

Лекция 3 Ренормгруппа для перехода Костерлица–Таулеса

Рассмотрим переход Костерлица–Таулеса с помощью модели синус-Гордона. В этой лекции нам будет удобнее пользоваться евклидовым представлением:

$$S_{SG}[\phi] = \int d^2x \left(\frac{(\partial_\mu \phi)^2}{8\pi} - \alpha_0 r_0^{\beta^2-2} \cos \beta_0 \phi \right), \quad (1)$$

Мы поставили нолики у констант для того, чтобы подчеркнуть, что это перенормированные константы. Далее мы будем использовать также перенормированные константы α , β . Кроме того, по сравнению с действием в первой лекции мы добавили безразмерную постоянную α_0 . В Лекции 2 мы объединили константы α_0 и r_0 в постоянную $\mu = \alpha_0 r_0^{\beta^2-2}$ и считали, что корреляционная длина $r_c \sim \mu^{1/(2-\beta^2)}$ много больше длины ультрафиолетового обрезания r_0 . В случае релевантного возмущения $\beta^2 < 2$ это позволило развить теорию возмущений по константе μ , так как отвечало случаю $\alpha \ll 1$. Здесь мы, наоборот, стартуем со случая $r_c \gtrsim r_0$, более естественного для изучения перехода Костерлица–Таулеса и посмотрим, как будет выглядеть теория по мере роста масштаба. Вообще говоря, это непросто сделать, но, коль скоро нас интересует окрестность точки фазового перехода $\beta^2 = 2 + \delta$, $|\delta| \ll 1$, мы можем использовать ренормгрупповой подход вместе с теорией возмущений.

Есть другая интерпретация ренормгруппы. Давайте рассмотрим систему в режиме $\alpha_0 \ll 1$ ($r_c \gg r_0$), но будем рассматривать корреляционные функции на масштабах r , таких что $r_0 \ll r \ll r_c$. Корреляционные функции на масштабе r , вычисленные по затравочному действию с учетом всех перенормировок, будут вести себя как корреляционные функции в древесном приближении для перенормированного действия с подходящими перенормированными константами связи. Если мы будем знать как «бегут» перенормированные константы связи с масштабом r , мы сможем вычислять корреляционные функции в этой промежуточной области.

Мы говорили, что невозмущенной теории — теории свободного безмассового поля — имеется масштабный параметр R , имеющий смысл размера области, в которой живет теория. Нам будет удобно использовать его в качестве масштабного параметра перенормировки, но потребует его определить несколько более аккуратным способом. Мы в самом деле могли бы рассмотреть теорию на пространстве с компактными измерениями (компактификация). Например, мы могли бы компактифицировать теорию на цилиндр окружности R , но это нарушило бы изотропию. Альтернативная компактификация на сферу чрезмерно усложнило бы вычисления. Поэтому вместо компактификации теории введем в лагранжиан маленький массовый член:

$$S_{SG}[\phi] = \int d^2x \left(\frac{(\partial_\mu \phi)^2}{8\pi} + \frac{m_0^2 \phi^2}{8\pi} - \alpha_0 r_0^{\beta^2-2} \cos \beta_0 \phi \right). \quad (2)$$

Для ультрафиолетовой же регуляризации будем заменять x^2 на $x^2 + r_0^2$. Тогда при $m_0^2 x^2 \ll 1$ пропагатор свободного поля (с $\alpha_0 = 0$) равен

$$G_0(x-x') = \log \frac{R_0^2}{(x-x')^2 + r_0^2}, \quad R_0 = (cm_0)^{-1}, \quad c = e^{\gamma_E}/2. \quad (3)$$

Здесь γ_E — постоянная Эйлера. Мы видим, что эффективно включение массового члена меняет корреляционные функции на малых расстояниях также, как и компактификация.

