Лекция 5
$O(N)$-модель: интегрируемость и точная S-матрица

Рассмотрим $O(N)$-модель с действием

$$S[\boldsymbol{n},\omega]=\frac{1}{2g}\int d^2x\left((\partial_\mu\boldsymbol{n})^2-\omega(\boldsymbol{n}^2-1)\right)$$

и классическими уравнениями движения:

$$\partial^\mu\partial_\mu\boldsymbol{n}+\omega\boldsymbol{n}=0,\qquad \boldsymbol{n}^2=1.$$

В координатах светового конуса z, $\bar z$ имеем для действия

$$S[\boldsymbol{n},\omega]=-\frac{1}{g}\int dz\,d\bar z\,\left(\partial\boldsymbol{n}\bar\partial\boldsymbol{n}+\frac{\omega}{4}(\boldsymbol{n}^2-1)\right),\tag{1}$$

а для уравнений движения

$$4\partial\bar\partial\boldsymbol{n}=\omega\boldsymbol{n},\qquad \boldsymbol{n}^2=1.\tag{2}$$

Действие (1) инвариантно относительно *псевдоконформных* преобразований

$$z\to f_1(z),\qquad \bar z\to f_2(\bar z),\qquad \omega\to\frac{\omega}{f_1'(z)f_2'(\bar z)}.\tag{3}$$

Преобразования включают в себя масштабное преобразование, для которого

$$f_1(z)=\lambda z,\qquad f_2(\bar z)=\lambda\bar z,$$

и преобразование инверсии

$$f_1(z)=1/z,\qquad f_2(\bar z)=1/\bar z.$$

При переходе к эвклидову пространству трансляции, масштабное преобразование и инверсия образуют глобальную конформную группу, состоящую из конформных преобразований, взаимно-однозначных на сфере $\mathbb{C}\cup\{\infty\}$. Локальные конформные преобразования, то есть преобразования, взаимно-однозначные только на каких-то областях, даются в этом случае произвольными аналитическими функциями $f(z)\equiv f_1(z)=\overline{f_2(\bar z)}$.

Ну, а пока продолжим рассмотрение в пространстве Минковского. Тензор энергии-импульса имеет вид

$$T_{zz}=\frac{1}{g}(\partial\boldsymbol{n})^2,\qquad T_{\bar z\bar z}=\frac{1}{g}(\bar\partial\boldsymbol{n})^2,\qquad T_{z\bar z}=T_{\bar z z}=-\frac{\omega}{4g}(\boldsymbol{n}^2-1).$$

На уравнениях движения компонента $T_{z\bar z}=T_{\bar z z}$ обращается в нуль, т. е. $T^\mu_\mu=0$, что выражает масштабную инвариантность модели. Сохранение энергии-импульса записывается в виде

$$\bar\partial(\partial\boldsymbol{n})^2=0,\qquad \partial(\bar\partial\boldsymbol{n})^2=0.\tag{4}$$

В большинстве случаев энергия и импульс составляют единственные локальные интегралы движения, однако в случае $O(N)$-модели это не так. Нетрудно получить соотношение

$$4\bar\partial(\partial^2\boldsymbol{n})^2=\partial(\omega(\partial\boldsymbol{n})^2)-3\partial\omega(\partial\boldsymbol{n})^2,\qquad 4\partial(\bar\partial^2\boldsymbol{n})^2=\bar\partial(\omega(\bar\partial\boldsymbol{n})^2)-3\bar\partial\omega(\bar\partial\boldsymbol{n})^2.\tag{5}$$

Сейчас мы покажем, что это уравнение означает существование дополнительного интеграла движения. Поскольку $(\partial\boldsymbol{n})^2$ сохраняется, с помощью псевдоконформного преобразования $z=f_1(z')$, такого что

$$dz'=\left|\frac{\partial\boldsymbol{n}}{\partial z}\right|dz,$$

можно добиться того, чтобы в новых координатах было

$$(\partial\boldsymbol{n})^2=1.$$

Тогда (5) преобразуется к виду уравнения непрерывности

$$\bar{\partial}(\partial\partial\boldsymbol{n})^2 = \partial(2\partial\boldsymbol{n}\bar{\partial}\boldsymbol{n}).$$

На самом деле (хотя это непросто показать) в модели имеется бесконечное число интегралов движения.

