf{r})\boldsymbol{\sigma}$ , где  $V(\mathbf{r})$  и  $\mathbf{h}(\mathbf{r})$  заданные скалярный потенциал и магнитное поле.

**Задача 2.** Определить к какому классу симметрии по классификации Вигнера-Дайсона относятся следующие гамильтонианы: (а)  $H = \frac{(\mathbf{p}-e\mathbf{A}/c)^2}{2m} + V(\mathbf{r})$ , (б)  $H = \mathbf{p}\boldsymbol{\sigma} + V(\mathbf{r})$ , где  $V(\mathbf{r})$  и  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$  заданные скалярный потенциал и векторный потенциал магнитного поля.

**Задача 3.** Гамильтониан, описывающий квазичастицы в графене, представляет собой матрицу  $4 \times 4$ ,  $H = v\tau_3(\sigma_x p_x + \sigma_y p_y)$ . Он обладает симметрией по отношению к обращению времени:  $H = T_0 H^T T_0$ , где  $T_0 = \sigma_1 \tau_1$ , и киральной симметрией:  $H = -C_0 H C_0$ , где  $C_0 = \sigma_3 \tau_0$ . Здесь  $\sigma_{0,1,2,3}$  и  $\tau_{0,1,2,3}$  стандартные матрицы Паули.  $H' = v\tau_3(\sigma_x p_x + \sigma_y p_y) + V(\mathbf{r})\tau_3\sigma_1$ . Определить к какому классу симметрии относится гамильтониан  $H'$ .

**Задача 4.** Гамильтониан, описывающий квазичастицы в графене, представляет собой матрицу  $4 \times 4$ ,  $H = v\tau_3(\sigma_x p_x + \sigma_y p_y)$ . Он обладает симметрией по отношению к обращению времени:  $H = T_0 H^T T_0$ , где  $T_0 = \sigma_1 \tau_1$ , и киральной симметрией:  $H = -C_0 H C_0$ , где  $C_0 = \sigma_3 \tau_0$ . Здесь  $\sigma_{0,1,2,3}$  и  $\tau_{0,1,2,3}$  стандартные матрицы Паули.  $H' = v\tau_3(\sigma_x p_x + \sigma_y p_y) + V(\mathbf{r})\tau_0\sigma_0$ . Определить к какому классу симметрии относится гамильтониан  $H'$ .

**Задача 5.** Гамильтониан, описывающий квазичастицы в графене, представляет собой матрицу  $4 \times 4$ ,  $H = v\tau_3(\sigma_x p_x + \sigma_y p_y)$ . Он обладает симметрией по отношению к обращению времени:  $H = T_0 H^T T_0$ , где  $T_0 = \sigma_1 \tau_1$ , и киральной симметрией:  $H = -C_0 H C_0$ , где  $C_0 = \sigma_3 \tau_0$ . Здесь  $\sigma_{0,1,2,3}$  и  $\tau_{0,1,2,3}$  стандартные матрицы Паули.  $H' = v\tau_3(\sigma_x p_x + \sigma_y p_y) + V(\mathbf{r})\tau_0\sigma_1$ . Определить к какому классу симметрии относится гамильтониан  $H'$ .

**Задача 6.** Гамильтониан, описывающий квазичастицы в графене, представляет собой матрицу  $4 \times 4$ ,  $H = v\tau_3(\sigma_x p_x + \sigma_y p_y)$ . Он обладает симметрией по отношению к обращению времени:  $H = T_0 H^T T_0$ , где  $T_0 = \sigma_1 \tau_1$ , и киральной симметрией:  $H = -C_0 H C_0$ , где  $C_0 = \sigma_3 \tau_0$ . Здесь  $\sigma_{0,1,2,3}$  и  $\tau_{0,1,2,3}$  стандартные матрицы Паули.  $H' = v\tau_3(\sigma_x p_x + \sigma_y p_y) + V(\mathbf{r})\tau_3\sigma_0$ . Определить к какому классу симметрии относится гамильтониан  $H'$ .

**Задача 7.** Для ортогонального случая для  $d = 2$   $\beta$ -функция имеет вид  $\beta(g) = -2/\pi$  в области  $g \ll 1$ . Оценить с экспоненциальной точностью зависимость длины локализации от параметра  $k_F l$ .

**Задача 8.** Для унитарного случая для  $d = 2$   $\beta$ -функция имеет вид  $\beta(g) = -1/(2\pi^2 g)$  в области  $g \ll 1$ . Оценить с экспоненциальной точностью зависимость длины локализации от параметра  $k_F l$ .

**Задача 9.** Пусть  $\beta$ -функция имеет вид  $\beta(g) = (g/\pi)[(g-1)/(g+1)] \ln(1+1/g)$ . Найти критический индекс корреляционной длины.

**Задача 10.** Пусть  $\beta$ -функция имеет вид  $\beta(g) = (g^2/\pi)[(g-1)/(g+1)] \ln(1+1/g^2)$ . Найти критический индекс корреляционной длины.

**Задача 11.** Построить фазовый портрет уравнений ренормгруппы ( $c_1 = 0.8$  и  $c_2 = 0.08$ ):

$$\frac{dt}{d \ln L} = -t\gamma + t^2(1 + c_1\gamma^2), \quad \frac{d\gamma}{d \ln L} = t - 4t^2(1 + c_2\gamma^3).$$

и найти значение критического индекса корреляционной длины в фиксированной точке.

