

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ИНСТИТУТ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ
имени Л. Д. ЛАНДАУ

На правах рукописи

КОРОТКЕВИЧ Александр Олегович

УДК 532.5:519.6

**Численное моделирование слабой турбулентности
поверхностных волн**

Специальность 01.04.02 - Теоретическая физика

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
академик,
профессор В. Е. Захаров

Москва - 2003

Оглавление

| | |
|---|-----------|
| Введение | 6 |
| I. Динамические уравнения для волн | 10 |
| II. Влияние эффекта Доплера на закон дисперсии волн | 14 |
| II.1. Формулирование задачи и обозначения | 17 |
| II.2. Спектр в присутствии эффекта Доплера | 19 |
| II.3. Удобный набор безразмерных переменных | 21 |
| II.4. Случай глубокой воды | 22 |
| II.5. Результаты численного моделирования | 25 |
| II.6. Заключение | 26 |
| III. Моделирование резонансных взаимодействий | 28 |
| III.1. Динамические уравнения на дискретной сетке | 29 |
| III.2. Капиллярные волны | 30 |
| III.3. Гравитационные волны | 37 |
| III.4. Заключение | 44 |
| IV. Численная схема | 46 |
| IV.1. Построение численной схемы | 46 |
| IV.2. Выбор шага по времени | 49 |
| IV.3. Обобщение численной схемы | 49 |
| IV.4. Заключение | 50 |
| V. Турбулентность гравитационных волн | 51 |
| V.1. Статистическое описание волнового поля | 51 |
| V.2. Численное моделирование | 53 |
| V.3. Заключение | 59 |
| Заключение | 60 |

Приложения **62**

- .1. Вычисление разложений спектра 62
- .2. Дискретная вариация Гамильтониана 63

Литература **65**

Публикации автора по теме диссертации **67**

Список иллюстраций

| | |
|--|----|
| II.1. Вычисленный спектр Филлипса для гравитационных волн на глубокой воде в присутствии эффекта Доплера | 25 |
| II.2. Вычисленный спектр Филлипса для гравитационных волн на глубокой воде в присутствии эффекта Доплера. Двойная логарифмическая шкала. | 26 |
| III.1. Капиллярные волны. Резонансная кривая. | 31 |
| III.2. Капиллярные волны. Фрагмент резонансной кривой. Хорошо видны расстройки для различных гармоник. | 33 |
| III.3. Капиллярные волны. Эволюция различных гармоник. | 34 |
| III.4. Капиллярные волны. Начало роста резонансных гармоник. | 34 |
| III.5. Капиллярные волны. Начало вторичных процессов распада. | 35 |
| III.6. Капиллярные волны. Линии уровня спектральной поверхности. Хорошо видны вторичные распады. | 35 |
| III.7. Капиллярные волны. Спектральная плоскость, заполненная вторичными распадами. | 36 |
| III.8. Гравитационные волны. Резонансная кривая. | 38 |
| III.9. Гравитационные волны. Фрагмент резонансной кривой. Хорошо заметна разная расстройка для разных узлов сетки. | 39 |
| III.10. Гравитационные волны. Рост гармоник как функция времени. | 39 |
| III.11. Гравитационные волны. Начало роста гармоник. | 40 |
| III.12. Гравитационные волны. Начало роста гармоник. Линии уровня. | 40 |
| III.13. Гравитационные волны. Продолжение роста гармоник. | 41 |
| III.14. Гравитационные волны. Продолжение роста гармоник. Линии уровня. | 41 |
| III.15. Гравитационные волны. Начальная волна окружена порожденными вторичными распадами гармониками. | 42 |
| III.16. Гравитационные волны. Начальная волна окружена порожденными вторичными распадами волн гармониками. Линии уровня. | 42 |

| | |
|--|----|
| III.17. Гравитационные волны. Рост гармоник в случае начальных условий в виде двух волн с противоположными волновыми векторами. | 43 |
| III.18. «Квази-резонансная» кривая для трехволнового взаимодействия гравитационных волн. | 44 |
| V.1. Турбулентность гравитационных волн. Гамильтониан системы как функция времени. | 55 |
| V.2. Турбулентность гравитационных волн. Корреляционная функция отклонения поверхности в двойном логарифмическом масштабе. | 56 |
| V.3. Турбулентность гравитационных волн. Скомпенсированный коррелятор отклонения поверхности при различных степенях компенсации. | 56 |
| V.4. Турбулентность гравитационных волн. Уширение области степенного спектра при увеличении количества точек на сетке. . . | 57 |
| V.5. Турбулентность гравитационных волн. Инерционный интервал спектра при различных уровнях накачки. | 58 |

Введение

Нелинейные волны — это одно из самых широкоизвестных и в то же время сложных физических явлений в природе. Волны в океане и рябь на поверхности чая в чашке могут быть описаны практически одинаковыми уравнениями. Все эти явления существенно нелинейны, но при этом амплитуды волн обычно намного меньше характерной длины волны. В этих условиях волны являются слабонелинейными.

Для описания статистических свойств процессов такого рода была предложена теория слабой турбулентности [1]. Были найдены точные решения полученного в рамках этой теории кинетического уравнения Хассельмана-Захарова. Данные частные решения представляют собой Колмогоровские (степенные) спектры [9].

Теория слабой турбулентности нашла применение в широком спектре областей физики: Альфеновские волны в плазме [4], турбулентность в нелинейной оптике [5], Ленгмюровские волны [6] и т.д.

Одной из важнейших областей, где может быть применена теория слабой турбулентности, являются волны на поверхности жидкости. В работе [32] в результате численного эксперимента были получены слаботурбулентные спектры для капиллярных волн на поверхности глубокой жидкости, а в работах [2, 3] эти спектры были получены прямым измерением турбулентности волн на поверхности жидкого водорода.

Но наиболее интересным представляется случай гравитационных волн на поверхности глубокой жидкости. Начиная с работы [19] и в новейших наблюдениях [24] за поверхностью океана, множество экспериментаторов получает спектры, предсказанные теорией слабой турбулентности. Однако эти эксперименты не могут трактоваться как полное и неопровержимое доказательство правоты теории, так как спектры Захарова-Филоненко [8] являются изотропными, тогда как наблюдаемые в эксперименте спектры существенно анизотропны. Кинетическое уравнение, являющееся одним из краеугольных камней теории слабой турбулентности, было выведено с использованием ряда предположений. Например, предполагается, что фазы всех взаимодействующих

щих волн случайны и хаотически меняются. Верность этих предположений априори не ясна.

Прямое численное моделирование динамических уравнений может дать ответ на данный вопрос. Но для случая гравитационных волн численное подтверждение отсутствовало, несмотря на значительные усилия в этом направлении. Единственной относительно удачной попыткой следует признать моделирование свободно спадающих волн в работе [25]. По нашему мнению, причина этого заключается в трудности правильного выбора параметров численной схемы. Численное моделирование этих уравнений чрезвычайно чувствительно к резонансному четырехволновому взаимодействию. Амплитуды гармоник должны быть не слишком малы (чтобы обеспечить достаточную ширину резонансной кривой), но и не слишком велики (так как в этом случае на дискретной сетке могут открыться нерезонансные взаимодействия). Поэтому исследование влияния дискретности сетки волновых векторов на резонансные взаимодействия волн являлось важной задачей.

Представляло интерес разработать такую численную схему, которая сохраняет Гамильтониан системы, так как еще в конце 60-х было показано [7], что данная система является Гамильтоновой.

Кроме того, было необходимо проверить гипотезу о возможности интерпретации наблюдаемых спектров как спектров Филлипса [11], искаженных Доплеровским эффектом, обусловленным длинноволновым фоном.

Структура диссертации следующая.

В **Главе I, «Динамические уравнения для волн на поверхности жидкости»**, приведен вывод динамических уравнений на поверхности жидкости. Записаны Гамильтониан системы и уравнения Гамильтона.

В **Главе II, «Влияние эффекта Доплера на закон дисперсии волн»**, рассмотрена гипотеза Баннера о том, что наблюдаемые в эксперименте спектры есть не что иное, как спектры Филлипса, искаженные эффектом Доплера от длинноволнового фона.

Эта глава построена следующим образом: в разделе II.1 мы вводим общие обозначения; в II.2 выведена общая формула для спектра в присутствии эффекта Доплера; более удобный для дальнейших выкладок набор безразмерных переменных введен в II.3; в разделе II.4 мы исследуем важный случай гравитационных волн на глубокой воде; в II.5 помещены численные результаты; раздел II.6 является заключением.

Глава III, «**Моделирование резонансных взаимодействий на дискретной сетке**», рассмотрено влияние дискретности сетки на моделирование резонансных взаимодействий волн. Выработаны рекомендации для подбора параметров при численном моделировании турбулентности поверхностных волн. Построение данной главы таково: в разделе III.1 записаны динамические уравнения на дискретной сетке; в разделе III.2 рассмотрен случай капиллярных волн на поверхности глубокой воды, произведено численное моделирование резонансного распада монохроматической волны, получена картина вторичных распадов, формирующих Колмогоровский каскад; в разделе III.3 приведены результаты моделирования распада монохроматической гравитационной волны на поверхности бесконечно глубокой идеальной жидкости; в заключении III.4 приведен анализ полученных результатов и выводы, важные для построения численной модели слабой турбулентности поверхностных волн.

В Главе IV, «**Численная схема моделирования гравитационных и капиллярных поверхностных волн**», построена численная схема для решения динамических уравнений волн на поверхности жидкости, сохраняющая Гамильтониан системы. Схема может быть обобщена на случай наличия накачки и затухания. Данная глава построена следующим образом: в части IV.1 последовательно строится схема интегрирования уравнений (I.9), сохраняющая Гамильтониан; удобный на практике метод выбора шага по времени описывается в разделе IV.2; некоторые приемы, обобщающие полученную численную схему, приведены в части IV.3; в заключении IV.4 обсуждаются полученные результаты.

В Главе V, «**Турбулентность гравитационных волн**», вводится статистическое описание для случая гравитационных волн на поверхности глубокой жидкости. Выполнено численное моделирование турбулентности гравитационных волн на поверхности глубокой жидкости. Получены слаботурбулентные Колмогоровские спектры, хорошо согласующиеся с наблюдаемыми в эксперименте данными. Эта глава имеет такую структуру: в разделе V.1 вводится статистическое описание волнового поля на поверхности жидкости для случая гравитационных волн на глубокой воде; в разделе V.2 приведены параметры численной схемы и результаты расчетов; в заключении V.3 обсуждаются полученные результаты.

В «**Заключении**» сформулированы результаты работы.

В «**Приложения**» вынесен подробный вывод некоторых формул, приведение которых в основном тексте прерывало бы связность изложения из-за их излишней громоздкости.

Цель работы заключалась в

- Проверке гипотезы Баннера о том, что наблюдаемые в эксперименте спектры есть не что иное, как спектры Филлипса, искаженные эффектом Доплера от длинноволнового фона.
- Детальном изучении влияния дискретной сетки волновых чисел на резонансные взаимодействия волн при моделировании динамических уравнений в случаях гравитационных и капиллярных волн на поверхности глубокой жидкости.
- Построении численной схемы для решения динамических уравнений волн на поверхности жидкости, сохраняющей Гамильтониан системы.
- Численном моделировании турбулентности гравитационных волн на поверхности глубокой жидкости. Получении слаботурбулентных Колмогоровских спектров, хорошо согласующихся с наблюдаемыми в эксперименте данными.

Работа выполнена в Институте теоретической физики им. Л. Д. Ландау Российской Академии Наук.

Основные результаты диссертации докладывались на международной научной конференции International Workshop «Solitons, Collapses and Turbulence», г. Черногоровка, 2002, а также на научных семинарах Института теоретической физики им. Л. Д. Ландау РАН.

По теме диссертации опубликовано три работы, список которых приведен в конце диссертации.

I. Динамические уравнения для волн на поверхности жидкости

Рассмотрим безвихревое потенциальное течение идеальной несжимаемой жидкости бесконечной глубины. Для простоты будем считать плотность жидкости $\rho = 1$. Потенциал скорости ϕ при этих условиях удовлетворяет уравнению Лапласа:

$$\Delta\phi = 0, \quad (\text{I.1})$$

в области со следующими границами:

$$-\infty < z < \eta(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} = (x, y). \quad (\text{I.2})$$

Граничные условия на потенциал таковы

$$\begin{aligned} \frac{\partial\eta}{\partial t} + \frac{\partial\phi}{\partial x} \frac{\partial\eta}{\partial x} + \frac{\partial\phi}{\partial y} \frac{\partial\eta}{\partial y} &= \left. \frac{\partial\phi}{\partial z} \right|_{z=\eta}, \\ \left(\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 \right) \Big|_{z=\eta} + \sigma(\sqrt{1 + (\nabla\eta)^2} - 1) &= 0, \end{aligned} \quad (\text{I.3})$$

при $z = \eta$, и:

$$\phi_z|_{z=-\infty} = 0, \quad (\text{I.4})$$

при $z \rightarrow -\infty$. Здесь $\eta = \eta(x, y, t)$ смещение поверхности от состояния покоя. Энергия системы описывается следующей функцией:

$$H = T + U,$$

$$T = \frac{1}{2} \int d^2r \int_{-\infty}^{\eta} (\nabla\phi)^2 dz, \quad (\text{I.5})$$

$$U = \sigma \int (\sqrt{1 + (\nabla\eta)^2} - 1) d^2r + \frac{1}{2}g \int \eta^2 d^2r, \quad (\text{I.6})$$

где σ – коэффициент поверхностного натяжения, g – ускорение свободного падения. В [7] было показано, что эта система является гамильтоновой. Гамильтоновы переменные в этом случае – это смещение поверхности $\eta(x, y, t)$ и

потенциал скорости на поверхности жидкости $\psi(x, y; t) = \phi(x, y, \eta(x, y; t); t)$. Уравнения Гамильтона имеют следующий вид:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\delta H}{\delta \psi}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\delta H}{\delta \eta}. \quad (\text{I.7})$$

Применяя разложение энергии по крутизне, можно получить следующее выражение для Гамильтониана:

$$H = \frac{1}{2} \int (\sigma |\nabla \eta|^2 + g\eta^2 + \psi \hat{k}\psi) d^2r + \frac{1}{2} \int \eta [|\nabla \psi|^2 - (\hat{k}\psi)^2] d^2r + \frac{1}{2} \int \eta (\hat{k}\psi) [\hat{k}(\eta(\hat{k}\psi)) + \eta \Delta \psi] d^2r. \quad (\text{I.8})$$

Здесь введен линейный оператор \hat{k} , суть действия которого на функцию сводится к следующему: надо взять фурье-компоненты функции, умножить их на модуль k и выполнить обратное преобразование Фурье. По причинам, которые станут понятны позднее (III.3), необходимо использовать разложение до членов четвертого порядка. Уравнения Гамильтона (I.7) принимают вид:

$$\begin{aligned} \dot{\eta} &= \hat{k}\psi - (\nabla(\eta \nabla \psi)) - \hat{k}[\eta \hat{k}\psi] + \hat{k}(\eta \hat{k}[\eta \hat{k}\psi]) + \\ &\quad + \frac{1}{2} \Delta[\eta^2 \hat{k}\psi] + \frac{1}{2} \hat{k}[\eta^2 \Delta \psi], \\ \dot{\psi} &= \sigma \Delta \eta - g\eta - \frac{1}{2} [(\nabla \psi)^2 - (\hat{k}\psi)^2] - [\hat{k}\psi] \hat{k}[\eta \hat{k}\psi] - [\eta \hat{k}\psi] \Delta \psi. \end{aligned} \quad (\text{I.9})$$

Удобно записать гамильтониан в фурье-гармониках:

$$\psi_{\mathbf{k}} = \frac{1}{2\pi} \int \psi_{\mathbf{r}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} d^2r, \quad \eta_{\mathbf{k}} = \frac{1}{2\pi} \int \eta_{\mathbf{r}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} d^2r. \quad (\text{I.10})$$

Члены гамильтониана примут следующий вид:

$$\begin{aligned} H &= H_0 + H_1 + H_2 + \dots, \\ H_0 &= \frac{1}{2} \int (|k| |\psi_{\mathbf{k}}|^2 + \sigma |k|^2 |\eta_{\mathbf{k}}|^2 + g |\eta_{\mathbf{k}}|^2) d\mathbf{k}, \\ H_1 &= -\frac{1}{4\pi} \int L_{\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2} \psi_{\mathbf{k}_1} \psi_{\mathbf{k}_2} \eta_{\mathbf{k}_3} \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3) d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 d\mathbf{k}_3, \\ H_2 &= \frac{1}{16\pi^2} \int M_{\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2 \mathbf{k}_3 \mathbf{k}_4} \eta_{\mathbf{k}_1} \psi_{\mathbf{k}_2} \eta_{\mathbf{k}_3} \psi_{\mathbf{k}_4} \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4) d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 d\mathbf{k}_3 d\mathbf{k}_4, \end{aligned} \quad (\text{I.11})$$

Здесь введены матричные элементы

$$\begin{aligned} L_{\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2} &= (\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2) + |\mathbf{k}_1| |\mathbf{k}_2|, \\ M_{\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2 \mathbf{k}_3 \mathbf{k}_4} &= |\mathbf{k}_2| |\mathbf{k}_4| \left[\frac{1}{2} (|\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2| + |\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_4| + \right. \\ &\quad \left. + |\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_2| + |\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4|) - |\mathbf{k}_2| - |\mathbf{k}_4| \right]. \end{aligned} \quad (\text{I.12})$$

Вследствие вещественности функций η и ψ их фурье-образы обладают симметрией $\eta_{\mathbf{k}} = \eta_{-\mathbf{k}}^*$. Поэтому удобнее ввести канонические переменные:

$$a_{\mathbf{k}} = \sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{k}}}{2k}}\eta_{\mathbf{k}} + i\sqrt{\frac{k}{2\omega_{\mathbf{k}}}}\psi_{\mathbf{k}}, \quad (\text{I.13})$$

здесь $\omega_{\mathbf{k}}$ — это закон дисперсии волн:

$$\omega_{\mathbf{k}} = \sqrt{\sigma k^3 + gk}. \quad (\text{I.14})$$

Члены Гамильтониана (I.11) принимают вид:

$$\begin{aligned} H_0 &= \int \omega_{\mathbf{k}} |a_{\mathbf{k}}|^2 d\mathbf{k}, \\ H_1 &= \frac{1}{6} \frac{1}{2\pi} \int E_{\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2}^{\mathbf{k}_0} (a_{\mathbf{k}_1} a_{\mathbf{k}_2} a_{\mathbf{k}_0} + a_{\mathbf{k}_1}^* a_{\mathbf{k}_2}^* a_{\mathbf{k}_0}^*) \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_0) d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 d\mathbf{k}_0 + \\ &+ \frac{1}{2} \frac{1}{2\pi} \int C_{\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2}^{\mathbf{k}_0} (a_{\mathbf{k}_1} a_{\mathbf{k}_2} a_{\mathbf{k}_0}^* + a_{\mathbf{k}_1}^* a_{\mathbf{k}_2}^* a_{\mathbf{k}_0}) \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_0) d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 d\mathbf{k}_0, \\ H_2 &= \frac{1}{4} \frac{1}{(2\pi)^2} \int W_{\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2 \mathbf{k}_3 \mathbf{k}_4} (a_{\mathbf{k}_1} a_{\mathbf{k}_2} a_{\mathbf{k}_3} a_{\mathbf{k}_4} + a_{\mathbf{k}_1}^* a_{\mathbf{k}_2}^* a_{\mathbf{k}_3}^* a_{\mathbf{k}_4}^*) \times \\ &\times \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4) d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 d\mathbf{k}_3 d\mathbf{k}_4 + \\ &+ \frac{1}{4} \frac{1}{(2\pi)^2} \int F_{\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2 \mathbf{k}_3 \mathbf{k}_4} (a_{\mathbf{k}_1}^* a_{\mathbf{k}_2} a_{\mathbf{k}_3} a_{\mathbf{k}_4} + a_{\mathbf{k}_1} a_{\mathbf{k}_2}^* a_{\mathbf{k}_3}^* a_{\mathbf{k}_4}^*) \times \\ &\times \delta(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_4) d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 d\mathbf{k}_3 d\mathbf{k}_4 + \\ &+ \frac{1}{4} \frac{1}{(2\pi)^2} \int D_{\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2 \mathbf{k}_3 \mathbf{k}_4} (a_{\mathbf{k}_1} a_{\mathbf{k}_2} a_{\mathbf{k}_3}^* a_{\mathbf{k}_4}^* \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_4) d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 d\mathbf{k}_3 d\mathbf{k}_4. \end{aligned} \quad (\text{I.15})$$

Здесь введены такие обозначения матричных элементов:

$$\begin{aligned} E_{\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2}^{\mathbf{k}_0} &= V_{\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2}^{k_0} + V_{\mathbf{k}_0 \mathbf{k}_2}^{k_1} + V_{\mathbf{k}_0 \mathbf{k}_1}^{k_2}, \\ C_{\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2}^{\mathbf{k}_0} &= V_{\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2}^{k_0} - V_{-\mathbf{k}_0 \mathbf{k}_2}^{k_1} - V_{-\mathbf{k}_0 \mathbf{k}_1}^{k_2}, \\ V_{\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2}^{k_0} &= \sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{k}_1} \omega_{\mathbf{k}_2} k_0}{8k_1 k_2 \omega_{\mathbf{k}_0}}} L_{\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2}, \\ F_{\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2 \mathbf{k}_3 \mathbf{k}_4} &= W_{\mathbf{k}_1, -\mathbf{k}_2, -\mathbf{k}_3, -\mathbf{k}_4} - W_{-\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_1, -\mathbf{k}_3, -\mathbf{k}_4} + W_{-\mathbf{k}_3, -\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_1, -\mathbf{k}_4} - \\ &- W_{-\mathbf{k}_4, -\mathbf{k}_2, -\mathbf{k}_3, \mathbf{k}_1}, \\ D_{\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2 \mathbf{k}_3 \mathbf{k}_4} &= W_{\mathbf{k}_1, -\mathbf{k}_3, \mathbf{k}_2, -\mathbf{k}_4} + W_{\mathbf{k}_3, -\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_4, -\mathbf{k}_2} - \\ &- (W_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, -\mathbf{k}_3, -\mathbf{k}_4} + W_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, -\mathbf{k}_4, -\mathbf{k}_3} + W_{\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_1, -\mathbf{k}_3, -\mathbf{k}_4} + W_{\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_1, -\mathbf{k}_4, -\mathbf{k}_3}), \\ W_{\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2 \mathbf{k}_3 \mathbf{k}_4} &= \sqrt{\frac{k_1 \omega_{\mathbf{k}_2} k_3 \omega_{\mathbf{k}_4}}{16\omega_{\mathbf{k}_1} k_2 \omega_{\mathbf{k}_3} k_4}} M_{\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2 \mathbf{k}_3 \mathbf{k}_4}. \end{aligned} \quad (\text{I.16})$$

Несмотря на кажущуюся громоздкость представления Гамильтониана в таких переменных, смысл каждого члена в выражении (I.15) ясен и понятен.

