

# Когерентное распространение оптического импульса в брэгговской плазмонной решетке

А.И.Маймистов, И.Р.Габитов, А.О.Короткевич

*Теоретически рассмотрено распространение ультракоротких импульсов (УКИ) в диэлектрической среде с периодически расположенными металлическими наночастицами. Плазмонные колебания в этих частицах описываются моделью ангармонического осциллятора с вынуждающей силой, пропорциональной напряженности электрического поля электромагнитного импульса. В приближении медленно меняющихся комплексных огибающих УКИ и поляризации среды получена система уравнений, определяющая поведение электромагнитных волн. В предположении совпадения частот несущей волны и осцилляторов и при выполнении условия брэгговского резонанса найдено решение полученных уравнений, которое отвечает уединенной волне поля УКИ и поляризации среды (брэгговскому солитону). Численное моделирование показывает формирование брэгговского солитона (из исходного гауссова импульса достаточной энергии) и нестационарной уединенной волны с уменьшающейся до нуля групповой скоростью.*

**Ключевые слова:** брэгговские солитоны, резонансная брэгговская решетка, когерентное распространение УКИ, уединенная волна.

## 1. Введение

На протяжении последних пятидесяти лет постоянное внимание исследователей привлекали оптические явления в средах с линейным показателем преломления, периодически меняющимся вдоль направления распространения электромагнитной волны. Одномерные периодические среды, в которых волновые векторы распространяющихся в противоположных направлениях волн связаны условием Брэгга, называют брэгговскими решетками [1–3]. В нелинейных средах с периодически меняющейся линейной частью показателя преломления возможно формирование локализованных волн, которые называют брэгговскими солитонами. Эти явления подробно рассмотрены в [3].

Периодически меняться может не только линейный показатель преломления. Так, в работах [4–7] была рассмотрена однородная линейная диэлектрическая среда, в которой с шагом  $a$  расположены параллельно друг другу тонкие пленки, содержащие резонансные примеси. Такая среда получила название резонансной брэгговской решетки (РБР). Результаты многих исследований оптических явлений в РБР представлены в обзоре [8]. Недавно в работе [9] с помощью численного моделирования было

показано, что в РБР существует нестационарный импульс, который выглядит как солитон с периодически меняющейся скоростью распространения – оптический зумерон; для него также получено приближенное аналитическое выражение.

Важным достижением современной оптики является создание дырчатых волокон на основе фотонного кристалла и полых волноводов [10–13]. Такие волноводы могут быть использованы для создания новых квазиодномерных нелинейных сред, если в их полую сердцевину поместить различного рода нелинейные примеси: молекулы или молекулярные агрегаты, полупроводниковые микрокристаллы или металлические наночастицы. Динамика акустических волн, генерируемых электромагнитным полем в РБР, в которой резонансными примесями являются молекулярные агрегаты, и влияние экситон-фононного и экситон-фонон-фотонного взаимодействий на параметры фотонной зонной структуры были недавно исследованы в [14].

Развитие нанотехнологии привело к созданию композитных материалов с включениями наночастиц, нанопроволочек, углеродных нанотрубок, наномангитов и фотонных кристаллов с металлическими структурными элементами. Подчеркивая искусственное происхождение таких сред, их называют метаматериалами [15, 16]. Во многих случаях метаматериалы изготавливаются в виде пленок, а их электродинамические свойства определяются плазменными колебаниями в наночастицах. Таким образом, брэгговская решетка может быть образована периодической последовательностью пленок метаматериала, погруженных в обычную диэлектрическую (линейную или нелинейную) среду.

В настоящей работе рассмотрена простая модель такой РБР, нелинейные свойства которой определяются плазмонами структурных элементов пленки.

**А.И.Маймистов.** Московский инженерно-физический институт (государственный университет), Россия, 115409 Москва, Каширское ш., 31; e-mail: maimistov@pico.mephi.ru

**И.Р.Габитов.** Институт теоретической физики имени Л.Д. Ландау, Россия, 119334 Москва, ул. Косыгина, 2; e-mail: gabitov@math.arizona.edu. Адрес в настоящее время: Department of Mathematics, University of Arizona, 617 N. Santa Rita., Tucson, AZ 85721, USA

**А.О.Короткевич.** Институт теоретической физики имени Л.Д. Ландау, Россия, 119334 Москва, ул. Косыгина, 2; e-mail: kao@itp.ac.ru

Поступила в редакцию 23 октября 2006 г., после доработки – 29 января 2007 г.

