

**Лекция 6**  
**Модель Тирринга: решение методом анзаца Бете**

Рассмотрим массивную модель Тирринга

$$S^{TM}[\psi, \bar{\psi}] = \int d^2x \left( \bar{\psi}(i\hat{\partial} - m_0)\psi - \frac{g}{2}(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi)^2 \right), \quad (1)$$

причем

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_+ \\ \psi_- \end{pmatrix}, \quad \gamma^0 = \begin{pmatrix} & -i \\ i & \end{pmatrix} = \sigma^2, \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} & i \\ i & \end{pmatrix} = i\sigma^1, \quad \gamma^3 = \gamma^0\gamma^1 = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix} = \sigma^3. \quad (2)$$

Гамильтониан модели Тирринга имеет вид

$$H = \int dx \left( -i\psi^+\sigma^3\partial_x\psi + m_0\psi^+\sigma^2\psi + 2g\psi_+^+\psi_+\psi_-^+\psi_- \right) \quad (3)$$

с коммутационными соотношениями

$$\psi_{\alpha'}^+(x')\psi_\alpha(x) + \psi_\alpha(x)\psi_{\alpha'}^+(x') = \delta_{\alpha'\alpha}\delta(x' - x), \quad (4)$$

причем импульс  $P$  и оператор числа частиц  $Q$  имеют вид

$$P = -i \int dx \psi^+\partial_x\psi, \quad Q = \int dx \psi^+\psi. \quad (5)$$

Давайте вспомним картинку Дирака. Спектр  $\epsilon^2 - p^2 = m^2$  имеет две ветви:  $\epsilon = \pm\sqrt{p^2 + m^2}$ . Согласно принципу Паули в одном состоянии может находиться одно возбуждение. Поэтому стандартный вакуум образован «морем» фермионных возбуждений с отрицательными энергиями. Если мы удалим все это «море», то возникнет «голый вакуум» или *псевдовакуум*. Очевидно, голый вакуум имеет бесконечно большую энергию и не может претендовать на роль основного состояния. Тем не менее, истинный вакуум можно найти как «возбуждение» над псевдовакуумом.

Рассмотрим сначала случай свободных фермионов  $g = 0$ . Обозначим через  $|\Omega\rangle$  состояние, удовлетворяющее условиям

$$\psi_\alpha(x)|\Omega\rangle = 0, \quad \langle\Omega|\psi_\alpha^+(x) = 0. \quad (6)$$

Введем волновую функцию « $N$ -частичного» состояния:

$$|\chi_N\rangle = \int d^N x \chi^{\alpha_1 \dots \alpha_N}(x_1, \dots, x_N) \psi_{\alpha_1}^+(x_1) \dots \psi_{\alpha_N}^+(x_N) |\Omega\rangle. \quad (7)$$

Состояния такого вида являются собственными векторами оператора  $Q$ :

$$Q|\chi_N\rangle = N|\chi_N\rangle.$$

Таким образом, полное пространство состояний  $\mathcal{H}$  распадается в сумму по собственным значениям  $Q$ :

$$\mathcal{H} \simeq \bigoplus_{N=0}^{\infty} \mathcal{H}_N, \quad v \in \mathcal{H}_N \Leftrightarrow Qv = Nv. \quad (8)$$

Действие  $\hat{H}_N$  гамильтониана на волновую функцию  $\chi^{\alpha_1 \dots \alpha_N}(x_1, \dots, x_N)$ , определенное уравнением

$$H|\chi_N\rangle = \int d^N x (\hat{H}_N \chi)^{\alpha_1 \dots \alpha_N}(x_1, \dots, x_N) \psi_{\alpha_1}^+(x_1) \dots \psi_{\alpha_N}^+(x_N) |\Omega\rangle,$$

имеет вид

$$\hat{H}_N = \sum_{k=1}^N (-i\sigma_k^3 \partial_{x_k} + m_0 \sigma_k^2),$$

где  $\sigma_k^i$  действует на пространстве  $k$ -й частицы. При  $N = 1$  собственное состояние имеет вид

$$\chi_\lambda(x) = \begin{pmatrix} e^{\lambda/2} \\ ie^{-\lambda/2} \end{pmatrix} e^{ixm_0 \text{sh } \lambda}. \quad (9)$$

Многочастичное решение свободнополевого гамильтониана имеет вид

$$\chi_{\lambda_1 \dots \lambda_N}^{\alpha_1 \dots \alpha_N}(x_1, \dots, x_N) = \sum_{\sigma} (-1)^{\sigma} \prod_{k=1}^N \chi_{\lambda_k}^{\alpha_{\sigma k}}(x_{\sigma k}). \quad (10)$$