Член H_0 отвечает линейной эволюции начальных условий. Выражение с H_1 отвечает трехволновым взаимодействиям, в том числе: член с $E_{\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2}^{\mathbf{k}_0}$ дает генерацию второй гармоники, а член с $C_{\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2}^{\mathbf{k}_0}$ отвечает трехволновым процессам распада и слияния. Выражение с H_2 представляет четырехволновые процессы, а именно: член с $W_{\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2\mathbf{k}_3\mathbf{k}_4}$ дает генерацию третьей гармоники, $F_{\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2\mathbf{k}_3\mathbf{k}_4}$ — распад и слияние одной волны в три, $D_{\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2\mathbf{k}_3\mathbf{k}_4}$ — рассеяние двух волн в две волны. Уравнения Гамильтона в этих переменных принимают вид:

$$\begin{aligned}
\dot{a}_{\mathbf{k}} &= -i \frac{\delta H}{\delta a_{\mathbf{k}}^*} = -i\omega_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}} - \\
& - \frac{i}{2} \frac{1}{2\pi} \int C_{\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2}^{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}_1} a_{\mathbf{k}_2} \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}) d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 - \\
& - \frac{i}{2\pi} \int C_{\mathbf{k}\mathbf{k}_2}^{\mathbf{k}_0} a_{\mathbf{k}_2}^* a_{\mathbf{k}_0} \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_0) d\mathbf{k}_2 d\mathbf{k}_0 - \\
& - \frac{i}{2} \frac{1}{2\pi} \int E_{\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2}^{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}_1}^* a_{\mathbf{k}_2}^* \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}) d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 - \\
& - \frac{i}{(2\pi)^2} \int W_{\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2\mathbf{k}_3\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}_1}^* a_{\mathbf{k}_2}^* a_{\mathbf{k}_3}^* \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 + \mathbf{k}) d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 d\mathbf{k}_3 - \\
& - \frac{i}{4} \frac{1}{(2\pi)^2} \int F_{\mathbf{k}\mathbf{k}_2\mathbf{k}_3\mathbf{k}_4} a_{\mathbf{k}_2} a_{\mathbf{k}_3} a_{\mathbf{k}_4} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_4) d\mathbf{k}_2 d\mathbf{k}_3 d\mathbf{k}_4 - \\
& - \frac{i}{4} \frac{3}{(2\pi)^2} \int F_{\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2\mathbf{k}_3\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}_1} a_{\mathbf{k}_2}^* a_{\mathbf{k}_3}^* \delta(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3 - \mathbf{k}) d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 d\mathbf{k}_3 - \\
& - \frac{i}{2} \frac{1}{(2\pi)^2} \int D_{\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2\mathbf{k}_3\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}_1} a_{\mathbf{k}_2} a_{\mathbf{k}_3}^* \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3 - \mathbf{k}) d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 d\mathbf{k}_3.
\end{aligned} \tag{I.17}$$

Изложенные результаты можно найти во множестве источников (например, [8, 9]), в том числе и для более общего случая жидкости конечной глубины [10].

II. Влияние эффекта Доплера на закон дисперсии волн

В научном мире существует долгая дискуссия о форме, а точнее, о показателе в степенном законе убывания «хвоста» спектрального распределения в так называемой «универсальной области» $\omega \gtrsim \omega_p$, где ω_p — это частота спектрального максимума.

Существуют две основных точки зрения. Первая, предложенная О.М. Филлипсом в 1958 году [11], дает нам в универсальной области:

$$F(\omega) \simeq \frac{\alpha g^2}{\omega^5}, \quad (\text{II.1})$$

где α является безразмерной константой, которая, согласно экспериментальным данным, должна быть довольно мала: $\alpha \simeq 0.01$. Вторая точка зрения, введенная Захаровым и Филоненко в 1966 году [1], дает нам в универсальной области следующий спектр:

$$F(\omega) \simeq \frac{\beta \epsilon^{\frac{1}{2}} g v}{\omega^4}, \quad (\text{II.2})$$

где β — это безразмерная константа, v — скорость ветра, $\epsilon \simeq \frac{\rho_a}{\rho_w}$ — отношение плотностей океанской воды и атмосферы.

Формулы (II.1) и (II.2) основываются на абсолютно противоположных предположениях. Спектр Филлипса (II.1) имеет место, если спектр в высокочастотной области главным образом определяется появлением острых гребней и обрушением волн. Уровень нелинейности, зависящий от крутизны $\mu = ka$, в этом случае (по крайней мере в области гребней волн) чрезвычайно высок — $\mu \simeq 0.315$ (критическая волна Стокса).

С другой стороны, спектр (II.2) получен в предположении малой средней крутизны — $\mu \ll 1$. Это предположение хорошо согласуется с данными наблюдений. Обычно $\mu \lesssim 0.1$.

Следуя этой точке зрения, сгенерированный ветром волновой ансамбль

описывается кинетическим уравнением Хассельмана [12, 13]:

$$\frac{\partial N}{\partial t} = S_{nl} + p^+ + p^-. \quad (\text{II.3})$$

Спектр Захарова-Филоненко получается как точное решение частного случая уравнения (II.3):

$$S_{nl} = 0, \quad (\text{II.4})$$

Это классический случай Колмогоровского (степенного) спектра [8].

Множество экспериментальных наблюдений [14, 15, 16, 17, 18], начиная со знаменитой работы Тобы [19], позволяет утверждать, что в большинстве случаев в области умеренно высоких частот $\frac{\omega}{\omega_p} \lesssim 10$ ясно обнаруживается спектр Захарова-Филоненко (II.2). Иногда в области чрезвычайно высоких частот $\frac{\omega}{\omega_p} \gg 10$ наблюдается спектр Филлипса (II.1).

«Универсальность» спектра ω^{-4} стала очевидной в середине восьмидесятых годов прошлого века. В 1985, О.М. Филлипс, «отец» спектра ω^{-5} , опубликовал статью [20] с признанием, что спектр (II.1) может иметь место только в области высоких частот и не является универсальным.

В области умеренных частот спектр ω^{-4} уверенно доминирует. В этой ситуации вопрос физической интерпретации спектра $F(\omega) \sim \omega^{-4}$ становится очень важным. С нашей точки зрения, происхождение этого спектра достаточно очевидно. Это просто слаботурбулентный спектр Захарова-Филоненко. Однако существуют и другие объяснения.

Одно из них было предложено Филлипсом в [20]. Он предположил, что спектр ω^{-4} является результатом баланса всех трех членов в уравнении (II.3).

$$S_{nl} \simeq p^+ + p^-. \quad (\text{II.5})$$

Это предположение вряд ли может быть рассмотрено как серьезная теория, так как вид p^- точно не известен. Существуют только грубые эмпирические формулы. Тем не менее, в упомянутой статье это выражение было выбрано в форме, дающей нам баланс в (II.5). Но для этого нет никаких оснований.

Другое объяснение было предложено Баннером [21] и развито Донеланом [17]. Они рассматривают спектр ω^{-4} как артефакт наблюдений в результате Доплеровского сдвига частоты коротких волн фоновыми токами длинных волн.

Предположим, что пространственный спектр коротких волн $\Phi(k)$ известен. Как получить их частотный спектр $F(\omega)$, используя только $\Phi(k)$? Обычно полагают, что волны подчиняются линейному дисперсионному уравнению. В

этом случае имеет место следующее простое выражение:

$$F(\omega) = \int \Phi(k)\delta(\omega - \omega(k))dk.$$

Однако в присутствии длинных волн закон дисперсии коротких волн изменяется вследствие эффекта Доплера на фоне поля скоростей \mathbf{v} длинноволновой компоненты:

$$\omega(k) \rightarrow \omega(k) + (\mathbf{k}\mathbf{v}). \quad (\text{II.6})$$

В статье Филлипса [22] было показано, что даже в случае низкой крутизны эффект Доплера может быть важным в высокочастотной области. Впервые данный эффект был рассмотрен в хорошо известной статье [23], где \mathbf{v} предполагалась случайной функцией от времени. На самом деле, это квазипериодическая функция со случайной огибающей. В данной главе мы упростили задачу, считая \mathbf{v} чисто периодической функцией. Другими словами, мы изучаем изменение спектра в присутствии длинной монохроматической волны. Это предположение делает возможным развитие аналитической теории вплоть до точных формул.

Этот раздел посвящен количественной теории этого, вне всякого сомнения, важного явления. Мы рассмотрим его в очень упрощенном виде, предполагая \mathbf{v} синусоидальной функцией от времени. То есть, предполагая длинную волну строго монохроматической. Это предположение не слишком нереально. Несомненно, оно дает правильный порядок величины.

В разделе II.1 мы вводим общие обозначения (следуя статье Филлипса). В II.2 выведена общая формула для спектра в присутствии эффекта Доплера. Более удобный для дальнейших выкладок набор безразмерных переменных введен в II.3. В разделе II.4 мы исследуем важный случай дисперсионного закона $\omega^2 = gk$ («гравитационный волны на глубокой воде»); здесь g — ускорение свободного падения, k — волновое число, равное $2\pi/\lambda$. В II.5 помещены численные результаты. Раздел II.6 является заключением.

В случае достаточно малой крутизны $\mu \simeq 0.1$, эффект Доплера оказывается недостаточным для того, чтобы объяснить четко надблюдаемую разницу спектра Филлипса ω^{-5} и наблюдаемых результатов в универсальной области частот $\omega/\omega_p \lesssim 5 - 10$. Этот факт делает слишком детальное рассмотрение избыточным.

Однако необходимо заметить, что при более высоких частотах Доплеровский сдвиг частоты может стать очень важным. Тем не менее, этот факт не может повлиять на интерпретацию экспериментальных данных в области умеренных частот. С нашей точки зрения, единственное последовательное толкование наблюдаемого спектра ω^{-4} состоит в рассмотрении его как

слаботурбулентного Колмогоровского спектра. Стоит отметить, что прямые измерения [24] пространственного спектра $\Phi(k) = \langle |\eta_k|^2 \rangle$ посредством лазерного сканирования и фотографирования поверхности океана, абсолютно исключают влияние эффекта Доплера, дают нам в диапазоне умеренных волновых чисел ожидаемый результат

$$\Phi(k) \sim k^{-7/2}.$$

Этот факт согласуется с частотным спектром $F(\omega) \sim \omega^{-4}$ в отсутствие Доплеровского сдвига частоты.

II.1. Формулирование задачи и обозначения

Следуя обозначениям Филлипса, волновой спектр для однородного стационарного волнового поля может быть введен следующим образом:

$$X(\mathbf{k}, \omega) = (2\pi)^{-3} \int_{-\infty}^{+\infty} \int \rho(\mathbf{r}, t) \exp[-i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)] d\mathbf{r} dt, \quad (\text{II.7})$$

где $\rho(\mathbf{r}, t) = \overline{\eta(\mathbf{x}, t_0)\eta(\mathbf{x} + \mathbf{r}, t_0 + t)}$ является коррелятором смещения поверхности $\eta(\mathbf{x}, t)$, \mathbf{r} — вектор пространственного смещения, t — промежуток времени, $\mathbf{k} = \overrightarrow{(k_1, k_2)} = \overrightarrow{(k, \theta)}$ — волновой вектор (альтернативно представленный в полярных координатах) и ω — это частота в радианах. Очевидно, что данное выражение может быть переписано в терминах преобразования Фурье соответствующих функций

$$\langle \eta(\mathbf{k}, \omega)\eta^*(\mathbf{k}', \omega') \rangle = X(\mathbf{k}, \omega)\delta_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}\delta_{\omega-\omega'}, \quad (\text{II.8})$$

$$X(-\mathbf{k}, -\omega) = X(\mathbf{k}, \omega).$$

Удобно ввести дополнительные спектры, которые являются упрощенными представлениями уравнения (II.7)

$$\Phi(\mathbf{k}) = 2 \int_0^{+\infty} X(\mathbf{k}, \omega) d\omega, \quad (\text{II.9})$$

$$F(\omega) = 2 \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} X(\mathbf{k}, \omega) k dk d\theta. \quad (\text{II.10})$$

В общем случае невозможно выразить $F(\omega)$ в терминах $\Phi(\mathbf{k})$. Существует множество сложных механизмов взаимодействия коротких и длинных волн. Они были детально рассмотрены в статье [22] в окрестности спектрального пика частоты ω_p . Согласно этой работе, в случае малой крутизны (малые амплитуды при умеренных волновых числах) мы можем пренебречь явлением изменяющегося эффективного ускорения свободного падения как эффектом следующего порядка малости и ограничить наш анализ только влиянием эффекта Доплера как наиболее важного. Более детальное рассмотрение может послужить мотивом для дальнейших исследований. Мы можем использовать линеаризованное уравнение:

$$X(\mathbf{k}, \omega) = \Phi(\mathbf{k}) (\delta(\omega - \omega_k) + \delta(\omega + \omega_k)), \quad (\text{II.11})$$

где $\omega_k = \omega(k)$ — дисперсионный закон и δ дельта-функция Дирака. Теперь можно переписать уравнение (II.10) в следующем виде:

$$F(\omega) = 2 \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} \Phi(k, \theta) (\delta(\omega - \omega_k) + \delta(\omega + \omega_k)) k dk d\theta. \quad (\text{II.12})$$

Помним, что $\omega_k > 0$:

$$F(\omega) = 2 \int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} \Phi(k, \theta) \delta(\omega - \omega_k) d\theta k dk. \quad (\text{II.13})$$

Используя правила интегрирования δ -функции, можно получить:

$$F(\omega) = \frac{2k}{|\omega'(k)|} \int_0^{2\pi} \Phi(k, \theta) d\theta, \quad (\text{II.14})$$

$$k = k(\omega),$$

где $k(\omega)$ — это функция обратная $\omega(k)$.

В случае глубокой воды $\omega = \sqrt{gk}$

$$k = \frac{\omega^2}{g}, \omega'(k) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{k}} = \frac{1}{2} \frac{g}{\omega}$$

$$F(\omega) = \frac{4\omega^3}{g^2} \int_0^{2\pi} \Phi\left(\frac{\omega^2}{g}, \theta\right) d\theta. \quad (\text{II.15})$$

Для изотропного спектра ($\Phi(k, \theta) = \Phi(k)$)

$$F(\omega) = \frac{8\pi\omega^3}{g^2} \Phi\left(\frac{\omega^2}{g}\right). \quad (\text{II.16})$$

Для сильно анизотропного спектра ($\Phi(k, \theta) = \Phi(k)\delta(\theta - \theta_0)$)

$$F(\omega) = \frac{4\omega^3}{g^2} \Phi\left(\frac{\omega^2}{g}\right). \quad (\text{II.17})$$

Если спектр определяется разрывностью пространственной производной, вызванной обрушением волн («барашки») [11], мы получаем:

$$\eta \simeq \frac{1}{k^2}, \quad \Phi(k) \simeq \frac{1}{k^4}. \quad (\text{II.18})$$

В изотропном случае, подставляя (II.18), в уравнение (II.16) имеем:

$$F(\omega) = 8\pi\alpha \frac{g^2}{\omega^5}. \quad (\text{II.19})$$

Аналогичные вычисления для (II.17) дают нам следующий результат:

$$F(\omega) = 4\alpha \frac{g^2}{\omega^5}. \quad (\text{II.20})$$

Здесь α — это так называемая константа Филлипса.

Если «барашки» появляются на большинстве гребней волн, α не должна быть слишком малой ($\alpha \simeq 0.1$). Любые попытки подогнать (II.19) или (II.20) к экспериментальным данным дают для α значение, по крайней мере, на один порядок меньше.

II.2. Общая формула для спектра в присутствии эффекта Доплера

Рассмотрим волны на фоне периодического тока $\mathbf{v}(t)$ под поверхностью. Принимая в рассмотрение эффект Доплера, можно получить следующую подстановку:

$$\omega(\mathbf{k}) \longrightarrow \omega(\mathbf{k}) + \mathbf{k}\mathbf{v}(t).$$

Предположим, что этот ток описывается одномерной периодической функцией:

$$v(t) = v \cos \omega_0 t.$$

Это позволяет нам переписать нашу подстановку в следующем виде:

$$\omega_k \longrightarrow \omega(k) + kv \cos(\omega_0 t) \cos \psi,$$

где ψ — это угол, образуемый векторами \mathbf{k} и \mathbf{v} . Без потери общности можно положить $\psi = \theta$. Используя эту подстановку, можно записать среднее значение выражения (II.13) в таком виде:

$$F(\omega) = \frac{2}{T} \int_0^T \int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} \Phi(k, \theta) \delta(\omega - \omega(k) - kv \cos(\omega_0 t) \cos \theta) d\theta dk dt, \quad (\text{II.21})$$

здесь T — это период, равный $2\pi/\omega_0$. Полезно сначала усреднить по t . Обозначим искомый множитель к интегралу как M :

$$M = \frac{1}{\pi} \int_0^T \delta(\omega - kv \cos \omega_0 t \cos \theta - \omega_k) d(\omega_0 t).$$

Присутствие δ -функции в этом выражении дает нам уравнение:

$$\omega - \omega_k = kv \cos \theta \cos(\omega_0 t_0). \quad (\text{II.22})$$

Это уравнение имеет такие корни:

$$\omega_0 t_0 = \pm \arccos \frac{\omega - \omega_k}{kv \cos \theta}, \quad (\text{II.23})$$

когда удовлетворено следующее неравенство:

$$\left| \frac{\omega - \omega_k}{kv \cos \theta} \right| < 1. \quad (\text{II.24})$$

$$M = \frac{2}{\pi |kv \cos \theta \sin(\omega_0 t_0)|}.$$

Используя (II.23) и последнее выражение, можно получить множитель:

$$M = \frac{2}{\pi \left| kv \cos \theta \sqrt{1 - \frac{(\omega - \omega_k)^2}{k^2 v^2 \cos^2 \theta}} \right|} = \frac{2}{\pi \sqrt{k^2 v^2 \cos^2 \theta - (\omega - \omega_k)^2}}. \quad (\text{II.25})$$

Подставляя это выражение в (II.21), получаем:

$$F(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} \frac{\Phi(k, \theta) d\theta dk}{\sqrt{k^2 v^2 \cos^2 \theta - (\omega - \omega(k))^2}}. \quad (\text{II.26})$$

Надо отметить, что пределы интегрирования необходимо выбирать так, чтобы выполнить неравенство (II.24).

II.3. Удобный набор безразмерных переменных

Удобно ввести новую переменную и константу:

$$\zeta = \frac{kv^2}{g}, \quad dk = \frac{g}{v^2}d\zeta, \quad \lambda = \frac{v\omega}{g}. \quad (\text{II.27})$$

Легко видеть, что ζ — это безразмерный аналог k , и λ — то же самое для ω . В этих переменных спектр (II.26) принимает следующий относительно простой вид:

$$F(\lambda) = \frac{2}{\pi} \frac{g}{v^3} B \int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} \frac{\Phi(\zeta, \theta) d\zeta d\theta}{\sqrt{\cos^2 \theta - \left(\frac{\lambda - \lambda_k}{\zeta}\right)^2}}, \quad (\text{II.28})$$

здесь B — это константа, которая появляется в результате подстановки $k \rightarrow \zeta$ в $\Phi(k)$. Для случая спектра Филлипса (II.18) эта константа равна $B = \alpha v^8 / g^4$.