Мы знаем, что в квантовом случае (псевдо)конформная инвариантность модели нарушается, так как поле ω приобретает ненулевое среднее значение. Поэтому рассуждения с конформными преобразованиями теряют силу. В квантовом случае в уравнениях, из которых следуют законы сохранения, должны возникать аномалии. Аномальные члены не должны нарушать масштабную инвариантность уравнений, в которые переходят законы сохранения. Поэтому, например, в правой части закона сохранения энергии-импульса допустим только один аномальный член, сводящийся к полной производной:

$$\bar{\partial}(\partial\boldsymbol{n})^2 = -\beta\partial\omega. \tag{6}$$

Для квадрата тензора энергии-импульса аномальный член уже не будет полной производной:

$$\bar{\partial}(\partial\boldsymbol{n})^4 = -(2\beta+\alpha')(\partial\boldsymbol{n})^2\partial\omega + \partial(\ldots). \tag{7}$$

То же самое для (5):

$$\bar{\partial}(\partial^2\boldsymbol{n})^2 = -(3+\alpha)(\partial\boldsymbol{n})^2\partial\omega + \partial(\ldots). \tag{8}$$

Из этих трех уравнений можно составить один закон сохранения:

$$\bar{\partial}\left((\partial^2\boldsymbol{n})^2 - \frac{3+\alpha}{2\beta+\alpha'}(\partial\boldsymbol{n})^4\right) = \partial(\ldots). \tag{9}$$

Итак, имеется по крайней мере два интеграла движения спина 1 и 3:

$$I_1 = \int dz \frac{1}{2}(\partial\boldsymbol{n})^2, \qquad I_3 = \int dz \left(\frac{1}{2}(\partial^2\boldsymbol{n})^2 - \frac{3+\alpha}{2(2\beta+\alpha')}(\partial\boldsymbol{n})^4\right). \tag{10}$$

Эти интегралы удовлетворяют уравнению $\bar{\partial}I_s = 0$. Интегралы I_{-1}, I_{-3}, удовлетворяющие уравнению $\partial I_{-s} = 0$, можно получить заменой $z \leftrightarrow \bar{z}$. При переходе к обычным координатам x, t и те, и другие величины остаются интегралами движения.

Доказать существование бесконечного набора интегралов движения нечетных спинов можно, но сложно. Но уже из существования второго интеграла движения можно заключить невозможность множественного рождения частиц в столкновениях двух частиц.

Пусть $|\theta_1, \ldots, \theta_n\rangle$ — асимптотическое состояние из n частиц с быстротами $\theta_1, \ldots, \theta_n$. Пользуясь тем, что $p_z = me^{\theta}$, $p_{\bar{z}} = me^{-\theta}$, нетрудно проверить, что

$$I_{\pm 1}|\theta_1, \ldots, \theta_n\rangle = \text{ const} \sum_{i=1}^{n} me^{\pm\theta_i}|\theta_1, \ldots, \theta_n\rangle,$$
$$I_{\pm 3}|\theta_1, \ldots, \theta_n\rangle = \text{ const} \sum_{i=1}^{n} m^3 e^{\pm 3\theta_i}|\theta_1, \ldots, \theta_n\rangle.$$

Отсюда получаем четыре уравнения для рассеяния двух частиц в n частиц:

$$e^{s\theta_1} + e^{s\theta_2} = \sum_{i=1}^{n} e^{s\theta'_i} \qquad (s = -3, -1, 1, 3).$$

Если зафиксировать быстроты частиц в конечном состоянии, то будет четыре уравнения для двух неизвестных. Эти уравнения могут иметь решения только при специальных значениях конечных быстрот $\theta'_1, \ldots, \theta'_n$. Но из аналитичности амплитуд следует, что амплитуды таких процессов должны быть тождественно равны нулю. Единственным исключением является случай $n = 2$, когда в амплитудах могут быть δ-функции, отвечающие граничным значениям полюсов вне массовой поверхности.

