Лекция 6
Модель Тирринга: решение методом анзаца Бете

Рассмотрим массивную модель Тирринга

$$S^{TM}[\psi,\bar\psi]=\int d^2x\,\left(\bar\psi(i\hat\partial-m_0)\psi-\frac{g}{2}(\bar\psi\gamma^\mu\psi)^2\right),\tag{1}$$

причем

$$\psi=\begin{pmatrix}\psi_+\\ \psi_-\end{pmatrix},\qquad \gamma^0=\begin{pmatrix} & -i\\ i & \end{pmatrix}=\sigma^2,\qquad \gamma^1=\begin{pmatrix} & i\\ i & \end{pmatrix}=i\sigma^1,\qquad \gamma^3=\gamma^0\gamma^1=\begin{pmatrix}1 & \\ & -1\end{pmatrix}=\sigma^3.\tag{2}$$

Гамильтониан модели Тирринга имеет вид

$$H=\int dx\,(-i\psi^+\sigma^3\partial_x\psi+m_0\psi^+\sigma^2\psi+2g\psi_+^+\psi_+\psi_-^+\psi_-)\tag{3}$$

с коммутационными соотношениями

$$\psi_{\alpha'}^+(x')\psi_\alpha(x)+\psi_\alpha(x)\psi_{\alpha'}^+(x')=\delta_{\alpha'\alpha}\delta(x'-x),\tag{4}$$

причем импульс P и оператор числа частиц Q имеют вид

$$P=-i\int dx\,\psi^+\partial_x\psi,\qquad Q=\int dx\,\psi^+\psi.\tag{5}$$

Давайте вспомним картинку Дирака. Спектр $\epsilon^2-p^2=m^2$ имеет две ветви: $\epsilon=\pm\sqrt{p^2+m^2}$. Согласно принципу Паули в одном состоянии может находиться одно возбуждение. Поэтому стандартный вакуум образован “морем” фермионных возбуждений с отрицательными энергиями. Если мы удалим все это “море”, то возникнет “голый вакуум” или *псевдовакуум*. Очевидно, голый вакуум имеет бесконечно большую энергию и не может претендовать на роль основного состояния. Тем не менее, истинный вакуум можно найти как “возбуждение” над псевдовакуумом.

Рассмотрим сначала случай свободных фермионов $g=0$. Обозначим через $|\Omega\rangle$ состояние, удовлетворяющее условиям

$$\psi_\alpha(x)|\Omega\rangle=0,\qquad \langle\Omega|\psi_\alpha^+(x)=0.\tag{6}$$

Введем волновую функцию “N-частичного” состояния:

$$|\chi_N\rangle=\int d^Nx\,\chi^{\alpha_1\ldots\alpha_N}(x_1,\ldots,x_N)\psi_{\alpha_1}^+(x_1)\ldots\psi_{\alpha_N}^+(x_N)|\Omega\rangle.\tag{7}$$

Эти функции являются собственными векторами оператора Q:

$$Q|\chi_N\rangle=N|\chi_N\rangle.$$

Таким образом, полное пространство состояний $\mathcal H$ распадается в сумму по собственным значениям Q:

$$\mathcal H\simeq\bigoplus_{N=0}^\infty\mathcal H_N,\qquad v\in\mathcal H_N\Leftrightarrow Qv=Nv.\tag{8}$$

Действие $\hat H_N$ гамильтониана на волновую функцию $\chi^{\alpha_1\ldots\alpha_N}(x_1,\ldots,x_N)$, определенное уравнением

$$H|\chi_N\rangle=\int d^Nx\,(\hat H_N\chi)^{\alpha_1\ldots\alpha_N}(x_1,\ldots,x_N)\psi_{\alpha_1}^+(x_1)\ldots\psi_{\alpha_N}^+(x_N)|\Omega\rangle,$$

имеет вид

$$\hat H_N=\sum_{k=1}^N(-i\sigma_k^3\partial_{x_k}+m_0\sigma_k^2),$$

где σ_k^i действует на пространстве k-й частицы. При $N=1$ собственное состояние имеет вид

$$\chi_\lambda(x)=\begin{pmatrix}e^{\lambda/2}\\ ie^{-\lambda/2}\end{pmatrix}e^{ixm_0\operatorname{sh}\lambda}.\tag{9}$$

Многочастичное решение свободнополевого гамильтониана имеет вид

$$\chi^{\alpha_1\ldots\alpha_N}_{\lambda_1\ldots\lambda_N}(x_1,\ldots,x_N)=\sum_\sigma(-1)^\sigma\prod_{k=1}^N\chi^{\alpha_{\sigma_k}}_{\lambda_k}(x_{\sigma_k}). \tag{10}$$