Физический смысл константы λ становится более понятным, если преобразовать ее к следующему виду:

$$\lambda = \frac{\omega}{\omega_p} \frac{v}{c_p}, \quad (\text{II.29})$$

здесь $\omega_p = g/c_p$ — это частота спектрально пика (это единственный «частотный» масштаб в модели) и c_p — фазовая скорость. Отношение $\epsilon = v/c_p$ согласно [21] составляет примерно 0.05.

Для случая сильно анизотропного спектра ($\Phi(k, \theta) = \Phi(k)\delta(\theta)$) можно легко получить следующий результат простой подстановкой: в (II.28):

$$F(\lambda) = \frac{2}{\pi} \frac{g}{v^3} B \int_0^{+\infty} \frac{\Phi(\zeta) d\zeta}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda - \lambda_k}{\zeta}\right)^2}}. \quad (\text{II.30})$$

Если спектр изотропный ($\Phi(k, \theta) = \Phi(k)$), то все становится немного сложнее. Следуя (II.28), получаем:

$$F(\lambda) = \frac{8}{\pi} \frac{g}{v^3} B \int_0^{+\infty} \Phi(\zeta) d\zeta \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos^2 \theta - \left(\frac{\lambda - \lambda_k}{\zeta}\right)^2}}, \quad (\text{II.31})$$

Анализ части, содержащей θ , дает:

$$\begin{aligned} & \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos^2 \theta - \left(\frac{\lambda - \lambda_k}{\zeta}\right)^2}} = \\ & = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda - \lambda_k}{\zeta}\right)^2}} K \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda - \lambda_k}{\zeta}\right)^2}} \right) = \\ & = K \left(\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda - \lambda_k}{\zeta}\right)^2} \right) + iK \left(\frac{\lambda - \lambda_k}{\zeta} \right), \end{aligned} \quad (\text{II.32})$$

здесь K — это полный эллиптический интеграл первого рода. Используя неравенство (II.24) после подстановки (II.32) в (II.31), получаем

$$F(\lambda) = \frac{8g}{\pi v^3} B \int_0^{+\infty} \Phi(\zeta) d\zeta K \left(\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda - \lambda_k}{\zeta}\right)^2} \right). \quad (\text{II.33})$$

Выражения (II.30) и (II.33) верны при произвольном дисперсионном соотношении $\lambda_k = \omega(k)v/g$.

II.4. Случай глубокой воды

Для дальнейшего изучения изотропного спектра (этот случай более сложен, поэтому изучим вначале его, а затем выполним аналогичные действия для сильно анизотропного случая) мы должны явно ввести закон дисперсии. Рассмотрим случай гравитационных волн на глубокой воде как, по нашему мнению, наиболее важный. Явное выражение для ω_k в этом случае таково: $\omega_k = \sqrt{gk}$ или $\lambda_k = \sqrt{\zeta}$. Поэтому:

$$F(\lambda) = \frac{8g}{\pi v^3} B \int_0^{+\infty} \Phi(\zeta) d\zeta K \left(\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda - \sqrt{\zeta}}{\zeta}\right)^2} \right). \quad (\text{II.34})$$

Теперь мы должны принять во внимание условие (II.24):

$$\zeta^2 - (\lambda - \sqrt{\zeta})^2 \geq 0. \quad (\text{II.35})$$

Решая это неравенство, получаем:

$$\begin{aligned} y_{1,2} &= \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \lambda}, \\ y_{3,4} &= -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \lambda}, \end{aligned} \quad (\text{II.36})$$

здесь $y = \sqrt{\zeta}$, $y \geq 0$, откуда можем заключить, что нас интересуют следующие области:

when $\lambda \leq \frac{1}{4}$,

$$\begin{aligned} F(\lambda) &= \frac{8g}{\pi v^3} B \left[\int_{\left(\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - \lambda}\right)^2}^{\left(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \lambda}\right)^2} \Phi(\zeta) K \left(\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda - \sqrt{\zeta}}{\zeta}\right)^2} \right) d\zeta + \right. \\ &\quad \left. + \int_{\left(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \lambda}\right)^2}^{+\infty} \Phi(\zeta) K \left(\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda - \sqrt{\zeta}}{\zeta}\right)^2} \right) d\zeta \right]; \quad (\text{II.37}) \end{aligned}$$

when $\lambda > \frac{1}{4}$,

$$F(\lambda) = \frac{8g}{\pi v^3} B \int_{\left(-\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \lambda}\right)^2}^{+\infty} \Phi(\zeta) d\zeta K \left(\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda - \sqrt{\zeta}}{\zeta}\right)^2} \right). \quad (\text{II.38})$$

Исследуем особый случай, когда $\Phi(\zeta)$ быстро убывающая функция как, например, спектр Филлипса $\Phi(\zeta) = 1/\zeta^4$. В этом случае мы можем ограничиться рассмотрением только первого члена в (II.37) при $\lambda < 1/4$. Вычисление разложения спектра, расположенное в приложении .1, дает (.20) следующий результат:

$$F_i(\lambda) = F_{i0} \left(1 + \frac{1}{4} \lambda^2 + \dots \right), \quad (\text{II.39})$$

здесь

$$F_{i0} = 8\pi\alpha \frac{v^5}{g^3} \frac{1}{\lambda^5}, \quad (\text{II.40})$$

это не что иное, как спектр Филлипса для изотропного случая (II.19) в отсутствие эффекта Доплера.

Для сильно анизотропного случая мы используем тот же самый подход, но все вычисления становятся проще. Области интегрирования, соответствующие (II.37) и (II.38), следующие:

when $\lambda \leq \frac{1}{4}$,

$$F(\lambda) = \frac{2g}{\pi v^3} B \left(\int_{\left(-\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \lambda}\right)^2}^{\left(\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - \lambda}\right)^2} \Phi(\zeta) \frac{d\zeta}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda - \sqrt{\zeta}}{\zeta}\right)^2}} + \int_{\left(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \lambda}\right)^2}^{+\infty} \frac{\Phi(\zeta) d\zeta}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda - \sqrt{\zeta}}{\zeta}\right)^2}} \right); \quad (II.41)$$

when $\lambda > \frac{1}{4}$,

$$F(\lambda) = \frac{2g}{\pi v^3} B \int_{\left(-\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \lambda}\right)^2}^{+\infty} \frac{\Phi(\zeta) d\zeta}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda - \sqrt{\zeta}}{\zeta}\right)^2}}. \quad (II.42)$$

Подробный анализ данного случая, приведенный в приложении .1, дает (.22) нам такую формулу

$$F_a(\lambda) = F_{a0} \left(1 + \frac{1}{2} \lambda^2 + \dots\right), \quad (II.43)$$

здесь

$$F_{a0} = 4\alpha \frac{v^5}{g^3} \frac{1}{\lambda^5}, \quad (II.44)$$

что есть не что иное, как спектр Филлипса для сильно анизотропного распределения (II.20) в отсутствие эффекта Доплера.

Попробуем оценить область применимости полученных результатов. Как было введено в (II.29), мы можем записать:

$$\lambda = \frac{\omega v}{\omega_p c_p} \leq \frac{1}{4}.$$

Следуя [21], мы берем $\epsilon = v/c_p = 0.05$. Откуда получаем следующее неравенство:

$$\omega \leq 5\omega_p. \quad (II.45)$$

Это означает, что в достаточно широкой области частот мы не можем рассматривать спектр ω^{-4} как артефакт наблюдений, обусловленный эффектом Доплера, так как данный эффект дает лишь малую поправку (второго порядка малости).

II.5. Результаты численного моделирования

Интегралы (II.37), (II.38), (II.41) и (II.42) могут быть сосчитаны методами вычислительной математики. Спектры, отнормированные на их значения в отсутствие эффекта Доплера, представлены на Рис. II.1.

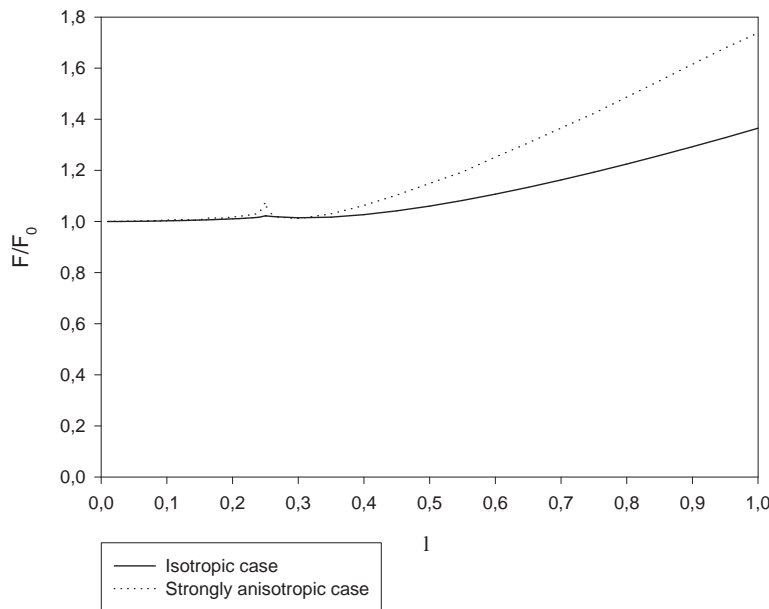


Рис. II.1. Отношение вычисленных спектров F к спектру Филлипса как функция безразмерной переменной λ . Спектр F начинает отклоняться от спектра Филлипса только при $\lambda \sim 0.4$

Видно, что первый член в разложении спектра не является линейным, следовательно эффект Доплера не может помочь нам преобразовать спектр ω^{-5} в наблюдаемый спектр ω^{-4} . Наиболее показательно это демонстрирует график логарифма $F(\lambda)$ как функции от логарифма λ , представленный на Рис. II.2. Линии вычисленных спектров практически параллельны линии, соответствующей спектру Филлипса. Это означает, что степень частоты та же самая и равна -5 . Отсюда мы можем сделать заключение, что в этой

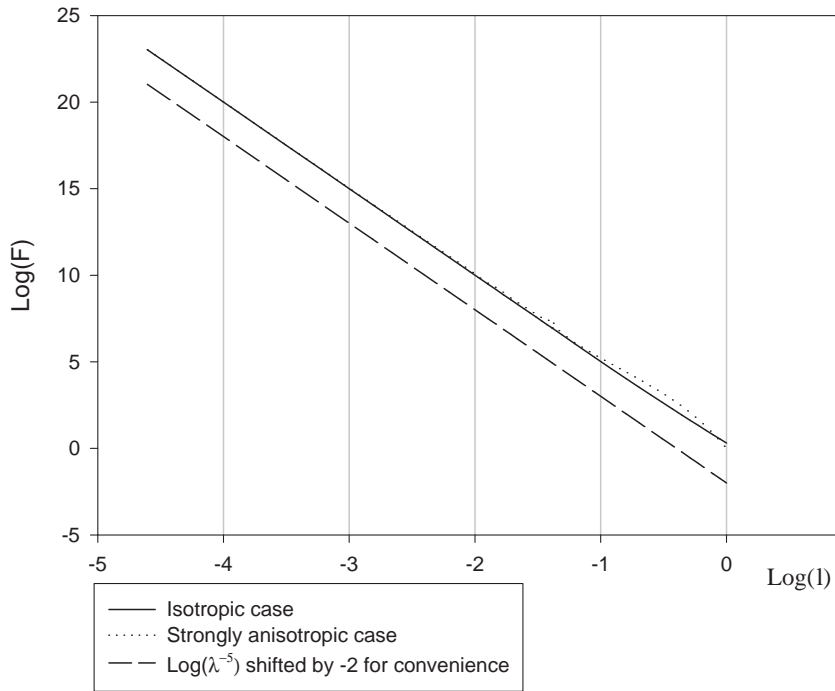


Рис. II.2. Логарифм вычисленного спектра F и спектр Филлипса как функция логарифма безразмерной переменной λ .

области частот эффект Доплера не может исказить спектр Филлипса ω^{-5} до наблюдаемого спектра ω^{-4} .

II.6. Заключение

Наличие по крайней мере двух диаметрально противоположных подходов к интерпретации спектров ветрового волнения на поверхности океана послужило мотивом для исследования модели Филлипса в присутствии эффекта Доплера. Обычная модель Филлипса дает результаты, существенно отличающиеся от экспериментальных данных. Следуя предположениям Баннера [21], мы получили общую формулу для произвольного спектра в присутствии эффекта Доплера. Используя эту формулу, мы проанализировали влияние Доплеровского сдвига частоты на спектр поверхностных волн на глубокой воде в изотропном и сильно анизотропном случае. Формы спектров были также получены численно для широкого диапазона частот.

Аналитические и численные результаты дают нам основания говорить о

недостаточности механизма эффекта Доплера для объяснения расхождения между спектром Филлипса и экспериментальными данными. Аналитические оценки показывают, что искажение спектра, благодаря Доплеровскому сдвигу частоты, пренебрежимо мало в области умеренных частот $\omega < 5\omega_p$. Результаты численного счета дают нам спектр ω^{-5} по крайней мере до частот $\sim 10\omega_p$.

Согласно существующим экспериментальным данным, можно заключить, что модель формирования спектров, введенная Филлипсом, не дает результатов, сходных с экспериментальными наблюдениями даже в присутствии эффекта Доплера.

III. Моделирование резонансных взаимодействий на дискретной сетке

Одним из краеугольных камней в теории слабой турбулентности является резонансное взаимодействие волн. Как было показано в работе [34] и развито в [33], условия резонанса на характерной для численных экспериментов дискретной сетке не могут быть выполнены точно. Однако, как было отмечено выше, в настоящий момент прямое численное моделирование динамических уравнений является важной задачей. Это один из основных инструментов проверки правильности предположений и допущений, в рамках которых была получена теория слабой турбулентности. Поэтому перед нами с очевидностью встают следующие вопросы:

- Как дискретная сетка волновых чисел в численном моделировании влияет на резонансное взаимодействие?
- Может ли нелинейный сдвиг частоты уширить резонансное множество таким образом, чтобы дискретность перестала быть важной?

В данной главе мы изучим эти вопросы для капиллярных и гравитационных волн на поверхности несжимаемой жидкости бесконечной глубины.

В разделе III.1 мы запишем динамические уравнения на дискретной сетке. Случай капиллярных волн на поверхности глубокой воды рассмотрен в разделе III.2. Произведено численное моделирование резонансного распада монохроматической волны. Получена картина вторичных распадов, формирующих Колмогоровский каскад. В разделе III.3 приведены результаты моделирования распада монохроматической гравитационной волны на поверхности бесконечно глубокой идеальной жидкости. В заключении III.4 приведен анализ полученных результатов и выводы, важные для построения численной модели слабой турбулентности поверхностных волн.

III.1. Динамические уравнения на дискретной сетке

Рассмотрим динамические уравнения (I.17) в периодической области с линейными размерами L_x и L_y . Если мы находимся на дискретной сетке с количеством точек по направлениям N_x и N_y соответственно, то волновой вектор и координатный радиус вектор могут быть представлены как:

$$\mathbf{k} = \left(\frac{2\pi}{L_x} k_x, \frac{2\pi}{L_y} k_y \right), \quad \mathbf{r} = \left(\frac{L_x}{N_x} r_x, \frac{L_y}{N_y} r_y \right), \quad (\text{III.1})$$

где k_i пробегает дискретный ряд значений от $-N_i/2$ до $N_i/2$, а r_i — от 0 до N_i . Соответственно, все знаки интегрирования заменятся на знаки суммирования, а δ -функция Дирака — на ее дискретный аналог, символ Кронекера Δ . Для сокращения записи будем писать просто знак суммы \sum , подразумевая, что суммирование производится по всем повторяющимся символам. Тогда можем переписать уравнения (I.17) в следующем виде:

$$\begin{aligned} \dot{a}_{\mathbf{k}} = & -i\omega_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}} - \\ & -\frac{i}{2} \frac{2\pi}{L_x L_y} \sum C_{\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2}^{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}_1} a_{\mathbf{k}_2} \Delta_{\mathbf{k}+\mathbf{k}_2, \mathbf{k}} - \\ & -\frac{i 2\pi}{L_x L_y} \sum C_{\mathbf{k} \mathbf{k}_2}^{\mathbf{k}_0} a_{\mathbf{k}_2}^* a_{\mathbf{k}_0} \Delta_{\mathbf{k}+\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_0} - \\ & -\frac{i}{2} \frac{2\pi}{L_x L_y} \sum E_{\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2}^{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}_1}^* a_{\mathbf{k}_2}^* \Delta_{\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2+\mathbf{k}, 0} - \\ & -\frac{i (2\pi)^4}{(L_x L_y)^3} \sum W_{\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2 \mathbf{k}_3 \mathbf{k}} a_{\mathbf{k}_1}^* a_{\mathbf{k}_2}^* a_{\mathbf{k}_3}^* \Delta_{\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2+\mathbf{k}_3+\mathbf{k}, 0} - \\ & -\frac{i}{4} \frac{(2\pi)^4}{(L_x L_y)^3} \sum F_{\mathbf{k} \mathbf{k}_2 \mathbf{k}_3 \mathbf{k}_4} a_{\mathbf{k}_2} a_{\mathbf{k}_3} a_{\mathbf{k}_4} \Delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_2+\mathbf{k}_3+\mathbf{k}_4} - \\ & -\frac{i}{4} \frac{3(2\pi)^4}{(L_x L_y)^3} \sum F_{\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2 \mathbf{k}_3 \mathbf{k}} a_{\mathbf{k}_1} a_{\mathbf{k}_2}^* a_{\mathbf{k}_3}^* \Delta_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2+\mathbf{k}_3+\mathbf{k}} - \\ & -\frac{i}{2} \frac{(2\pi)^4}{(L_x L_y)^3} \sum D_{\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2 \mathbf{k}_3 \mathbf{k}} a_{\mathbf{k}_1} a_{\mathbf{k}_2} a_{\mathbf{k}_3}^* \Delta_{\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3+\mathbf{k}}. \end{aligned} \quad (\text{III.2})$$

Удобно избавиться от линейного члена подстановкой:

$$a_{\mathbf{k}} = A_{\mathbf{k}} e^{i\omega_{\mathbf{k}} t}. \quad (\text{III.3})$$

В этих переменных уравнения принимают вид:

$$\begin{aligned}
 \dot{A}_{\mathbf{k}} = & -\frac{i}{2} \frac{2\pi}{L_x L_y} \sum C_{\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2}^{\mathbf{k}} A_{\mathbf{k}_1} A_{\mathbf{k}_2} \Delta_{\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2, \mathbf{k}} e^{i(\omega_{k_1} + \omega_{k_2} - \omega_k)t} - \\
 & -\frac{i 2\pi}{L_x L_y} \sum C_{\mathbf{k} \mathbf{k}_2}^{\mathbf{k}_0} A_{\mathbf{k}_2}^* A_{\mathbf{k}_0} \Delta_{\mathbf{k} + \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_0} e^{i(-\omega_k - \omega_{k_2} + \omega_{k_0})t} - \\
 & -\frac{i}{2} \frac{2\pi}{L_x L_y} \sum E_{\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2}^{\mathbf{k}} A_{\mathbf{k}_1}^* A_{\mathbf{k}_2}^* \Delta_{\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}, 0} e^{i(-\omega_{k_1} - \omega_{k_2} - \omega_k)t} - \\
 & -\frac{i(2\pi)^4}{(L_x L_y)^3} \sum W_{\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2 \mathbf{k}_3 \mathbf{k}} A_{\mathbf{k}_1}^* A_{\mathbf{k}_2}^* A_{\mathbf{k}_3}^* \Delta_{\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 + \mathbf{k}, 0} e^{i(-\omega_{k_1} - \omega_{k_2} - \omega_{k_3} - \omega_{k_4})t} - \\
 & -\frac{i}{4} \frac{(2\pi)^4}{(L_x L_y)^3} \sum F_{\mathbf{k} \mathbf{k}_2 \mathbf{k}_3 \mathbf{k}_4} A_{\mathbf{k}_2} A_{\mathbf{k}_3} A_{\mathbf{k}_4} \Delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4} e^{i(-\omega_k + \omega_{k_2} + \omega_{k_3} + \omega_{k_4})t} - \\
 & -\frac{i}{4} \frac{3(2\pi)^4}{(L_x L_y)^3} \sum F_{\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2 \mathbf{k}_3 \mathbf{k}} A_{\mathbf{k}_1} A_{\mathbf{k}_2}^* A_{\mathbf{k}_3}^* \Delta_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 + \mathbf{k}} e^{i(\omega_{k_1} - \omega_{k_2} - \omega_{k_3} - \omega_{k_4})t} - \\
 & -\frac{i}{2} \frac{(2\pi)^4}{(L_x L_y)^3} \sum D_{\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2 \mathbf{k}_3 \mathbf{k}} A_{\mathbf{k}_1} A_{\mathbf{k}_2} A_{\mathbf{k}_3}^* \Delta_{\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3 + \mathbf{k}} e^{i(\omega_{k_1} + \omega_{k_2} - \omega_{k_3} - \omega_{k_4})t}.
 \end{aligned} \tag{III.4}$$

Если проинтегрировать левую и правую части уравнения по времени за некоторый фиксированный промежуток, то становится очевидно, что наибольший вклад в амплитуду волны дадут те члены уравнения, которые будут иметь наименьший показатель в экспоненте. В непрерывной среде мы можем выбрать волны так, чтобы занулить эти показатели точно. Однако на дискретной сетке волновых векторов сделать это в случае произвольного закона дисперсии, вообще говоря, нельзя. Заметим, что члены, отвечающие за генерацию кратных гармоник, в большинстве случаев законов дисперсии дают показатели, существенно отличающиеся от нуля. Поэтому в дальнейшем мы их рассматривать не будем.

