

Задание 2. Курс “Квантовые явления в наноструктурах”

Вам нужно выбрать одну задачу, отличную от выбранных остальными. Срок сдачи 11 мая 2016 г. После этой даты ваш результат умножается на коэффициент $1 - x/300$, где x – это число дней, прошедших после 11 мая. Сдача задания подразумевает аккуратно написанное решение задачи и умение объяснить то, что написано.

- Задача 1.** Определить к какому классу симметрии по классификации Вигнера-Дайсона относятся следующие гамильтонианы: (а) $H = \frac{p^2}{2m} + V(\mathbf{r})$, (б) $H = \frac{p^2}{2m} + \mathbf{h}(\mathbf{r})\boldsymbol{\sigma}$, где $V(\mathbf{r})$ и $\mathbf{h}(\mathbf{r})$ заданные скалярный потенциал и магнитное поле.
- Задача 2.** Определить к какому классу симметрии по классификации Вигнера-Дайсона относятся следующие гамильтонианы: (а) $H = \frac{(\mathbf{p} - e\mathbf{A}/c)^2}{2m} + V(\mathbf{r})$, (б) $H = \mathbf{p}\boldsymbol{\sigma} + V(\mathbf{r})$, где $V(\mathbf{r})$ и $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ заданные скалярный потенциал и векторный потенциал магнитного поля.
- Задача 3.** Гамильтониан, описывающий квазичастицы в графене, представляет собой матрицу 4×4 , $H = v\tau_3(\sigma_x p_x + \sigma_y p_y)$. Он обладает симметрией по отношению к обращению времени: $H = T_0 H^T T_0$, где $T_0 = \sigma_1 \tau_1$, и киральной симметрией: $H = -C_0 H C_0$, где $C_0 = \sigma_3 \tau_0$. Здесь $\sigma_{0,1,2,3}$ и $\tau_{0,1,2,3}$ стандартные матрицы Паули. $H' = v\tau_3(\sigma_x p_x + \sigma_y p_y) + V(\mathbf{r})\tau_3 \sigma_1$. Определить к какому классу симметрии относится гамильтониан H' .
- Задача 4.** Гамильтониан, описывающий квазичастицы в графене, представляет собой матрицу 4×4 , $H = v\tau_3(\sigma_x p_x + \sigma_y p_y)$. Он обладает симметрией по отношению к обращению времени: $H = T_0 H^T T_0$, где $T_0 = \sigma_1 \tau_1$, и киральной симметрией: $H = -C_0 H C_0$, где $C_0 = \sigma_3 \tau_0$. Здесь $\sigma_{0,1,2,3}$ и $\tau_{0,1,2,3}$ стандартные матрицы Паули. $H' = v\tau_3(\sigma_x p_x + \sigma_y p_y) + V(\mathbf{r})\tau_0 \sigma_0$. Определить к какому классу симметрии относится гамильтониан H' .
- Задача 5.** Гамильтониан, описывающий квазичастицы в графене, представляет собой матрицу 4×4 , $H = v\tau_3(\sigma_x p_x + \sigma_y p_y)$. Он обладает симметрией по отношению к обращению времени: $H = T_0 H^T T_0$, где $T_0 = \sigma_1 \tau_1$, и киральной симметрией: $H = -C_0 H C_0$, где $C_0 = \sigma_3 \tau_0$. Здесь $\sigma_{0,1,2,3}$ и $\tau_{0,1,2,3}$ стандартные матрицы Паули. $H' = v\tau_3(\sigma_x p_x + \sigma_y p_y) + V(\mathbf{r})\tau_0 \sigma_1$. Определить к какому классу симметрии относится гамильтониан H' .
- Задача 6.** Гамильтониан, описывающий квазичастицы в графене, представляет собой матрицу 4×4 , $H = v\tau_3(\sigma_x p_x + \sigma_y p_y)$. Он обладает симметрией по отношению к обращению времени: $H = T_0 H^T T_0$, где $T_0 = \sigma_1 \tau_1$, и киральной симметрией: $H = -C_0 H C_0$, где $C_0 = \sigma_3 \tau_0$. Здесь $\sigma_{0,1,2,3}$ и $\tau_{0,1,2,3}$ стандартные матрицы Паули. $H' = v\tau_3(\sigma_x p_x + \sigma_y p_y) + V(\mathbf{r})\tau_3 \sigma_0$. Определить к какому классу симметрии относится гамильтониан H' .
- Задача 7.** Для ортогонального случая для $d = 2$ β -функция имеет вид $\beta(g) = -2/\pi$ в области $g \ll 1$. Оценить с экспоненциальной точностью зависимость длины локализации от параметра $k_F l$.
- Задача 8.** Для унитарного случая для $d = 2$ β -функция имеет вид $\beta(g) = -1/(2\pi^2 g)$ в области $g \ll 1$. Оценить с экспоненциальной точностью зависимость длины локализации от параметра $k_F l$.
- Задача 9.** Пусть β -функция имеет вид $\beta(g) = (g/\pi)[(g-1)/(g+1)] \ln(1+1/g)$. Найти критический индекс корреляционной длины.
- Задача 10.** Построить фазовый портрет уравнений ренормгруппы ($c_1 = 0.8$ и $c_2 = 0.08$):