Энергия  $N$ -частичного состояния равна

$$E_N(\lambda_1, \dots, \lambda_N) = m_0 \sum_{k=1}^N \operatorname{ch} \lambda_k. \quad (11)$$

Какие значения могут принимать параметры  $\lambda$ ? Если система находится в ящике размера  $L$  с циклическими граничными условиями, то «быстроты»  $\lambda_k$  являются решениями уравнений

$$e^{im_0 L \operatorname{sh} \lambda_k} = 1 \quad k = 1, \dots, N. \quad (12)$$

Следовательно,

$$\operatorname{sh} \lambda_k = \frac{2\pi n_k}{m_0 L}, \quad n_k \in \mathbb{Z}.$$

Это значит, что  $\lambda_k$  находится либо на вещественной оси  $\mathbb{R}$ , либо на прямой  $i\pi + \mathbb{R}$ . Последние решения соответствуют отрицательным энергиям и конденсат таких возбуждений может дать истинный вакуум. Очевидно, основному состоянию соответствует состояние, в котором все состояния отрицательной энергии заполнены. Положим  $\lambda_k = i\pi + \beta_k$ . Чтобы определить вакуумную энергию, введем ультрафиолетовое обрезание

$$-\Theta < \beta_k < \Theta, \quad \Theta \simeq \log \frac{\Lambda}{m_0}. \quad (13)$$

В термодинамическом пределе  $L \rightarrow \infty$  энергия вакуума равна

$$E_0 = -L \int_{-\Theta}^{\Theta} d\beta \rho(\beta) m_0 \operatorname{ch} \beta, \quad \rho(\beta) = \frac{1}{L} \left| \frac{dn}{d\beta} \right| = \frac{m_0}{2\pi} \operatorname{ch} \beta.$$

Конечно, энергия основного состояния сама по себе бессмысленна, интересны энергии возбужденных состояний. Возбуждению с быстротой  $\theta$  соответствует дополнительный корень в точке

$$\lambda_k = \theta \quad (\text{частица}),$$

или дырка (отсутствие корня) в точке

$$\lambda_k = \theta + i\pi \quad (\text{античастица}).$$

Поскольку корни уравнений (12) никак не связаны друг с другом, мы получаем систему невзаимодействующих частиц и античастиц с  $p = (m \operatorname{ch} \theta, m \operatorname{sh} \theta)$ , подчиняющихся принципу Паули, то есть то, что мы и должны были получить.

Теперь включим взаимодействие. Оператор взаимодействия в (3) коммутирует с оператором числа частиц  $Q$ , а по отношению к псевдовакууму  $|\Omega\rangle$  нет никаких античастиц. Поэтому оператор взаимодействия действует внутри пространств  $\mathcal{H}_N$ :

$$\hat{H}_N = \sum_{k=1}^N (-i\sigma_k^3 \partial_{x_k} + m_0 \sigma_k^2) + g \sum_{k<l}^N \delta(x_k - x_l) (1 - \sigma_k^3 \sigma_l^3). \quad (14)$$

Конструкция из сигма-матриц в правой части есть:

$$\frac{1}{2} (1 \otimes 1 - \sigma^3 \otimes \sigma^3)_{\alpha_1 \alpha_2}^{\alpha'_1 \alpha'_2} = \delta_{\alpha'_1 +} \delta_{\alpha_1 +} \delta_{\alpha'_2 -} \delta_{\alpha_2 -} + \delta_{\alpha'_1 -} \delta_{\alpha_1 -} \delta_{\alpha'_2 +} \delta_{\alpha_2 +}. \quad (15)$$

Член взаимодействия в гамильтониане (14) плохо определен. Действительно, из-за дельта-функционального члена волновая функция разрывна при  $x_k = x_l$ . В то же время, действие гамильтониана

зависит от волновой функции как раз в этой точке. Дельта функцию следует регуляризовать. Покажем, что ответ не зависит от регуляризации. Рассмотрим уравнение

$$f'(x) - c\delta(x)f(x) = g(x, f(x))$$

Регуляризуем дельта-функцию произвольным образом:

$$f'(x) - c\delta_a(x)f(x) = g(x, f(x)), \quad \lim_{a \rightarrow 0} \delta_a(x) = \delta(x). \quad (16)$$