Также заметим, что полученные уравнения удобно решать в области с линейными размерами $L_x = L_y = 2\pi$. В этом случае все формулы существенно упрощаются, а проекции волнового вектора k_x и k_y , соответственно (III.1), принимают только целочисленные значения. Необходимо заметить, что выбор линейных размеров несколько не влияет на универсальность полученных результатов, так как он приведет лишь к перенормировке времени, при фиксированных остальных константах.

III.2. Капиллярные волны

В случае капиллярных волн на поверхности бесконечно глубокой жидкости закон дисперсии имеет вид:

$$\omega_k = \sqrt{\sigma k^3}, \tag{III.5}$$

здесь σ — коэффициент поверхностного натяжения жидкости.

Рассмотрим трехволновой процесс, отвечающий распаду и слиянию волн. Условия резонанса, следующие из (III.4), выражаются так:

$$\omega_{k_1} + \omega_{k_2} = \omega_{k_0}, \quad \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}_0. \quad (\text{III.6})$$

В данном случае, для определенности, будем говорить о распаде волны $A_{\mathbf{k}_0}$ в две волны $A_{\mathbf{k}_1}$ и $A_{\mathbf{k}_2}$. Резонансное многообразие (III.6) для распада:

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_0 &= \begin{pmatrix} 0 \\ k_0 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{k}_1 &= \begin{pmatrix} -k_x \\ k_0 - k_y \end{pmatrix}, \quad \mathbf{k}_2 = \begin{pmatrix} k_x \\ k_0 + k_y \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{III.7})$$

приведено на Рис. III.1. Уравнение (III.4) сводится к системе обыкновенных

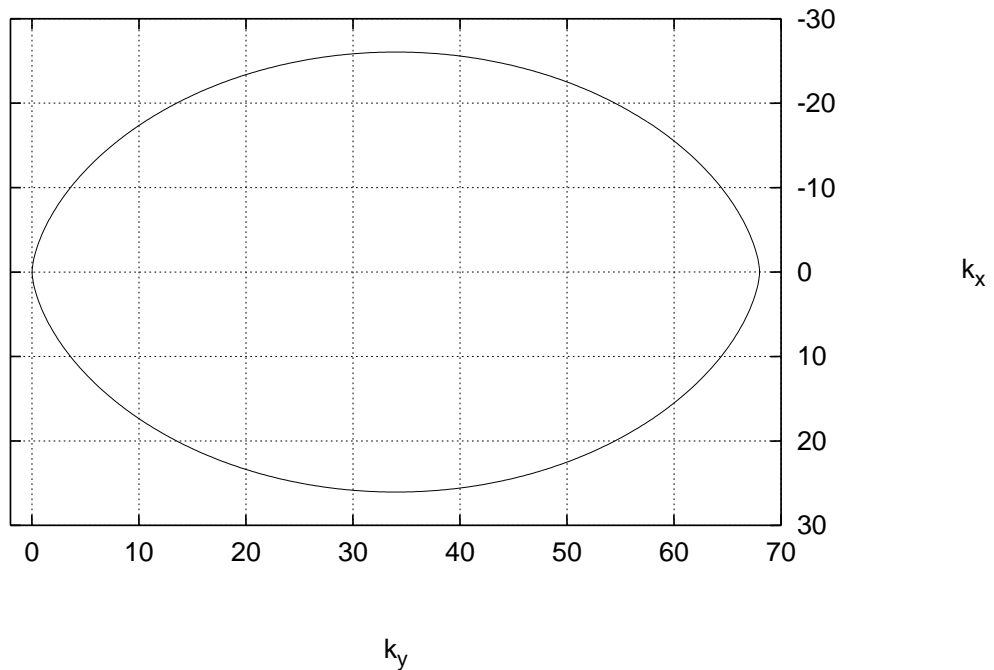


Рис. III.1. Резонансное множество для $k_0 = 68$.

дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}\dot{A}_{\mathbf{k}_0} &= -\frac{i}{2} \frac{2\pi}{L_x L_y} C_{\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2}^{\mathbf{k}_0} A_{\mathbf{k}_1} A_{\mathbf{k}_2} e^{i\Omega_{\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2}^{\mathbf{k}_0} t}, \\ \dot{A}_{\mathbf{k}_1} &= -i \frac{2\pi}{L_x L_y} C_{\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2}^{\mathbf{k}_0} A_{\mathbf{k}_2}^* A_{\mathbf{k}_0} e^{-i\Omega_{\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2}^{\mathbf{k}_0} t}, \\ \dot{A}_{\mathbf{k}_2} &= -i \frac{2\pi}{L_x L_y} C_{\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2}^{\mathbf{k}_0} A_{\mathbf{k}_1}^* A_{\mathbf{k}_0} e^{-i\Omega_{\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2}^{\mathbf{k}_0} t},\end{aligned}\tag{III.8}$$

Здесь введена расстройка $\Omega_{\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2}^{\mathbf{k}_0} = \omega_{\mathbf{k}_1} + \omega_{\mathbf{k}_2} - \omega_{\mathbf{k}_0}$. Пусть $A_{\mathbf{k}_1}, A_{\mathbf{k}_2}$ малы по сравнению с распадающейся волной $|A_{\mathbf{k}_0}| \gg \max(|A_{\mathbf{k}_1}|, |A_{\mathbf{k}_2}|)$ в начальный момент времени $t = 0$. Тогда на начальном этапе роста гармоник уравнения (III.8) можно линеаризовать. Предполагая ($A_{\mathbf{k}_0} \simeq const$), имеем растущее (при выполнении некоторых условий) решение:

$$A_{\mathbf{k}_{1,2}}(t) = A_{\mathbf{k}_{1,2}}(0)e^{\lambda t},\tag{III.9}$$

здесь:

$$\lambda = -\frac{i}{2}\Omega_{\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2}^{\mathbf{k}_0} + \sqrt{\left| \frac{2\pi}{L_x L_y} C_{\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2}^{\mathbf{k}_0} A_{\mathbf{k}_0} \right|^2 - \left(\frac{1}{2}\Omega_{\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2}^{\mathbf{k}_0} \right)^2}.\tag{III.10}$$

Отсюда видно, что вблизи от резонансной кривой, при выполнении условий:

$$\left| \frac{2\pi}{L_x L_y} C_{\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2}^{\mathbf{k}_0} A_{\mathbf{k}_0} \right| > \left| \frac{1}{2}\Omega_{\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2}^{\mathbf{k}_0} \right|,\tag{III.11}$$

мы получаем рост гармоник. Выбрав достаточно большую начальную амплитуду мы можем уширить резонансную кривую так, чтобы в получившуюся область попало настолько большое число гармоник, что дискретность сетки волновых векторов перестает быть важной.

Для описания взаимодействия волн на стадии, когда амплитуды растущих волн уже нельзя считать малыми по сравнению с амплитудой распадающихся волн, надо переходить к решению полных динамических уравнений (I.9) или (I.17). Численная схема подробно описана в главе IV.

Система (I.9) решалась в области с линейными размерами $L_x = L_y = 2\pi$. Коэффициент поверхностного натяжения $\sigma = 1$. Число точек 512×512 . В качестве начальных условий была взята монохроматическая волна с волновым вектором $\mathbf{k}_0 = (0; 68)$ и амплитудой $|a_{\mathbf{k}_0}| = 4 \times 10^{-3}$. Все остальные гармоники имели малую амплитуду $|a_{\mathbf{k}}| \sim 10^{-12}$ и случайную фазу. Как было отмечено выше, резонансная кривая практически никогда не проходит точно через точки сетки. При выбранных линейных размерах области все волновые числа являются целыми. Детальная картина резонансной кривой на сетке волновых

векторов в области, где рядом с резонансной кривой точки лежат наиболее плотно, показана на Рис. III.2. Видно, что некоторые точки лежат ближе к резонансной кривой, чем другие.

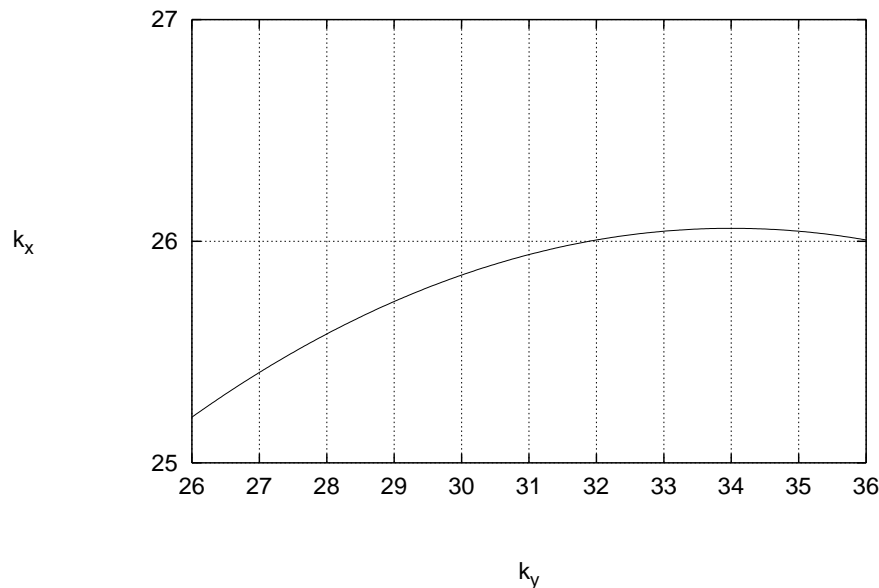


Рис. III.2. Фрагмент резонансной кривой. Хорошо видна разная расстройка для разных узлов сетки.

Как и ожидалось, в начале мы наблюдали экспоненциальный рост ряда гармоник согласно (III.9) и (III.10). Эта стадия показана на Рис. III.3 и Рис. III.4. Видно, что одни гармоники находятся в резонансе, а другие нет. Через некоторое время практически все гармоники, близкие к резонансному множеству, оказываются вовлечены в процесс распада начальной волны, как показано на Рис. III.5.

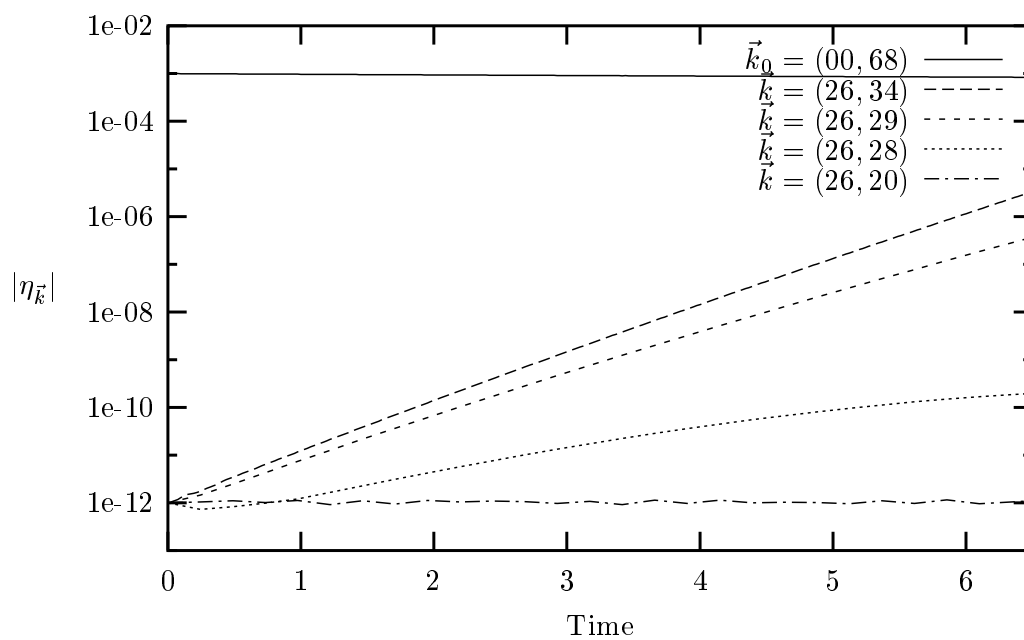
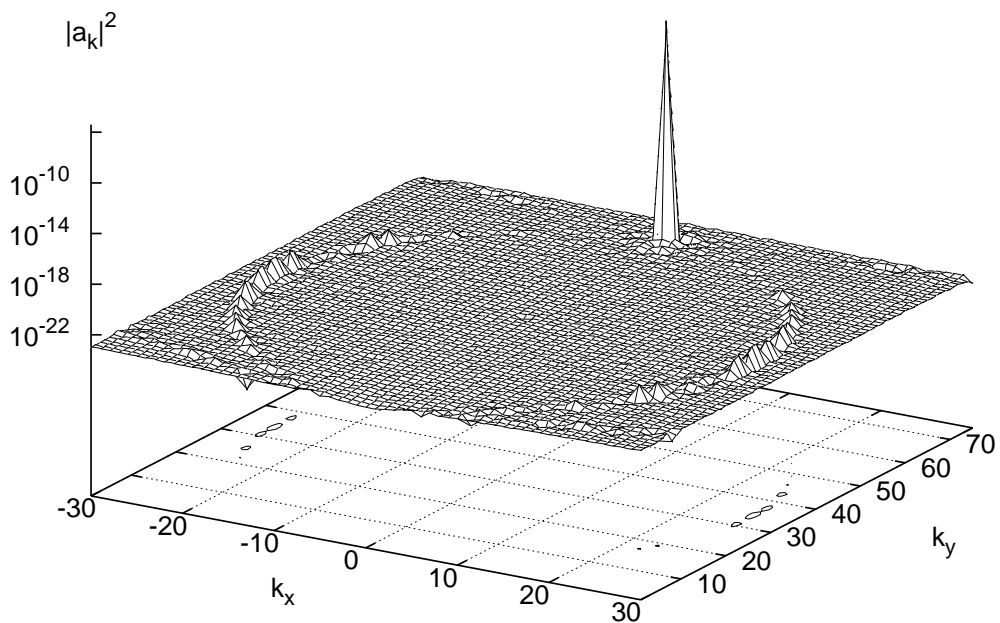


Рис. III.3. Эволюция различных гармоник при распадающейся волне $\mathbf{k}_0 = (00, 68)$.



1

Рис. III.4. Резонансные гармоники начинают расти. Момент времени $t=1.4$.

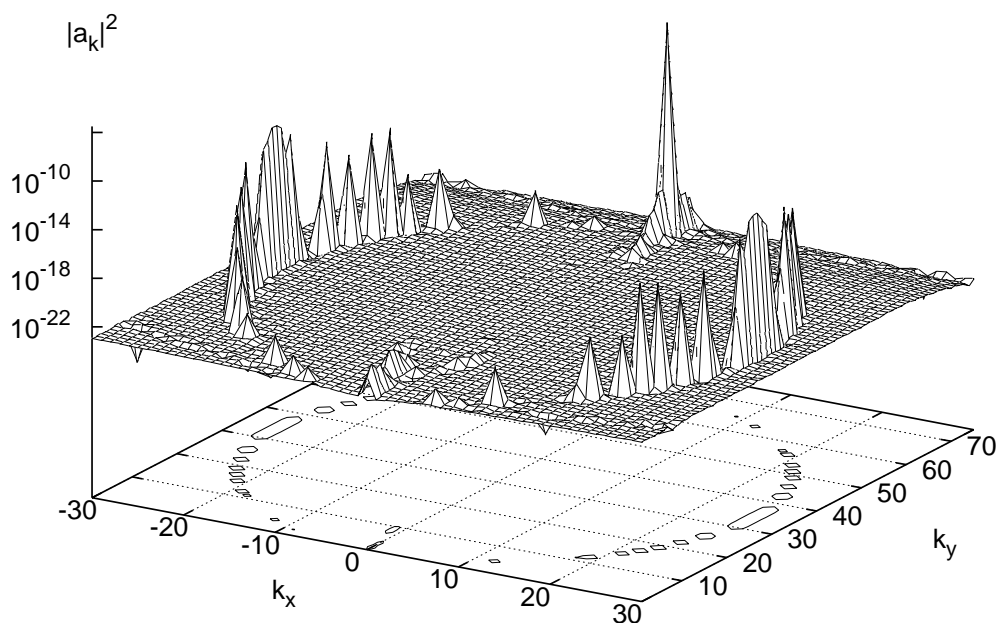


Рис. III.5. Начинаются вторичные процессы распада. Момент времени $t=11$.

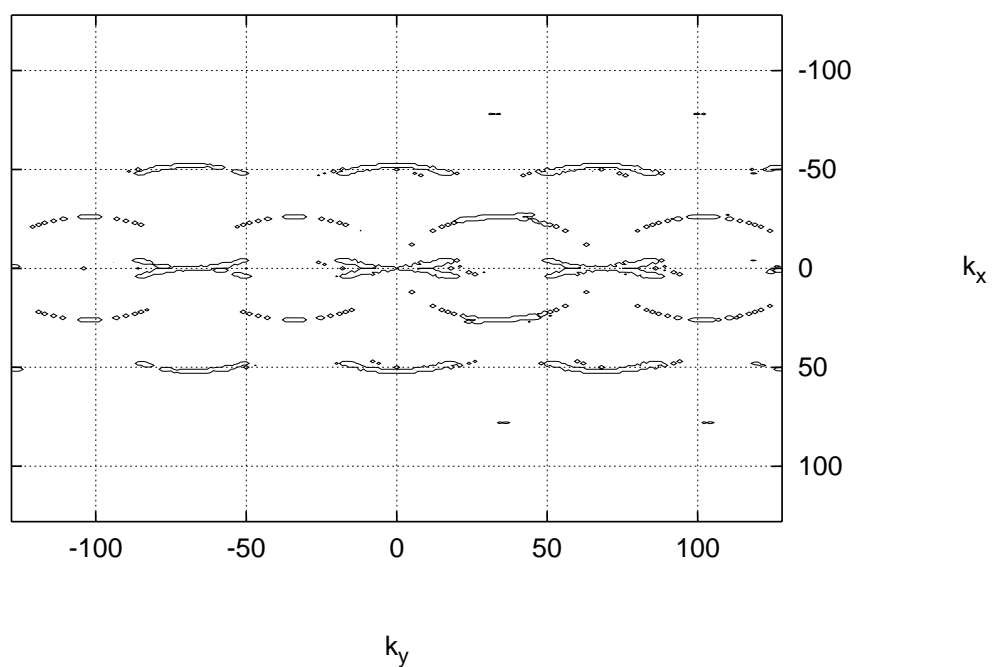


Рис. III.6. Линии уровня поверхности $|a_k|^2$. Хорошо видны вторичные распады. Момент времени $t=14$.

Позже гармоники, являющиеся наиболее близкими к резонансной кривой (сравните с Рис. III.2) и находящиеся в той ее части, где матричный элемент больше, достигают уровня, когда они сами могут служить источником так называемых «вторичных распадов».

Амплитуды волн становятся существенно различными. Наибольших амплитуд достигают волны, для которых инкремент (III.10) максимален. На Рис. III.6 видна регулярная структура, порожденная начальной волной a_{k_0} .

Некоторое время спустя вся k -плоскость заполнена распадающимися волнами, как показано на Рис. III.7.

