

Лекция 1 O(2)-модель и переход Костерлица–Таулеса

Здесь мы часто будем рассматривать модели в двумерном пространстве-времени с действием

$$S[\mathbf{n}] = \frac{1}{2g} \int d^2x (\partial_\mu \mathbf{n})^2, \quad \mathbf{n}^2 \equiv \sum_{i=1}^N n_i^2 = 1, \quad (1)$$

которые называются моделями \mathbf{n} -поля или $O(N)$ -моделями. Эти модели обладают явной $O(N)$ -симметрией, соответствующей вращениям сферы. Они принадлежат широкому классу сигма-моделей, то есть моделей, у которых поля лежат на многообразиях.

Сейчас мы рассмотрим простейшую модель из этой серии — $O(2)$ -модель. Она элементарно линеаризуется. Положим

$$n_1 = \cos \varphi, \quad n_2 = \sin \varphi.$$

Тогда

$$S[\varphi] = \frac{1}{2g} \int d^2x (\partial_\mu \varphi)^2, \quad (2)$$

$$\varphi(x) \sim \varphi(x) + 2\pi. \quad (3)$$

Последняя строчка означает, что мы считаем значения поля φ и $\varphi + 2\pi$ эквивалентными.

Казалось бы, мы имеем безмассовое поле с корреляционными функциями, спадающими степенным образом:

$$\langle e^{im\varphi(x)} e^{in\varphi(y)} \rangle \sim -(x-y)^2)^{\frac{g}{4\pi} mn}, \quad m, n \in \mathbb{Z}. \quad (4)$$

На самом деле это совсем не так и результат существенно зависит от значения константы g . Чтобы в этом убедиться, рассмотрим классические решения уравнений поля

$$\nabla^2 \varphi = 0 \quad (5)$$

в евклидовом пространстве. Рассмотрим набор решений

$$\varphi_{q\bar{x}}(x) = \sum_{a=1}^n q_a \operatorname{Im} \log(z - z_a) = \sum_{a=1}^n \frac{q_a}{2i} \log \frac{z - z_a}{\bar{z} - \bar{z}_a}, \quad q_a \in \mathbb{Z}, \quad (6)$$

где

$$z = x^1 + ix^2 = x^1 - x^0, \\ \bar{z} = x^1 - ix^2 = x^1 + x^0.$$

Эти решения, хотя и имеют сингулярности (неопределенные значения) в точках $z = z_a$, очень важны. Они представляют собой решения с n вихрями в точках z_a с завихренностями q_a . В простейшем случае $n = 1$ решение в радиальных координатах $z - z_1 = re^{i\theta}$ имеет вид

$$\varphi_{q_1 x_1}(x) = q_1 \theta.$$

Важно отметить, что решения (6) удовлетворяют уравнению (5) даже в точках $x = x_a$. Действительно,

$$\partial_\mu \partial^\mu \frac{1}{2i} \log \frac{z}{\bar{z}} = \partial_\mu \partial^\mu \operatorname{arctg} \frac{x^2}{x^1} = -\epsilon_{\mu\nu} \partial_\mu \frac{x^\nu}{r^2} = \epsilon^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \log \frac{1}{r} = 0.$$

Более того, для любой гладкой и достаточно быстро спадающей функции $\varphi(x)$ мы имеем

$$\int d^2x \varphi(x) \partial_\mu \partial^\mu \frac{1}{2i} \log \frac{z}{\bar{z}} = \varphi(0) \int d^2x \epsilon^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \log \frac{1}{r} = 0.$$

Вклады, пропорциональные производным от $\varphi(x)$ в точке $x = 0$ не дают вклада либо по соображениям симметрии, либо по соображениям конечности в нуле. Отсюда немедленно получаем

$$\int d^2x \partial^\mu \varphi \partial_\mu \varphi_{q\bar{x}} = 0. \quad (7)$$

Вычислим значение действия на вихревых решениях (6):

$$\begin{aligned}
S[\varphi_{\bar{q}\bar{x}}] &= \frac{2}{g} \int d^2x \partial\varphi_{\bar{q}\bar{x}} \bar{\partial}\varphi_{\bar{q}\bar{x}} \\
&= \frac{1}{2g} \int d^2x \sum_{a,b} \frac{q_a q_b}{(z - z_a)(\bar{z} - \bar{z}_b)} \\
&= \frac{1}{2g} \left(\sum_a q_a^2 \int \frac{d^2x}{|z - z_a|^2} + \sum_{a < b} q_a q_b \int d^2x \frac{(z - z_a)(\bar{z} - \bar{z}_b) + (\bar{z} - \bar{z}_a)(z - z_b)}{|z - z_a|^2 |z - z_b|^2} \right)
\end{aligned}$$