В общем случае имеем

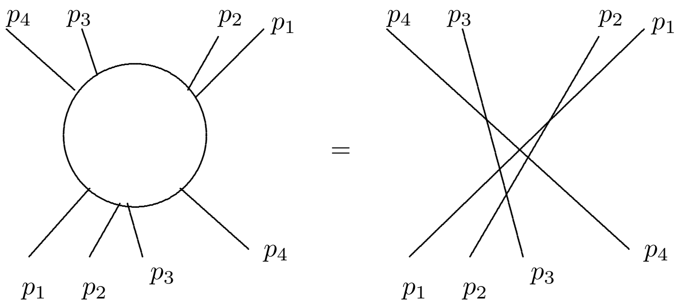
$$I_s|\theta_1,\ldots,\theta_n\rangle = \text{const}\sum_{i=1}^n e^{s\theta_i}|\theta_1,\ldots,\theta_n\rangle.$$

Отсюда следует, что модель допускает только рассеяния n частиц в n, причем частицы могут только обмениваться импульсами.

Теперь сделаем важное

Предположение факторизованного рассеяния. *Амплитуда рассеяния n частиц в n распадается в произведение всех попарных амплитуд рассеяния в любом порядке с суммированием по внутренним состояниям промежуточных частиц.*

Графически это предположение можно изобразить так:



(11)

В принципе, гипотезу факторизованного рассеяния можно проверять в диаграммной технике порядок за порядком по $1/N$. Можно воспользоваться следующими качественными рассуждениями. Предположим, что имеется конечный радиус взаимодействия частиц R, за пределами которого виртуальные частицы почти не рождаются. Это значит, что если $|x_i - x_j| \gg R$ $(\forall i, j)$, то волновая функция почти не отличается от волновой функции n свободных частиц. Благодаря существованию $I_{\pm 3}$ парное рассеяние частиц можно свести к прохождению частиц друг через друга с изменением внутренних состояний. Поэтому можно выбрать базис волновых функций без всяких отраженных волн. Пусть σ, τ — элементы группы перестановок S_n чисел $1,\ldots,n$. Тогда система n бозонов будет описываться волновой функцией

$$\psi_{\beta_1 p_1,\ldots,\beta_n p_n}(\alpha_1 x_1,\ldots,\alpha_n x_n) = \sum_{\tau\in S_n} A^{\alpha_{\sigma_1}\ldots\alpha_{\sigma_n}}_{\beta_1\ \ldots\beta_n}[\tau] e^{i\sum_{i=1}^n p_{\tau_i} x_{\sigma_i}}$$

$$\text{при}\quad x_{\sigma_1} < x_{\sigma_2} < \cdots < x_{\sigma_n}, \quad |x_i - x_j| \gg R. \qquad (12)$$

Зависимость коэффициентов A от импульсов мы опустили. Легко убедиться, что функция (12) симметрична по отношению к перестановке импульсов.

Мы пока не определили смысл параметров β_i. В принципе, мы можем этого и не делать. Но если мы хотим, чтобы β_i соответствовало, скажем, состоянию α_i входящей частицы i, мы можем потребовать

$$A^{\alpha_1\ldots\alpha_n}_{\beta 1\ldots\beta_n}[\tau] = \prod_{i=1}^n \delta^{\alpha_i}_{\beta_{\tau_i}}, \quad \text{если} \quad p_{\tau_1} > p_{\tau_2} > \cdots > p_{\tau_n}.$$

