Лекция 1
$O(2)$-модель и переход Березинского—Костерлица—Таулеса

В этих лекциях мы часто будем рассматривать модели в двумерном пространстве-времени с действием

$$S[\boldsymbol{n}] = \frac{1}{2g}\int d^2x\,(\partial_\mu \boldsymbol{n})^2, \qquad \boldsymbol{n}^2 \equiv \sum_{i=1}^N n_i^2 = 1, \tag{1}$$

которые называются моделями $\boldsymbol{n}$-поля или $O(N)$-моделями. Эти модели обладают явной $O(N)$-симметрией, соответствующей вращениям сферы. Они принадлежат широкому классу сигма-моделей, то есть моделей, у которых поля лежат на многообразиях.

Сейчас мы рассмотрим простейшую модель из этой серии — $O(2)$-модель. Она элементарно линеаризуется. Положим

$$n_1 = \cos\varphi, \qquad n_2 = \sin\varphi.$$

Тогда

$$S[\varphi] = \frac{1}{2g}\int d^2x\,(\partial_\mu\varphi)^2, \tag{2}$$

$$\varphi(x) \sim \varphi(x) + 2\pi. \tag{3}$$

Последняя строчка означает, что мы считаем значения поля φ и $\varphi + 2\pi$ эквивалентными.

Казалось бы, мы имеем безмассовое поле с корреляционными функциями совместных с (3) операторов, спадающими степенным образом:

$$\langle e^{im\varphi(x')} e^{in\varphi(x)}\rangle \sim \left(-(x'-x)^2\right)^{\frac{g}{4\pi}mn}, \qquad m,n\in\mathbb{Z}. \tag{4}$$

На самом деле это совсем не так, и результат существенно зависит от значения константы g. Чтобы в этом убедиться, рассмотрим классические решения уравнений поля

$$\nabla^2\varphi = 0 \tag{5}$$

в эвклидовом пространстве. Оно допускает решения вида

$$\varphi_{\vec q\vec x}(x) = \sum_{a=1}^n q_a \operatorname{Im}\log(z-z_a) = \sum_{a=1}^n \frac{q_a}{2i}\log\frac{z-z_a}{\bar z - \bar z_a}, \qquad q_a\in\mathbb{Z}, \tag{6}$$

где

$$z = x^1 + ix^2 = x^1 - x^0,$$
$$\bar z = x^1 - ix^2 = x^1 + x^0.$$

Эти решения, хотя и имеют особенности (неопределенные значения) в точках $z = z_a$, очень важны. Они представляют собой решения с n вихрями в точках z_a с завихренностями q_a. В простейшем случае $n = 1$ в радиальных координатах $z - z_1 = re^{i\theta}$ решение имеет вид

$$\varphi_{q_1x_1}(x) = q_1\theta.$$

Важно отметить, что решения (6) удовлетворяют уравнению (5) даже в точках $x = x_a$. Действительно,

$$\partial_\mu\partial^\mu\frac{1}{2i}\log\frac{z}{\bar z} = \partial_\mu\partial^\mu \operatorname{arctg}\frac{x^2}{x^1} = -\epsilon_{\mu\nu}\partial_\mu\frac{x^\nu}{r^2} = \epsilon^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu\log\frac{1}{r}.$$

Тогда для любой гладкой, ограниченной и достаточно быстро спадающей функции $\varphi(x)$ мы имеем

$$\int d^2x\,\varphi(x)\partial_\mu\partial^\mu\frac{1}{2i}\log\frac{z}{\bar z} = \int d^2x\,(\epsilon^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu\varphi(x))\log\frac{1}{r} = 0,$$

так как интеграл от логарифма в точке $x = 0$ сходится. Отсюда немедленно получаем

$$\int d^2x\,\partial^\mu\varphi\,\partial_\mu\varphi_{\vec q\vec x} = 0. \tag{7}$$

Вычислим значение действия на вихревых решениях (6):

$$S[\varphi_{\vec{q}\vec{x}}] = \frac{2}{g}\int d^2x\,\partial\varphi_{\vec{q}\vec{x}}\,\bar\partial\varphi_{\vec{q}\vec{x}} = \frac{1}{2g}\int d^2x\sum_{a,b}\frac{q_aq_b}{(z-z_a)(\bar z-\bar z_b)}$$
$$= \frac{1}{2g}\left(\sum_a q_a^2\int\frac{d^2x}{|z-z_a|^2} + \sum_{a<b}q_aq_b\int d^2x\,\frac{(z-z_a)(\bar z-\bar z_b)+(\bar z-\bar z_a)(z-z_b)}{|z-z_a|^2|z-z_b|^2}\right).$$