Первый интеграл берется просто, но расходится и на больших, и на малых масштабах:

$$\int \frac{d^2x}{|z - z_a|^2} \simeq 2\pi \int_{r_0}^R \frac{dr}{r} = 2\pi \log \frac{R}{r_0},$$

где R и r_0 — параметры инфракрасного и ультрафиолетового обрезания соответственно. Второй интеграл расходится только на больших масштабах. Чтобы его взять, удобно считать, что $x_a = y_a = 0$, $x_b = X$, $y_b = 0$ и применить трюк Фейнмана. Имеем

$$\begin{aligned}
&\int d^2x \frac{(z - z_a)(\bar{z} - \bar{z}_b) + (\bar{z} - \bar{z}_a)(z - z_b)}{|z - z_a|^2 |z - z_b|^2} \\
&= 2 \int d^2x \frac{x(x - X) + y^2}{(x^2 + y^2)((x - X)^2 + y^2)} = 2 \int_0^1 dt \int d^2x \frac{x(x - X) + y^2}{(x^2 + y^2 + t(X^2 - 2xX))^2} \\
&= |x \rightarrow x + tX| = 2 \int_0^1 dt \int d^2x \frac{x^2 + y^2 + (2t - 1)xX - t(1 - t)X^2}{(x^2 + y^2 + t(1 - t)X^2)^2} \\
&\simeq 4\pi \int_0^1 dt \int_0^R dr \frac{r(r^2 - t(1 - t)X^2)}{(r^2 + t(1 - t)X^2)^2} \\
&\simeq 2\pi \int_0^1 dt \int_0^{R^2} \frac{d\xi}{\xi + t(1 - t)X^2} - 4\pi \int_0^1 dt \int_0^\infty d\xi \frac{t(1 - t)X^2}{(\xi + t(1 - t)X^2)^2} \\
&= 2\pi \int_0^1 dt \log \frac{R^2}{t(1 - t)X^2} - 4\pi = 2\pi \log \frac{R^2}{|z_a - z_b|^2} - 4\pi \int_0^1 dt \log t - 4\pi = 2\pi \log \frac{R^2}{|z_a - z_b|^2}
\end{aligned}$$

Подставляя эти формулы в интеграл для действия, получим

$$\begin{aligned}
S[\varphi_{\bar{q}\bar{x}}] &= \frac{1}{2g} \left(\pi \sum_a q_a^2 \log \frac{R^2}{r_0^2} + 2\pi \sum_{a < b} q_a q_b \log \frac{R^2}{|z_a - z_b|^2} \right) \\
&= \frac{\pi}{2g} \left(\sum_a q_a \right)^2 \log R^2 - \frac{\pi}{2g} \sum_a q_a^2 \log r_0^2 + \frac{1}{2g} \sum_{a < b} q_a q_b 2\pi \log \frac{1}{|z_a - z_b|^2}. \tag{8}
\end{aligned}$$

Первый член стремится к бесконечности, когда размер системы велик, если выражение в скобках не равно нулю. Это значит, что в большой системе должно выполняться условие нейтральности

$$\sum_a q_a = 0. \tag{9}$$

Второе слагаемое в (8) ультрафиолетово расходится. Если мы регуляризуем теорию каким-либо естественным способом, например рассмотрим ее как предел теории вида

$$S[\phi] = \int d^2x \left(|\partial_\mu \phi|^2 - \frac{\lambda}{4} (|\phi|^2 - \phi_0^2)^2 \right),$$

эта величина будет конечной и будет зависеть от структуры кора вихрей. Ниже мы увидим, что значение r_0 не влияет существенно на результат.