Теперь напишем перенормированное действие

$$S_{SG}^R[\phi] = \int d^2x \left(\frac{(\partial_\mu \phi)^2}{8\pi} + \frac{m^2 \phi^2}{8\pi} - \frac{\alpha \beta^2}{R^2} \cos \beta \phi \right), \quad R = (cm)^{-1}, \quad (4)$$

такое что $S_{SG}[\phi] = S_{SG}^R[Z_\phi^{-1/2} \phi] + S^{\text{ct}}[Z_\phi^{-1/2} \phi]$. Мы потребуем, чтобы контрчленное действие $S^{\text{ct}}[\phi]$ не содержало контрчленов к «массовому» члену:

$$S^{\text{ct}}[\phi] = \int d^2x (\# (\partial_\mu \phi)^2 + \# \cos \beta \phi).$$

Это значит, что поле ϕ перенормируется. Хотя формально в действии буква ϕ — произвольная функция, но, поскольку нам эта буква потребуется как значок в корреляционных функциях, мы будем иногда обозначать перенормированное поле как ϕ_R . Кроме того, ниже мы определим перенормированную константу связи α . Итак, правило перенормировки должно выглядеть следующим образом:

$$\begin{aligned}\phi &= Z_\phi^{1/2} \phi_R, \\ \beta_0 &= Z_\phi^{-1/2} \beta, \\ \alpha_0 &= Z_\alpha \alpha, \\ m_0 &= Z_\phi^{-1/2} m, \\ R_0 &= Z_\phi^{1/2} R.\end{aligned}\tag{5}$$

Теперь рассмотрим пропагатор $G_0(x-x') = \langle \phi(x)\phi(x') \rangle_0$ невозмущенной ($\alpha_0 = 0$) теории и пропагатор $G(x-x') = \langle \phi(x)\phi(x') \rangle$ полной теории для перенормированного поля. Их можно рассматривать как ядра интегральных операторов $G_0 = 4\pi(-\partial_\mu^2 + m_0^2)^{-1}$ и G соответственно. Между ними имеется связь

$$G^{-1} = G_0^{-1} + \frac{1}{4\pi} \Sigma,\tag{6}$$

где оператор Σ называется массовым оператором. Мы нормировали его так, чтобы восстановить его естественный смысл как поправки к квадрату массы.

В теории ренормгруппы используется два подхода. Один подход (подход Каданова) используется чаще в статистической механике, и исследует эволюцию затравочных констант связи по параметру ультрафиолетового обрезания $\Lambda \sim r_0^{-1}$ при заданных перенормированных константах связи. Другой подход, используемый обычно в квантовой теории поля, предполагает, что затравочные константы и параметр обрезания заданы (и, таким образом, задают теорию). В этом случае оказывается, что имеется некоторая неопределенность в определении перенормированных констант связи, зависящая от размерного параметра, например, точки перенормировки k . Исследуется эволюция констант связи по этому размерному параметру. Достоинство второго метода состоит в том, что из него можно довольно прямыми способами извлекать уравнения для корреляционных функций. Поэтому мы воспользуемся этим подходом. В нашем случае за такой размерный параметр можно принять инфракрасную обрезку R или, эквивалентно, вспомогательную массу m . Давайте потребуем, чтобы вблизи точки $p^2 = 0$ в импульсном пространстве пропагатор $G(p^2)$ имел естественный вид $4\pi(p^2 + M^2)$, где M — некоторый массовый параметр. Мы используем его для определения перенормированной константы связи α . Рассмотрим перенормированный пропагатор

$$G_R(x-x') = Z_\phi^{-1} G(x-x') = \langle \phi_R(x)\phi_R(x') \rangle.\tag{7}$$

Потребуем, чтобы функция $G_R(p^2)$ при малых импульсах имела вид пропагатора частицы массы M :

$$G_R(p^2) = \frac{4\pi}{p^2 + M^2} + O(p^4) \quad \text{при } p^2 \rightarrow 0,\tag{8}$$

причем

$$M^2 = m^2 + \frac{4\pi\alpha\beta^2}{R^2} = m^2(1 + 4\pi c^2 \alpha \beta^2).\tag{9}$$