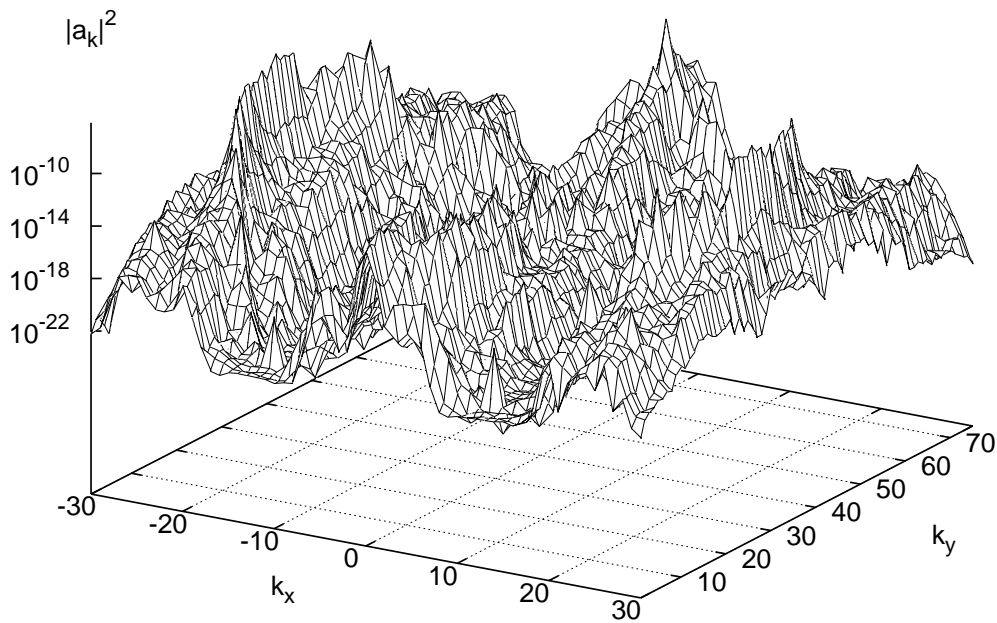


Рис. III.7. Поверхность $|a_k|^2$ в момент времени $t=57$.

III.3. Гравитационные волны

В случае гравитационных волн на поверхности бесконечно глубокой жидкости закон дисперсии принимает вид:

$$\omega_k = \sqrt{gk}, \quad (\text{III.12})$$

здесь g — ускорение свободного падения. Здесь и далее для удобства положим $g = 1$. В этом случае условия (III.6) не могут быть выполнены, так как данная система не имеет действительных нетривиальных решений. Следовательно, можно подобрать преобразование, которое исключит члены третьего порядка, отвечающие этому распаду. Поэтому, если в случае капиллярных волн нам можно было ограничиться членами третьего порядка в Гамильтониане, то в случае гравитационных этого не достаточно. И это именно та причина, по которой мы всюду рассматривали Гамильтониан с точностью до членов четвертого порядка.

Член, отвечающий генерации третьей гармоники, снова не является резонансным. Если мы рассмотрим начальные условия, аналогичные случаю капиллярных волн, то есть одна монохроматическая волна и случайный шум малой амплитуды, то очевидно, что главными будут процессы, в которые амплитуда начальной волны входит наибольшее количество раз. Процессы распада одной волны в три и обратный ему, при условии что начальная волна встречается в уравнениях два раза, не являются резонансными. Поэтому главным будет процесс, который подразумевает рассеяние двух волн с одинаковыми волновыми векторами в две другие волны. Условия резонанса такого процесса, следующие из (III.4), выражаются так:

$$\omega_{k_1} + \omega_{k_2} = 2\omega_{k_0}, \quad \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = 2\mathbf{k}_0. \quad (\text{III.13})$$

Резонансная кривая для условий (III.13) приведена на Рис. III.8. Эта кривая иногда называется кривой Филлипса, по имени ее первооткрывателя. Система (I.9) решалась в области с линейными размерами $L_x = L_y = 2\pi$. Ускорение свободного падения $g = 1$. Число точек 512×512 . В качестве начальных условий была взята монохроматическая волна с волновым вектором $\mathbf{k}_0 = (0; 30)$ и амплитудой $|a_{\mathbf{k}_0}| = 2.5 \times 10^{-4}$. Все остальные гармоники имели малую амплитуду $|a_{\mathbf{k}}| \sim 10^{-9}$ и случайную фазу. В начале процесса ситуация развивается схожим со случаем капиллярных волн образом. Наблюдается экспоненциальный рост нескольких гармоник, находящихся вблизи от резонансной кривой (Рис. III.3). Данная ситуация показана на Рис. III.9. Матричный элемент процесса имеет наибольшие значения в окрестности начальных волн.

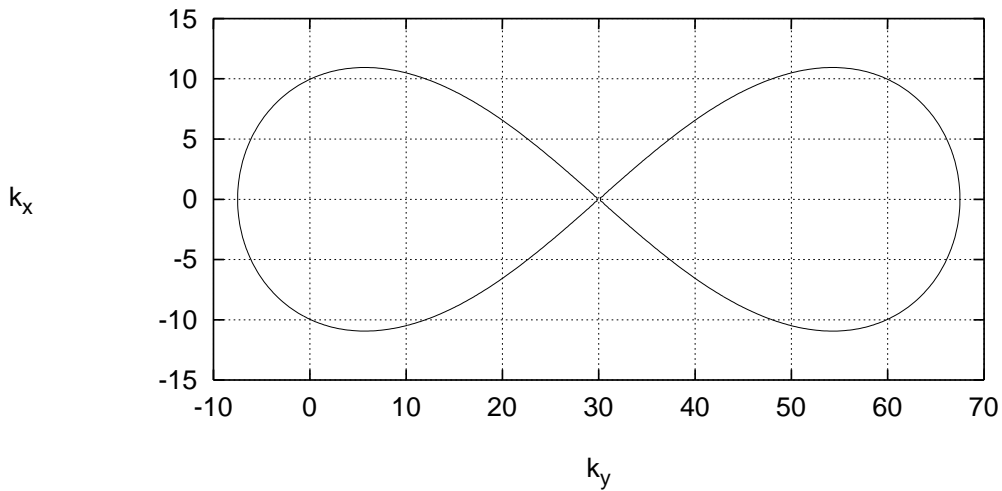


Рис. III.8. Резонансная кривая для $\mathbf{k}_0 = (0; 30)$.

Этим обуславливается картина начального роста гармоник: рост наблюдается только около «перекрестья» резонансного множества (Рис. III.11). Наиболее удобным для анализа картины роста гармоник является представление поверхности $|a_{\mathbf{k}}|^2$ в виде линий уровня. Таким образом, Рис. III.11 может быть представлен в ином, более понятном виде (Рис. III.12).

Дальнейшая эволюция сводится к росту гармоник (Рис. III.13 и Рис. III.14) и началу вторичных распадов, выражающемся в «заплывании» начальных гармоник окружающими (Рис. III.15 и Рис. III.16).

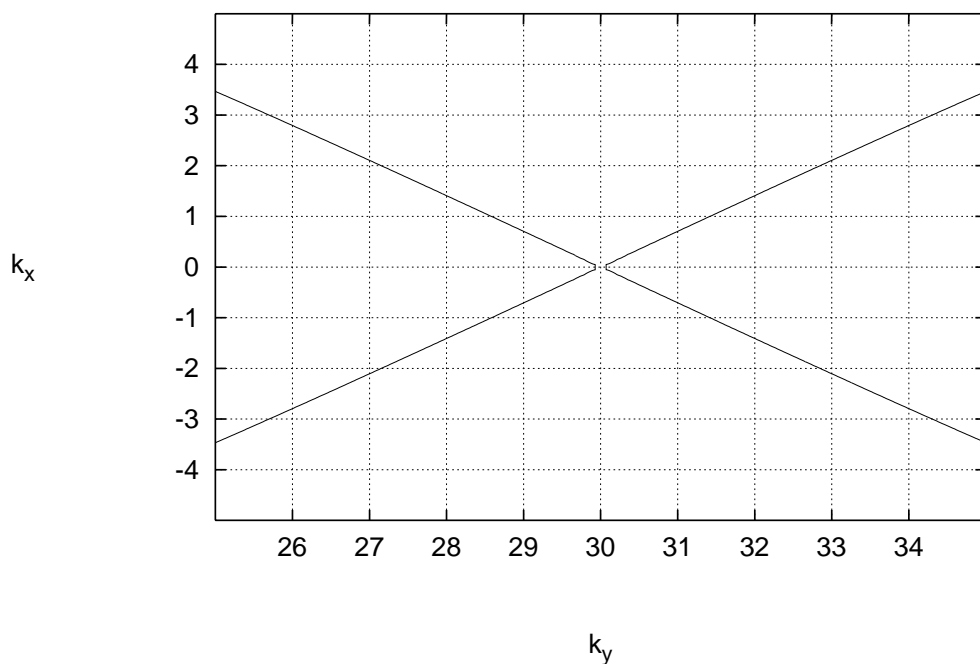


Рис. III.9. Фрагмент резонансной кривой. Хорошо заметна разная расстройка для разных узлов сетки.

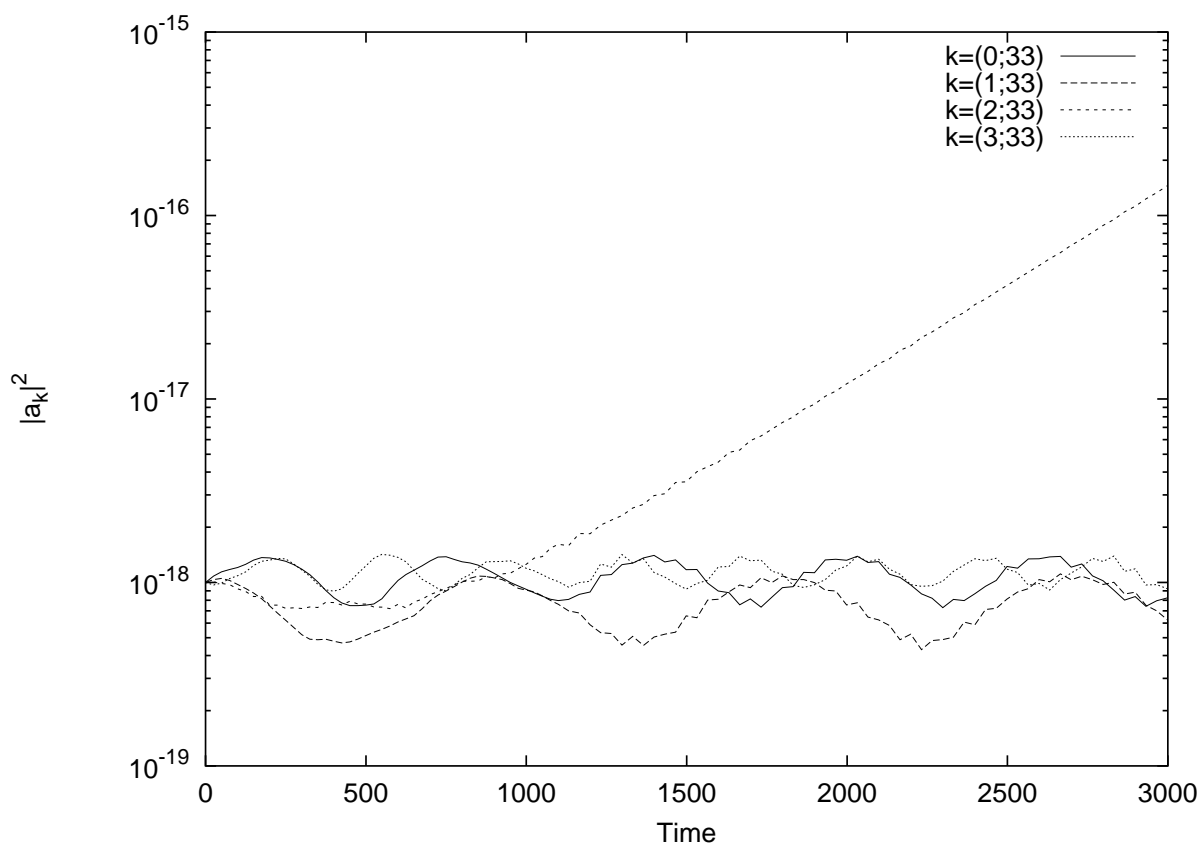


Рис. III.10. Рост гармоник как функция времени. Видно, что есть резонансные и не резонансные гармоники.

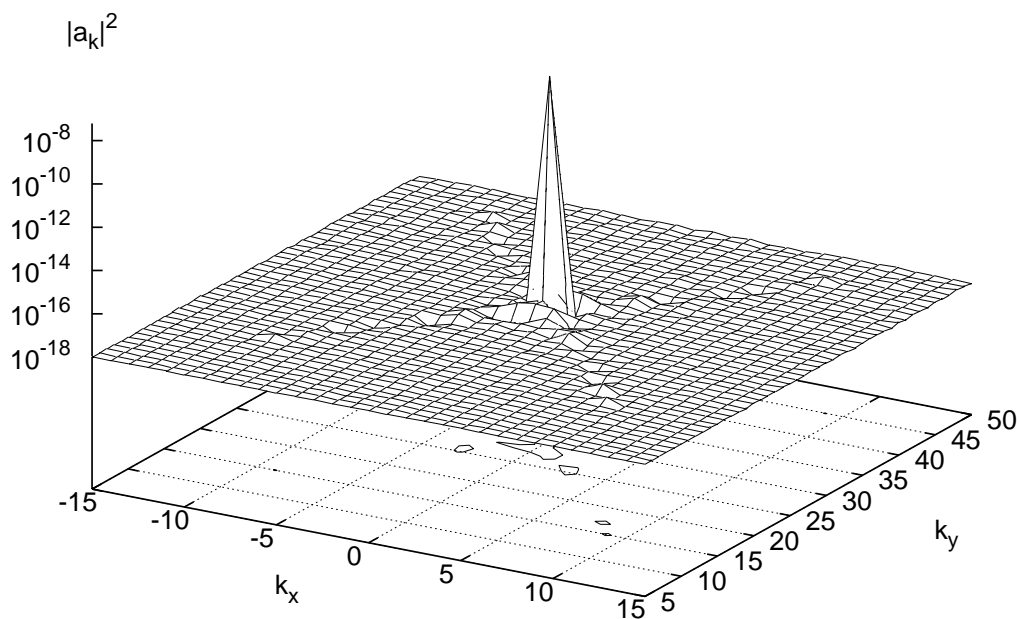


Рис. III.11. Начало роста гармоник при $\mathbf{k}_0 = (0; 30)$.

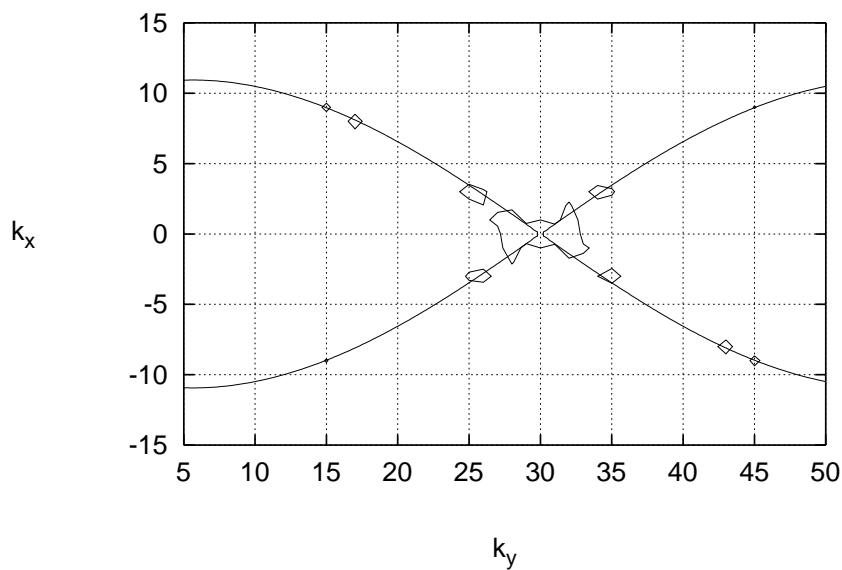


Рис. III.12. Начало роста гармоник. Линии уровня $|a_{\mathbf{k}}|^2 = 1.5 \times 10^{-18}$.

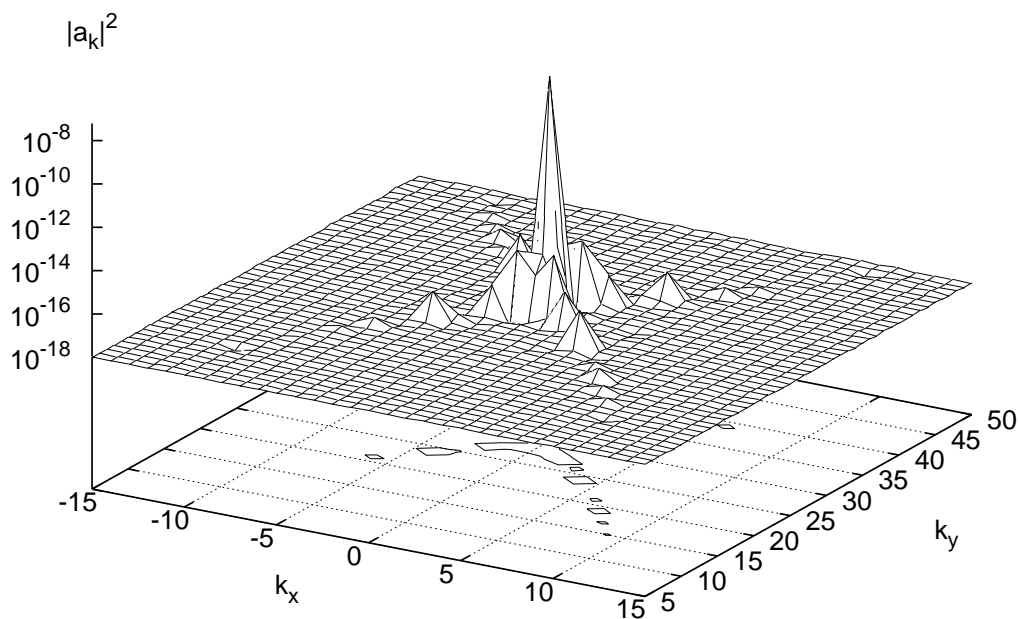


Рис. III.13. Продолжение роста гармоник.

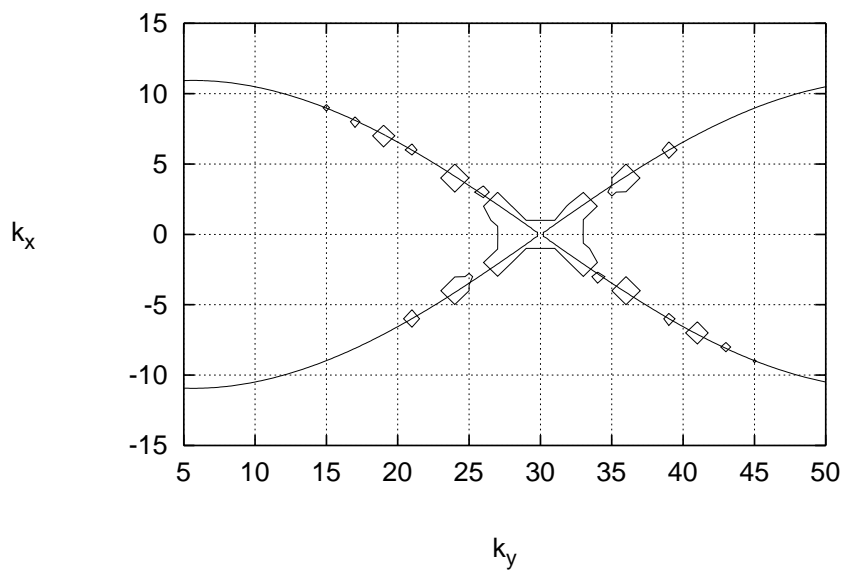


Рис. III.14. Продолжение роста гармоник. Линии уровня $|a_{\mathbf{k}}|^2 = 1.5 \times 10^{-18}$.

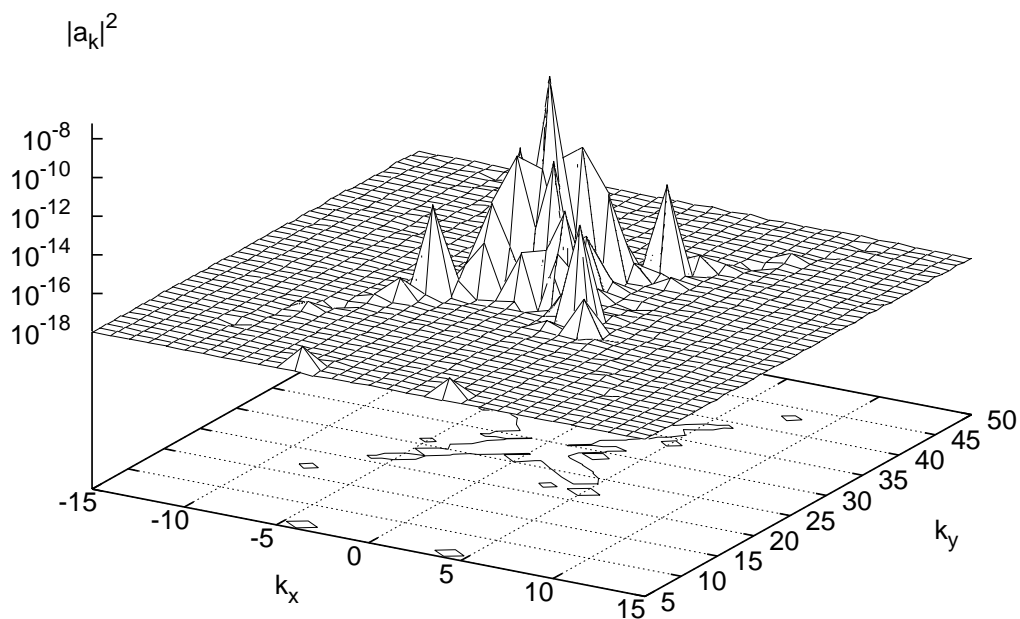


Рис. III.15. Начальная волна окружена порожденными вторичными распадами волн гармониками.