## 2. Укороченные двухволновые уравнения Максвелла

Пусть бесконечная последовательность тонких пленок поляризующегося материала расположена с шагом  $a$  нормально к оси  $x$ , вдоль которой в прямом и обратном направлениях распространяются электромагнитные волны с частотой  $\omega_0$ . Предполагается, что толщина пленки  $l_f$  меньше длины волны излучения, проходящего через такую среду. Переход от полных уравнений Максвелла к уравнениям для медленно меняющихся огибающих импульсов, распространяющихся в прямом и обратном направлениях в РБР, представлен во многих статьях и обзорах, посвященных электродинамике периодических сред [1–3]. Полагая, что полная напряженность электрического поля определяется выражением

$$E(x, t) = [\mathcal{A}(x, t) \exp(iq_0 x) + \mathcal{B}(x, t) \exp(-iq_0 x)] \times \exp(-i\omega_0 t), \quad (1)$$

и следуя работам [4–8, 14, 17], можно сразу записать систему уравнений, которая в длинноволновом приближении задает эволюцию огибающих прямой ( $\mathcal{A}(x, t)$ ) и обратной ( $\mathcal{B}(x, t)$ ) волн:

$$i \left( \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{v_g} \frac{\partial}{\partial t} \right) \mathcal{A} - \frac{q_2}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathcal{A} + \Delta q_0 \mathcal{A} = -\frac{2\pi\omega_0}{c\sqrt{\varepsilon}} \mathcal{P}, \quad (2)$$

$$i \left( \frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{v_g} \frac{\partial}{\partial t} \right) \mathcal{B} + \frac{q_2}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathcal{B} - \Delta q_0 \mathcal{B} = +\frac{2\pi\omega_0}{c\sqrt{\varepsilon}} \mathcal{P},$$

где  $\Delta q_0 = q_0 - 2\pi/a$ ;  $q_0 = \omega_0 \sqrt{\varepsilon}/c$  – волновое число в среде с диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon$ . Дисперсия групповых скоростей  $v_g$  второго порядка учитывается параметром  $q_2$ . Для определения поляризации  $\mathcal{P}$  в (2) необходимо выбрать модель, описывающую отклик тонких пленок на внешнее электромагнитное поле.

Часто диэлектрические свойства метаматериала учитываются на основе осцилляторов Лоренца для плазменных колебаний, а магнитные свойства описываются системой колебательных контуров [18–22]. Наиболее простое обобщение этой модели достигается учетом ангармонизма плазменных колебаний [23, 24] или включением нелинейной емкости в колебательный контур [25]. Здесь будет рассмотрен случай тонких пленок из немагнитного материала, макроскопическая поляризация  $P$  которого определяется уравнением [23]

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} + \omega_p^2 P + \Gamma_e \frac{\partial P}{\partial t} + \kappa P^3 = \frac{\omega_p^2}{4\pi} E, \quad (3)$$

где  $\omega_p$  – плазменная частота;  $\omega_d$  – частота размерного квантования наночастиц;  $\kappa$  – константа ангармонизма. Потери, связанные с затуханием плазменных колебаний, учитываются параметром  $\Gamma_e$ . Предполагается, что длительность электромагнитных импульсов может быть выбрана столь малой, что этими потерями можно пренебречь. Если константа  $\kappa$  равна нулю, то (3) соответствует модели Лоренца, используемой в [15, 18–21, 26–29] при изучении распространения и преломления электромагнитных волн в метаматериалах.

Поскольку электромагнитные импульсы описываются в квазигармоническом приближении (1), стандартным

путем можно получить редукцию уравнения (3) в приближении медленно меняющихся огибающих импульсов:

$$i \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial t} + (\omega_d - \omega_0) \mathcal{P} + \frac{3\kappa}{2\omega_0} |\mathcal{P}|^2 \mathcal{P} = -\frac{\omega_p^2}{8\pi\omega_0} \mathcal{E}_{tr}. \quad (4)$$

Здесь  $\omega_0$  – частота несущей волны;  $\mathcal{E}_{tr} = \mathcal{A}(x, t) + \mathcal{B}(x, t)$  – медленно меняющаяся огибающая электрического поля импульса внутри тонкой пленки, равная сумме амплитуд прямой и обратной волн.