Это условие можно переписать в терминах $\Sigma(p^2) = \Sigma_0 + \Sigma_1 p^2 + O(p^4)$. Действительно,

$$\begin{aligned}4\pi G^{-1}(p^2) &= p^2 + m_0^2 + \Sigma(p^2) = p^2 + m_0^2 + \Sigma_0 + \Sigma_1 p^2 + O(p^4) \\ &= (1 + \Sigma_1)(p^2 + m^2 + \Sigma_0(1 + \Sigma_1)^{-1}) + O(p^4) = 4\pi(1 + \Sigma_1)G_R^{-1}(p^2).\end{aligned}\tag{10}$$

Отсюда следует, что

$$Z_\phi = \frac{1}{1 + \Sigma_1}, \quad M^2 = m^2 + \frac{\Sigma_0}{1 + \Sigma_1}, \quad m^2 = \frac{m_0^2}{1 + \Sigma_1}.\tag{11}$$

Вычисление массового оператора нам будет удобно начать с разложения для пропагатора в координатном представлении:

$$\begin{aligned}
G(x-x') &= \langle \phi(x)\phi(x') \rangle = \frac{\langle \phi(x)\phi(x')e^{-S_1[\phi]} \rangle_0}{\langle e^{-S_1[\phi]} \rangle_0} \\
&= \langle \phi(x)\phi(x') \rangle_0 - \langle \phi(x)\phi(x')S_1[\phi] \rangle_0 + \frac{1}{2}\langle \phi(x)\phi(x')S_1^2[\phi] \rangle_0 - \frac{1}{6}\langle \phi(x)\phi(x')S_1^3[\phi] \rangle_0 \\
&\quad + (\text{несвязные части}) + O(\alpha_0^3).
\end{aligned}$$

Здесь опущены вклады от знаменателя $\langle e^{-S_1} \rangle_0$ («несвязные части»), поскольку они просто сокращают несвязные диаграммы. Мы исключим эти диаграммы на ходу. Мы также на ходу исключим неодносвязные диаграммы и легко выбросим множители G_0 на «ногах», так что, по сути, будем сразу вычислять массовый оператор.

Чтобы продемонстрировать технику, вычислим первый порядок теории возмущений:

$$-\langle \phi(x)\phi(x')S_1[\phi] \rangle = \alpha_0 r_0^{\delta_0} \int d^2y \langle \phi(x)\phi(x') : \cos \beta_0 \phi(y) : \rangle_0.$$

Среднее в правой части легко вычисляется

$$\langle \phi(x)\phi(x') : \cos \beta_0 \phi(y) : \rangle_0 = \langle \phi(x)\phi(x') \rangle_0 \langle : \cos \beta_0 \phi(y) : \rangle_0 - \beta_0^2 \langle \phi(x)\phi(y) \rangle_0 \langle \phi(x')\phi(y) \rangle_0 \langle : \cos \beta_0 \phi(y) : \rangle_0.$$

Первое слагаемое представляет собой сумму несвязных диаграмм и сокращается с соответствующим вкладом от $\langle e^{-S_1} \rangle_0$. Второе слагаемое естественно распадается на две «хвостовые» линии и вклад в массовый оператор. Учитывая, что $\langle : \cos \beta_0 \phi(y) : \rangle_0 = R_0^{-\beta_0^2}$, для вклада первого порядка в (минус) массовый оператор имеем

$$-\frac{1}{4\pi} \Sigma^{(1)}(y-y') = -\alpha_0 \beta_0^2 \frac{r_0^{\delta_0}}{R_0^{\beta_0^2}} \delta(y-y').$$

Отсюда

$$\Sigma^{(1)}(p^2) = \Sigma_0^{(1)} = 4\pi\alpha_0\beta_0^2 R_0^{-2} \left(\frac{r_0}{R_0} \right)^{\delta_0}. \quad (12)$$

Как и следовало ожидать, эта формула согласуется с квазиклассическим пределом $\beta \rightarrow 0$ ($\delta \rightarrow -2$). В этом пределе вклад инфракрасного обрезания исчезает, и $M^2 = m_0^2 + 4\pi\alpha\beta^2 r_0^{-2} = m_0^2 + 4\pi\mu\beta^2$.