Перестановка двух частиц эквивалентна рассеянию этих частиц. Разумеется, рассеяние меняет настоящие состояния частиц α_i, а не метки волновой функции β_i. Пусть $s^i \in S_n$ — перестановка чисел i и $i+1$, то есть $s^i_i = i+1$, $s^i_{i+1} = i$, $s^i_j = j$ $(j \neq i, i+1)$. Тогда

$$A^{\alpha_1\ldots\alpha_{i+1}\alpha_i\ldots\alpha_n}_{\beta_1\ldots\beta_i\,\beta_{i+1}\ldots\beta_n}[\tau s^i] = \sum_{\alpha'_i\alpha'_{i+1}} S^{\alpha_i\alpha_{i+1}}_{\alpha'_i\alpha'_{i+1}}(p_{\tau_i}, p_{\tau_{i+1}}) A^{\alpha_1\ldots\alpha'_i\alpha'_{i+1}\ldots\alpha_n}_{\beta_1\ldots\beta_i\,\beta_{i+1}\ldots\beta_n}[\tau]. \qquad (13)$$

Переставим теперь три последовательные частицы, например, $123 \to 321$. Такой переход можно выполнить двумя способами:

$$\begin{array}{ccccc} & & 132 \;\to\; 312 & & \\ & \nearrow & & \searrow & \\ 123 & & & & 321. \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & & 213 \;\to\; 231 & & \end{array}$$

Первый способ приводит к соотношению

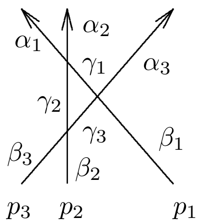
$$A^{\alpha_3\alpha_2\alpha_1\cdots}_{\cdots}[321\ldots] = \sum_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3} S^{\alpha_1\alpha_2}_{\gamma_1\gamma_2}(p_1,p_2) S^{\gamma_1\alpha_3}_{\beta_1\gamma_3}(p_1,p_3) S^{\gamma_2\gamma_3}_{\beta_2\beta_3}(p_2,p_3) A^{\beta_1\beta_2\beta_3\cdots}_{\cdots}[123\ldots]. \tag{14}$$

Проще это записать в матричном виде

$$A_{321\ldots} = S_{12}(p_1,p_2) S_{13}(p_1,p_3) S_{23}(p_2,p_3) A_{123\ldots},$$

где индексы $1, 2, 3$ указывают номер пространства, на которое действуют матрицы или в котором живут векторы. Еще удобней это изобразить графически

$$\sum_{\text{внутренние линии}}$$



Второй способ приводит другому соотношению

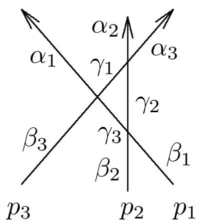
$$A^{\alpha_3\alpha_2\alpha_1\cdots}_{\cdots}[321\ldots] = \sum_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3} S^{\alpha_2\alpha_3}_{\gamma_2\gamma_3}(p_2,p_3) S^{\alpha_1\gamma_3}_{\gamma_1\beta_3}(p_1,p_3) S^{\gamma_1\gamma_2}_{\beta_1\beta_2}(p_1,p_2) A^{\beta_1\beta_2\beta_3\cdots}_{\cdots}[123\ldots], \tag{15}$$

или проще

$$A_{321\ldots} = S_{23}(p_2,p_3) S_{13}(p_1,p_3) S_{12}(p_1,p_2) A_{123\ldots},$$

или графически

$$\sum_{\text{внутренние линии}}$$



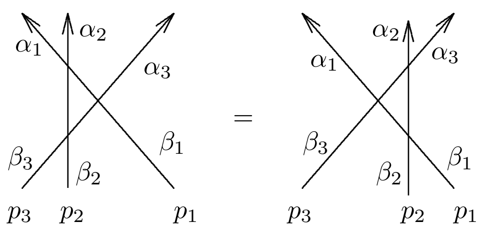
Условие того, что (14) и (15) приводят к одинаковому соотношению, называется *уравнением Янга–Бакстера* и записывается в виде

$$\sum_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3} S^{\alpha_1\alpha_2}_{\gamma_1\gamma_2}(p_1,p_2) S^{\gamma_1\alpha_3}_{\beta_1\gamma_3}(p_1,p_3) S^{\gamma_2\gamma_3}_{\beta_2\beta_3}(p_2,p_3) = \sum_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3} S^{\alpha_2\alpha_3}_{\gamma_2\gamma_3}(p_2,p_3) S^{\alpha_1\gamma_3}_{\gamma_1\beta_3}(p_1,p_3) S^{\gamma_1\gamma_2}_{\beta_1\beta_2}(p_1,p_2), \tag{16}$$