Давайте теперь попробуем написать (эвклидов) функциональный интеграл в виде

$$Z[J] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r_0^{-2n}}{n!} \sum_{\substack{q_1, \dots, q_n \\ q_1 + \dots + q_n = 0}} \int d^2x_1 \cdots d^2x_n \int D\varphi e^{-S[\varphi + \varphi_{\vec{q}\vec{x}}] - (J, \varphi + \varphi_{\vec{q}\vec{x}})}, \quad (10)$$

где интеграл берется теперь по регулярным полям φ без всякого отождествления. Множитель $1/n!$ происходит от того, что решение (8) не меняется при перестановках $z_a \leftrightarrow z_b$, $q_a \leftrightarrow q_b$. Таким образом, суммирование $\sum_{q_1, \dots, q_n} \int d^2x_1 \cdots d^2x_n$ учитывает одни и те же конфигурации $n!$ раз. Множитель r_0^{-2n} добавлен для того, чтобы сделать интеграл безразмерным. Можно себе представить, что вихри могут занимать не любые позиции, а располагаются в ячейках размера $\sim r_0$.

Вычислим действие на фоне многовихревого решения:

$$S[\varphi + \varphi_{\vec{q}\vec{x}}] = S[\varphi_{\vec{q}\vec{x}}] + S[\varphi] + \frac{1}{g} \int d^2x \partial^\mu \varphi \partial_\mu \varphi_{\vec{q}\vec{x}}.$$

Первый член дается выражением (8). Интеграл в последнем члене равен нулю в силу (7). Отсюда

$$Z[J] = Z_0[J] \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{\substack{q_1, \dots, q_n \\ q_1 + \dots + q_n = 0}} r_0^{\frac{\pi}{g} \sum_a q_a^2 - 2n} \int d^2x_1 \cdots d^2x_n \prod_{a < b} |z_a - z_b|^{2\frac{\pi}{g} q_a q_b} e^{-(J, \varphi_{\vec{q}\vec{x}})}, \quad (11)$$

$$Z_0[J] = \int D\varphi e^{-S[\varphi] - (J, \varphi)}. \quad (12)$$

Из отождествления (3) следует, что мы можем рассматривать только источники J вида

$$J_{\vec{y}}(x) = -i \sum_{j=1}^k J_j \delta(x - y_j), \quad J_j \in \mathbb{Z}. \quad (13)$$

Тогда

$$\begin{aligned} Z[J_{\vec{y}}] &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{\substack{q_1, \dots, q_n \\ q_1 + \dots + q_n = 0}} r_0^{\frac{\pi}{g} \sum_a q_a^2 - \frac{g}{4\pi} \sum_j J_j^2 - 2n} \int d^2x_1 \cdots d^2x_n \prod_{a < b} |z_a - z_b|^{2\frac{\pi}{g} q_a q_b} \\ &\quad \times \prod_{a, j} \left(\frac{w_j - z_a}{\bar{w}_j - \bar{z}_a} \right)^{q_a J_j / 2} \prod_{j < j'} |w_j - w_{j'}|^{\frac{g}{2\pi} J_j J_{j'}}, \end{aligned} \quad (14)$$

где $w_j = y_j^1 + iy_j^2$.

Мы получили нечто вроде статистической суммы плазмы, частицы которой могут иметь любые заряды (причем энергия заряженного состояния пропорциональна квадрату заряда). Источник частиц φ сложно связан с частицами плазмы, однако, в принципе, можно ожидать, что при малых константах связи g («низкие температуры») плазма рекомбинирует и корреляционные функции остаются степенными, в то время как при больших g («высокой температуре») имеется дебаевское экранирование, корреляционные функции спадают экспоненциально и теория массивна. Такой переход по константе связи называется *переходом (Березинского–)Костерлица–Таулеса*.

Естественно, что мы не можем просуммировать весь ряд по теории возмущений. Тем не менее, можно точно определить точку перехода Костерлица–Таулеса. Действительно, плазма не образуется, когда вихри начинают удерживаться в конечном объеме, то есть все интегралы, кроме одного, начинают инфракрасно сходиться при больших n . Кроме того, из-за электронейтральности

$$\sum_{a < b} q_a q_b = \frac{1}{2} \sum_{a \neq b} q_a q_b = \frac{1}{2} \left(\sum_a q_a \right)^2 - \frac{1}{2} \sum_a q_a^2 = -\frac{1}{2} \sum_a q_a^2 \leq -\frac{n}{2}$$