Перейдем к безразмерным переменным, введя следующие обозначения:

$$e_1 = \frac{\mathcal{A}}{A_0}, \quad e_2 = \frac{\mathcal{B}}{A_0}, \quad p = \frac{4\pi\omega_0}{\sqrt{\varepsilon}\omega_p A_0} \mathcal{P}, \quad \tau = \frac{t}{t_0}, \quad \zeta = \frac{\omega_p}{2c} x. \quad (5)$$

Величина  $t_0 = 2\sqrt{\varepsilon}/\omega_p$  является интервалом времени, определяющим характерный масштаб в рассматриваемой задаче. При  $\delta = 2(c/\omega_p)\Delta q_0$  и в пренебрежении дисперсией групповых скоростей второго порядка системы (2), (4) примут следующий вид:

$$i \left( \frac{\partial}{\partial \zeta} + \frac{\partial}{\partial \tau} \right) e_1 + \delta e_1 = -p,$$

$$i \left( \frac{\partial}{\partial \zeta} - \frac{\partial}{\partial \tau} \right) e_2 - \delta e_2 = +p, \quad (6)$$

$$i \frac{\partial p}{\partial \tau} + \Delta p + \mu |p|^2 p = -(e_1 + e_2),$$

где  $\Delta = 2\sqrt{\varepsilon}(\omega_d - \omega_0)/\omega_p$ , а параметр  $\mu = (3\kappa\sqrt{\varepsilon}/\omega_0\omega_p) \times (\sqrt{\varepsilon}\omega_p/4\pi\omega_0)^2 A_0^2$  можно сделать каким угодно числом, выбирая нормировочную амплитуду  $A_0$ .

Систему уравнений (6) можно переписать в другом виде, если ввести функции

$$f_s = -(e_1 + e_2) \exp(-i\delta\tau), \quad f_a = (e_1 - e_2) \exp(-i\delta\tau), \quad (7)$$

$$q = p \exp(-i\delta\tau).$$

Тогда уравнения системы (6) примут тот же вид, что и уравнения, используемые в [5, 9]:

$$\frac{\partial f_s}{\partial \zeta} - \frac{\partial f_a}{\partial \tau} = 0, \quad \frac{\partial f_a}{\partial \zeta} - \frac{\partial f_s}{\partial \tau} = 2iq, \quad (8)$$

$$i \frac{\partial q}{\partial \tau} + (\Delta - \delta)q + |q|^2 q = f_s,$$

где параметр  $\mu$ , определяющий нелинейный отклик метаматериала, выбран равным единице. Исключив  $f_a$ , уравнения (8) можно переписать так:

$$\frac{\partial^2 f_s}{\partial \zeta^2} - \frac{\partial^2 f_s}{\partial \tau^2} = 2i \frac{\partial q}{\partial \tau}, \quad (9)$$

$$i \frac{\partial q}{\partial \tau} + (\Delta - \delta)q + |q|^2 q = f_s.$$

Полученная система уравнений описывает распространение УКИ в брэгговской решетке из наночастиц, в которых плазменные колебания индуцируются электрическим полем ультракоротких импульсов, распространяющихся в прямом и обратном направлениях.

### 3. Стационарные решения, описывающие уединенную волну

Стационарные решения системы (9) соответствуют бегущим волнам, огибающие которых зависят только от переменной  $\eta = \tau - \alpha\zeta$  ( $\alpha$  – произвольный параметр). Граничные условия для системы (9), имеющие вид

$$f_s(\tau, \zeta) = \frac{\partial f_s(\tau, \zeta)}{\partial \zeta} = \frac{\partial f_s(\tau, \zeta)}{\partial \tau} = q(\tau, \zeta) = 0 \quad (\text{при } \tau, \zeta \rightarrow \pm\infty), \quad (10)$$

выделяют из этого множества решений уединенные волны. Решения с ненулевыми асимптотиками и периодические волны рассматриваться не будут, поскольку не удовлетворяют граничным условиям (10). Также предполагаются выполненными условие строгого резонанса ( $\omega_d - \omega_0 = 0$ ) и условие брэгговского резонанса  $q_0 = 2\pi/a$  [4–9].