Первый интеграл берется просто, но расходится и на больших и на малых масштабах:

$$\int\frac{d^2x}{|z-z_a|^2}\simeq 2\pi\int_{r_0}^R\frac{dr}{r} = 2\pi\log\frac{R}{r_0},$$

где R и r_0 — параметры инфракрасного и ультрафиолетового обрезания соответственно. Второй интеграл расходится только на больших масштабах. Имеем

$$\int d^2x\,\frac{(z-z_a)(\bar z-\bar z_b)+(\bar z-\bar z_a)(z-z_b)}{|z-z_a|^2|z-z_b|^2} = 2\pi\log\frac{R^2}{|z_a-z_b|^2}.$$

Подставляя эти формулы в интеграл для действия, получим

$$S[\varphi_{\vec{q}\vec{x}}] = \frac{1}{2g}\left(\pi\sum_a q_a^2\log\frac{R^2}{r_0^2} + 2\pi\sum_{a<b}q_aq_b\log\frac{R^2}{|z_a-z_b|^2}\right) \tag{8}$$
$$= \frac{\pi}{2g}\left(\sum_a q_a\right)^2\log R^2 - \frac{\pi}{2g}\sum_a q_a^2\log r_0^2 + \frac{1}{2g}\sum_{a<b}q_aq_b\,2\pi\log\frac{1}{|z_a-z_b|^2}. \tag{9}$$

Первый член стремится к бесконечности с ростом размера системы, если выражение в скобках не равно нулю. Это значит, что в большой системе должно выполняться условие нейтральности

$$\sum_a q_a = 0. \tag{10}$$

Второе слагаемое в (9) ультрафиолетово расходится. Если мы регуляризуем теорию каким-либо естественным способом, например, рассмотрим ее как предел теории с действием

$$S[\phi] = \int d^2x\,\left(|\partial_\mu\phi|^2 - \frac{\lambda}{4}(|\phi|^2-\phi_0^2)^2\right),$$

это слагаемое будет конечным и будет зависеть от структуры кора вихрей. Ниже мы увидим, что значение r_0 не влияет существенно на результат.

Давайте теперь попробуем написать (эвклидов) функциональный интеграл в виде

$$Z[J] = \sum_{n=0}^\infty\frac{r_0^{-2n}}{n!}\sum_{\substack{q_1,\dots,q_n\\ q_1+\dots+q_n=0}}\int d^2x_1\cdots d^2x_n\int D\varphi\,e^{-S[\varphi+\varphi_{\vec{q}\vec{x}}]-(J,\varphi+\varphi_{\vec{q}\vec{x}})}, \tag{11}$$

где интеграл берется теперь по регулярным полям φ без всякого отождествления. Множитель $1/n!$ происходит от того, что решение (9) не меняется при перестановках $z_a\leftrightarrow z_b$, $q_a\leftrightarrow q_b$. Таким образом, суммирование $\sum_{q_1,\dots,q_n}\int d^2x_1\cdots d^2x_n$ учитывает одни и те же конфигурации $n!$ раз. Множитель r_0^{-2n} добавлен для того, чтобы сделать интеграл безразмерным. Можно себе представить, что вихри могут занимать не любые позиции, а располагаются в ячейках размера $\sim r_0$.

Вычислим действие на фоне многовихревого решения:

$$S[\varphi+\varphi_{\vec{q}\vec{x}}] = S[\varphi_{\vec{q}\vec{x}}] + S[\varphi] + \frac{1}{g}\int d^2x\,\partial^\mu\varphi\,\partial_\mu\varphi_{\vec{q}\vec{x}}.$$