Отсюда находим, что все интегралы сходятся при

$$2\frac{\pi}{g} \left(-\frac{n}{2} \right) + 2(n-1) < 0.$$

При больших n получаем, что безмассовой фазе отвечают $g < g_{\text{КТ}}$, причем

$$g_{\text{КТ}} = \frac{\pi}{2}. \quad (15)$$

При $g > g_{\text{КТ}}$ вихри не удерживаются и система ведет себя как плазма с конечной корреляционной длиной. Следует отметить, что ответ не зависит от параметра ультрафиолетового обрезания r_0 , так что фазовый переход имеет место при сколь угодно малом коре вихря. Заметим, что условие (15) как раз является условием, при котором исчезает размерный множитель $r_0^{\frac{\pi}{g} \sum q_a^2 - 2n}$ для системы простых вихрей $q = \pm 1$. Поскольку в теории нет никаких размерных параметров, кроме r_0 , корреляционная длина пропорциональна r_0 , и, таким образом, даже у “идеальной” $O(2)$ -модели нет никаких шансов избежать фазового перехода. Качественно это можно объяснить тем, что малый статистический вес вихревых состояний с лихвой перекрывается большим объемом фазового пространства.

Выражение (14) можно переписать по-другому, введя новое поле $\phi(x)$. Обратим внимание, что

$$\nabla^2 \frac{1}{4\pi} \log |x|^2 = \delta(x). \quad (16)$$

и потому $\log \frac{R^2}{|x|^2}$ представляет собой пропагатор свободного безмассового бозонного поля:

$$S_0[\phi] = \frac{1}{8\pi} \int d^2x (\partial_\mu \phi)^2. \quad (17)$$

Поскольку уравнения движения в этой модели имеют вид

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi = 0,$$

можно ввести дуальное поле $\tilde{\phi}$ условием

$$\partial_\mu \tilde{\phi} = -\epsilon_{\mu\nu} \partial^\nu \phi \quad (18)$$

или

$$\partial \tilde{\phi} = \partial \phi, \quad \bar{\partial} \tilde{\phi} = -\bar{\partial} \phi. \quad (19)$$

Хотя эти формулы имеют буквальный смысл лишь на решениях уравнений движения, легко показать, что и на корреляционных функциях эти равенства не лишены смысла. Действительно, введем поля $\phi_R(z)$ и $\phi_L(\bar{z})$ уравнениями

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \phi_R(z) + \phi_L(\bar{z}), \\ \tilde{\phi}(x) &= \phi_R(z) - \phi_L(\bar{z}). \end{aligned} \quad (20)$$

Тогда корреляционные функции

$$\langle \phi_R(z) \phi_R(z') \rangle_0 = \log \frac{R}{z - z'}, \quad \langle \phi_L(\bar{z}) \phi_L(\bar{z}') \rangle_0 = \log \frac{R}{\bar{z} - \bar{z}'}, \quad \langle \phi_R(z) \phi_L(\bar{z}') \rangle_0 = 0 \quad (21)$$

согласованы с теорией.

Далее нам понадобятся корреляционные функции экспоненциальных операторов. Поскольку эти корреляционные функции содержат бесконечные множители, мы попросту исключим их, переопределив экспоненциальные операторы:

$$e^{i\alpha\phi_{R,L}} \rightarrow r_0^{\alpha^2/2} e^{i\alpha\phi_{R,L}}, \quad e^{i\alpha\phi} \rightarrow r_0^{\alpha^2} e^{i\alpha\phi}, \quad e^{\beta\tilde{\phi}} \rightarrow r_0^{-\beta^2} e^{\beta\tilde{\phi}}. \quad (22)$$

Тогда экспоненциальные операторы перестают быть безразмерными и приобретают размерность $d = \alpha^2/2$, α^2 и $-\beta^2$ соответственно. Эта размерность совпадает с *масштабной размерностью* этих операторов. По определению, оператор O обладает масштабной размерностью d_O , если его корреляционные функции инвариантны по отношению к заменам

$$O(x) \rightarrow s^{d_O} O(sx)$$

во всех операторах.