В общем случае мы видим, что масса зависит от параметра R инфракрасного обрезания. Здесь надо принять во внимание, что масса M не является массой элементарных возбуждений в теории. Дело в том, что при $\beta^2 \leq 2$ теория является асимптотически свободной, то есть поле ϕ описывает только возбуждения на малых масштабах, в то время как на больших масштабах имеется совершенно другая система возбуждений — солитоны и (при $\beta^2 < 1$) бризеры. Здесь мы будем интересоваться именно массой этих «асимптотических» возбуждений.

Сравнивая ответ с (11), (9), получаем в этом приближении

$$Z_\phi = 1, \quad Z_\alpha = \left(\frac{R}{r_0} \right)^\delta. \quad (13)$$

В первом порядке по теории возмущений метод ренормгруппы не даст нам ничего нового, и я приведу его просто для иллюстрации. Разложим Z_α по малому параметру δ :

$$Z_\alpha = 1 + \delta \log \frac{R}{r_0},$$

Будем считать параметр обрезки r_0 и затравочные константы α_0, δ_0 постоянными, а логарифм инфракрасного масштаба R — ренормгрупповым «временем». Тогда

$$\frac{d\alpha}{dt} = -\alpha_0\delta, \quad t = \log R.$$

В первом порядке по δ мы должны считать $\alpha_0 = \alpha$. Поэтому получаем уравнение

$$\frac{d\alpha}{dt} = -\alpha\delta,$$

которое имеет решение

$$\alpha \sim R^{-\delta}$$

в согласии с (13). Это естественно, поскольку результат (13) точен в случае, когда константа связи μ много меньше масштаба обрезки $r_0^{\beta^2-2}$, то есть $\alpha \ll 1$. Точность этого ответа обусловлена применением конформной теории возмущений.

Формально ренормгрупповые траектории выглядят как на Рис. 1. Траектории нарисованы в

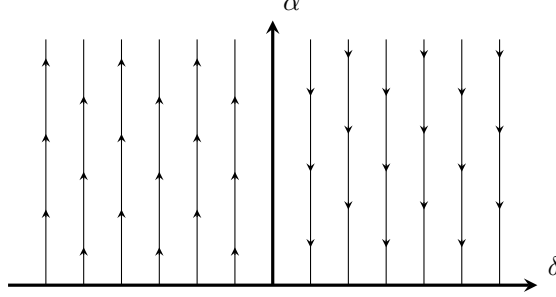


Рис. 1: Ренормгрупповые траектории в первом порядке по теории возмущений. Стрелки указывают в направлении роста масштаба R .

плоскости (δ, α) . Мы видим, что при $\delta < 0$ имеет место асимптотическая свобода: параметр связи α стремится к нулю с уменьшением масштаба и неограниченно растет с ростом масштаба. Точно так же диаграмма выглядит в плоскости затравочных параметров (δ_0, α_0) , но уже по отношению к ультрафиолетовому «времени» $\log r_0$.

Рассмотрим теперь высшие порядки по теории возмущений. Во втором порядке теории возмущений имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \langle \phi(x) \phi(x') S_1^2[\phi] \rangle_{0, \text{conn}} &= \frac{\alpha_0^2 r_0^{2\delta_0}}{2} \int d^2 y_1 d^2 y_2 \langle \phi(x) \phi(x') : \cos \beta_0 \phi(y_1) : : \cos \beta_0 \phi(y_2) : \rangle_{0, \text{conn}} \\ &= \alpha_0^2 \beta_0^2 r_0^{2\delta_0} \int d^2 y_1 d^2 y_2 \left(\langle \phi(x) \phi(y_1) \rangle_0 \langle \phi(x') \phi(y_2) \rangle_0 \langle : \sin \beta_0 \phi(y_1) : : \sin \beta_0 \phi(y_2) : \rangle_0 \right. \\ &\quad \left. - \langle \phi(x) \phi(y_1) \rangle_0 \langle \phi(x') \phi(y_1) \rangle_0 \langle : \cos \beta_0 \phi(y_1) : : \cos \beta_0 \phi(y_2) : - 1 \rangle_0 \right). \end{aligned}$$