Первый член дается выражением (9). Интеграл в последнем члене равен нулю в силу (7). Отсюда

$$Z[J] = Z_0[J]\sum_{n=0}^\infty\frac{1}{n!}\sum_{\substack{q_1,\dots,q_n\\ q_1+\dots+q_n=0}} r_0^{\frac{\pi}{g}\sum q_a^2-2n}\int d^2x_1\cdots d^2x_n\prod_{a<b}|z_a-z_b|^{2\frac{\pi}{g}q_aq_b}\,e^{-(J,\varphi_{\vec{q}\vec{x}})}, \tag{12}$$

$$Z_0[J] = \int D\varphi\, e^{-S[\varphi]-(J,\varphi)}. \tag{13}$$

Из отождествления (3) следует, что мы можем рассматривать только источники J вида

$$J_{\vec{J}\vec{y}}(x) = -i\sum_{j=1}^{k} J_j \delta(x-y_j), \qquad J_i \in \mathbb{Z}. \tag{14}$$

Тогда

$$Z[J_{\vec{J}\vec{y}}] = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\sum_{\substack{q_1,\dots,q_n\\ q_1+\dots+q_n=0}} r_0^{\frac{\pi}{g}\sum_a q_a^2+\frac{g}{4\pi}\sum_j J_j^2-2n}\int d^2x_1\cdots d^2x_n \prod_{a<b}|z_a-z_b|^{\frac{2\pi}{g}q_a q_b}$$
$$\times\prod_{a,j}\left(\frac{w_j-z_a}{\bar{w}_j+\bar{z}_a}\right)^{q_a J_j/2}\prod_{j<j'}|w_j-w_{j'}|^{\frac{g}{2\pi}J_j J_{j'}}, \tag{15}$$

где $w_j = y_j^1 + i y_j^2$.

Мы получили нечто вроде статистической суммы плазмы, частицы которой могут иметь любые заряды (причем энергия заряженного состояния пропорциональна квадрату заряда). Источник частиц φ сложно связан с частицами плазмы, однако, в принципе, можно ожидать, что при малых константах связи g («низкие температуры») плазма рекомбинирует и корреляционные функции остаются степенными, в то время как при больших g («высокой температуре») имеется дебаевское экранирование, корреляционные функции спадают экспоненциально и теория массивна. Такой переход по константе связи называется *переходом Березинского—Костерлица—Таулеса (БКТ)*.

Конечно, мы не можем просуммировать весь ряд по теории возмущений. Тем не менее, можно точно определить точку перехода БКТ. Действительно, плазма не образуется, когда вихри удерживаются в конечном объеме, то есть все интегралы, кроме одного (по «центру масс»), инфракрасно сходятся при больших n. Кроме того, в силу условия нейтральности

$$\sum_{a<b} q_a q_b = \frac{1}{2}\sum_{a\neq b} q_a q_b = \frac{1}{2}\left(\sum_a q_a\right)^2 - \frac{1}{2}\sum_a q_a^2 = -\frac{1}{2}\sum_a q_a^2 \le -\frac{n}{2}.$$

Отсюда находим, что все интегралы сходятся при

$$2\frac{\pi}{g}\left(-\frac{n}{2}\right) + 2(n-1) < 0.$$

При больших n получаем, что безмассовой фазе отвечают $g < g_{\text{БКТ}}$, причем

$$g_{\text{БКТ}} = \frac{\pi}{2}. \tag{16}$$

При $g > g_{\text{БКТ}}$ вихри не удерживаются и система ведет себя как плазма с конечной корреляционной длиной. Следует отметить, что ответ не зависит от параметра ультрафиолетового обрезания r_0, так что фазовый переход имеет место при сколь угодно малом коре вихря. Заметим, что условие (16) как раз является условием, при котором исчезает размерный множитель $r_0^{\frac{\pi}{g}\sum q_a^2-2n}$ для системы простых вихрей $q=\pm1$. Поскольку в теории нет никаких размерных параметров, кроме r_0, корреляционная длина пропорциональна r_0, и, таким образом, даже у «идеальной» $O(2)$-модели нет никаких шансов избежать фазового перехода. Качественно это можно объяснить тем, что малый статистический вес вихревых состояний с лихвой перекрывается большим объемом фазового пространства.