Энергия N-частичного состояния равна

$$E_N(\lambda_1,\ldots,\lambda_N)=m_0\sum_{k=1}^N\operatorname{ch}\lambda_k. \tag{11}$$

Какие значения могут принимать параметры λ? Если система находится в ящике размера L с циклическими граничными условиями, то "быстроты" λ_k являются решениями уравнений

$$e^{im_0L\operatorname{sh}\lambda_k}=1\qquad k=1,\ldots,N. \tag{12}$$

Следовательно,

$$\operatorname{sh}\lambda_k=\frac{2\pi n_k}{m_0L},\qquad n_k\in\mathbb{Z}.$$

Это значит, что λ_k находится либо на вещественной оси $\mathbb{R}$, либо на прямой $i\pi+\mathbb{R}$. Последние решения соответствуют отрицательным энергиям и конденсат таких возбуждений может дать истинный вакуум. Очевидно, основному состоянию соответствует состояние, в котором все состояния отрицательной энергии заполнены. Положим $\lambda_k=i\pi+\beta_k$. Чтобы определить вакуумную энергию, введем ультрафиолетовое обрезание

$$-\Theta<\beta_k<\Theta,\qquad\Theta\simeq\log\frac{\Lambda}{m_0}. \tag{13}$$

В термодинамическом пределе $L\to\infty$ энергия вакуума равна

$$E_0=-L\int_{-\Theta}^{\Theta}d\beta\,\rho(\beta)m_0\operatorname{ch}\beta,\qquad\rho(\beta)=\frac{1}{L}\left|\frac{dn}{d\beta}\right|=\frac{m_0}{2\pi}\operatorname{ch}\beta.$$

Конечно, энергия основного состояния сама по себе бессмысленна, интересны энергии возбужденных состояний. Возбуждению с быстротой θ соответствует дополнительный корень в точке

$$\lambda_k=\theta\qquad\text{(частица)},$$

или дырка (отсутствие корня) в точке

$$\lambda_k=\theta+i\pi\qquad\text{(античастица)}.$$

Поскольку корни уравнений (12) никак не связаны друг с другом, мы получаем систему невзаимодействующих частиц и античастиц с $p=(m\operatorname{ch}\theta,m\operatorname{sh}\theta)$, подчиняющихся принципу Паули, то есть то, что мы и должны были получить.

Теперь включим взаимодействие. Оператор взаимодействия в (3) коммутирует с оператором числа частиц Q, а по отношению к псевдовакууму $|\Omega\rangle$ нет никаких античастиц. Поэтому оператор взаимодействия действует внутри пространств $\mathcal{H}_N$:

$$\hat H_N=\sum_{k=1}^N(-i\sigma_k^3\partial_{x_k}+m_0\sigma_k^2)+g\sum_{k<l}^N\delta(x_k-x_l)(1-\sigma_k^3\sigma_l^3). \tag{14}$$

Конструкция из сигма-матриц в правой части есть:

$$\frac{1}{2}(1\otimes1-\sigma^3\otimes\sigma^3)^{\alpha_1'\alpha_2'}_{\alpha_1\alpha_2}=\delta_{\alpha_1'+}\delta_{\alpha_1+}\delta_{\alpha_2'-}\delta_{\alpha_2-}+\delta_{\alpha_1'-}\delta_{\alpha_1-}\delta_{\alpha_2'+}\delta_{\alpha_2+}. \tag{15}$$

Член взаимодействия в гамильтониане (14) плохо определен. Действительно, из-за дельта-функционального члена волновая функция разрывна при $x_k=x_l$. В то же время, действие гамильтониана зависит от волновой функции как раз в этой точке. Дельта функцию следует регуляризовать. Покажем, что ответ не зависит от регуляризации. Рассмотрим уравнение

$$f'(x) - c\delta(x)f(x) = g(x).$$

Регуляризуем дельта-функцию произвольным образом:

$$f'(x) - c\delta_a(x)f(x) = g(x), \qquad \lim_{a\to 0}\delta_a(x) = \delta(x). \tag{16}$$

Пусть

$$\delta_a(x) = \epsilon'_a(x).$$

Тогда

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = c\epsilon'_a(x) + \frac{g(x)}{f(x)}$$