Корреляционные функции экспонент в такой модели равны

$$\begin{aligned} \langle e^{i\alpha_1\phi_R(z_1)} \dots e^{i\alpha_n\phi_R(z_n)} \rangle_0 &= R^{-\frac{1}{2}(\sum_a \alpha_a)^2} \prod_{a<b} (z_a - z_b)^{\alpha_a\alpha_b}, \\ \langle e^{i\alpha_1\phi_L(\bar{z}_1)} \dots e^{i\alpha_n\phi_L(\bar{z}_n)} \rangle_0 &= R^{-\frac{1}{2}(\sum_a \alpha_a)^2} \prod_{a<b} (\bar{z}_a - \bar{z}_b)^{\alpha_a\alpha_b}. \end{aligned} \quad (23)$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} &\left\langle \prod_{j=1}^k e^{i\beta_j\tilde{\phi}(y_j)} \prod_{a=1}^n e^{i\alpha_a\phi(x_a)} \right\rangle_0 \\ &= \prod_{a<b} |z_a - z_b|^{2\alpha_a\alpha_b} \prod_{j<j'} |w_j - w_{j'}|^{2\beta_a\beta_b} \prod_{a,j} \left(\frac{w_j - z_a}{\bar{w}_j - \bar{z}_a} \right)^{\alpha_a\beta_j} \times \begin{cases} 1, & \sum \alpha_a = 0, \\ 0, & \text{в пр. сл.} \end{cases} \end{aligned} \quad (24)$$

Это выражение в точности совпадает с подынтегральным выражением в (14) при

$$\begin{aligned} \alpha_a &= \sqrt{\frac{\pi}{g}} q_a, \\ \beta_j &= \sqrt{\frac{g}{4\pi}} J_j, \end{aligned} \quad (25)$$

Отсюда получаем

$$Z[J, \tilde{J}] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{\substack{q_1, \dots, q_n \\ q_1 + \dots + q_n = 0}} r_0^{\frac{\pi}{g} \sum q_a^2 + \frac{g}{4\pi} \sum J_j^2 - 2n} \int d^2x_1 \dots d^2x_n \left\langle \prod_{j=1}^k e^{i\sqrt{\frac{g}{4\pi}} J_j \tilde{\phi}(y_j)} \prod_{a=1}^n e^{i\sqrt{\frac{\pi}{g}} q_a \phi(x_a)} \right\rangle_0. \quad (26)$$

Заметим, что выражение под знаком интеграла замечательным образом симметрично относительно замен

$$g \leftrightarrow (2\pi)^2 g^{-1}, \quad k \leftrightarrow n, \quad q_a \leftrightarrow J_j, \quad \phi(x) \leftrightarrow \tilde{\phi}(x).$$

Более того, лагранжиан свободного поля пишется одинаково через поля ϕ и $\tilde{\phi}$. Поэтому мы можем отождествить

$$\varphi(x) = \sqrt{\frac{g}{4\pi}} \tilde{\phi}(x). \quad (27)$$

Сделаем важное приближение, не меняющее свойств фазового перехода. Будем пренебрегать вихрями с $|q| > 1$, поскольку их вклад падает с уменьшением r_0 быстрее вклада $|q|$ штук вихрей заряда 1. Тогда, исключив несущественный множитель $r_0^{\frac{g}{4\pi} \sum J_j^2}$, производящий функционал можно переписать в виде

$$\begin{aligned} Z[J, \tilde{J}] &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r_0^{2n(\frac{\pi}{g}-2)}}{(2n)!} \binom{2n}{n} \int d^2x_1 \dots d^2x_{2n} \left\langle \prod_{j=1}^k e^{i\sqrt{\frac{g}{4\pi}} J_j \tilde{\phi}(y_j)} \prod_{a=1}^n e^{i\sqrt{\frac{\pi}{g}} \phi(x_a)} \prod_{a=n+1}^{2n} e^{-i\sqrt{\frac{\pi}{g}} \phi(x_a)} \right\rangle_0 \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r_0^{2n(\frac{\pi}{g}-2)}}{(2n)!} \int d^2x_1 \dots d^2x_{2n} \left\langle \prod_{j=1}^k e^{i\sqrt{\frac{g}{4\pi}} J_j \tilde{\phi}(y_j)} \prod_{a=1}^{2n} \left(e^{i\sqrt{\frac{\pi}{g}} \phi(x_a)} + e^{-i\sqrt{\frac{\pi}{g}} \phi(x_a)} \right) \right\rangle_0 \\ &= \left\langle \prod_{j=1}^k e^{i\sqrt{\frac{g}{4\pi}} J_j \tilde{\phi}(y_j)} \exp \left(2r_0^{\frac{\pi}{g}-2} \int d^2x \cos \sqrt{\frac{\pi}{g}} \phi(x) \right) \right\rangle_0 \\ &= \int D\phi e^{-S_{\text{SG}}[\phi]} \prod_{j=1}^k e^{i\sqrt{\frac{g}{4\pi}} J_j \tilde{\phi}(y_j)}, \end{aligned} \quad (28)$$