Пусть

$$\delta_a(x) = \epsilon'_a(x).$$

Тогда

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = c\epsilon'_a(x) + \frac{g(x, f(x))}{f(x)}$$

и при достаточно малых  $a$  имеем

$$f(x) = \text{const } e^{c\epsilon_a(x)}.$$

Отсюда в пределе  $a \rightarrow 0$  имеем

$$f(+0) = e^c f(-0). \quad (17)$$

Одночастичные состояния опять описываются решениями (9). Рассмотрим двухчастичное состояние. Поскольку взаимодействие контактное (отлично от нуля только при  $x_1 = x_2$ ), при  $x_1 \neq x_2$  волновая функция представляет собой решение уравнений для свободных фермионов. Благодаря законам сохранения энергии и импульса, рассеяние безотражательно и мы имеем:

$$\chi_{\lambda_1 \lambda_2}^{\alpha_1 \alpha_2}(x_1, x_2) = \begin{cases} A_{12} \chi_{\lambda_1}^{\alpha_1}(x_1) \chi_{\lambda_2}^{\alpha_2}(x_2) - A_{21} \chi_{\lambda_2}^{\alpha_1}(x_1) \chi_{\lambda_1}^{\alpha_2}(x_2) & \text{при } x_1 < x_2, \\ A_{21} \chi_{\lambda_1}^{\alpha_1}(x_1) \chi_{\lambda_2}^{\alpha_2}(x_2) - A_{12} \chi_{\lambda_2}^{\alpha_1}(x_1) \chi_{\lambda_1}^{\alpha_2}(x_2) & \text{при } x_1 > x_2. \end{cases} \quad (18)$$

Эта функция, очевидно, антисимметрична по  $(\alpha_1, x_1)$ ,  $(\alpha_2, x_2)$  и содержит (с точностью до общего множителя) один свободный параметр  $A_{12}/A_{21}$ , который должен зависеть от константы связи  $g$ . Прямое вычисление дает

$$\frac{A_{12}}{A_{21}} = R(\lambda_1 - \lambda_2), \quad R(\lambda) = e^{-i\Phi(\lambda)} = \frac{\text{ch } \frac{\lambda+ig}{2}}{\text{ch } \frac{\lambda-ig}{2}}. \quad (19)$$

Функцию  $\Phi(\lambda)$  удобно фиксировать условием кососимметричности

$$\Phi(-\lambda) = -\Phi(\lambda), \quad (20)$$

считая, что разрезы лежат на лучах  $(ig, i\infty)$ ,  $(-ig, -i\infty)$ . Величины  $\lambda_k$  естественно определены по модулю  $2\pi i$ .

Заметим, что функция  $R(\lambda)$  периодична по  $g$  с периодом  $2\pi$ . Так как мы будем строить вакуум, близкий к вакууму свободных фермионов, следует считать, что решение имеет смысл при

$$-\pi < g < \pi. \quad (21)$$

Теперь нетрудно построить общее  $N$ -частичное решение (*анзац Бете*):

$$\chi_{\lambda_1 \dots \lambda_N}^{\alpha_1 \dots \alpha_N}(x_1, \dots, x_N) = \sum_{\tau} (-1)^{\sigma\tau} A_{\tau} \prod_{k=1}^N \chi_{\lambda_{\tau k}}^{\alpha_{\sigma k}}(x_{\sigma k}) \quad \text{при } x_{\sigma_1} < \dots < x_{\sigma_N}. \quad (22)$$

Коэффициенты  $A$  удовлетворяют соотношениями

$$A_{\dots, i, i+1, \dots} = R(\lambda_i - \lambda_{i+1}) A_{\dots, i+1, i, \dots}. \quad (23)$$

Наложим теперь циклическое граничное условие

$$\chi(\dots, x_k + L, \dots) = \chi(\dots, x_k, \dots). \quad (24)$$

Тогда получим

$$e^{im_0L \operatorname{sh} \lambda_k} = \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^N R(\lambda_k - \lambda_l). \quad (25)$$

Эта система уравнений на параметры  $\lambda_k$  называется системой *уравнений Бете*. Уравнения Бете — нелинейные уравнения с  $N$  неизвестными, причем, как ожидается, в физически интересных случаях  $N \rightarrow \infty$ . Тем не менее, сделан огромный шаг: решение задачи сведено к решению системы алгебраических уравнений. Каждому решению этой системы, т. е. каждому набору чисел  $(\lambda_1, \dots, \lambda_N)$ , удовлетворяющему (25), соответствует единственное состояние системы. Компоненты  $\lambda_k$  решения называются *корнями* уравнений Бете.