и при достаточно малых a имеем

$$f(x) = \mathrm{const}\, e^{c\epsilon_a(x)}.$$

Отсюда в пределе $a \to 0$ имеем

$$f(+0) = e^c f(-0). \tag{17}$$

Одночастичные состояния опять описываются решениями (9). Рассмотрим двухчастичное состояние. Поскольку взаимодействие контактное (отлично от нуля только при $x_1 = x_2$), при $x_1 \neq x_2$ волновая функция представляет собой решение уравнений для свободных фермионов. Благодаря законам сохранения энергии и импульса, рассеяние безотражательно и мы имеем:

$$\chi^{\alpha_1\alpha_2}_{\lambda_1\lambda_2}(x_1,x_2) = \begin{cases} A_{12}\chi^{\alpha_1}_{\lambda_1}(x_1)\chi^{\alpha_2}_{\lambda_2}(x_2) - A_{21}\chi^{\alpha_1}_{\lambda_2}(x_1)\chi^{\alpha_2}_{\lambda_1}(x_2) & \text{при } x_1 < x_2, \\ A_{21}\chi^{\alpha_1}_{\lambda_1}(x_1)\chi^{\alpha_2}_{\lambda_2}(x_2) - A_{12}\chi^{\alpha_1}_{\lambda_2}(x_1)\chi^{\alpha_2}_{\lambda_1}(x_2) & \text{при } x_1 > x_2. \end{cases} \tag{18}$$

Эта функция, очевидно, антисимметрична по (α_1, x_1), (α_2, x_2) и содержит (с точностью до общего множителя) один свободный параметр A_{12}/A_{21}, который должен зависеть от константы связи g. Прямое вычисление дает

$$\frac{A_{12}}{A_{21}} = R(\lambda_1 - \lambda_2), \qquad R(\lambda) = e^{-i\Phi(\lambda)} = \frac{\operatorname{ch}\frac{\lambda+ig}{2}}{\operatorname{ch}\frac{\lambda-ig}{2}}. \tag{19}$$

Функцию $\Phi(\lambda)$ удобно фиксировать условием кососимметричности

$$\Phi(-\lambda) = -\Phi(\lambda), \tag{20}$$

считая, что разрезы лежат на лучах $(ig, i\infty)$, $(-ig, -i\infty)$. Величины λ_k естественно определены по модулю $2\pi i$.

Заметим, что функция $R(\lambda)$ периодична по g с периодом 2π. Так как мы будем строить вакуум, близкий к вакууму свободных фермионов, следует считать, что решение имеет смысл при

$$-\pi < g < \pi. \tag{21}$$

Теперь нетрудно построить общее N-частичное решение (*анзац Бете*):

$$\chi^{\alpha_1\ldots\alpha_N}_{\lambda_1\ldots\lambda_N}(x_1,\ldots,x_N) = \sum_\tau (-1)^{\sigma\tau} A_\tau \prod_{k=1}^N \chi^{\alpha_{\sigma_k}}_{\lambda_{\tau_k}}(x_{\sigma_k}) \quad \text{при } x_{\sigma_1} < \ldots < x_{\sigma_N}. \tag{22}$$

Коэффициенты A удовлетворяют соотношениям

$$A_{\ldots,i,i+1,\ldots} = R(\lambda_i - \lambda_{i+1})A_{\ldots,i+1,i,\ldots}. \tag{23}$$

Наложим теперь циклическое граничное условие

$$\chi(\ldots, x_k + L, \ldots) = \chi(\ldots, x_k, \ldots). \tag{24}$$

Тогда получим

$$e^{im_0L\,\mathrm{sh}\,\lambda_k}=\prod_{\substack{l=1\\ l\neq k}}^{N}R(\lambda_k-\lambda_l). \tag{25}$$

Эта система уравнений на параметры λ_k называется системой *уравнений Бете*. Уравнения Бете — нелинейные уравнения с N неизвестными, причем, как ожидается, в физически интересных случаях $N\to\infty$. Тем не менее, сделан огромный шаг: решение задачи сведено к решению системы алгебраических уравнений. Каждому решению этой системы, т. е. каждому набору чисел $(\lambda_1,\ldots,\lambda_N)$, удовлетворяющему (25), соответствует единственное состояние системы. Компоненты λ_k решения называются *корнями* уравнений Бете.

Логарифмируя уравнения Бете, найдем

$$m_0L\,\mathrm{sh}\,\lambda_k+\sum_{l=1}^{N}\Phi(\lambda_k-\lambda_l)=2\pi n_k, \tag{26}$$

причем энергия и импульс состояния равны

$$E_N(\lambda_1,\ldots,\lambda_N)=m_0\sum_{i=1}^{N}\mathrm{ch}\,\lambda_i,\qquad P_N(\lambda_1,\ldots,\lambda_N)=m_0\sum_{i=1}^{N}\mathrm{sh}\,\lambda_i. \tag{27}$$

Зададимся вопросом: как могут располагаться корни уравнений Бете? Естественно, подходят вещественные корни и корни на прямой $i\pi+\mathbb{R}$. Общие комплексные корни могут располагаться симметрично относительно одной из прямых $\mathbb{R}$ и $i\pi+\mathbb{R}$. Более подробный анализ показывает, что других типов решений не может быть.