Проинтегрировав первое из уравнений (9), получим из системы (9) в резонансных условиях два обыкновенных дифференциальных уравнения:

$$\frac{\partial f_s}{\partial \eta} = i\beta q, \quad i \frac{\partial q}{\partial \eta} + |q|^2 q = f_s, \quad (11)$$

где  $\beta = 2/(\alpha^2 - 1)$ . Переход к вещественным переменным  $u$ ,  $r$ ,  $\varphi$  и  $\psi$  ( $f_s = u \exp(i\varphi)$ ,  $q = r \exp(i\psi)$ ) дает систему уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = \beta r \sin \Phi, \quad \frac{\partial r}{\partial \eta} = u \sin \Phi, \quad (12)$$

$$u \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = \beta r \cos \Phi, \quad r \frac{\partial \psi}{\partial \eta} = r^3 - u \cos \Phi, \quad (13)$$

где  $\Phi = \varphi - \psi$ . Из уравнений для вещественных амплитуд с учетом граничных условий (10) следует соотношение (первый интеграл движения)  $u^2 - \beta r^2 = \text{const} = 0$ . Уравнения для разности фаз  $\Phi$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \eta} = -r^2 + \left( \frac{u}{r} + \frac{\beta r}{u} \right) \cos \Phi \quad (14)$$

и амплитуды  $u$  (из (12)) с учетом первого интеграла движения сводятся к системе уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = \sqrt{\beta} u \sin \Phi, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} = -\beta^{-1} u^2 + 2\sqrt{\beta} \cos \Phi. \quad (15)$$

Уравнения (15) приводят ко второму интегралу движения, который с учетом граничных условий (10) можно записать как

$$\cos \Phi = (4\beta\sqrt{\beta})^{-1} u^2. \quad (16)$$

Подстановка (16) в первое уравнение (12) дает

$$\left( \frac{\partial u}{\partial \eta} \right)^2 = \beta u^2 \left[ 1 - \left( \frac{u^2}{4\beta\sqrt{\beta}} \right)^2 \right]. \quad (17)$$

Замена переменной  $u = w^{-1/2}$  сводит (17) к уравнению

$$\left( \frac{\partial w}{\partial \eta} \right)^2 = 4\beta \left[ w^2 - (4\beta\sqrt{\beta})^{-2} \right],$$

решение которого есть

$$w = (4\beta\sqrt{\beta})^{-1} \cosh [2\sqrt{\beta}(\eta - \eta_0)].$$

Постоянная интегрирования  $\eta_0$  определяет положение максимума импульса. Таким образом, решения амплитудных уравнений (12) имеют следующий вид:

$$u^2(\eta) = \frac{4\beta\sqrt{\beta}}{\cosh [2\sqrt{\beta}(\eta - \eta_0)]}, \quad (18)$$

$$r^2(\eta) = \frac{4\sqrt{\beta}}{\cosh [2\sqrt{\beta}(\eta - \eta_0)]}.$$

Кроме того, из (14) и (18) следует, что

$$\sin \Phi(\eta) = -\tanh [2\sqrt{\beta}(\eta - \eta_0)]. \quad (19)$$

С использованием (18) из уравнений (13) определяются фазы

$$\varphi(\eta) = \varphi_0 \pm \arctan \tanh [\sqrt{\beta}(\eta - \eta_0)], \quad (20)$$

$$\psi(\eta) = \psi_0 \pm 3 \arctan \tanh [\sqrt{\beta}(\eta - \eta_0)].$$

Начальные значения фаз выбираются такими, чтобы при  $\eta \rightarrow -\infty$  разность фаз определялась условием  $\Phi_0 = \varphi_0 - \psi_0 = \pi/2$ . Из уравнений (15) следует, что при малой напряженности поля электромагнитного импульса такое соотношение между начальными фазами обеспечивает рост амплитуды плазмонных осцилляций с увеличением амплитуды вынуждающей силы, т. е. амплитуды поля.

Используя (7), можно получить нормированные огибающие волн, образующих в рассматриваемой среде связанное состояние – щелевой солитон:

$$e_1(\eta) = -0.5(1 + \alpha) f_s(\eta) \exp(i\delta\tau), \quad (21)$$

$$e_2(\eta) = -0.5(1 - \alpha) f_s(\eta) \exp(i\delta\tau).$$

В линейном приближении эти волны движутся в противоположных направлениях.