или более кратко

$$S_{12}(p_1,p_2) S_{13}(p_1,p_3) S_{23}(p_2,p_3) = S_{23}(p_2,p_3) S_{13}(p_1,p_3) S_{12}(p_1,p_2), \tag{17}$$

или графически



(18)

Два графика на (18) отличаются положением одной из линий (например, второй). В первом графике она слева от вершины, где пересекаются первая и третья частицы, а во втором — справа. Иными словами, уравнение Янга–Бакстера выражает условие того, что линии в (11) можно как угодно смещать, пронося через вершины. Иными словами, неважно, в каком порядке мы будем рассматривать попарные рассеяния частиц: в любом случае мы получим один и тот же ответ.

Второе условие на S-матрицу более элементарно. Вернемся к соотношению (13). Понятно, что если мы дважды переставим два последовательных индекса в коэффициентах A, т. е. произведем преобразования

$$12 \to 21 \to 12,$$

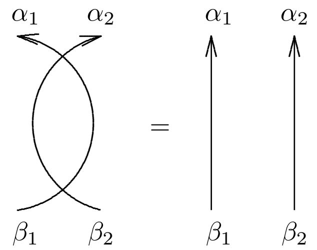
то мы должны получить тождественное преобразование. Отсюда следует *условие унитарности*

$$\sum_{\gamma_1,\gamma_2} S^{\alpha_1\alpha_2}_{\gamma_1\gamma_2}(p_1,p_2) S^{\gamma_2\gamma_1}_{\beta_2\beta_1}(p_2,p_1) = \delta^{\alpha_1}_{\beta_1}\delta^{\alpha_2}_{\beta_2}, \tag{19}$$

или

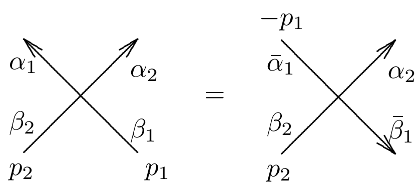
$$S_{12}(p_1,p_2)S_{21}(p_2,p_1) = 1, \tag{20}$$

или



(21)

Последнее условие *кроссинг-инвариантности* верно только в релятивистской теории. Его естественно сразу записать графически:



(22)

Здесь импульсы p_1 и p_2 понимаются как пространственно-временные импульсы, черта над индексом внутреннего состояния частицы изображает античастицу. Формульно это записывается так

$$S^{\alpha_1\alpha_2}_{\beta_1\beta_2}(p_1,p_2) = S^{\alpha_2\bar{\beta}_1}_{\beta_2\bar{\alpha}_1}(p_2,-p_1). \tag{23}$$

Если выразить импульсы через быстроты, получим:

1. Уравнение Янга–Бакстера

$$S_{12}(\theta_1-\theta_2)S_{13}(\theta_1-\theta_3)S_{23}(\theta_2-\theta_3) = S_{23}(\theta_2-\theta_3)S_{13}(\theta_1-\theta_3)S_{12}(\theta_1-\theta_2) \tag{24}$$

2. Унитарность

$$S_{12}(\theta)S_{21}(-\theta) = 1 \tag{25}$$

3. Кроссинг-симметрия

$$S^{\alpha_1\alpha_2}_{\beta_1\beta_2}(\theta) = S^{\alpha_2\bar{\beta}_1}_{\beta_2\bar{\alpha}_1}(i\pi-\theta) \tag{26}$$