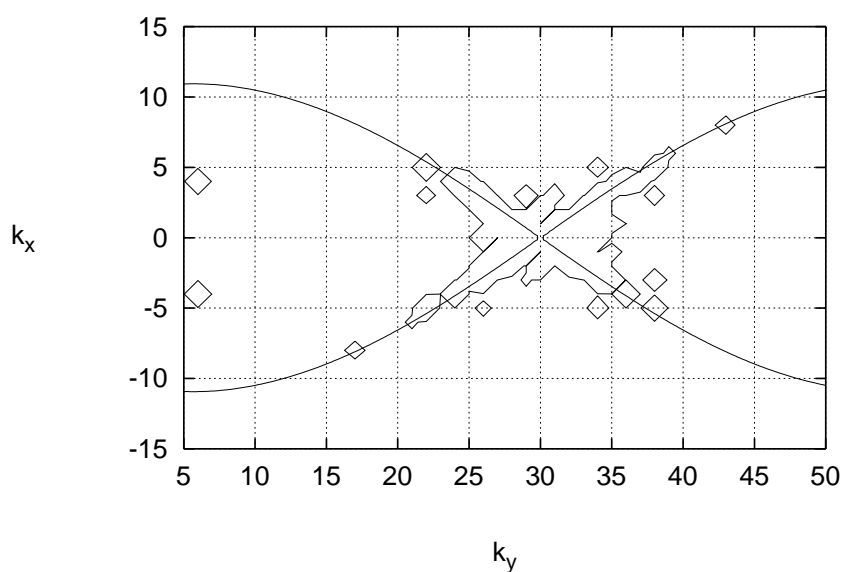


Рис. III.16. Начальная волна окружена порожденными вторичными распадами гармониками. Линии уровня $|a_k|^2 = 1.5 \times 10^{-18}$.

Несколько менее интересным, но не менее поучительным, является случай, когда мы изначально имеем две большие волны $a_{\mathbf{k}_0}$ и $a_{-\mathbf{k}_0}$. В этом случае резонансной кривой является окружность с центром в нуле и радиусом $|\mathbf{k}_0|$. Причем, нетрудно заметить, что такая же картина будет наблюдаться и в случае капиллярных волн. Результаты моделирования такого процесса представлены на Рис. III.17. Начальные условия были такими:

$$\mathbf{k}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 30 \end{pmatrix}; |a_{\mathbf{k}_0}| = |a_{-\mathbf{k}_0}| = 10^{-3}; \mathbf{k} \neq \mathbf{k}_0, |a_{\mathbf{k}}| = 10^{-9}.$$

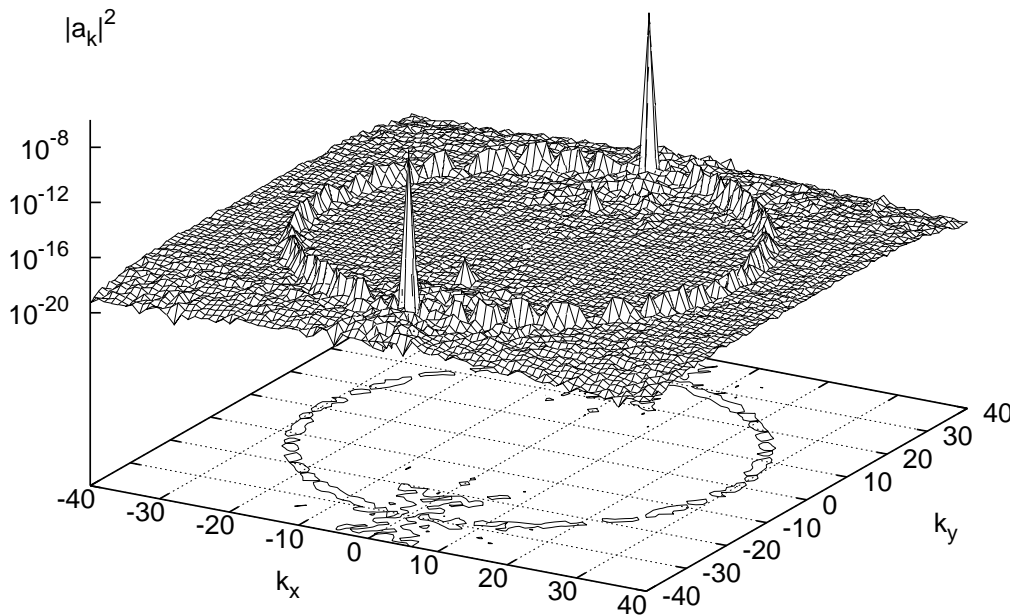


Рис. III.17. Рост гармоник в случае начальных условий в виде двух волн с противоположными волновыми векторами.

Очевидно, что при моделировании процессов распада и рассеяния скорость роста гармоник напрямую связана с амплитудой начальной гармоники (по крайней мере на начальной стадии процесса). Казалось бы, логично взять эту амплитуду как можно больше. Однако в этом предположении кроется серьезная ошибка. Взяв слишком большую амплитуду начальной волны, мы можем «открыть» нерезонансный процесс. В самом деле, уравнение $\Omega_{k_1 k_2}^{k_0} = \omega_{k_1} + \omega_{k_2} - \omega_{k_0}$ в случае гравитационных волн не имеет нетривиальных решений

при $\Omega_{k_1 k_2}^{k_0} = 0$, но если положить $\Omega_{k_1 k_2}^{k_0} > 0$, то решения появляются. Остается только достаточно большой амплитудой $A_{\mathbf{k}_0}$ сделать подкоренное выражение в (III.10) положительным, и мы получим «квази-резонансное» трехволновое взаимодействие. Надо понимать, что такая возможность появляется только на дискретной сетке и в случае непрерывной среды такие процессы проигрывают действительно резонансным. Таким образом, если выбрать слишком большую амплитуду, то в моделируемый процесс будет внесен артефакт, искажающий истинную физическую картину. На Рис. III.18 приведена «квази-резонансная» кривая для трехволнового взаимодействия при $\Omega_{k_1 k_2}^{k_0} = 2.3$ и волновых векторах.

$$\mathbf{k}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 30 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{k}_1 = \begin{pmatrix} -k_x \\ 30 - k_y \end{pmatrix}, \quad \mathbf{k}_2 = \begin{pmatrix} k_x \\ 30 + k_y \end{pmatrix}. \quad (\text{III.14})$$

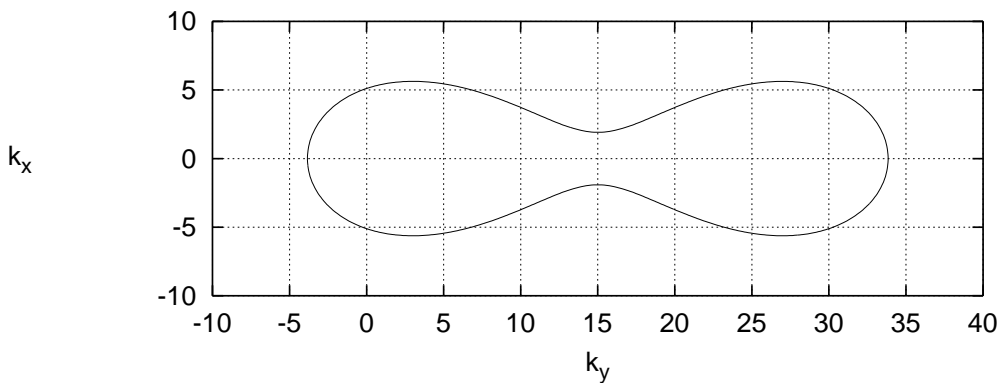


Рис. III.18. «Квази-резонансная» кривая для трехволнового взаимодействия гравитационных волн. $\mathbf{k}_0 = (0; 30)$.

III.4. Заключение

В этой главе мы продемонстрировали, что несмотря на то, что точное выполнение условий резонансного взаимодействия на дискретной сетке невозможно, мы можем получить ситуацию, близкую к реальной вследствие нелинейного сдвига частоты, который приводит к появлению у резонансной кривой

конечной ширины. Выведены условия (III.11) роста гармоник для случая распада монохроматической капиллярной волны.

Произведено численное моделирование распадов монохроматических капиллярных и гравитационных волн, подтверждающее сделанные оценки. Наблюдалось появление вторичных распадов волн, демонстрирующих начальную стадию перераспределения энергии с больших масштабов на малые (Колмогоровский каскад).

Полученные данные позволяют выбрать параметры численного эксперимента таким образом, чтобы нивелировать дискретность сетки и произвести численное моделирование реального процесса с резонансным взаимодействием. Эти результаты являются важным подспорьем при выборе, например, величины накачки в модели турбулентности волн на поверхности жидкости.

IV. Численная схема моделирования гравитационных и капиллярных поверхностных волн

Численное моделирование уравнений (I.9) представляет собой довольно сложную задачу. Сложности в основном обусловлены присутствием в уравнениях нелокального оператора \hat{k} . Однако если написать уравнения в представлении фурье-гармоник, то данный оператор сведется к действиям, аналогичным взятию производной. Поэтому вычисление правых частей, очевидно, будет основываться на последовательном применении алгоритма быстрого преобразования Фурье. В то же время, выбор метода численного интегрирования уравнений (I.9) не столь очевиден. В настоящее время широко распространен метод Рунге-Кутты четвертого порядка [27]. Он, однако, не лишен некоторых недостатков. Например, данный метод не сохраняет Гамильтониан, что, в случае моделирования Гамильтоновской системы, не слишком удобно. Если бы удалось построить численную схему, сохраняющую Гамильтониан, то это дало бы прекрасный инструмент для контроля за многими параметрами интегрирования. Например, за шагом по времени.

Данная глава построена следующим образом: в части IV.1 последовательно строится схема интегрирования уравнений (I.9), сохраняющая Гамильтониан; удобный на практике метод выбора шага по времени описывается в разделе IV.2; некоторые приемы, обобщающие полученную численную схему, приведены в части IV.3; в заключении IV.4 обсуждаются полученные результаты.

IV.1. Построение численной схемы, сохраняющей Гамильтониан

Будем действовать в духе работы [5]. Рассмотрим изменение Гамильтониана (I.8) на одном шаге по времени $H^n \longrightarrow H^{n+1}$, величиной τ :

$$\delta H = H^{n+1} - H^n. \quad (\text{IV.1})$$

Так как Гамильтониан есть функция только от переменных η и ψ , то попробуем выразить данное изменение как линейную функцию от:

$$\delta\eta = \eta^{n+1} - \eta^n, \quad \delta\psi = \psi^{n+1} - \psi^n. \quad (\text{IV.2})$$

При этом потребуем, чтобы Гамильтониан на этом шаге по времени оставался постоянным:

$$\delta H = \frac{\partial H}{\partial \psi} \delta\psi + \frac{\partial H}{\partial \eta} \delta\eta = 0. \quad (\text{IV.3})$$

Разделим данное равенство на шаг по времени τ :

$$\frac{\partial H}{\partial \psi} \frac{\delta\psi}{\tau} + \frac{\partial H}{\partial \eta} \frac{\delta\eta}{\tau} = 0. \quad (\text{IV.4})$$

Такое равенство может быть выполнено, например, при следующих условиях:

$$\begin{aligned} \frac{\delta\eta}{\tau} &= \frac{\partial H}{\partial \psi}, \\ \frac{\delta\psi}{\tau} &= -\frac{\partial H}{\partial \eta}. \end{aligned} \quad (\text{IV.5})$$

Это не что иное, как разностный аналог уравнений Гамильтона (I.7). Таким образом, найдя (IV.1) как линейную функцию (IV.2), мы получаем правые части уравнений (IV.5).

Как было упомянуто выше, разностную схему удобно записать для фурье-гармоник. Для сокращения записи введем оператор преобразования Фурье \hat{F} , соответствующий (I.10). Пользуясь результатами приведенными в приложении .2, получаем:

$$\begin{aligned} \frac{\eta_{\mathbf{k}}^{n+1} - \eta_{\mathbf{k}}^n}{\tau} &= \frac{1}{2} |\mathbf{k}| (\psi_{\mathbf{k}}^{n+1} + \psi_{\mathbf{k}}^n) - \\ &\quad - \frac{1}{4} \hat{F} (\nabla, (\eta^{n+1} + \eta^n) \nabla (\psi^{n+1} + \psi^n)) - \\ &\quad - \frac{1}{4} |\mathbf{k}| \hat{F} \left((\eta^{n+1} + \eta^n) \hat{k} (\psi^{n+1} + \psi^n) \right) + \\ &\quad + \frac{1}{4} |\mathbf{k}| \hat{F} \left[(\eta^{n+1} + \eta^n) \hat{k} \left(\eta^{n+1} \hat{k} \psi^{n+1} + \eta^n \hat{k} \psi^n \right) \right] - \\ &\quad - \frac{1}{8} |\mathbf{k}|^2 \hat{F} \left[((\eta^{n+1})^2 + (\eta^n)^2) \hat{k} (\psi^{n+1} + \psi^n) \right] + \\ &\quad + \frac{1}{8} |\mathbf{k}| \hat{F} \left[((\eta^{n+1})^2 + (\eta^n)^2) \Delta (\psi^{n+1} + \psi^n) \right]. \end{aligned} \quad (\text{IV.6})$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\psi_{\mathbf{k}}^{n+1} - \psi_{\mathbf{k}}^n}{\tau} &= -\frac{1}{2} \frac{\omega_k^2}{|\mathbf{k}|} (\eta_{\mathbf{k}}^{n+1} + \eta_{\mathbf{k}}^n) - \\
 &\quad -\frac{1}{4} \hat{F} \left(|\nabla \psi^{n+1}|^2 + |\nabla \psi^n|^2 \right) + \\
 &\quad +\frac{1}{4} \hat{F} \left((\hat{k} \psi^{n+1})^2 + (\hat{k} \psi^n)^2 \right) - \\
 &\quad -\frac{1}{4} \hat{F} \left[\hat{k} (\psi^{n+1} + \psi^n) \hat{k} \left(\eta^{n+1} \hat{k} \psi^{n+1} + \eta^n \hat{k} \psi^n \right) \right] - \\
 &\quad -\frac{1}{4} \hat{F} \left[(\eta^{n+1} + \eta^n) (\Delta \psi^{n+1} \hat{k} \psi^{n+1} + \Delta \psi^n \hat{k} \psi^n) \right].
 \end{aligned} \tag{IV.7}$$

Для вычислений полезно разрешить уравнения (IV.6-IV.7) относительно значений на $n + 1$ -вом шаге (имеются в виду линейные члены). В целях сокращения записи введем обозначения для нелинейных членов в правых частях уравнений (IV.6-IV.7):

$$\begin{aligned}
 R_\eta &= -\frac{1}{4} \hat{F} \left(\nabla, (\eta^{n+1} + \eta^n) \nabla (\psi^{n+1} + \psi^n) \right) - \\
 &\quad -\frac{1}{4} |\mathbf{k}| \hat{F} \left((\eta^{n+1} + \eta^n) \hat{k} (\psi^{n+1} + \psi^n) \right) + \\
 &\quad +\frac{1}{4} |\mathbf{k}| \hat{F} \left[(\eta^{n+1} + \eta^n) \hat{k} \left(\eta^{n+1} \hat{k} \psi^{n+1} + \eta^n \hat{k} \psi^n \right) \right] - \\
 &\quad -\frac{1}{8} |\mathbf{k}|^2 \hat{F} \left[((\eta^{n+1})^2 + (\eta^n)^2) \hat{k} (\psi^{n+1} + \psi^n) \right] + \\
 &\quad +\frac{1}{8} |\mathbf{k}| \hat{F} \left[((\eta^{n+1})^2 + (\eta^n)^2) \Delta (\psi^{n+1} + \psi^n) \right], \\
 R_\psi &= -\frac{1}{4} \hat{F} \left(|\nabla \psi^{n+1}|^2 + |\nabla \psi^n|^2 \right) + \\
 &\quad +\frac{1}{4} \hat{F} \left((\hat{k} \psi^{n+1})^2 + (\hat{k} \psi^n)^2 \right) - \\
 &\quad -\frac{1}{4} \hat{F} \left[\hat{k} (\psi^{n+1} + \psi^n) \hat{k} \left(\eta^{n+1} \hat{k} \psi^{n+1} + \eta^n \hat{k} \psi^n \right) \right] - \\
 &\quad -\frac{1}{4} \hat{F} \left[(\eta^{n+1} + \eta^n) (\Delta \psi^{n+1} \hat{k} \psi^{n+1} + \Delta \psi^n \hat{k} \psi^n) \right].
 \end{aligned} \tag{IV.8}$$

Разрешая (IV.6-IV.7) относительно $\eta_{\mathbf{k}}^{n+1}$ и $\psi_{\mathbf{k}}^{n+1}$, получаем:

$$\begin{aligned}
 \eta_{\mathbf{k}}^{n+1} &= A(k, \tau) \eta_{\mathbf{k}}^n + B(k, \tau) \psi_{\mathbf{k}}^n + C(k, \tau) R_\eta + D(k, \tau) R_\psi, \\
 \psi_{\mathbf{k}}^{n+1} &= E(k, \tau) \eta_{\mathbf{k}}^n + A(k, \tau) \psi_{\mathbf{k}}^n + F(k, \tau) R_\eta + C(k, \tau) R_\psi,
 \end{aligned} \tag{IV.9}$$

здесь введены обозначения:

$$\begin{aligned}
 A(k, \tau) &= \frac{1 - \frac{1}{4} \omega_k^2 \tau^2}{1 + \frac{1}{4} \omega_k^2 \tau^2}, \quad B(k, \tau) = \frac{\tau k}{1 + \frac{1}{4} \omega_k^2 \tau^2}, \\
 C(k, \tau) &= \frac{\tau}{1 + \frac{1}{4} \omega_k^2 \tau^2}, \quad D(k, \tau) = \frac{1}{2} \tau B(k, \tau), \\
 E(k, \tau) &= -\frac{\omega_k^2}{k} C(k, \tau), \quad F(k, \tau) = \frac{1}{2} \tau E(k, \tau).
 \end{aligned} \tag{IV.10}$$

Таким образом, мы получили абсолютно неявную (в члены R_η и R_ψ входят значения $\eta_{\mathbf{k}}^{n+1}$ и $\eta_{\mathbf{k}}^{n+1}$) численную схему, сохраняющую Гамильтониан (I.8).

IV.2. Выбор шага по времени

Полученную неявную численную схему (IV.9) можно решать методом простых итераций. Запишем эту процедуру для $\eta_{\mathbf{k}}^{n+1,s}$, где s — это номер итерации, подразумевая аналогичные действия для $\psi_{\mathbf{k}}^{n+1,s}$.

- $s = 0 : \eta_{\mathbf{k}}^n;$
- $s = 1 : (\eta_{\mathbf{k}}^{n+1} := \eta_{\mathbf{k}}^n) \longrightarrow \eta_{\mathbf{k}}^{n+1,1};$
- $s = 2 : (\eta_{\mathbf{k}}^{n+1} := \eta_{\mathbf{k}}^{n+1,1}) \longrightarrow \eta_{\mathbf{k}}^{n+1,2};$
- ...

Процесс продолжается, пока не будет достигнута требуемая точность ϵ сохранения Гамильтониана. Однако операция вычисления Гамильтониана является довольно «дорогой». В большинстве случаев достаточно потребовать, чтобы выполнялось следующее соотношение:

$$\frac{\sum_{\mathbf{k}} \left| \eta_{\mathbf{k}}^{n+1,s+1} \right|^2 - \sum_{\mathbf{k}} \left| \eta_{\mathbf{k}}^{n+1,s} \right|^2}{\sum_{\mathbf{k}} \left| \eta_{\mathbf{k}}^{n+1,s} \right|^2} < \epsilon, \quad (\text{IV.11})$$

в случае гравитационных волн. Это, практически, требование вычисления потенциальной энергии с нужной точностью, а в приближении слабой нелинейности квадратичная часть Гамильтониана доминирует над остальными. В случае капиллярных волн можно соответствующим образом модифицировать выражение под знаком суммы. Но, как показывает практика, даже условия (IV.11) оказывается достаточно.

В процессе вычислений можно контролировать шаг по времени, требуя сходимости итерационного процесса за число шагов не большее, чем N_{max} , но и не меньшее, чем N_{min} , и соответствующим образом корректируя шаг по времени, если этого не происходит.