Отсюда немедленно находим

$$\begin{aligned} -\frac{1}{4\pi} \Sigma^{(2)}(x) &= \alpha_0^2 \beta_0^2 r_0^{2\delta_0} \left(\langle : \sin \beta_0 \phi(x) : : \sin \beta_0 \phi(0) : \rangle_0 - \beta_0^2 \langle \phi(x) \phi(0) \rangle_0 \right. \\ &\quad \left. - \delta(x) \int d^2 y \langle : \cos \beta_0 \phi(0) : : \cos \beta_0 \phi(y) : - 1 \rangle_0 \right) \\ &= \frac{\alpha_0^2 \beta_0^2 r_0^{2\delta_0}}{2R^{2\beta_0^2}} \left(\left(\frac{R_0}{x} \right)^{2\beta_0^2} - \left(\frac{x}{R_0} \right)^{2\beta_0^2} - 2\beta_0^2 \log \frac{R_0}{x^2} \right. \\ &\quad \left. - \delta(x) \int d^2 y \left(\left(\frac{R_0}{y} \right)^{2\beta_0^2} + \left(\frac{y}{R_0} \right)^{2\beta_0^2} - 2 \right) \right). \end{aligned}$$

Член с $\langle \phi(x) \phi(0) \rangle_0$ вычитает одночастично-приводимый вклад. В импульсном представлении имеем

$$\begin{aligned} \Sigma^{(2)}(p^2) &= -2\pi \alpha_0^2 \beta_0^2 r_0^{2\delta_0} \left(\int d^2 x (e^{ipx} - 1) x^{-2\beta_0^2} \right. \\ &\quad \left. - R_0^{-4\beta_0^2} \int d^2 x (e^{ipx} + 1) x^{2\beta_0^2} - 2\beta_0^2 R_0^{-2\beta_0^2} G_0(p^2) + 2R_0^{2-2\beta_0^2} \right). \end{aligned}$$

Очевидно, что второй интеграл ультрафиолетово сходится, а инфракрасно растет не быстрее чем $R_0^{2+2\beta_0^2}$, то есть соответствующий вклад мал. Аналогично малы два последних члена в скобке,

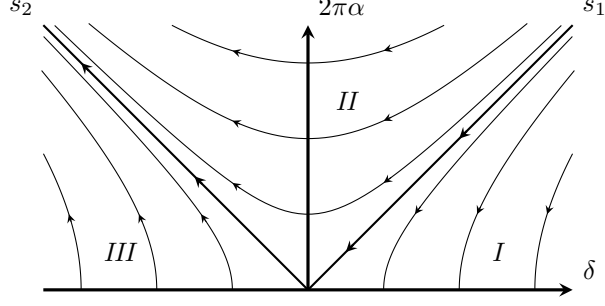


Рис. 2: Ренормгрупповые траектории во втором порядке по теории возмущений.

отвечающие вычитанию одночастично-приводимой и несвязной диаграмм. Первый интеграл дает вклад только в Σ_1 :

$$\begin{aligned} \Sigma^{(2)}(p^2) &= \pi \alpha_0^2 \beta_0^2 r_0^{2\delta_0} \int d^2x (px)^2 x^{-2\beta_0^2} + O(p^4) = \pi \alpha_0^2 \beta_0^2 r_0^{2\delta_0} \int_0^{2\pi} d\theta \int_{r_0}^{R_0} d\rho p^2 \rho^{3-2\beta_0^2} \cos^2 \theta + O(p^4) \\ &= \frac{\pi^2 \alpha_0^2 \beta_0^2}{2\delta_0} \left(1 - \left(\frac{r_0}{R_0}\right)^{2\delta_0}\right) p^2 + O(p^4) \simeq \pi^2 \alpha_0^2 \beta_0^2 p^2 \log \frac{R_0}{r_0} + O(p^4). \end{aligned} \quad (14)$$