Условия *бутстрапа* (24–26) чрезвычайно ограничительны. Вместе с симметрией модели и условиями аналитичности они позволяют найти точное выражение для S-матрицы. Рассмотрим условия аналитичности. S-матрица является мероморфной функцией θ. Физическому листу отвечает область

$$0 \le \operatorname{Im}\theta < \pi, \tag{27}$$

причем точка $\theta = i\pi$ отвечает точке ветвления $s = (m_1-m_2)^2$ по переменной

$$s = m_1^2 + m_2^2 + 2m_1m_2 \operatorname{ch}\theta,$$

а точке $\theta = 0$ отвечает точка $s = (m_1+m_2)^2$. Линии $\operatorname{Im}\theta = \pi$ отвечает в плоскости s левый разрез $(-\infty,(m_1-m_2)^2]$, а линии $\operatorname{Im}\theta = 0$ — правый разрез $[(m_1+m_2)^2,\infty)$.

На мнимой оси S-матрица вещественна:

$$S(iu) \in \mathbb{R} \qquad \text{при} \quad u \in \mathbb{R}, \tag{28}$$

причем все полюсы S-матрицы на физическом листе находятся на мнимой оси. Части этих полюсов отвечают связанные состояния, однако чтобы установить, отвечает ли данный полюс связанному состоянию, обычно требуется дополнительное исследование.

Давайте решим уравнение Янга–Бакстера для $O(N)$-симметричной ($N \geq 3$) S-матрицы $N \times N$ вида [1]

$$S_{ij}^{i'j'}(\theta) = \delta_{i'j'}\delta_{ij}S_1(\theta) + \delta_{i'i}\delta_{j'j}S_2(\theta) + \delta_{j'i}\delta_{i'j}S_3(\theta). \tag{29}$$

Уравнение Янга–Бакстера для нее приобретает вид

$$S_2(\theta)S_3(\theta+\theta')S_3(\theta') + S_3(\theta)S_3(\theta+\theta')S_2(\theta') = S_3(\theta)S_2(\theta+\theta')S_3(\theta'), \tag{30}$$

$$S_2(\theta)S_1(\theta+\theta')S_1(\theta') + S_3(\theta)S_2(\theta+\theta')S_1(\theta') = S_3(\theta)S_1(\theta+\theta')S_2(\theta'), \tag{31}$$

$$\begin{aligned} &NS_1(\theta)S_3(\theta+\theta')S_1(\theta') + S_1(\theta)S_3(\theta+\theta')S_2(\theta') + S_1(\theta)S_3(\theta+\theta')S_3(\theta') + S_1(\theta)S_2(\theta+\theta')S_1(\theta') \\ &\quad + S_2(\theta)S_3(\theta+\theta')S_1(\theta') + S_3(\theta)S_3(\theta+\theta')S_1(\theta') + S_1(\theta)S_1(\theta+\theta')S_1(\theta') = S_3(\theta)S_1(\theta+\theta')S_3(\theta'). \end{aligned} \tag{32}$$

Чтобы решить эту систему, введем обозначение $h(\theta) = S_2(\theta)/S_3(\theta)$. Первое уравнение принимает вид

$$h(\theta) + h(\theta') = h(\theta+\theta').$$

Следовательно $h(\theta) \sim \theta$ и

$$S_3(\theta) = -i\frac{\lambda}{\theta}S_2(\theta). \tag{33}$$

Пусть теперь $g(\theta) = S_2(\theta)/S_1(\theta)$. Подставляя (33) в (31), получаем

$$g(\theta+\theta') - g(\theta') = \frac{\theta}{i\lambda}.$$

Это уравнение имеет решение

$$g(\theta) = \frac{\theta - i\kappa}{i\lambda}.$$

Подставляя это в (32), получим

$$\kappa = \frac{N-2}{2}\lambda.$$

Это значит, что

$$S_1(\theta) = -\frac{i\lambda}{i(N-2)\lambda/2 - \theta}S_2(\theta). \tag{34}$$

Это самое общее решение уравнения Янга–Бакстера, зависящее от произвольной функции $S_2(\theta)$ и произвольного параметра λ. Воспользуемся теперь условиями кроссинг-инвариантности и унитарности, чтобы зафиксировать S_2 и λ.