где

$$S_{\text{SG}}[\phi] = \int d^2x \left(\frac{(\partial_\mu \phi)^2}{8\pi} - \mu \cos \beta \phi \right) \quad (29)$$

— действие для модели синус-Гордона с параметрами

$$\beta = \sqrt{\frac{\pi}{g}}, \quad \mu = 2r_0^{\frac{\pi}{g}-2}. \quad (30)$$

Более подробно мы изучим эту модель в следующий раз, а пока введем несколько важных понятий. Будем рассматривать модель синус-Гордона как возмущение свободного безмассового бозона. Тогда масштабная размерность оператора возмущения будет равна

$$d_{\text{pert}} = \beta^2.$$

Когда $d_{\text{pert}} < 2$ возмущение называется *релевантным*. Оно существенно меняет поведение системы на больших масштабах и не меняет на малых. Когда $d_{\text{pert}} > 2$ возмущение называется *иррелевантным* и не меняет качественно инфракрасного поведения. Случай $d_{\text{pert}} = 2$ называется *маргинальным*. В случае модели синус-Гордона именно он соответствует точке перехода Костерлица–Таулеса.

Пояснение

Это пояснение касается определения экспоненциальных полей в теории свободного скалярного поля. Для простоты мы ограничимся функционалами от поля $\varphi(z) \equiv \varphi_R(z)$. Для этого поля можно записать разложение

$$\varphi(z) = Q - iP \log z + \sum_{k \neq 0} \frac{a_k}{k} z^{-k}, \quad (31)$$

где эрмитовы операторы P, Q и операторы рождения-уничтожения $a_k = a_{-k}^\dagger$ удовлетворяют соотношениям

$$[P, Q] = -i, \quad [a_k, a_l] = k \delta_{k+l, 0}. \quad (32)$$

Если определить вакуум $|0\rangle$ как

$$P|0\rangle = a_k|0\rangle = 0 \quad (k > 0). \quad (33)$$

Нетрудно проверить, что

$$\langle \varphi(z') \varphi(z) \rangle = \langle Q^2 \rangle + \langle \varphi(z') \varphi(z) \rangle_* = \langle Q^2 \rangle + \log \frac{1}{z' - z}, \quad (34)$$

то есть неопределенное выражение $\langle Q^2 \rangle$ можно отождествить с инфракрасным членом $\log R$ в (21). Нетрудно проверить, что стандартное нормальное упорядочение, которое ставит P справа от Q и a_k ($k > 0$) справа от a_{-k} , отвечает условию

$$\varphi(z_1) \varphi(z_2) = : \varphi(z_1) \varphi(z_2) : + \langle \varphi(z_1) \varphi(z_2) \rangle_*.$$

Более общо, нормальное упорядочение может быть задано рекурсионным соотношением

$$: \varphi(z_1) \cdots \varphi(z_n) : \varphi(z) = : \varphi(z_1) \cdots \varphi(z_n) \varphi(z) : + \sum_{i=1}^n : \varphi(z_1) \cdots \varphi(z_n) : \langle \varphi(z_i) \varphi(z) \rangle_* \quad (35)$$

с начальным условием

$$: 1 : = 1. \quad (36)$$

Здесь индекс \hat{i} над многоточием означает, что из нормального произведения исключен i -тый множитель. Отсюда нетрудно вывести, что

$$\begin{aligned} & : \varphi(z_1) \cdots \varphi(z_m) : : \varphi(w_1) \cdots \varphi(w_n) : = \\ & = \sum_{k=0}^{\min(m,n)} \sum_{\substack{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq m \\ 1 \leq j_1, \dots, j_k \leq n}} : \varphi(z_1)^{\hat{i}_1 \dots \hat{i}_k} \cdots \varphi(z_m) \varphi(w_1)^{\hat{j}_1 \dots \hat{j}_k} \cdots \varphi(w_n) : \prod_{l=1}^k \langle \varphi(z_{i_l}) \varphi(w_{j_l}) \rangle_* \end{aligned} \quad (37)$$