Логарифмируя уравнения Бете, найдем

$$m_0L \operatorname{sh} \lambda_k + \sum_{l=1}^N \Phi(\lambda_k - \lambda_l) = 2\pi n_k, \quad (26)$$

причем энергия и импульс состояния равны

$$E_N(\lambda_1, \dots, \lambda_N) = m_0 \sum_{i=1}^N \operatorname{ch} \lambda_i, \quad P_N(\lambda_1, \dots, \lambda_N) = m_0 \sum_{i=1}^N \operatorname{sh} \lambda_i. \quad (27)$$

Зададимся вопросом: как могут располагаться корни уравнений Бете? Естественно, подходят вещественные корни и корни на прямой  $i\pi + \mathbb{R}$ . Общие комплексные корни могут располагаться симметрично относительно одной из прямых  $\mathbb{R}$  и  $i\pi + \mathbb{R}$ . Более подробный анализ показывает, что других типов решений не может быть.

Можно показать, что решения уравнений Бете взаимно-однозначно связаны с наборами чисел  $(n_1, \dots, n_N)$ . Понятно также, что различным  $n_k$  соответствуют различные  $\lambda_k$  и наоборот. Из принципа Паули следует, что все  $\lambda_k$  должны быть различны и что, следовательно,

$$n_k \neq n_l \quad (k \neq l). \quad (28)$$

Естественно предположить, что наименьшей энергии отвечает решение уравнений Бете с отрицательными энергиями «голых частиц», т. е. с  $\operatorname{Im} \lambda_k = \pi$ . Будем писать

$$\lambda_k = i\pi + \beta_k.$$

Чтобы минимизировать энергию, надо заполнить все состояния отрицательной энергии, поэтому надо, чтобы целые числа  $n_k$  шли через единицу:

$$n_{k+1} - n_k = \pm 1, \quad (29)$$

причем удобно выбрать знак так, чтобы величина  $\beta_k$  росла с  $k$ . Поэтому примем

$$n_k = k_0 - k$$

с некоторым  $k_0$ . Тогда

$$m_0L \operatorname{sh} \beta_k = 2\pi(k - k_0) + \sum_{l=1}^N \Phi(\beta_k - \beta_l).$$

В термодинамическом пределе  $L \rightarrow \infty$  расстояние между уровнями стремится к нулю и можно продифференцировать это уравнение по  $\beta_k$ . Мы получим

$$m_0 \operatorname{ch} \beta = 2\pi\rho(\beta) + \int_{-\Theta}^{\Theta} d\beta' \Phi'(\beta - \beta')\rho(\beta'). \quad (30)$$

Здесь

$$\rho(\beta) = \frac{1}{L} \frac{dk}{d\beta} \quad (31)$$

— плотность состояний, связанная с числом голых частиц  $N$  в состоянии формулой

$$\int_{-\Theta}^{\Theta} d\beta \rho(\beta) = \frac{N}{L}. \quad (32)$$

При  $\Theta \rightarrow \infty$  величина  $m_0$  стремится к нулю при  $g > 0$  и к бесконечности при  $g < 0$ . При  $g > 0$  можно показать, что  $\rho(\beta)/m_0 \rightarrow \infty$ . Поэтому следует искать формальное решение однородного уравнения, которое получается из (30) при  $m_0 = 0$ ,  $\Theta \rightarrow \infty$ . Оно имеет вид

$$\rho(\beta) = \text{const} \cdot \text{ch} \frac{\pi\beta}{\pi + g}. \quad (33)$$

Коэффициент пропорциональности можно найти более аккуратным вычислением, и он оказывается конечным.

Рассмотрим теперь море фермионов с одной дыркой с быстротой  $\beta_n = \lambda$ .<sup>1</sup> В этом случае система уравнений выглядит следующим образом:

$$m_0 \text{ch} \beta = 2\pi\rho(\beta) - \frac{\Phi'(\beta - \lambda)}{L} + \int_{-\Theta}^{\Theta} d\beta' \Phi'(\beta - \beta')\rho(\beta'). \quad (34)$$

Обозначив через  $\rho_0(\beta)$  решение уравнения (30) и вычтя это уравнение из (34), получим

$$2\pi\delta\rho(\beta, \lambda) + \int_{-\Theta}^{\Theta} d\beta' \Phi'(\beta - \beta')\delta\rho(\beta', \lambda) = \frac{1}{L}\Phi'(\beta - \lambda). \quad (35)$$