Условие кроссинг-симметрии имеет вид

$$S_2(\theta) = S_2(i\pi - \theta), \tag{35}$$

$$S_1(\theta) = S_3(i\pi - \theta). \tag{36}$$

Подставляя сюда (33) и (34), получаем

$$\lambda = \frac{2\pi}{N-2}. \tag{37}$$

Условие унитарности

$$S_2(\theta)S_2(-\theta) + S_3(\theta)S_3(-\theta) = 1, \tag{38}$$

$$S_2(\theta)S_3(-\theta) + S_3(\theta)S_2(-\theta) = 0, \tag{39}$$

$$NS_1(\theta)S_1(-\theta) + S_1(\theta)S_2(-\theta) + S_1(\theta)S_3(-\theta)$$

$$+S_2(\theta)S_1(-\theta)+S_3(\theta)S_1(-\theta)=0 \tag{40}$$

удовлетворяется, если

$$S_2(\theta)S_2(-\theta)=\frac{\theta^2}{\theta^2+\lambda^2}. \tag{41}$$

Теперь нам надо решить совместно уравнения (35) и (41). Понятно, что решение этих уравнений неоднозначно. Решение переходит в решение, если домножить его на функцию

$$\frac{\operatorname{sh}\theta+i\sin\alpha}{\operatorname{sh}\theta-i\sin\alpha}$$

с произвольным α. Мы будем искать «минимальное» решение, то есть такое решение, которое будет иметь наименьшее количество нулей и полюсов на физическом листе.

Из (41) заключаем, что $S_2(\theta)$ имеет простой нуль в точке $\theta=0$. Из кроссинг-симметрии (35) немедленно заключаем, что простой нуль имеется также в точке $\theta=i\pi$. Из унитарности находим, что в точке $\theta=-i\pi$ имеется полюс. Продолжая поочередно применять кроссинг-симметрию и унитарность, находим набор полюсов и нулей функции $S_2(\theta)$:

$$\begin{array}{ll} \text{Нули:} & \theta=-2\pi in, i\pi+2\pi in, \\ \text{Полюсы:} & \theta=-i\pi-2\pi in, 2\pi i+2\pi in, \qquad n=0,1,2,\ldots \end{array} \tag{42}$$

Другой набор нулей и полюсов получается следующим образом. Из (41) следует, что S_2 должна иметь полюс в одной из точек $\theta=\mp i\lambda$. Давайте обозначать решения с такими полюсами $S_2^{(\pm)}(\theta)$. Рассуждая как и раньше, получим для $S_2^{(\pm)}(\theta)$

$$\begin{array}{ll} \text{Нули:} & \theta=\mp i\lambda-i\pi-2\pi in, \pm i\lambda+2\pi i+2\pi in, \\ \text{Полюсы:} & \theta=\mp i\lambda-2\pi in, \pm i\lambda+i\pi+2\pi in, \qquad n=0,1,2,\ldots \end{array} \tag{43}$$

Собирая (42), (43), получим

$$S_2^{(\pm)}(\theta)=Q^{(\pm)}(\theta)Q^{(\pm)}(i\pi-\theta), \qquad Q^{(\pm)}(\theta)=\frac{\Gamma\left(\pm\frac{\lambda}{2\pi}-i\frac{\theta}{2\pi}\right)\Gamma\left(\frac12-i\frac{\theta}{2\pi}\right)}{\Gamma\left(\frac12\pm\frac{\lambda}{2\pi}-i\frac{\theta}{2\pi}\right)\Gamma\left(-i\frac{\theta}{2\pi}\right)}. \tag{44}$$