Выражение (15) можно переписать по-другому, введя новое поле $\phi(x)$. Обратим внимание, что

$$\nabla^2\frac{1}{4\pi}\log|x|^2 = \delta(x). \tag{17}$$

и потому $\log\frac{R^2}{|x|^2}$ представляет собой пропагатор свободного безмассового бозонного поля:

$$S_0[\phi] = \frac{1}{8\pi}\int d^2x\,(\partial_\mu\phi)^2. \tag{18}$$

Поскольку уравнения движения в этой модели имеют вид

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi = 0,$$

можно ввести дуальное поле $\tilde\phi$ условием

$$\partial_\mu \tilde\phi = \epsilon_{\mu\nu}\,\partial^\nu \phi, \qquad \epsilon_{01} = -\epsilon_{10} = 1, \tag{19m}$$

в пространстве Минковского, или

$$\partial_\mu \tilde\phi = -i\epsilon_{\mu\nu}\,\partial^\nu \phi, \qquad \epsilon_{12} = -\epsilon_{21} = 1, \tag{19e}$$

в эвклидовом пространстве, или

$$\partial\tilde\phi = \partial\phi, \qquad \bar\partial\tilde\phi = -\bar\partial\phi. \tag{20}$$

Хотя эти формулы имеют буквальный смысл лишь на решениях уравнений движения, легко показать, что и на корреляционных функциях эти равенства не лишены смысла. Действительно, введем поля $\phi_R(z)$ и $\phi_L(\bar z)$ уравнениями

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \phi_R(z) + \phi_L(\bar z), \\ \tilde\phi(x) &= \phi_R(z) - \phi_L(\bar z). \end{aligned} \tag{21}$$

Тогда корреляционные функции

$$\langle \phi_R(z)\phi_R(z')\rangle_0 = \log\frac{R}{z-z'}, \qquad \langle \phi_L(\bar z)\phi_L(\bar z')\rangle_0 = \log\frac{R}{\bar z-\bar z'}, \qquad \langle \phi_R(z)\phi_L(\bar z')\rangle_0 = 0 \tag{22}$$

согласованы с теорией.

Далее нам понадобятся корреляционные функции экспоненциальных операторов. Поскольку эти корреляционные функции содержат бесконечные множители, мы попросту исключим их, определив перенормированные экспоненциальные операторы:

$$e^{i\alpha\phi_{R,L}} = r_0^{\alpha^2/2}\,{:}e^{i\alpha\phi_{R,L}}{:}\,, \qquad e^{i\alpha\phi} = r_0^{\alpha^2}\,{:}e^{i\alpha\phi}{:}\,, \qquad e^{i\alpha\tilde\phi} = r_0^{\alpha^2}\,{:}e^{i\alpha\tilde\phi}{:}\,. \tag{23}$$

Тогда экспоненциальные операторы ${:}e^{(\cdots)}{:}$ уже не безразмерные и имеют размерности $d = \alpha^2/2$ для киральных операторов и α^2 для экспонент от полей $\phi, \tilde\phi$. Эти размерности совпадают с *масштабными размерностями* операторов. По определению, мы говорим, что имеется набор операторов O_i с масштабными размерностями d_i, если его корреляционные функции инвариантны по отношению к заменам

$$O_i(x) \to s^{d_i} O_i(sx)$$

во всех операторах одновременно.

Корреляционные функции операторных экспонент в такой модели равны

$$\begin{aligned} \langle {:}e^{i\alpha_1\phi_R(z_1)}{:}\cdots{:}e^{i\alpha_n\phi_R(z_n)}{:}\rangle_0 &= R^{-\frac12\left(\sum_a \alpha_a\right)^2} \prod_{a<b}(z_a - z_b)^{\alpha_a\alpha_b}, \\ \langle {:}e^{i\alpha_1\phi_L(\bar z_1)}{:}\cdots{:}e^{i\alpha_n\phi_L(\bar z_n)}{:}\rangle_0 &= R^{-\frac12\left(\sum_a \alpha_a\right)^2} \prod_{a<b}(\bar z_a - \bar z_b)^{\alpha_a\alpha_b}. \end{aligned} \tag{24}$$

Более подробно перенормировка изложена в конце лекции в Пояснении. В пределе $R \to \infty$ правые части не обращаются в нуль при условии

$$\sum_{a=1}^n \alpha_a = 0. \tag{25}$$

Итак, имеем

$$\left\langle \prod_{j=1}^k e^{i\beta_j\tilde\phi(y_j)} \prod_{a=1}^n e^{i\alpha_a\phi(x_a)} \right\rangle_0$$
$$= r_0^{\sum_a \alpha_a^2 + \sum_j \beta_j^2} \prod_{a<b}|z_a - z_b|^{2\alpha_a\alpha_b} \prod_{j<j'}|w_j - w_{j'}|^{2\beta_j\beta_{j'}} \prod_{a,j}\left(\frac{w_j - z_a}{\bar w_j - \bar z_a}\right)^{\alpha_a\beta_j} \times \begin{cases} 1, & \sum\alpha_a = \sum\beta_j = 0; \\ 0 & \text{в пр. сл.} \end{cases} \tag{26}$$