### 4. Нестационарные волны

Для исследования нестационарного поведения нелинейных уединенных волн было выполнено численное решение системы уравнений (8) на отрезке ( $-10 < \zeta < 10$ ) с начальными условиями

$$e_1(-10, \tau) = e_{10} \exp\{-0.5[(\tau - 3)/1.5]^2 + i \arctan \tanh[1.5(\tau - 3)]\}, \quad e_2(10, \tau) = 0, \quad (22)$$

и  $q(-10, \tau) = q(10, \tau) = 0$  при  $\tau \rightarrow -\infty$ . Результаты расчетов показали, что стационарный импульс, отвечающий (18)–(20), распространяется, как и ожидалось, без искажений. Исходные импульсы (22) при  $e_{10} > 3$  демонстрируют сложную эволюцию. Поскольку две электромагнитные волны, идущие в противоположных направлениях, связаны с плазмонными колебаниями в брэгговской решетке, удобно представлять результаты расчетов в форме зависимости от нормированных пространственно-временных переменных огибающей плазмонной волны  $|q(\zeta, \tau)|$ . Из рис.1 видно, что входной импульс, близкий по амплитуде к брэгговскому солитону, приоб-

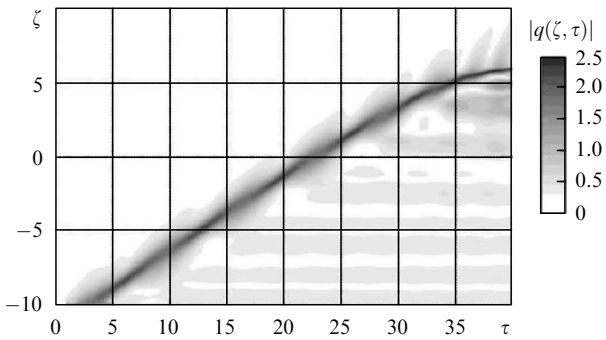


Рис.1. Нестационарный импульс плазмонных колебаний, близких по амплитуде к брэгговскому солитону ( $e_{10} = 2$ ).

рета амплитудную модуляцию и излучает линейные волны в прямом и обратном направлениях. Увеличение амплитуды входного импульса приводит к формированию брэгговского солитона (рис.2). Здесь можно выделить три стадии эволюции. На первой стадии ( $-10 < \zeta < -7$ ) происходит расщепление исходного импульса на быструю и медленную волны. Медленная волна связана с плазмонными колебаниями в решетке, возбужденными электромагнитным импульсом. На следующей стадии ( $-7 < \zeta < 0$ ) быстрая уединенная волна превращается в брэгговский солитон, а амплитуда и скорость распространения медленных волн падают. По существу они превращаются в локализованные колебания в брэгговской решетке. На третьей стадии ( $0 < \zeta < 9$ ) остается квазистационарный импульс с незначительным излучением линейной волны. Дальнейшее увеличение амплитуды исходного импульса сопровождается образованием брэг-

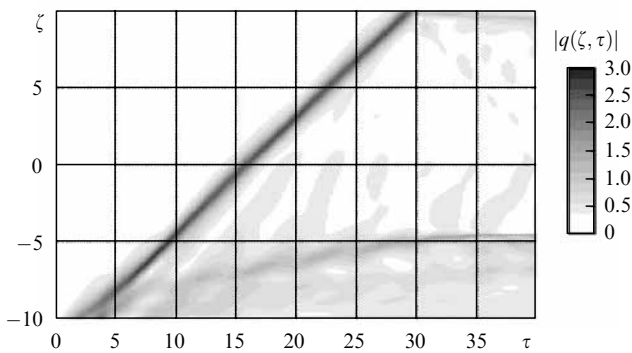


Рис.2. Нестационарный импульс плазмонных колебаний, близких по амплитуде к брэгговскому солитону ( $e_{10} = 3.5$ ).

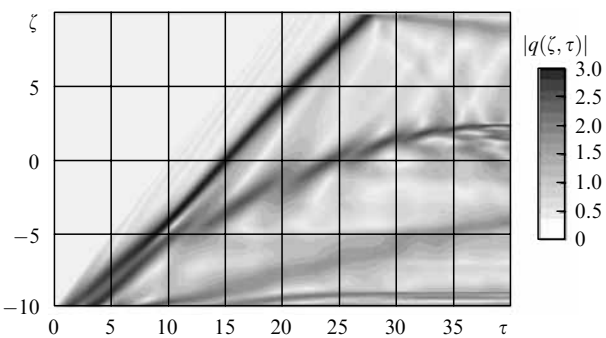


Рис.3. Распространение нестационарного импульса плазмонных колебаний ( $e_{10} = 4$ ), демонстрирующее замедление электромагнитной волны.