**Задача 12.** Построить фазовый портрет уравнений ренормгруппы

$$\frac{d\gamma}{d \ln L} = t - \gamma^2, \quad \frac{dt}{d \ln L} = t,$$

где  $\gamma$  параметр взаимодействия, который может принимать и положительные и отрицательные значения, а  $t$  – сопротивление.

**Задача 13.** Построить фазовый портрет уравнений ренормгруппы

$$\frac{d\gamma}{d \ln L} = t\gamma - \gamma^2, \quad \frac{dt}{d \ln L} = t,$$

где  $\gamma$  параметр взаимодействия, который может принимать и положительные и отрицательные значения, а  $t$  – сопротивление.

**Задача 14.** Построить фазовый портрет уравнений ренормгруппы для унитарного класса с взаимодействием в размерности  $d = 2 + \epsilon$

$$\frac{dt}{d \ln L} = \epsilon t - 2t^2(1 - (1 + 1/\gamma) \ln(1 + \gamma)), \quad \frac{d\gamma}{d \ln L} = -t\gamma(1 + \gamma).$$

и найти значение критического индекса корреляционной длины в фиксированных точках.

**Задача 15.** Построить фазовый портрет уравнений ренормгруппы

$$\frac{d\sigma_{xx}}{d \ln L} = -\frac{1}{2\pi^2\sigma_{xx}} - D\sigma_{xx}^2 e^{-2\pi\sigma_{xx}} \cos(2\pi\sigma_{xy}), \quad \frac{d\sigma_{xy}}{d \ln L} = -D\sigma_{xx}^2 e^{-2\pi\sigma_{xx}} \sin(2\pi\sigma_{xy}).$$

и найти значение критического индекса корреляционной длины в фиксированной точке. Считать,  $D > 10$ .

**Задача 16.** Считая, что холловская проводимость дается классической формулой Друде-Зенера, построить положение делокализованных состояний на плоскости в координатах  $\{1/\tau\mu, \omega_c/\mu\}$ .

**Задача 17.** Найти общее решение уравнения  $-t \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{\nu} \Delta_\theta \frac{\partial G}{\partial \Delta_\theta} + y \Delta_\sigma \frac{\partial G}{\partial \Delta_\sigma} = 0$ .

**Задача 18.** Показать, что в критической точке при  $r \ll L$  справедливо равенство  $\langle |\psi_\epsilon(\mathbf{r})^{2q_1} \psi_\epsilon(0)^{2q_2}| \rangle = L^{-d(q_1+q_2) - \Delta_{q_1} - \Delta_{q_2}} (r/L)^{\Delta_{q_1+q_2} - \Delta_{q_1} - \Delta_{q_2}}$ .

**Задача 19.** Найти скейлинговую зависимость корректора плотностей состояний  $\langle \rho(\epsilon, \mathbf{r}) \rho(\epsilon + \omega, \mathbf{r} + \mathbf{R}) \rangle$  в области  $l \ll R \ll L_\omega \ll \min\{\xi_\epsilon, L\}$ .

**Задача 20.** Найти функцию распределения для  $|\psi^2(\mathbf{r})|$ , считая, что  $\tau_q = d(q-1) - \gamma q(q-1)$ , где  $\gamma < 0$ .

**Задача 21.** Магнитная примесь в сверхпроводнике создает связанное состояние с энергией  $E = \Delta(1 - \alpha)/(1 + \alpha)$ , где параметр  $\alpha$  пропорционален четвертой степени модуля волновой функции в точке, где находится примесь. Найти функцию распределения для энергии  $E$ , если  $\tau_q = d(q-1) - \gamma q(q-1)$ , где  $\gamma < 0$ .

**Задача 22.** Оценить мезоскопические флуктуации контактанса в грязном металле.

**Задача 23.** Вычислить плотность трёхчастичных состояний, в которых есть два электрона и дырка. Считать, что энергия одного из электронов равна  $\epsilon$ , суммарная энергия трехчастичного состояния равна нулю, а типичное расстояние между одночастичными уровнями равно  $\Delta$ .

**Задача 24.** Считая, что в двумерной электронной системе есть конечная длина локализации  $\xi$  и при тем-рах  $T \gg \Delta_\xi = 1/(\nu\xi^2)$  температурная зависимость проводимости описывается формулой слабой локализации, а при  $T \ll \Delta_\xi$  законом Арениуса, оценить величину энергетической щели в законе Арениуса.

**Задача 25.** Для термически-активированного проскальзывания фазы в квазиодномерных проволоках вычислить сопротивление с экспоненциальной точностью (определить численный коэффициент) при  $T_c - T \ll T_c$ .

**Задача 26.** Для квазиодномерного сверхпроводящего кольца, через который проходит магнитное поле, определить зависимость незатухающего тока от магнитного потока через кольцо при высоких температурах  $T \gg E_R = (\pi/2)^2 S \nu D \Delta_0^2 / (RT_c)$ .

**Задача 27.** Вычислить среднеквадратичное расстояние для пары вихрь-антивихрь, взаимодействующих по логарифмическому закону в  $d = 2$ .

**Задача 28.** Оценить взаимодействие зарядов на островках  $j$  и  $j + r$  для одномерного джозефсоновского массива.

**Задача 29.** Вычислить электростатический потенциал, создаваемый электрическим зарядом  $Q$  на расстоянии  $R$  в настоящем двумерном мире.

**Задача 30.** Вычислить электростатический потенциал, создаваемый электрическим зарядом  $Q$  на расстоянии  $R$  в тонкой пленке толщины  $d$  и с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon \gg 1$ . Рассмотреть случаи  $d \ll R \ll \epsilon d$  и  $\epsilon d \ll R$ .