Здесь

$$\delta\rho(\beta, \lambda) = \rho(\beta) - \rho_0(\beta).$$

В пределе  $\Theta \rightarrow \infty$  это уравнение легко решить методом Фурье. Действительно, пусть

$$\Phi'_\omega = \int_{-\infty}^{\infty} d\beta \Phi'(\beta) e^{i\beta\omega}, \quad \delta\rho_\omega(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} d\beta \delta\rho(\beta, \lambda) e^{i\beta\omega}.$$

Применяя преобразование Фурье к уравнению (35), получаем алгебраическое уравнение

$$2\pi\delta\rho_\omega(\lambda) + \Phi'_\omega \delta\rho_\omega(\lambda) = \frac{1}{L}\Phi'_\omega e^{i\lambda\omega}.$$

Легко проверить, что

$$\Phi'_\omega = -2\pi \frac{\text{sh} g\omega}{\text{sh} \pi\omega}, \quad \delta\rho_\omega(\lambda) = -\frac{1}{L} \frac{\text{sh} g\omega}{2 \text{sh} \frac{\pi-g}{2}\omega \text{ch} \frac{\pi+g}{2}\omega} e^{i\lambda\omega}. \quad (36)$$

Энергия возбуждения определяется как разность  $E_{N-1} - E_N$  и равна

$$\begin{aligned} \epsilon(\lambda) &= m_0 \text{ch} \lambda - m_0 L \int_{-\Theta}^{\Theta} d\beta \delta\rho(\beta, \lambda) \text{ch} \beta, \\ p(\lambda) &= m_0 \text{sh} \lambda - m_0 L \int_{-\Theta}^{\Theta} d\beta \delta\rho(\beta, \lambda) \text{sh} \beta. \end{aligned}$$

Ситуация здесь различна при положительных и отрицательных  $g$ .

При  $g < 0$  интегралы в этих выражениях сходятся при  $\Theta \rightarrow \infty$ . Но если мы положим  $\Theta = \infty$ , мы получим, что  $\epsilon(\lambda) = p(\lambda) = 0$ , так как  $\delta\rho_{\pm i} = \frac{1}{L} e^{\pm\lambda}$ . Поэтому следует перенормировать затравочную массу  $m_0$ . Явное вычисление первой поправки, связанной с полюсами функции  $\delta\rho_\omega$  в точках  $\omega = \pm \frac{i\pi}{\pi+g}$  дает

$$m_0 = M \exp\left(-\frac{g}{\pi+g}\Theta\right) \sim M \left(\frac{m_0}{\Lambda}\right)^{g/(\pi+g)}, \quad (37)$$

<sup>1</sup>К сожалению, в первоначальной версии лекции была допущена ошибка при рассмотрении моря фермионов с одной дополнительной частицей. Я благодарен И. Протопопову, который заметил ее, решая задачу 6.4. Исследование дополнительной частицы, на самом деле, требует рассмотрения так называемых струнных решений уравнений Бете.

где  $M$  — конечная постоянная размерности массы. Сравнивая с нашей предыдущей оценкой

$$m_0 \sim M^{2-\beta^2}, \quad (38)$$

где  $\beta$  — константа связи модели синус-Гордона, получаем соотношение

$$\frac{g}{\pi} = 1 - \beta^2,$$

отличное от соотношения

$$\frac{g}{\pi} = \beta^{-2} - 1,$$

приведенного в Лекции 2. Можно предположить, что нормировка константы связи  $g_{\text{BA}}$  в анзаце Бете отлична от физической нормировки  $g_{\text{OPE}}$ , определенной операторными разложениями, за пределами первой поправки по теории возмущений. Тем не менее, если постулировать

$$\frac{g_{\text{BA}}}{\pi} = \frac{g_{\text{OPE}}}{\pi + g_{\text{OPE}}},$$

то результаты, полученные разными способами, совпадают. Заметим, что область определения (21) для константы  $g_{\text{BA}}$  эквивалентна области релевантности возмущения для модели синус-Гордона:

$$0 < \beta^2 < 2.$$

При  $g > 0$  ситуация несколько иная. Полусы функции  $\delta\rho_\omega(\lambda)$  при  $\omega = \pm i\pi/(\pi + g)$  становятся ближе к вещественной оси, чем точки  $\pm i$ . Это значит, что интегралы в формулах для импульса и энергии расходятся, что соответствует  $m_0 \rightarrow 0$ . Строго говоря, требуется явное вычисление  $\delta\rho(\beta, \lambda)$  и затем интегралов для энергии и импульса возбуждений. Однако вся эта процедура приводит к ответам, получающимся аналитическим продолжением из области  $g < 0$ . Это значит, что формула для перенормировки массы (37) верна и в этом случае.