говского солитона и нестационарного импульса, скорость распространения которого уменьшается почти до нуля. На рис.3 видно, как медленная уединенная волна останавливается около точки  $\zeta \approx 0$ .

### 5. Заключение

Рассмотрено распространение УКИ в брэгговской решетке, которая образована тонкими пленками из металлических наночастиц, погруженных в диэлектрическую среду-матрицу. Плазмонные колебания в этих частицах описываются моделью ангармонического осциллятора с вынуждающей силой, пропорциональной напряженности электрического поля электромагнитного импульса [23]. Предполагалось, что матрица изготовлена из линейного недиспергирующего материала. В длинноволновом приближении получены уравнения для медленно меняющихся огибающих УКИ, распространяющихся в противоположных направлениях, и для нелинейной поляризации тонких пленок. Если поля слабые, так что нелинейные свойства среды незначительны, можно найти спектр электромагнитных волн в такой системе и убедиться, что он содержит запрещенные зоны, как и положено для одномерного фотонного кристалла.

Наиболее ярко нелинейные эффекты проявляются в условиях резонансного взаимодействия излучения со средой. Вследствие разброса размеров наночастиц (в общем случае – любых других структурных единиц метаматериала) собственные частоты осцилляторов различаются. Если необходимо учитывать этот эффект неоднородного уширения резонансной линии, то уравнения (9) следует немного изменить:

$$\frac{\partial^2 f_s}{\partial \zeta^2} - \frac{\partial^2 f_s}{\partial \tau^2} = -2i \frac{\partial \langle q \rangle}{\partial \tau}, \quad i \frac{\partial q}{\partial \tau} + (\Delta - \delta)q + |q|^2 q = f_s, \quad (23)$$

где угловыми скобками указано усреднение нормированной амплитуды поляризации по всем частотным расстройкам в пределах неоднородно уширенной резонансной линии. Отклонение от точного брэгговского резонанса может иметь место также из-за флуктуаций шага решетки. Следовательно, усреднение в (23) предполагает усреднение и по брэгговским отстройкам. Роль неоднородного уширения существенна для эффектов типа фотонного эха и свободного распада индукции [30]. Ограничившись рассмотрением только распространения нелинейных уединенных волн, можно для упрощения принять, что неоднородного уширения нет вовсе. Именно в этом случае, в предположении выполнения условия брэгговского резонанса и совпадения частот несущей волны и частот осцилляторов, здесь получено выражение для огибающих уединенной волны поля УКИ и поляризации. Это решение описывает распространение связанной пары прямой и обратной волн электромагнитного излучения. Поляризация повторяет огибающую стационарного УКИ. Мгновенные значения фазы каждого из импульсов меняются внутри УКИ, что означает медленное изменение частоты несущей волны.

Стационарные УКИ образуют непрерывное семейство импульсов, которое нумеруется положительным параметром  $\beta = 2/(\alpha^2 - 1)$ , определяющим как ширину импульса, так и его групповую скорость. Если выразить независимую переменную  $\eta$  в физических переменных ( $\eta = (\omega_p/2\sqrt{\epsilon})(t - \alpha x\sqrt{\epsilon}/c)$ ), то из полученной формулы

видно, что все члены семейства стационарных УКИ распространяются медленнее линейной волны в матрице. Таким образом, при распаде начального нестационарного импульса можно ожидать образования медленных брэгговских солитонов. К такому же эффекту может привести либо столкновение двух стационарных импульсов, либо взаимодействие стационарного УКИ со слабой линейной волной. Численное решение соответствующей системы уравнений показало, что при распаде начального импульса кроме солитона формируется медленная нестационарная волна, которая, в конечном счете, останавливается. Это явление связано с возбуждением локализованных мод плазмонных колебаний в тонких пленках, образующих решетку. Если учесть взаимодействие между пленками, то можно ожидать, что медленная плазмонная волна эволюционирует в нелинейную волну, скорость распространения которой будет определяться взаимодействием между пленками. Само уравнение для огибающей поляризации (4) примет вид нелинейного уравнения Шредингера с вынуждающей силой. В будущем изучить этот процесс предполагается более строго.

