

Лекция 4
 $O(N)$ -модель: $1/N$ -разложение

Рассмотрим общую $O(N)$ -модель в пространстве Минковского:

$$S[\mathbf{n}] = \frac{1}{2g} \int d^2x (\partial_\mu \mathbf{n})^2, \quad \mathbf{n}^2 = 1. \quad (1)$$

Удобно ввести вспомогательное поле $\omega(x)$ и написать действие в виде

$$S[\mathbf{n}, \omega] = \frac{1}{2g} \int d^2x ((\partial_\mu \mathbf{n})^2 - \omega(\mathbf{n}^2 - 1)), \quad (2)$$

где вектор \mathbf{n} теперь пробегает любые значения в \mathbb{R}^N . Рассмотрим функциональный интеграл

$$Z[J] = \int D\omega D\mathbf{n} e^{iS[\mathbf{n}, \omega] + ig^{-1/2} \int d^2x \mathbf{J}\mathbf{n}}. \quad (3)$$

Интеграл по \mathbf{n} — гауссов. Возьмем его. Заметим, что

$$iS[\mathbf{n}, \omega] + ig^{-1/2} \int d^2x \mathbf{J}\mathbf{n} = -\frac{1}{2} \left(\frac{n_i}{g^{1/2}}, K(\omega) \delta_{ij} \frac{n_j}{g^{1/2}} \right) + \left(iJ_i, \frac{n_i}{g^{1/2}} \right) + i \int d^2x \frac{\omega}{2g},$$

где

$$K(\omega) = i(\partial_\mu^2 + \omega).$$

Отсюда получаем

$$Z[J] = \int D\omega (\det(\partial_\mu^2 + \omega))^{-N/2} \exp \left(i \int d^2x \frac{\omega}{2g} - \frac{1}{2} \int d^2x d^2x' J_i(x) G(x, x' | \omega) J_i(x') \right),$$

где $G(x, x' | \omega)$ — решение уравнения

$$i(\partial_\mu^2 + \omega(x))G(x, x' | \omega) = \delta(x - x'). \quad (4)$$

По-другому производящий функционал можно переписать в виде

$$Z[J] = \int D\omega \exp \left(iS_{\text{эфф}}[\omega] - \frac{1}{2} \int d^2x d^2x' J_i(x) G(x, x' | \omega) J_i(x') \right), \quad (5)$$

$$S_{\text{эфф}}[\omega] = i \frac{N}{2} \text{tr} \log(\partial_\mu^2 + \omega) + \int d^2x \frac{\omega}{2g}. \quad (6)$$

Найдем точку перевала этого интеграла при $N \rightarrow \infty$. Предположим, что точке перевала отвечает

$$\omega(x) = \text{const} = \omega_0.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \text{tr} \log(\partial_\mu^2 + \omega_0) &= V \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \log(\omega_0 - k^2 - i0) \\ &= iV \int_E \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \log(\omega_0 + k^2) \\ \frac{iV}{2\pi} \int_0^\Lambda dk k \log(\omega_0 + k^2) &= \frac{iV}{4\pi} \int_{\omega_0}^{\omega_0 + \Lambda^2} du \log u = \frac{iV}{4\pi} \left[u \log \frac{u}{e} \right]_{\omega_0}^{\omega_0 + \Lambda^2} \\ &= \frac{iV}{4\pi} \left((\omega_0 + \Lambda^2) \log \frac{\Lambda^2}{e} - \omega_0 \log \frac{\omega_0}{e} \right) \\ &= \frac{iV}{4\pi} \left(\omega_0 \log \frac{e\Lambda^2}{\omega_0} + \Lambda^2 \log \frac{\Lambda^2}{e} \right). \end{aligned} \quad (7)$$

где Λ — параметр ультрафиолетового обрезания. Под логарифмом мы пренебрегли ω_0 по сравнению с Λ . Находим

$$0 = \frac{dS[\omega_0]}{d\omega_0} = V \left(-\frac{N}{8\pi} \log \frac{\Lambda^2}{\omega_0} + \frac{1}{2g} \right).$$

Отсюда находим

$$\omega_0 = m^2 = \Lambda^2 \exp \left(-\frac{4\pi}{Ng} \right). \quad (8)$$

Мы видим, что в пределе $\Lambda \rightarrow \infty$ следует устремить к нулю и g , причем таким образом, чтобы величина $\omega_0 = m^2$ оставалась конечной. Для бета-функции при больших N находим

$$\frac{dg}{d \log \Lambda} = \beta(g) = -\frac{N}{2\pi} g^2. \quad (9)$$

Важно то, что в теории возникает параметр m размерности массы. Мы сейчас увидим, что это действительно масса. В теории имеет место *динамическая генерация массы*. Ни на каких масштабах корреляционные функции не будут спадать степенным образом, и наличие размерного параметра будет заметно в корреляционных функциях на любых масштабах.