Энергия и импульс возбуждения равны ( $g = g_{\text{BA}}$ )

$$\epsilon(\lambda) = m \operatorname{ch} \frac{\pi\lambda}{\pi + g}, \quad p(\lambda) = m \operatorname{sh} \frac{\pi\lambda}{\pi + g}, \quad m = \frac{M}{g} \operatorname{ctg} \left( \frac{\pi}{2} \frac{\pi - g}{\pi + g} \right). \quad (39)$$

Таким образом, частицы имеют релятивистский спектр с быстротой

$$\theta = \frac{\pi\lambda}{\pi + g}.$$

Совершенно аналогично вычисляется спектр дырок, соответствующий античастицам.

Следует еще вычислить  $S$ -матрицу частиц и дырок. Для этого надо рассмотреть систему из двух частиц и сравнить уравнения на фазы этих частиц с уравнением на фазы, следующим из  $S$ -матрицы. Реально сделать это довольно сложно, поэтому проще найти  $S$ -матрицу так, как она была найдена для  $O(N)$ -моделей в прошлой лекции. Явный вид в базисе  $(++, +-, -+, --)$  следующий:

$$S(\theta) = \left( S_{\beta_1\beta_2}^{\alpha_1\alpha_2}(\theta) \right) = \begin{pmatrix} a(\theta) & & & & \\ & b(\theta) & c(\theta) & & \\ & c(\theta) & b(\theta) & & \\ & & & & a(\theta) \end{pmatrix}, \quad (40)$$

причем

$$\frac{b(\theta)}{a(\theta)} = \frac{\operatorname{sh} \frac{\theta}{p}}{\operatorname{sh} \frac{i\pi - \theta}{p}}, \quad \frac{c(\theta)}{a(\theta)} = \frac{\operatorname{sh} \frac{i\pi}{p}}{\operatorname{sh} \frac{i\pi - \theta}{p}}, \quad \left( \beta^2 = 2 \frac{p}{p+1} \right). \quad (41)$$

Общий множитель имеет довольно сложный вид:

$$a(\theta) = - \frac{\Gamma\left(\frac{1}{p}\right) \Gamma\left(1 + \frac{i\theta}{\pi p}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{p} + \frac{i\theta}{\pi p}\right)} \prod_{n=0}^{\infty} \frac{R_n(\theta) R_n(i\pi - \theta)}{R_n(0) R_n(i\pi)}, \quad R_n(\theta) = \frac{\Gamma\left(\frac{2n}{p} + \frac{i\theta}{\pi p}\right) \Gamma\left(1 + \frac{2n}{p} + \frac{i\theta}{\pi p}\right)}{\Gamma\left(\frac{2n+1}{p} + \frac{i\theta}{\pi p}\right) \Gamma\left(1 + \frac{2n-1}{p} + \frac{i\theta}{\pi p}\right)}. \quad (42)$$

При  $0 < p < 1$  ( $0 < \beta^2 < 1$ ) в теории имеются связанные состояния, соответствующие полюсам в точках

$$\theta_n = i\pi - i\pi pn, \quad n = 1, 2, \dots, \left\lfloor \frac{1}{p} \right\rfloor.$$

Массы этих состояний равны

$$M_n = 2m \sin \frac{\pi pn}{2} \quad (43)$$

### Литература

- [1] М. Годен, Волновая функция Бете, М., «Мир», 1987
- [2] Н. М. Боголюбов, А. Г. Изергин, В. Е. Корепин, Корреляционные функции интегрируемых систем и квантовый метод обратной задачи, М., «Наука», 1992

### Задачи

1. Получите (3) из (1). Выведите (14).
2. Получите (9).
3. Выведите (19).
4. Получите соотношения (37) и (39).
5. Методом анзаца Бете найдите волновую функцию системы  $N$  тождественных нерелятивистских бозонов, взаимодействующих через потенциал

$$U(x) = c\delta(x).$$

Найдите систему уравнений Бете для них. Напишите эту систему в термодинамическом пределе при конечной плотности частиц  $n$ . Найдите энергию основного состояния в пределе  $c \rightarrow \infty$ .