IV.3. Обобщение численной схемы в присутствии затухания и накачки

Приведенная в предыдущем разделе численная схема может быть применена для моделирования динамики свободно убывающих волн. Однако, на наш взгляд, наиболее интересным является моделирование турбулентности волн,

которое требует присутствия в модели накачки и затухания. Например, добавим в уравнение (IV.7) член вида:

$$\dot{\psi}_{\mathbf{k}} = \dots - \gamma_k \psi_{\mathbf{k}}, \quad (\text{IV.12})$$

соответствующий экспоненциальному затуханию гармоник. Учесть такую добавку можно практически не меняя схему вычислений. Используем для этого метод расщепления (в иностранной литературе часто называемый «split-step»), широко применяемый, например, для моделирования распространения волн в оптоволокне. Для этого вычисляем решение уравнений (I.9) на текущем шаге без учета затухания. Обозначим это решение $\tilde{\psi}_{\mathbf{k}}^{n+1}$. Тогда решение полной системы можем вычислить по формуле:

$$\psi_{\mathbf{k}}^{n+1} = \tilde{\psi}_{\mathbf{k}}^{n+1} \exp(-\gamma_k \tau). \quad (\text{IV.13})$$

Надо отметить, что при моделировании турбулентности волн, нас интересует поведение системы в области, где влияние накачки и затухания незначительно («инерционный интервал»). Поэтому нет необходимости применять методы, обеспечивающие слишком высокую точность в расчете влияния затухания. Кроме того, применяя метод расщепления, мы избавляемся от ограничения на величину шага по времени, вносимого затуханием:

$$\max(|\gamma_k|)\tau < 1. \quad (\text{IV.14})$$

Аналогичным способом можно учесть и накачку.

IV.4. Заключение

Вычисляя дискретную вариацию Гамильтониана, нам удалось построить численную схему для решения динамических уравнений (I.9), сохраняющую Гамильтониан. В этом случае мы получаем удобный инструмент для контроля за величиной шага по времени. Данная схема легко обобщается на случай наличия в уравнениях накачки и затухания. Это позволяет использовать полученную схему при моделировании турбулентности, а так же при расчете свободной эволюции поверхностных волн.

V. Турбулентность гравитационных волн

Теория слабой турбулентности многократно проверялась в численных экспериментах [5, 25, 28, 30, 29]. Однако единственным успешным экспериментом по численному моделированию турбулентности волн на поверхности трехмерной жидкости следует признать [32], где моделировалась турбулентность капиллярных волн. Несмотря на значительные затраченные усилия, в случае гравитационных волн на поверхности добиться прогресса не удавалось. По нашему мнению, причина этого заключалась в трудности правильного выбора параметров численной схемы.

Эта глава построена следующим образом: в разделе V.1 вводится статистическое описание волнового поля на поверхности жидкости для случая гравитационных волн на глубокой воде; в разделе V.2 приведены параметры численной схемы и результаты расчетов; в заключении обсуждаются полученные результаты.

V.1. Статистическое описание волнового поля на поверхности жидкости

Как было отмечено в главе III, дисперсионный закон для гравитационных волн на поверхности глубокой жидкости относится к так называемому «нераспадному» случаю. Уравнения:

$$\omega_{k_1} = \omega_{k_2} + \omega_{k_3}, \quad \mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 \quad (\text{V.1})$$

не имеют нетривиальных вещественных решений. Это означает, что кубические члены в Гамильтониане могут быть исключены соответствующим каноническим преобразованием $a(\mathbf{k}, t) \rightarrow b(\mathbf{k}, t)$ [9]. Формула этого преобразования чрезвычайно громоздка и хорошо известна [9, 10], поэтому позволим себе не вдаваться в детали.

Для статистического описания волнового поля можно использовать корреляционную функцию:

$$\langle a_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}'}^* \rangle = n_{\mathbf{k}} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}'). \quad (\text{V.2})$$

Величина $n_{\mathbf{k}}$ непосредственно связана с наблюдаемыми корреляционными функциями и может быть получена из экспериментальных данных. Например, из (I.13) можно получить:

$$I_k = \langle |\eta_{\mathbf{k}}|^2 \rangle = \frac{1}{2} \frac{\omega_k}{g} (n_k + n_{-k}). \quad (\text{V.3})$$

В случае гравитационных волн удобнее пользоваться другой корреляционной функцией:

$$\langle b_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}'}^* \rangle = N_k \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}'). \quad (\text{V.4})$$

Функция N_k не может быть измерена напрямую. В общем случае связь между n_k и N_k довольно сложна [10], но в случае глубокой воды все становится проще:

$$\frac{n_k - N_k}{n_k} \simeq \mu, \quad (\text{V.5})$$

здесь $\mu = (ka)^2$, где a — характерное отклонение поверхности. В случае слабой турбулентности $\mu \ll 1$. Корреляционная функция N_k подчиняется кинетическому уравнению [1]:

$$\frac{\partial N_k}{\partial t} = st(N, N, N) + f_p(k) - f_d(k), \quad (\text{V.6})$$

Здесь:

$$\begin{aligned} st(N, N, N) = & 4\pi \int |T_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3}|^2 \times \\ & \times (N_{k_1} N_{k_2} N_{k_3} + N_k N_{k_2} N_{k_3} - N_k N_{k_1} N_{k_2} - \\ & - N_k N_{k_1} N_{k_3}) \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3) d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 d\mathbf{k}_3. \end{aligned} \quad (\text{V.7})$$

Подробная форма матричного элемента $T_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3}$ может быть найдена во множестве источников [1, 8, 10]. Функция $f_p(k)$ в (V.6) соответствует накачке волн, например, ветром. Обычно накачка сосредоточена на больших масштабах. Функция $f_d(k)$ представляет собой затухание волн благодаря вязкости и обрушению волн. Эти функции известны лишь приблизительно. Однако существует интервал между масштабами, в котором действие накачки и затухания можно считать слабым и в котором и наблюдают Колмогоровские спектры в эксперименте.

Рассмотрим стационарное решение уравнения (V.6), предполагая, что выполнены следующие утверждения:

- Среда изотропна по отношению к поворотам;
- Дисперсионное соотношение является степенной функцией $\omega = ak^\alpha$;
- $T_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2,\mathbf{k}_3}$ — однородная функция: $T_{\epsilon\mathbf{k},\epsilon\mathbf{k}_1,\epsilon\mathbf{k}_2,\epsilon\mathbf{k}_3} = \epsilon^\beta T_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2,\mathbf{k}_3}$.

В этих предположениях можно найти Колмогоровские решения [9]:

$$\begin{aligned} n_k^{(1)} &= C_1 P^{1/3} k^{-\frac{2\beta}{3}-d}, \\ n_k^{(2)} &= C_2 Q^{1/3} k^{-\frac{2\beta-\alpha}{3}-d}. \end{aligned} \quad (\text{V.8})$$

Здесь d — это число измерений пространства ($d = 2$ в случае гравитационных поверхностных волн). Первое выражение представляет собой Колмогоровский спектр, соответствующий постоянному потоку энергии P в область малых масштабов (прямой каскад энергии). Второе выражение — это Колмогоровский спектр, описывающий каскад волнового действия на большие масштабы, и Q — это поток действия. В обоих случаях C_1 и C_2 — это безразмерные «Колмогоровские константы».

В случае гравитационных волн на глубокой воде $\omega = \sqrt{gk}$, а $\beta = 3$. Из работы [1] стало известно, что:

$$n_k^{(1)} = C_1 P^{1/3} k^{-4}. \quad (\text{V.9})$$

Действуя таким же образом [26], получаем второй спектр:

$$n_k^{(2)} = C_2 Q^{1/3} k^{-23/6}. \quad (\text{V.10})$$

Эта глава посвящена исследованию спектра, отвечающего потоку энергии (V.9). Используя (V.3), можно вычислить:

$$I_k = \frac{C_1 g^{1/2} P^{1/3}}{k^{7/2}}. \quad (\text{V.11})$$

V.2. Численное моделирование

Для моделирования турбулентности поверхностных волн в уравнения (I.9) необходимо ввести члены, отвечающие накачке и затуханию. Например, это можно сделать таким образом:

$$\begin{aligned} \dot{\eta}_{\mathbf{k}} &= \dots + \gamma_k \eta_{\mathbf{k}}, \\ \dot{\psi}_{\mathbf{k}} &= \dots + \gamma_k \psi_{\mathbf{k}} + f_k. \end{aligned} \quad (\text{V.12})$$

Такая модификация дает экспоненциальное затухание гармоник и линейную по времени накачку. Модифицированные динамические уравнения (I.9) решались с использованием численной схемы, описанной в главе IV. Конкретный вид функций, определяющих накачку и затухание, был таков:

$$\begin{aligned}
 F_k &= f_k e^{iR_k(t)}, \\
 f_k &= 4F_0 \frac{(k - k_{p1})(k_{p2} - k)}{(k_{p2} - k_{p1})^2}; \\
 D_{\mathbf{k}} &= \gamma_k \psi_{\mathbf{k}}, \\
 \gamma_k &= -\gamma_1, k \leq k_{p1}, \\
 \gamma_k &= -\gamma_2(k - k_d)^2, k > k_d.
 \end{aligned}
 \tag{V.13}$$

Здесь $R_{\mathbf{k}}(t)$ — это равномерно распределенное случайное число в интервале $(0, 2\pi)$. Вычисления производились в области $L_x = L_y = 2\pi$ с периодическими граничными условиями. Параметры накачки были такими: $k_{p1} = 5$, $k_{p2} = 10$, $k_d = 64$.

Как было показано в главе III, при решении надо особо обратить внимание на уровень гармоник, так как от этого зависит степень достоверности моделирования резонансных взаимодействий волн. Экспериментально были найдены несколько подходящих уровней накачки. Наилучшие результаты при приемлемом времени расчетов получены для значений $F_0 = 2 \times 10^{-4}$ и $F_0 = 3 \times 10^{-4}$.

Значения параметров затухания адаптировались при расчетах по следующим алгоритмам. Для сохранения приемлемого качества решения, требовалось, чтобы в спектре наибольшая гармоника отличалась от наименьшей в $10^6 - 10^7$ раз. Обеспечивалось это посредством изменения параметра γ_2 . При таких условиях удалось избежать эффекта «бутылочного горлышка», описанного в [31].

Так как нас интересовал только спектр, соответствующий прямому Колмогоровскому каскаду (перенос энергии в область с большими k), то единственное требование, предъявлявшееся к спектру при $k \leq k_{p1}$, состояло в том, чтобы данные гармоники были не больше, чем пиковая гармоника спектра. С этой целью проверялось выполнение данного условия и при необходимости включалось затухание γ_1 . В остальное время затухания в области малых волновых чисел k не было.

Получение стационарного состояния (то есть состояния, в котором спектр в целом не меняется) производилось в несколько этапов. Очевидно, что наибольшее время занимает установление равновесия в области относительно небольших волновых чисел, то есть в окрестности накачки. В таких условиях считать на «большой» сетке было бы расточительно. Поэтому расчет

начинался на сетке 128×128 , при этом $k_d = 32$ до получения стационарного состояния. Затем происходил переход на сетку 256×256 , при этом $k_d = 64$. Недостающие гармоники заполнялись нулями. После установления равновесия был произведен переход на сетку 512×512 , при этом $k_d = 100$. После установления равновесия и в этом режиме, было произведено усреднение проинтегрированного по углу квадрата спектра (в силу симметрии системы) для получения коррелятора $\langle |\eta_k|^2 \rangle$.

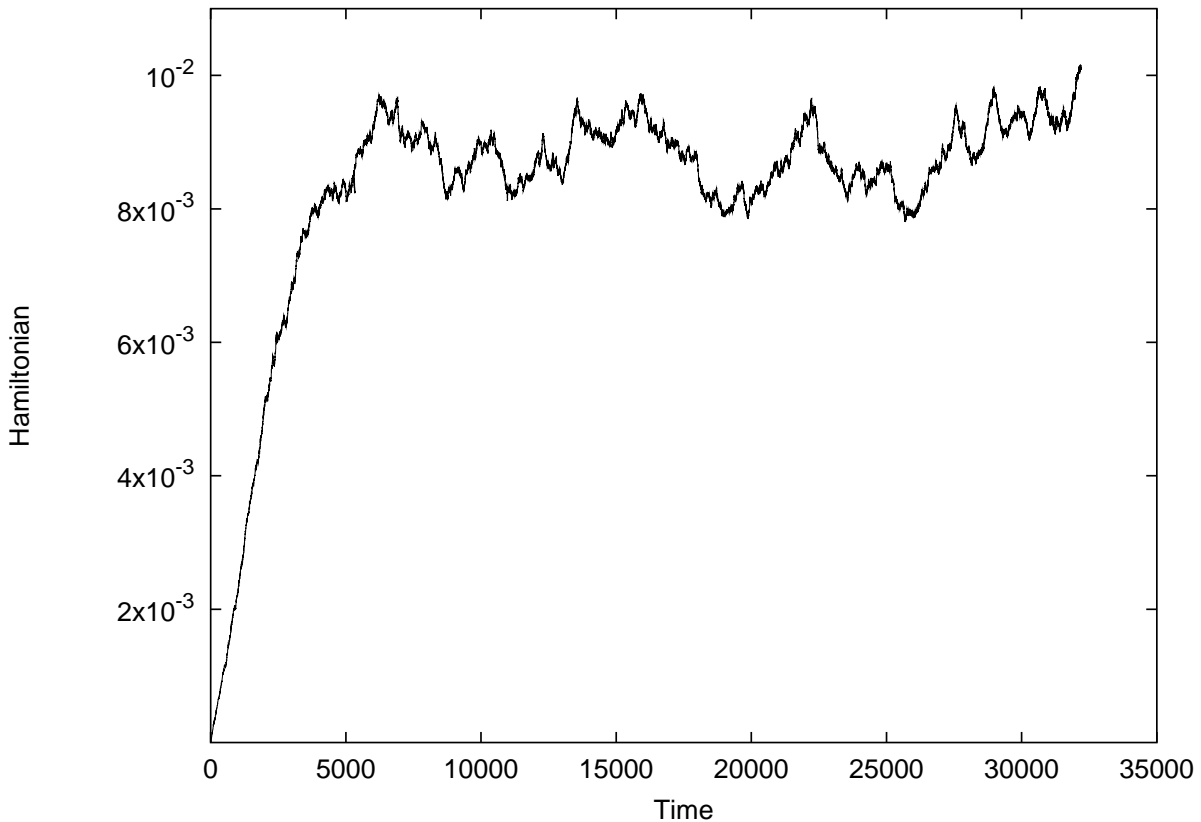


Рис. V.1. Гамильтониан системы как функция времени.

На Рис. V.2 приведен график Гамильтониана как функции времени для таких параметров модели: $F_0 = 2 \times 10^{-4}$, $\gamma_1 = 10^{-3}$, $\gamma_2 \simeq 512$, $g = 1$.

Корреляционная функция оказалась степенной в значительной части инерционного интервала, который составлял область от $k_{p2} = 10$ до $k_d = 100$. Коррелятор показан на Рис. V.2.

Можно оценить показатель этой степенной функции. Скомпенсированные спектры (для сравнения мы привели спектр Филлипса, обсуждавшийся в II) показаны на Рис. V.2. Видно, что спектр, предсказанный теорией слабой турбулентности, лучше подходит к результатам численного эксперимента.

На Рис. V.2 видно уширение области, в которой наблюдается степенной

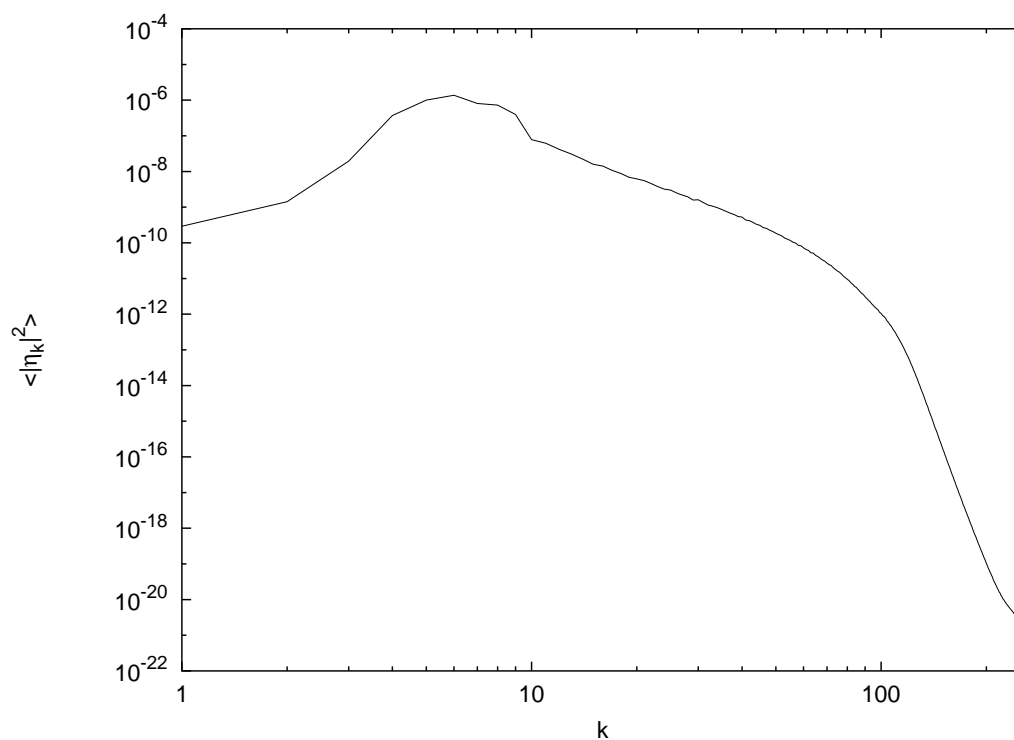


Рис. V.2. Корреляционная функция отклонения поверхности в двойном логарифмическом масштабе.

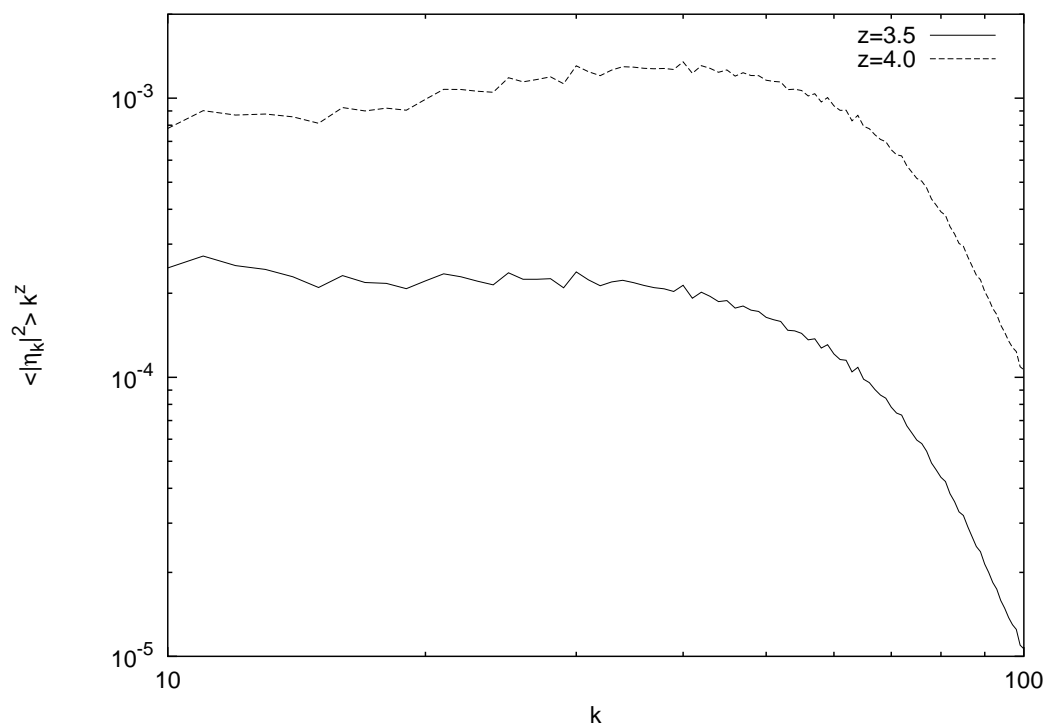


Рис. V.3. Скомпенсированный коррелятор отклонения поверхности при различных степенях компенсации: $z = 3.5$ сплошная линия (теория слабой турбулентности), $z = 4.0$ прерывистая линия (теория Филлипса).