Давайте теперь разовьем теорию возмущений по параметру $1/N$. Представим $\omega(x)$ в виде

$$\omega(x) = m^2 + (2/N)^{1/2} \rho(x). \quad (10)$$

и разложим эффективное действие по степеням $N^{-1/2} \rho(x)$:

$$\begin{aligned} S_{\text{eff}}[\omega] &= \text{const} + i \frac{N}{2} \text{tr} \log \left(1 + (2/N)^{1/2} \rho (\partial_\mu^2 + m^2)^{-1} \right) + \frac{1}{(2N)^{1/2} g} \text{tr} \rho \\ &= \text{const} + i \frac{N}{2} \text{tr} \log (1 + i (2/N)^{1/2} \rho G) + \frac{1}{(2N)^{1/2} g} \text{tr} \rho \\ &= \text{const} + \left(\frac{1}{(2N)^{1/2} g} \text{tr} \rho - \left(\frac{N}{2} \right)^{1/2} \text{tr} \rho G \right) \\ &\quad - i \frac{N}{2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-i)^n (2/N)^{n/2}}{n} \text{tr} (\rho G)^n. \end{aligned}$$

Здесь $G(x, x') = G(x, x' | m^2)$ и G — соответствующий оператор.

Скобка в последнем выражении равна нулю по предположению, что $\omega = m^2$ является минимумом. Давайте проверим это предположение. Имеем

$$\begin{aligned} \text{tr} \rho &= \int d^2 x \rho(x), \\ \text{tr} \rho G &= \int d^2 x \rho(x) G(x, x) = G(0, 0) \int d^2 x \rho(x) = G(0, 0) \text{tr} \rho \\ &= V \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} \frac{i}{k^2 - m^2 + i0} \text{tr} \rho = \frac{V}{4\pi} \log \frac{\Lambda^2}{m^2} \text{tr} \rho = (gN)^{-1} \text{tr} \rho. \end{aligned}$$

Мы видим, что скобка обращается в ноль. Исследуя следующий вклад ($n = 2$), можно показать, что точка $\omega = m^2$ является локальным минимумом. Пока нет способа доказать строго, что этот минимум является абсолютным.

Окончательно имеем

$$S_{\text{eff}}[\omega] = \text{const} - i \frac{N}{2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-i)^n (2/N)^{n/2}}{n} \int d^{2n} x \rho(x_1) G(x_1, x_2) \dots \rho(x_n) G(x_n, x_1). \quad (11)$$

Разложение начинается с квадратичного члена вида

$$\frac{i}{2} \int d^2 x_1 d^2 x_2 \rho(x_1) G(x_1, x_2) \rho(x_2) G(x_2, x_1).$$

Литература

- [1] A. B. Zamolodchikov, Al. B. Zamolodchikov, *Annals Phys.* **120** (1979) 253.
- [2] А. М. Поляков, Калибровочные поля и струны.
- [3] А. М. Цвелик, Квантовая теория поля в теории конденсированного состояния.

Задачи

1. Получите формулу (17).
2. Модель Гросса–Невё для N -компонентного майорановского (т. е. вещественного в представлении с чисто мнимыми γ -матрицами) ферми-поля определяется действием

$$S[\psi] = \int d^2x \left(\frac{i}{2} \bar{\psi}_i \gamma^\mu \partial_\mu \psi_i + \frac{g}{8} (\bar{\psi}_i \psi_i)^2 \right)$$

(по повторяющимся индексам предполагается суммирование; в представлении с чисто мнимыми гамма-матрицами $\bar{\psi} = \psi^T \gamma^0$).

Покажите, что эта модель эквивалентна модели со вспомогательным бозонным полем

$$S[\psi, \omega] = \int d^2x \left(\frac{1}{2} \bar{\psi}_i (i\gamma^\mu \partial_\mu - \omega(x)) \psi_i - \frac{\omega^2(x)}{2g} \right).$$

Покажите, что в модели имеет место динамическая генерация массы

$$\omega_0 = m = \Lambda \exp \left(-\frac{2\pi}{Ng} \right).$$

3. Постройте диаграммную технику для $1/N$ -разложения в модели Гросса–Невё. Найдите S -матрицу в древесном приближении.