Нам доставляет удовольствие поблагодарить наших коллег А.М.Башарова, Б.И.Манцызова и А.А.Заболотского за высказанные в разное время замечания и полезные дискуссии, касающиеся рассмотренных здесь проблем. Один из авторов (А.О.К.) благодарит М.Г.Степанова и Р.А.Индика за результативные дискуссии, проходившие в плодотворной рабочей атмосфере Департамента математики Университета Аризоны. Работа частично поддерживалась РФФИ (грант № 06-02-16406, 06-01-0065), NSF (грант № DMS-0509589) и грантом штата Аризона (Proposition 301). Поддержка оказана также программой «Нелинейная динамика и солитоны» Президиума РАН, грантом Президента РФ поддержки Ведущих научных школ № НШ-7550.2006.2, грантом Президента РФ для молодых ученых МК-1055.2005.2 (А.О.К.)

1. De Sterke C.M., Sipe J.E. *Progr. Optics*, **33**, 203 (1994).
2. Kashyap R. *Fiber Bragg Gratings* (San Diego: Academic Press, 1999).

3. Кившарь Ю.С., Агравал Г.П. *Оптические солитоны. От волоконных световодов к фотонным кристаллам* (М.: Физматлит, 2005).
4. Манцызов Б.И., Кузьмин Р.Н. *Письма в ЖЭТФ*, **10**, 857 (1984).
5. Манцызов Б.И., Кузьмин Р.Н. *ЖЭТФ*, **91**, 65 (1986).
6. Kozhekin A., Kurizki G. *Phys. Rev. Lett.*, **74**, 5020 (1995).
7. Opatrny T., Malomed B.A., Kurizki G. *Phys. Rev. E*, **60**, 6137 (1999).
8. Kurizki G., Kozhekin A.E., Opatrny T., Malomed B.A. *Progr. Optics* **42**, 93 (2001).
9. Манцызов Б.И. *Письма в ЖЭТФ*, **82**, 284 (2005).
10. Knight J.C., Birks T.A., Cregan R.F., Russell P.St.J., de Sandro J.-P. *Opt. Mater.*, **11**, 143 (1998).
11. Желтиков А.М. *УФН*, **170**, 1203 (2000).
12. Желтиков А.М. *УФН*, **172**, 743 (2002); **174**, 73 (2004).
13. Russell Ph. *Science*, **299**, 358 (2003).
14. Заболотский А.А. *ЖЭТФ*, **129**, 435 (2006).
15. Smith D.R., Pendry J.B. *J. Opt. Soc. Am. B*, **23**, 391 (2006).
16. Kildishev A.V., Cai W., Chettiar U. K., Yuan H.-K., Sarychev A.K., Drachev V.P., Shalaev V.M. *J. Opt. Soc. Am. B*, **23**, 423 (2006).
17. Maimistov A.I. arXiv. nlin.PS/0607012.
18. Pendry J.B., Holden A.J., Robbins D.J., Stewart W.J. *IEEE Trans. Microwave Theory Techniques*, **47**, 2075 (1999).
19. Smith D. R., Schultz S., Markos P., Soukoulis C.M. *Phys. Rev. B*, **65**, 195104 (2002).
20. Katsarakis N., Koschny T., Kafesaki M., Economou, E.N., Soukoulis C.M. *Appl. Phys. Lett.*, **84**, 2943 (2004).
21. Markos P. Soukoulis C.M. *Phys. Rev. E*, **65**, 036622 (2002).
22. Woodley J.F., Wheeler M.S., Mojahedi M. *Phys. Rev. E*, **71**, 066605 (2005).
23. Gabitov I.R., Indik R.A., Litchinitser N.M., Maimistov A.I., Shalaev V.M., Soneson J.E. *J. Opt. Soc. Am. B*, **23**, 535 (2006).
24. Litchinitser N.M., Gabitov I.R., Maimistov A.I., Shalaev V.M. arXiv. physics/0607177.
25. Zharov A.A., Shadrivov I.V., Kivshar Yu.S. *Phys. Rev. Lett.*, **91**, 037401 (2003).
26. Ziolkowski R.W., Heyman E. *Phys. Rev. B*, **64**, 056625 (2001).
27. Ziolkowski R.W. *Opt. Express*, **11**, 662 (2003).
28. Pendry J.B., Holden A.J., Stewart W.J., Youngs I. *Phys. Rev. Lett.*, **76**, 4773 (1996).
29. Pendry J.B., Holden A.J., Robbins D.J., Stewart W.J. *J. Phys.: Condens. Matter*, **10**, 4785 (1998).
30. *Нелинейная спектроскопия* (под ред. Н. Бломбергена) (М.: Мир, 1979).