Под знаком логарифма мы можем заменить R_0 на R . Отсюда получаем во втором порядке

$$Z_\phi = 1 - \pi^2 \alpha_0^2 \beta_0^2 \log \frac{R}{r_0}, \quad Z_\alpha = 1 + \delta_0 \log \frac{R}{r_0}. \quad (15)$$

Уравнения ренормгруппы во втором порядке по α и в лидирующем порядке по δ имеют вид:

$$\frac{d\alpha}{d \log R} = -\delta\alpha, \quad \frac{d\delta}{d \log R} = -4\pi^2 \alpha^2. \quad (16)$$

Обратим внимание, что эти уравнения можно записать в виде

$$\frac{d(2\pi\alpha \mp \delta)}{dt} = \pm 2\pi\alpha(2\pi\alpha \mp \delta). \quad (16a)$$

Это значит, что прямые $2\pi\alpha = \pm\delta$ являются ренормгрупповыми траекториями. Эти прямые делят полуплоскость (δ, α) на три части. В каждой из этих частей нетрудно качественно построить ренормгрупповые траектории (Рис. 2).

О чем говорит эта диаграмма? Прежде всего, область I представляет собой область низкотемпературной («молекулярной») фазы. Точки на правой полуоси δ являются устойчивыми фиксированными точками. Это значит, что в инфракрасном пределе константа связи α стремится к нулю и теория описывается свободным безмассовым бозоном. Сепаратриса s_1 , разделяющая области I и II, является линией критических точек. Любая точка на сепаратрисе течет в точку $\alpha = \delta = 0$. Области II и III являются областями высокотемпературной («плазменной») фазы, причем область III асимптотически свободна, то есть описывается теорией свободного поля в ультрафиолетовом пределе. С ростом масштаба константа взаимодействия α растет, так что возбуждения в инфракрасной области никак не связаны с исходным свободным бозоном. Фактически эти возбуждения являются массивными частицами, причем массивные частицы имеются и в точке $\beta^2 = 2$. Это следует из того, что если мы включим даже слабое взаимодействие в этой точке, мы немедленно попадем в область II, в которой траектории уходят на бесконечность в инфракрасном пределе. С другой стороны, в этой точке теория не описывается безмассовой теорией и на малых масштабах: траектории в области II начинаются тоже на бесконечности.

Литература

1. J. M. Kosterlitz, The critical properties of the two-dimensional xy model, J. Phys. C7 (1974) 1046.
2. D. J. Amit, Y. Y. Goldschmidt, G. Grinstein, Renormalization group analysis of the phase transition in the 2D Coulomb gas, Sine-Gordon theory and XY-model, J. Phys. A13 (1980) 585.

Задачи

1. Решите систему уравнений (16) точно. Найдите алгебраическое уравнение для траекторий и явную зависимость от $t = \log R$.

2. Пусть $\varphi(z)$ — киральное (правое) поле. Введем токи масштабной размерности 1:

$$J^0(z) = \frac{i}{\sqrt{2}} \partial \varphi_R(z), \quad J^\pm(z) = e^{\pm i\sqrt{2}\varphi_R(z)}.$$

Покажите, что эти токи имеют операторные разложения (эти операторные разложения эквивалентны соотношениям алгебры Каца–Муди \widehat{sl}_2 с центральным зарядом 1):

$$\begin{aligned} J^0(z')J^0(z) &= \frac{1/2}{(z'-z)^2} + O(1), \\ J^+(z')J^-(z) &= \frac{1}{(z'-z)^2} + \frac{2J^0(z)}{z'-z} + O(1), \\ J^\pm(z')J^0(z) &= \mp \frac{J^\pm(z)}{z'-z} + O(1). \end{aligned}$$

Все остальные операторные разложения регулярны.

3. Пусть J^α — токи из предыдущей задачи. Найдите операторные разложения этих токов с полями $V_\pm(z) = e^{\pm \frac{i}{\sqrt{2}}\varphi(z)}$.