Это выражение в точности совпадает с подынтегральным выражением в (15) при

$$\alpha_a = \sqrt{\frac{\pi}{g}}\, q_a, \qquad \beta_j = \sqrt{\frac{g}{4\pi}}\, J_j. \tag{27}$$

Отсюда получаем

$$Z[J_{\vec{J}\vec{y}}] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{\substack{q_1,\dots,q_n \\ q_1+\dots+q_n=0}} r_0^{-2n} \int d^2x_1 \cdots d^2x_n \left\langle \prod_{j=1}^{k} e^{i\sqrt{\frac{g}{4\pi}}\, J_j \tilde{\phi}(y_j)} \prod_{a=1}^{n} e^{i\sqrt{\frac{\pi}{g}}\, q_a \phi(x_a)} \right\rangle_0. \tag{28}$$

Заметим, что выражение под знаком интеграла замечательным образом симметрично относительно замен

$$g \leftrightarrow (2\pi)^2 g^{-1}, \qquad k \leftrightarrow n, \qquad q_a \leftrightarrow J_j, \qquad \phi(x) \leftrightarrow \tilde{\phi}(x).$$

Более того, лагранжиан свободного поля пишется одинаково через поля ϕ и $\tilde{\phi}$. Поэтому мы можем отождествить

$$\varphi(x) = \sqrt{\frac{g}{4\pi}} \tilde{\phi}(x). \tag{29}$$

Сделаем важное приближение, не меняющее свойств фазового перехода. Будем пренебрегать вихрями с $|q| > 1$, поскольку их вклад падает с уменьшением r_0 быстрее вклада $|q|$ штук вихрей заряда 1. Тогда производящий функционал можно переписать в виде

$$\begin{aligned}
Z[J_{\vec{J}\vec{y}}] &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r_0^{-4n}}{(2n)!} \int d^2x_1 \cdots d^2x_{2n} \sum_{q_1,\dots,q_{2n}=\pm 1} \left\langle \prod_{j=1}^{k} e^{i\sqrt{\frac{g}{4\pi}}\, J_j \tilde{\phi}(y_j)} \prod_{a=1}^{2n} e^{iq_a\sqrt{\frac{\pi}{g}} \phi(x_a)} \right\rangle_0 \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r_0^{-4n}}{(2n)!} \int d^2x_1 \cdots d^2x_{2n} \left\langle \prod_{j=1}^{k} e^{i\sqrt{\frac{g}{4\pi}}\, J_j \tilde{\phi}(y_j)} \prod_{a=1}^{2n} \left(e^{i\sqrt{\frac{\pi}{g}} \phi(x_a)} + e^{-i\sqrt{\frac{\pi}{g}} \phi(x_a)} \right) \right\rangle_0 \\
&= \left\langle \prod_{j=1}^{k} e^{i\sqrt{\frac{g}{4\pi}}\, J_j \tilde{\phi}(y_j)} \exp\left(2r_0^{-2} \int d^2x\, \cos\sqrt{\frac{\pi}{g}} \phi(x) \right) \right\rangle_0 \\
&= \int D\phi\, e^{-S_{\mathrm{SG}}[\phi]} \prod_{j=1}^{k} e^{i\sqrt{\frac{g}{4\pi}}\, J_j \tilde{\phi}(y_j)},
\end{aligned} \tag{30}$$

где

$$S_{\mathrm{SG}}[\phi] = \int d^2x \left(\frac{(\partial_\mu \phi)^2}{8\pi} - \mu :\!\cos\beta\phi\!: \right) \tag{31}$$

— действие для модели синус-Гордона с параметрами

$$\beta = \sqrt{\frac{\pi}{g}}, \qquad \mu = 2r_0^{\frac{\pi}{g}-2}. \tag{32}$$

Действие мы переписали через перенормированные экспоненты. В дальнейшем мы будем большей частью опускать значки $:\cdots:$ и понимать под экспонентами именно перенормированные экспоненты.