$$\frac{dt}{d \ln L} = -t\gamma + t^2(1 + c_1\gamma^2), \quad \frac{d\gamma}{d \ln L} = t - 4t^2(1 + c_2\gamma^3).$$

и найти значение критического индекса корреляционной длины в фиксированной точке.

- Задача 11.** Построить фазовый портрет уравнений ренормгруппы для унитарного класса с взаимодействием в размерности $d = 2 + \epsilon$

$$\frac{dt}{d \ln L} = \epsilon t - 2t^2(1 - (1 + 1/\gamma) \ln(1 + \gamma)), \quad \frac{d\gamma}{d \ln L} = -t\gamma(1 + \gamma).$$

и найти значение критического индекса корреляционной длины в фиксированных точках.

- Задача 12.** Построить фазовый портрет уравнений ренормгруппы

$$\frac{d\sigma_{xx}}{d \ln L} = -\frac{1}{2\pi^2 \sigma_{xx}} - D\sigma_{xx}^2 e^{-2\pi\sigma_{xx}} \cos(2\pi\sigma_{xy}), \quad \frac{d\sigma_{xy}}{d \ln L} = -D\sigma_{xx}^2 e^{-2\pi\sigma_{xx}} \sin(2\pi\sigma_{xy}).$$

и найти значение критического индекса корреляционной длины в фиксированной точке. Считать, $D > 10$.

Задача 13. Найти общее решение уравнения $-t \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{\nu} \Delta_\theta \frac{\partial G}{\partial \Delta_\theta} + y \Delta_\sigma \frac{\partial G}{\partial \Delta_\sigma} = 0$.

Задача 14. Показать, что в критической точке при $r \ll L$ справедливо равенство $\left\langle |\psi_\varepsilon(\mathbf{r})^{2q_1} \psi_\varepsilon(0)^{2q_2}| \right\rangle = L^{-d(q_1+q_2)-\Delta_{q_1}-\Delta_{q_2}} (r/L)^{\Delta_{q_1+q_2}-\Delta_{q_1}-\Delta_{q_2}}$.

Задача 15. Найти скейлинговую зависимость корректора плотностей состояний $\langle \rho(\varepsilon, \mathbf{r}) \rho(\varepsilon + \omega, \mathbf{r} + \mathbf{R}) \rangle$ в области $l \ll R \ll L_\omega \ll \min\{\xi_\varepsilon, L\}$.

Задача 16. Вычислить функцию распределения для P_q , считая, что $\tau_q = d(q-1) - \gamma q(q-1)$, где $\gamma < 0$.

Задача 17. Вычислить плотность трёхчастичных состояний, в которых есть два электрона и дырка. Считать, что энергия одного из электронов равна ϵ , суммарная энергия трёхчастичного состояния равна нулю, а типичное расстояние между одночастичными уровнями равно Δ .

Задача 18. Для термически-активированного проскальзывающей фазы в квазиодномерных проволоках вычислить сопротивление с экспоненциальной точностью (определить численный коэффициент) при $T_c - T \ll T_c$.

Задача 19. Для квазиодномерного сверхпроводящего кольца, через который проходит магнитное поле, определить зависимость незатухающего тока от магнитного потока через кольцо при высоких температурах $T \gg E_R = (\pi/2)^2 S \nu D \Delta_0^2 / (RT_c)$.

Задача 20. Вычислить среднеквадратичное расстояние для пары вихрь-антивихрь, взаимодействующих по логарифмическому закону в $d = 2$.

Задача 21. Оценить взаимодействие зарядов на островках j и $j+r$ для одномерного джозефсоновского массива.

Задача 22. Вычислить электростатический потенциал, создаваемый электрическим зарядом Q на расстоянии R в настоящем двумерном мире.