Вернемся к операторным экспонентам $e^{i\alpha\varphi(z)}$. Операторные произведения формальных экспонент

$$e^{i\alpha_1\varphi(z_1)}e^{i\alpha_2\varphi(z_2)} = e^{-\frac{1}{2}\alpha_1\alpha_2[\varphi(z_1),\varphi(z_2)]}e^{i\alpha_1\varphi(z_1)+i\alpha_2\varphi(z_2)} \quad (38)$$

довольно плохо определены, так как содержат плохо определенный коммутатор. Корреляционные функции формальных экспонент

$$\langle e^{i\alpha_1\varphi(z_1)} \dots e^{i\alpha_N\varphi(z_N)} \rangle = \left(\frac{r_0}{R}\right)^{\frac{1}{2}\sum_i \alpha_i^2} \prod_{i<j} \left(\frac{z_i - z_j}{R}\right)^{\alpha_i\alpha_j} \quad (39)$$

содержат ультрафиолетовые расходимости. Таким образом, формальные экспоненты плохо определены.

Нормальные экспоненты хорошо определены, все их корреляторы ультрафиолетово конечны. Можно проверить, что

$$\langle :e^{i\alpha_1\varphi(z_1)+\dots+i\alpha_n\varphi(z_n)}: \rangle = \langle e^{i(\alpha_1+\dots+\alpha_n)Q} \rangle = R^{-\frac{1}{2}(\sum \alpha_i)^2}. \quad (40)$$

Операторные произведения нормальных экспонент имеют вид

$$:e^{i\alpha_1\varphi(z_1)}: :e^{i\alpha_2\varphi(z_2)}: = (z_1 - z_2)^{\alpha_1\alpha_2} :e^{i\alpha_1\varphi(z_1)+i\alpha_2\varphi(z_2)}:. \quad (41)$$

Отсюда нетрудно найти корреляционные функции

$$\langle :e^{i\alpha_1\varphi(z_1)}: \dots :e^{i\alpha_N\varphi(z_N)}: \rangle = R^{-\frac{1}{2}(\sum \alpha_i)^2} \prod_{i<j} (z_i - z_j)^{\alpha_i\alpha_j}. \quad (42)$$

Сравнивая это с (39), мы видим, что

$$e^{i\alpha\varphi(z)} = r_0^{\alpha^2/2} :e^{i\alpha\varphi(z)}:,$$

то есть нормальные экспоненты, зависящие от одного поля $\varphi(z)$, представляют собой не что иное как перенормированные версии полных операторных экспонент, определенные в (22). Вне этого пояснения, чтобы не загромождать формулы, мы будем опускать знак нормального произведения.

Выражение (42) явно содержит инфракрасную обрезку R , но имеет хороший предел при $R \rightarrow \infty$:

$$\langle :e^{i\alpha_1\varphi(z_1)}: \dots :e^{i\alpha_N\varphi(z_N)}: \rangle = \begin{cases} \prod_{i<j} (z_i - z_j)^{\alpha_i\alpha_j}, & \text{если } \sum_i \alpha_i = 0; \\ 0, & \text{если } \sum_i \alpha_i \neq 0. \end{cases} \quad (43)$$

В частности, на бесконечной плоскости

$$\langle :e^{i\alpha_1\varphi(z_1)+\dots+i\alpha_n\varphi(z_n)}: \rangle = \begin{cases} 1, & \text{если } \sum_i \alpha_i = 0; \\ 0, & \text{если } \sum_i \alpha_i \neq 0. \end{cases} \quad (44)$$

Задачи

1. Вывести формулу (16).

2. Показать, что для свободного поля ϕ с действием $S_0[\phi]$ парная корреляционная функция равна

$$\langle \phi(x)\phi(y) \rangle = \log \frac{R^2}{(x-y)^2}$$

с некоторым масштабом инфракрасного обрезания R .

3. Вывести формулы (23).

4. Предположим, что поле $\phi(x)$ с действием $S_0[\phi]$ определено на окружности радиуса R ($\phi \sim \phi + 2\pi R$) и живет на пространственной окружности ($x^1 \sim x^1 + 2\pi$) с периодическими граничными условиями. Показать, что теория эквивалентна теории поля $\tilde{\phi}(x)$, определенного на окружности радиуса $2/R$ (*T-дуальность*). Для решения задачи можно использовать разложение по модам в гамильтоновом формализме. При этом следует учесть, что при обходе по пространственному циклу поле может измениться на целое число периодов эквивалентности $2\pi R$ (число намотки). При преобразовании дуальности число намотки и квантовое число импульса меняются местами.