Более подробно мы изучим модель синус-Гордона в следующий раз, а пока введем несколько важных понятий. Будем рассматривать модель синус-Гордона как возмущение свободного безмассового бозона. Тогда масштабная размерность оператора возмущения будет равна

$$d_{\mathrm{pert}} = \beta^2.$$

Когда $d_{\mathrm{pert}} < 2$ возмущение называется *релевантным*. Оно существенно меняет поведение системы на больших масштабах и не меняет на малых. Когда $d_{\mathrm{pert}} > 2$ возмущение называется *иррелевантным* и не меняет качественно инфракрасного поведения. Случай $d_{\mathrm{pert}} = 2$ называется *маргинальным*. В случае модели синус-Гордона именно он соответствует точке перехода БКТ.

Пояснение

Это пояснение касается определения экспоненциальных операторов в теории свободного скалярного поля. Для простоты мы ограничимся функционалами от поля $\varphi(z) \equiv \varphi_R(z)$. Для этого поля можно записать разложение

$$\varphi(z) = Q - iP\log z + \sum_{k\neq 0} \frac{a_k}{ik} z^{-k}, \tag{33}$$

где эрмитовы операторы P, Q и операторы рождения-уничтожения $a_k = a^+_{-k}$ удовлетворяют соотношениям

$$[P, Q] = -i, \qquad [a_k, a_l] = k\delta_{k+l,0}. \tag{34}$$

Если определить вакуум $|0\rangle$ условиями

$$P|0\rangle = a_k|0\rangle = 0 \quad (k > 0), \tag{35}$$

то нетрудно проверить, что

$$\langle\varphi(z')\varphi(z)\rangle = \langle Q^2\rangle + \langle\varphi(z')\varphi(z)\rangle_* = \langle Q^2\rangle + \log\frac{1}{z'-z}. \tag{36}$$

Неопределенное выражение $\langle Q^2\rangle$ можно отождествить с инфракрасным членом $\log R$ в (22). Также легко видеть, что стандартное нормальное упорядочение, которое ставит P справа от Q и a_k $(k > 0)$ справа от a_{-k}, отвечает условию

$$\varphi(z_1)\varphi(z_2) = {:}\varphi(z_1)\varphi(z_2){:} + \langle\varphi(z_1)\varphi(z_2)\rangle_*.$$

Более общо, нормальное упорядочение может быть задано рекурсионным соотношением

$${:}\varphi(z_1)\cdots\varphi(z_n){:}\,\varphi(z) = {:}\varphi(z_1)\cdots\varphi(z_n)\varphi(z){:} + \sum_{i=1}^{n} {:}\varphi(z_1)\overset{\hat{i}}{\cdots}\varphi(z_n){:}\,\langle\varphi(z_i)\varphi(z)\rangle_* \tag{37}$$

с начальным условии

$${:}1{:} = 1. \tag{38}$$

Здесь индекс $\hat{i}$ над многоточием означает, что из нормального произведения исключен i-тый множитель. Отсюда нетрудно вывести, что

$$\begin{aligned}
&{:}\varphi(z_1)\cdots\varphi(z_m){:}\;{:}\varphi(w_1)\cdots\varphi(w_n){:} = \\
&\quad = \sum_{k=0}^{\min(m,n)} \sum_{\substack{1\le i_1<\cdots<i_k\le m\\ 1\le j_1,\ldots,j_k\le n}} {:}\varphi(z_1)\overset{\hat{i}_1\ldots\hat{i}_k}{\cdots}\varphi(z_m)\varphi(w_1)\overset{\hat{j}_1\ldots\hat{j}_k}{\cdots}\varphi(w_n){:}\prod_{l=1}^{k}\langle\varphi(z_{i_l})\varphi(w_{j_l})\rangle_*.
\end{aligned} \tag{39}$$

Вернемся к операторным экспонентам $e^{i\alpha\varphi(z)}$. Операторные произведения формальных экспонент

$$e^{i\alpha_1\varphi(z_1)}e^{i\alpha_2\varphi(z_2)} = e^{-\frac12\alpha_1\alpha_2[\varphi(z_1),\varphi(z_2)]}e^{i\alpha_1\varphi(z_1)+i\alpha_2\varphi(z_2)} \tag{40}$$

довольно плохо определены, так как содержат плохо определенный коммутатор. Корреляционные функции формальных экспонент

$$\langle e^{i\alpha_1\varphi(z_1)}\cdots e^{i\alpha_N\varphi(z_N)}\rangle = \left(\frac{r_0}{R}\right)^{\frac12\sum_i\alpha_i^2}\prod_{i<j}\left(\frac{z_i-z_j}{R}\right)^{\alpha_i\alpha_j} \tag{41}$$

содержат ультрафиолетовые расходимости. Таким образом, формальные экспоненты плохо определены.