Раскладывая S-матрицу (33), (34), (44) с учетом (37) по $1/N$, получаем

$$S_1^{(\pm)}(\theta)=-\frac{2\pi i}{N(i\pi-\theta)}, \tag{45}$$

$$S_2^{(\pm)}(\theta)=1\mp\frac{2\pi i}{N\operatorname{sh}\theta}, \tag{46}$$

$$S_3^{(\pm)}(\theta)=-\frac{2\pi i}{N\theta}. \tag{47}$$

Это позволяет отождествить $S^{(+)}(\theta)$ с S-матрицей $O(N)$-модели, а $S^{(-)}(\theta)$ с S-матрицей N-компонентной модели Невё–Шварца. Заметим, что

$$S_{12}^{(\pm)}(0)=\mp P_{12}, \tag{48}$$

где $P_{12}: a\times b\mapsto b\times a$ — оператор перестановки пространств 1 и 2. Это означает, что для частиц в $O(N)$-модели действует принцип Паули, хотя мы и считали частицы бозонами.

На самом деле в двумерном пространстве-времени нельзя сказать, является ли частица бозоном или фермионом. Если говорить о спине, то мы знаем, что такое спин оператора, но не знаем, что такое спин состояния, так как в одномерном пространстве нет вращений. Кроме того, в одном пространственном измерении есть способ построения алгебры Клиффорда (фермионной алгебры) по алгебре Гайзенберга (бозонной алгебре) и наоборот [2]. Это преобразование уважает понятие частицы, но меняет характер взаимодействия. Именно, матрица рассеяния частиц как фермионов отличается от матрицы рассеяния тех же частиц как бозонов знаком.

Литература

[1] A. Zamolodchikov and Al. Zamolodchikov, *Annals of Physics* **120** (1979) 253.

[2] М. Сато, М. Дзимбо, Т. Мива, Голономные квантовые поля, М., «Мир», 1983.

Задачи

1. Получите уравнение (5).

2. Напишите явно асимптотическое выражение для волновой функции (12) для двух и трех частиц ($n = 2, 3$). Приняв условие (13) для $n = 2$ за определение S-матрицы, убедитесь, что отсюда следует (13) для случая $n = 3$. Покажите, что произведение трех S-матриц $S_{12}S_{13}S_{23}$ действительно имеет смысл трехчастичной S-матрицы.

3. Выведите (45–47).

4. Покажите, что из (48) следует принцип Паули для *взаимодействующих бозонных* частиц: две частицы не могут иметь одинаковый импульс.

5. Покажите, что матрица 4×4 вида

$$S(\theta) = \left(S^{\alpha_1\alpha_2}_{\beta_1\beta_2}(\theta)\right) = \begin{pmatrix} a(\theta) & & & \\ & b(\theta) & c(\theta) & \\ & c(\theta) & b(\theta) & \\ & & & a(\theta) \end{pmatrix}$$

(индексы $\alpha_1\alpha_2$ упорядочены как $++, +-, -+, --$) удовлетворяет уравнению Янга–Бакстера при

$$\frac{b(\theta)}{a(\theta)} = \frac{\operatorname{sh}\frac{\theta}{p}}{\operatorname{sh}\frac{i\pi-\theta}{p}}, \qquad \frac{c(\theta)}{a(\theta)} = \frac{\operatorname{sh}\frac{i\pi}{p}}{\operatorname{sh}\frac{i\pi-\theta}{p}}$$

при произвольном p.

Такая S-матрица представляет собой S-матрицу рассеяния солитонов в модели синус-Гордона с $\beta^2 = 2\frac{p}{p+1}$ при подходящем $a(\theta)$, таком что $a(0) = -1$. Покажите, что $a(\theta)$ должно удовлетворять условиям

$$a(\theta) = \frac{\operatorname{sh}\frac{i\pi-\theta}{p}}{\operatorname{sh}\frac{\theta}{p}} a(i\pi - \theta), \qquad a(\theta)a(-\theta) = 1.$$

6. Найдите все полюсы и нули функции $a(\theta)$ из задачи 5 при $p > 1$ при условии, что она не имеет особенностей на физическом листе.