спектр в результате увеличения инерционного интервала при переходе на большую сетку. Также представляет интерес проверить, существует ли за-

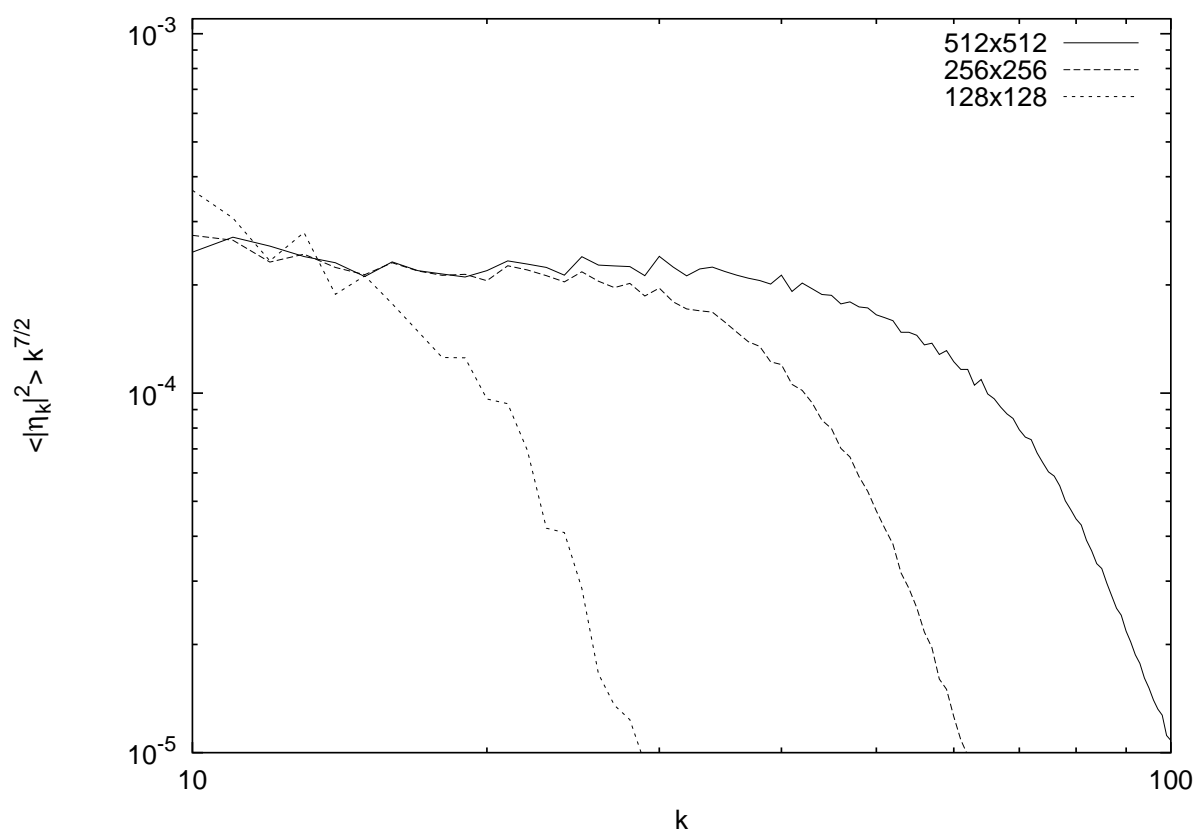


Рис. V.4. Уширение области степенного спектра при увеличении количества точек на сетке.

висимость показателя в полученном степенном спектре от уровня накачки. Для этого был выполнен расчет при уровне накачки $F_0 = 3 \times 10^{-4}$ на сетке размером 256×256 . На Рис. V.2 хорошо видно, что отличия показателей не наблюдается. Как и следовало ожидать, наблюдается отличие потока P в формуле (V.11), что приводит лишь к параллельному смещению кривой.

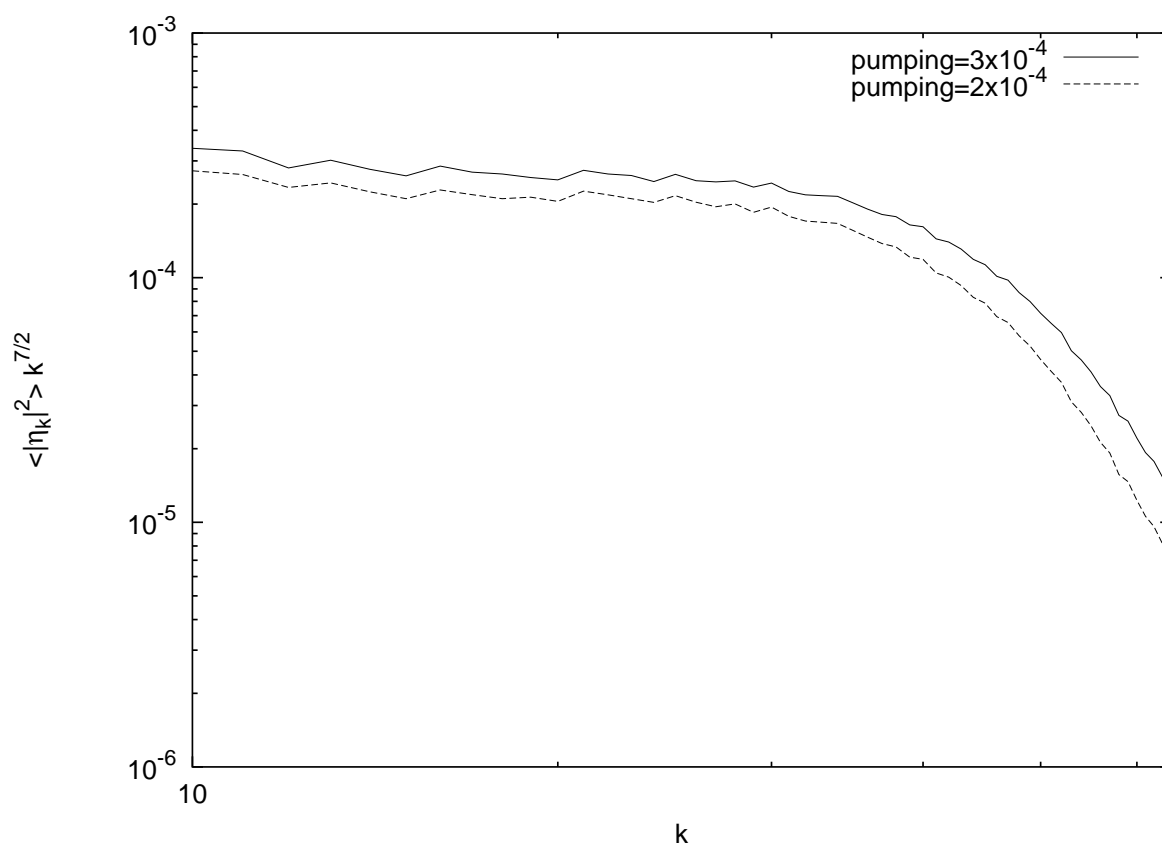


Рис. V.5. Инерционный интервал спектра при различных уровнях накачки.

V.3. Заключение

Произведенное численное моделирование динамических уравнений волн на поверхности жидкости в случае гравитационных волн на глубокой воде показало, что в существенной области инерционного интервала для коррелятора отклонения поверхности наблюдается Колмогоровский (степенной) спектр, подтверждающий предсказания теории слабой турбулентности. Произведенные дополнительные численные эксперименты продемонстрировали, что степень убывания спектра не зависит от уровня накачки и затухания в модели, что позволяет считать данный спектр универсальным. Таким образом, можно заключить, что предположения, в рамках которых получена теория слабой турбулентности, являются верными и в случае гравитационных волн на поверхности глубокой жидкости.

Заключение

Основные результаты диссертации состоят в следующем (более подробно результаты обсуждались в Заключениях к каждой главе):

Проверена гипотеза о возможности интерпретации наблюдаемых спектров поверхностных волн как спектров, обусловленных обрушениями и возникновением острых гребней, искаженных Доплеровским эффектом от длинноволнового фона. Показано, что в случаях изотропного и сильно анизотропного спектров доплеровский сдвиг частоты не может объяснить наблюдаемого расхождения с экспериментальными данными.

Исследовано влияние дискретности сетки волновых векторов на возможность осуществления резонансных взаимодействий волн. Для случая капиллярных волн промоделирован распад монохроматической волны и начальная стадия перераспределения энергии между различными масштабами.

В случае гравитационных волн продемонстрировано рассеяние двух волн с одинаковым волновым числом в гармонике, расположенные на резонансной кривой. Наблюдалось постепенное расширение области роста, вызванное дальнейшими взаимодействиями волн.

Построена численная схема для решения уравнений динамики поверхностных слабонелинейных волн, сохраняющая Гамильтониан системы. Продемонстрирован способ обобщения данной схемы на случай присутствия накачки и затухания, важный при моделировании турбулентности поверхностных волн.

Произведено численное моделирование поверхностных гравитационных волн в случае глубокой воды. В случаях накачки разной величины получены слаботорбулентные Колмогоровские спектры, соответствующие потоку энергии в область малых масштабов. Результаты получены на сетках 256×256 и 512×512 точек. Полученные спектры поверхностных волн хорошо согласуются как с предсказаниями теории слабой турбулентности, так и с экспериментальными наблюдениями.

Автор чрезвычайно признателен проф. В. Е. Захарову за научное руководство, интересные поставленные задачи и ценные советы. Также автору хотелось бы поблагодарить А. И. Дьяченко за чрезвычайно полезное и приятное сотрудничество.

Работа над диссертацией проходила при финансовой поддержке программы Президиума РАН «Нелинейная динамика и солитоны», грантов Министерства промышленности, науки и технологий РФ № НШ-1716.2003.1 (Государственная программа поддержки научных школ) и Российского Фонда Фундаментальных Исследований № 03-01-00289, а также Программы INTAS (Грант 00-0292) и фонда Landau Scholarship от Forschungszentrum Jülich (Германия).

Приложения

.1. Вычисление разложений спектра в присутствии эффекта Доплера

Сначала рассмотрим несколько более сложный случай изотропного спектра. Произведем следующую подстановку:

$$x = \frac{\lambda - \sqrt{\zeta}}{\zeta}. \quad (.14)$$

В этом случае в получившейся области интегрирования ($-1 < x < +1$) мы можем выписать обратное представление

$$\zeta = \frac{1}{2x^2} \left[1 - 2\sqrt{1 + 4x\lambda} + 2x\lambda \right], \quad (.15)$$

и далее

$$\zeta(x) \approx \frac{1}{2x^2} [2\lambda^2 x^2 - 4\lambda^3 x^3 + 10\lambda^4 x^4] = \lambda^2 - 2\lambda^3 x + 5\lambda^4 x^2. \quad (.16)$$

Для дальнейших вычислений мы должны сосчитать $d\zeta = \zeta'(x)dx$:

$$\begin{aligned} \zeta'(x) &= -\frac{1}{x^3} - \frac{\lambda}{x^2\sqrt{1+4\lambda x}} + \frac{\sqrt{1+4\lambda x}}{x^3} - \\ & - \frac{\lambda}{x^2} \approx -\frac{1}{x^3} - \frac{\lambda}{x^2} [1 - 2\lambda x + 6\lambda^2 x^2 - 20\lambda^3 x^3 + \\ & + 70\lambda^4 x^4] + \frac{1}{x^3} [1 + 2\lambda x - 2\lambda^2 x^2 + 4\lambda^3 x^3 - \\ & - 10\lambda^4 x^4 + 28\lambda^5 x^5] - \frac{\lambda}{x^2} = \\ & = -2\lambda^3 (1 - 5\lambda x + 21\lambda^2 x^2). \quad (.17) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi(\zeta(x)) &= \Phi(\lambda^2(1 - 2\lambda x + 5\lambda^2 x^2)) \approx \\ & \approx \Phi(\lambda^2) - \frac{\Phi'(\lambda^2)}{1!} 2\lambda^3 x + \\ & + \frac{\Phi'(\lambda^2)}{1!} 5\lambda^4 x^2 + \frac{\Phi''(\lambda^2)}{2!} 4\lambda^6 x^2. \quad (.18) \end{aligned}$$

Теперь мы можем вычислить интеграл (II.37) с подставленным спектром Филлипса ($\Phi(\zeta) = 1/\zeta^4$):

$$F_i(\lambda) = \frac{8}{\pi} \frac{g}{v^3} B 2\lambda^3 \int_{-1}^{+1} \Phi(\zeta(x)) \zeta'(x) K(\sqrt{1-x^2}) dx, \quad (.19)$$

Принимая во внимание несколько известных результатов

$$\int_{-1}^{+1} K(\sqrt{1-x^2}) dx = \frac{\pi^2}{2},$$

$$\int_{-1}^{+1} x K(\sqrt{1-x^2}) dx \equiv 0,$$

$$\int_{-1}^{+1} x^2 K(\sqrt{1-x^2}) dx = \int_0^{+1} E(\sqrt{1-x^2}) dx = \frac{\pi^2}{8},$$

здесь E — это полный эллиптический интеграл второго рода, можно получить следующий результат:

$$F_i(\lambda) = 8\pi\alpha \frac{v^5}{g^3} \frac{1}{\lambda^5} (1 + \frac{1}{4}\lambda^2 + \dots). \quad (.20)$$

Вычисление разложения спектра для сильно анизотропного случая до выражения (.19) абсолютно аналогично. Интеграл (II.41) принимает вид:

$$F_a(\lambda) = \frac{2}{\pi} \frac{g}{v^3} B 2\lambda^3 \int_{-1}^{+1} \frac{\Phi(\zeta(x)) \zeta'(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx, \quad (.21)$$

Конечный результат таков:

$$F_a(\lambda) = 2\alpha \frac{v^5}{g^3} \frac{1}{\lambda^5} (1 + \frac{1}{2}\lambda^2 + \dots). \quad (.22)$$

.2. Почленное представление дискретной вариации Гамильтониана

Выпишем почленно разность Гамильтонианов $H^{n+1} - H^n$, пользуясь свойством оператора \hat{k} :

$$\int g \hat{k} f d^2 r = \int f \hat{k} g d^2 r. \quad (.23)$$

В проварьированных частях для краткости опустим знаки интегралов.

Квадратичные члены:

$$\delta \left(\frac{1}{2} \int \psi \hat{k} \psi d^2r \right) \longrightarrow \frac{1}{2} \delta \psi \hat{k} (\psi^{n+1} + \psi^n); \quad (.24)$$

$$\delta \left(\frac{1}{2} \int \frac{\omega_k^2}{|\mathbf{k}|} |\eta_{\mathbf{k}}|^2 d\mathbf{k} \right) \longrightarrow \frac{1}{2} \delta \eta_{\mathbf{k}} \frac{\omega_k^2}{|\mathbf{k}|} (\eta_{\mathbf{k}}^{n+1} + \eta_{\mathbf{k}}^n). \quad (.25)$$

Кубические члены:

$$\delta \left(\frac{1}{2} \int \eta |\nabla \psi|^2 d^2r \right) \longrightarrow -\frac{1}{4} \delta \psi (\nabla, (\eta^{n+1} + \eta^n) \nabla (\psi^{n+1} + \psi^n)) + \frac{1}{4} \delta \eta (|\nabla \psi^{n+1}|^2 + |\nabla \psi^n|^2); \quad (.26)$$

$$\delta \left(\frac{1}{2} \int \eta (\hat{k} \psi)^2 d^2r \right) \longrightarrow -\frac{1}{4} \delta \psi \hat{k} (\eta^{n+1} + \eta^n) \hat{k} (\psi^{n+1} + \psi^n) - \frac{1}{4} \delta \eta ((\hat{k} \psi^{n+1})^2 + (\hat{k} \psi^n)^2). \quad (.27)$$

Четверные члены:

$$\delta \left(\frac{1}{2} \int (\eta \hat{k} \psi) \hat{k} (\eta \hat{k} \psi) d^2r \right) \longrightarrow \frac{1}{4} \delta \psi \hat{k} [(\eta^{n+1} + \eta^n) \times \hat{k} (\eta^{n+1} \hat{k} \psi^{n+1} + \eta^n \hat{k} \psi^n)] + \frac{1}{4} \delta \eta \hat{k} [(\psi^{n+1} + \psi^n) \times \hat{k} (\eta^{n+1} \hat{k} \psi^{n+1} + \eta^n \hat{k} \psi^n)]; \quad (.28)$$

$$\delta \left(\frac{1}{2} \int (\Delta \psi) (\hat{k} \psi) \eta^2 d^2r \right) \longrightarrow \frac{1}{8} \delta \psi \Delta [((\eta^{n+1})^2 + (\eta^n)^2) \times \hat{k} (\psi^{n+1} + \psi^n)] + \frac{1}{8} \delta \psi \hat{k} [((\eta^{n+1})^2 + (\eta^n)^2) \times \Delta (\psi^{n+1} + \psi^n)] + \frac{1}{4} \delta \eta (\eta^{n+1} + \eta^n) \times (\Delta \psi^{n+1} \hat{k} \psi^{n+1} + \Delta \psi^n \hat{k} \psi^n). \quad (.29)$$

Литература

- [1] V. E. Zakharov and N. N. Filonenko, ДАН СССР **170**, 1292-1295 (1966).
- [2] M. Yu. Brazhnikov et al., Письма в ЖЭТФ **74**, 12, 660-663 (2001).
- [3] M. Yu. Brazhnikov, G. V. Kolmakov and A. A. Levchenko, ЖЭТФ **122**, 3, 521-529 (2002).
- [4] S. Galtier, S. V. Nazarenko, A. C. Newell and A. Pouquet, Astrophys. J., **564** L49 (2002).
- [5] A. I. Dyachenko, A. C. Newell, A. Pushkarev and V. E. Zakharov, Physica D **57**, 96 (1992).
- [6] S. L. Musher, A. M. Rubenchik and V. E. Zakharov, Phys. Rep. **252**, 178 (1995).
- [7] V. E. Zakharov, J. Appl. Mech. Tech. Phys. **2**, 190 (1968).
- [8] V. E. Zakharov and N. N. Filonenko, J. Appl. Mech. Tech. Phys. **4**, 506-515 (1967).
- [9] V. E. Zakharov, G. Falkovich, and V. S. Lvov, *Kolmogorov Spectra of Turbulence I* (Springer-Verlag, Berlin, 1992)
- [10] V. E. Zakharov, Eur. J. Mech. B **18**, 3, 327 (1999).
- [11] Phillips, O.M., J. Fluid Mech., **4**, 426-434, (1958).
- [12] Hasselman, K., J. Fluid Mech., **12**, 481-500, (1962).
- [13] Hasselman, K., J. Fluid Mech., **15**, 273-281 and 385-398, (1963).
- [14] Forristall, G.Z., J. Geophys. Res., **86**, c9, 8075-8084, (1981).
- [15] Kahma, K.K., J. Phys. Oceanogr., **11**, 1503-1515, (1981).
- [16] Donelan, M.A., Hamilton J. and Hui W.H., Phil. Trans. R. Soc. London, **A315**, 509-562, (1985).
- [17] Donelan, M.A., In: *Physical Processes in Oceans and Lakes* (J. Imberger, Ed.), AGU Coastal and Estuarine Studies, **54**, 19-36, (1998).
- [18] Hansen et al., J. Phys. Oceanogr., **20**, 1264-1277, (1990).
- [19] Y. Toba, J. Oceanogr. Soc. Jpn. **29**, 209-220 (1973).
- [20] Phillips, O.M., J. Fluid Mech., **156**, 505-531, (1985).
- [21] Banner, M.L., J. Phys. Oceanogr., **20**, 966-984, (1990).

-
- [22] Phillips, O.M., J. Fluid Mech. **107**, 465-485, (1981).
- [23] Kitaigorodskii, S.A., Krasitskii, V.P., Zaslavskii, M.M., J. Phys. Oceanogr., **5**, 410-420, (1975).
- [24] P. A. Hwang et al., J. Phys. Oceanogr. **30**, 2753-2787 (2000).
- [25] M. Onorato, A.R. Osborne, M. Serio et al., Phys. Rev. Lett. **89**, 14, 144501 (2002).
- [26] V.E. Zakharov and M.M. Zaslavskii, Izv. Atm.Ocean.Phys. **18**, 747 (1982).
- [27] А. А. Самарский, *Введение в численные методы*, (М.: Наука, 1982).
- [28] F. Dias, P. Guyenne, V.E. Zakharov, Physics Lett. A **291**, 139-145 (2001).
- [29] V.E. Zakharov, O. A. Vasilyev and A. I. Dyachenko, Письма в ЖЭТФ **73**, 2, 68-70 (2001).
- [30] S.Y. Annenkov and V.I. Shrira, J. Fluid Mech. **449**, 341 (2001)
- [31] G. Falkovich, Phys. Fluids **6**, 1411 (1994).
- [32] A.N. Pushkarev and V.E. Zakharov, Phys. Rev. Lett. **76**, 3320 (1996).
- [33] C. Connaughton, S. Nazarenko and A. Pushkarev, Phys. Rev. E, **63**, 046306 (2001).
- [34] E. Kartasheva, in Nonlinear Waves and Weak Turbulence, A.M.S. Translations - Series 2, edited by V. Zakharov (AMS, Providence, RI, 1998), pp. 95-129.

Публикации автора по теме диссертации

- [35] A.I. Dyachenko, A.O. Korotkevich and V.E. Zakharov, *Decay of the monochromatic capillary wave*, Письма в ЖЭТФ **77**, 9, 572 (2003)
- [36] A.I. Dyachenko, A.O. Korotkevich and V.E. Zakharov, *Weak turbulence of gravity waves*, Письма в ЖЭТФ **77**, 10, 649 (2003)
- [37] A.O. Korotkevich, *On the Doppler Distortion of the sea-wave spectra*, arXiv:physics/0110009