Нормальные экспоненты хорошо определены, все их корреляторы ультрафиолетово конечны. Можно проверить, что

$$\langle\,{:}e^{i\alpha_1\varphi(z_1)+\cdots+i\alpha_n\varphi(z_n)}{:}\,\rangle = \langle e^{i(\alpha_1+\cdots+\alpha_N)Q}\rangle = R^{-\frac12(\sum\alpha_i)^2}. \tag{42}$$

Операторные произведения нормальных экспонент имеют вид

$$:e^{i\alpha_1\varphi(z_1)}:\,:e^{i\alpha_2\varphi(z_2)}: = (z_1 - z_2)^{\alpha_1\alpha_2}\,:e^{i\alpha_1\varphi(z_1)+i\alpha_2\varphi(z_2)}:. \tag{43}$$

Отсюда нетрудно найти корреляционные функции

$$\langle\, :e^{i\alpha_1\varphi(z_1)}: \cdots :e^{i\alpha_N\varphi(z_N)}:\,\rangle = R^{-\frac{1}{2}(\sum\alpha_i)^2}\prod_{i<j}(z_i - z_j)^{\alpha_i\alpha_j}. \tag{44}$$

Сравнивая это с (41), мы видим, что

$$e^{i\alpha\varphi(z)} = r_0^{\alpha^2/2}\,:e^{i\alpha\varphi(z)}:,$$

то есть нормальные экспоненты, зависящие от одного поля $\varphi(z)$, представляют собой не что иное как перенормированные версии полных операторных экспонент, определенные в (23). Вне этого пояснения, чтобы не загромождать формулы, мы будем опускать знак нормального произведения.

Выражение (44) явно содержит инфракрасную обрезку R, но имеет хороший предел при $R \to \infty$:

$$\langle\, :e^{i\alpha_1\varphi(z_1)}: \cdots :e^{i\alpha_N\varphi(z_N)}:\,\rangle = \begin{cases} \prod_{i<j}(z_i - z_j)^{\alpha_i\alpha_j}, & \text{если } \sum_i \alpha_i = 0; \\ 0, & \text{если } \sum_i \alpha_i \neq 0. \end{cases} \tag{45}$$

В частности, на бесконечной плоскости

$$\langle\, :e^{i\alpha_1\varphi(z_1)+\cdots+i\alpha_n\varphi(z_n)}:\,\rangle = \begin{cases} 1, & \text{если } \sum_i \alpha_i = 0; \\ 0, & \text{если } \sum_i \alpha_i \neq 0. \end{cases} \tag{46}$$

Задачи

1. Возьмите пространственные интегралы и получите (8).

2. Выведите формулу (17).

3. Покажите, что для свободного поля ϕ с действием $S_0[\phi]$ парная корреляционная функция равна

$$\langle\phi(x)\phi(y)\rangle = \log\frac{R^2}{(x-y)^2}$$

с некоторым масштабом инфракрасного обрезания R.

4. Выясните, при каких условиях операторы $e^{i\alpha_1\varphi_R(z)+i\beta_1\varphi_L(\bar z)}$ и $e^{i\alpha_2\varphi_R(z')+i\beta_2\varphi_L(\bar z')}$ взаимно-локальны, то есть обладают корреляционными функциями, однозначными при обходе x вокруг x'.

5*. Предположим, что поле $\phi(x)$ с действием $S_0[\phi]$ определено на окружности радиуса R ($\phi \sim \phi + 2\pi R$) и живет на пространственной окружности ($x^1 \sim x^1 + 2\pi$) с периодическими граничными условиями. Покажите, что теория эквивалентна теории поля $\tilde\phi(x)$, определенного на окружности радиуса $2/R$ (*T-дуальность*). Для решения задачи можно использовать разложение по модам в гамильтоновом формализме. При этом следует учесть, что при обходе по пространственному циклу поле может измениться на целое число периодов эквивалентности $2\pi R$ (число намотки). При преобразовании дуальности число намотки и квантовое число импульса меняются местами.