Можно показать, что решения уравнений Бете взаимно-однозначно связаны с наборами чисел $(n_1,\ldots,n_N)$. Понятно также, что различным n_k соответствуют различные λ_k и наоборот. Из принципа Паули следует, что все λ_k должны быть различны и что, следовательно,

$$n_k\neq n_l\qquad(k\neq l). \tag{28}$$

Естественно предположить, что наименьшей энергии отвечает решение уравнений Бете с отрицательными энергиями “голых частиц”, т. е. с $\mathrm{Im}\,\lambda_k=\pi$. Будем писать

$$\lambda_k=i\pi+\beta_k.$$

Чтобы минимизировать энергию, надо заполнить все состояния отрицательной энергии, поэтому надо, чтобы целые числа n_k шли через единицу:

$$n_{k+1}-n_k=\pm1, \tag{29}$$

причем удобно выбрать знак так, чтобы величина β_k росла с k. Поэтому примем

$$n_k=k_0-k$$

с некоторым k_0. Тогда

$$m_0L\,\mathrm{sh}\,\beta_k=2\pi(k-k_0)+\sum_{l=1}^{N}\Phi(\beta_k-\beta_l).$$

В термодинамическом пределе $L\to\infty$ расстояние между уровнями стремится к нулю и можно продифференцировать это уравнение по β_k. Мы получим

$$m_0\,\mathrm{ch}\,\beta=2\pi\rho(\beta)+\int_{-\Theta}^{\Theta}d\beta'\,\Phi'(\beta-\beta')\rho(\beta'). \tag{30}$$

Здесь

$$\rho(\beta)=\frac{1}{L}\frac{dk}{d\beta} \tag{31}$$

— плотность состояний, связанная с числом голых частиц N в состоянии формулой

$$\int_{-\Theta}^{\Theta} d\beta\, \rho(\beta) = \frac{N}{L}. \tag{32}$$

При $\Theta \to \infty$ величина m_0 стремиться к нулю при $g > 0$ и к бесконечности при $g < 0$. При $g > 0$ можно показать, что $\rho(\beta)/m_0 \to \infty$. Поэтому следует искать формальное решение однородного уравнения, которое получается из (30) при $m_0 = 0$, $\Theta \to \infty$. Оно имеет вид

$$\rho(\beta) = \mathrm{const} \cdot \mathrm{ch}\, \frac{\pi\beta}{\pi + g}. \tag{33}$$

Коэффициент пропорциональности можно найти более аккуратным вычислением, и он оказывается конечным.

Рассмотрим теперь море фермионов с одной дыркой с быстротой $\beta_n = \lambda$.[1] В этом случае система уравнений выглядит следующим образом:

$$m_0\, \mathrm{ch}\, \beta = 2\pi\rho(\beta) - \frac{\Phi'(\beta - \lambda)}{L} + \int_{-\Theta}^{\Theta} d\beta'\, \Phi'(\beta - \beta')\rho(\beta'). \tag{34}$$

Обозначив через $\rho_0(\beta)$ решение уравнения (30) и вычтя это уравнение из (34), получим

$$2\pi\delta\rho(\beta, \lambda) + \int_{-\Theta}^{\Theta} d\beta'\, \Phi'(\beta - \beta')\delta\rho(\beta', \lambda) = \frac{1}{L}\Phi'(\beta - \lambda). \tag{35}$$

Здесь

$$\delta\rho(\beta, \lambda) = \rho(\beta) - \rho_0(\beta).$$

В пределе $\Theta \to \infty$ это уравнение легко решить методом Фурье. Действительно, пусть

$$\Phi'_\omega = \int_{-\infty}^{\infty} d\beta\, \Phi'(\beta) e^{i\beta\omega}, \qquad \delta\rho_\omega(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} d\beta\, \delta\rho(\beta, \lambda) e^{i\beta\omega}.$$

Применяя преобразование Фурье к уравнению (35), получаем алгебраическое уравнение

$$2\pi\delta\rho_\omega(\lambda) + \Phi'_\omega \delta\rho_\omega(\lambda) = \frac{1}{L}\Phi'_\omega e^{i\lambda\omega}.$$

Легко проверить, что

$$\Phi'_\omega = -2\pi \frac{\mathrm{sh}\, g\omega}{\mathrm{sh}\, \pi\omega}, \qquad \delta\rho_\omega(\lambda) = -\frac{1}{L}\, \frac{\mathrm{sh}\, g\omega}{2\, \mathrm{sh}\, \frac{\pi - g}{2}\omega\, \mathrm{ch}\, \frac{\pi + g}{2}\omega} e^{i\lambda\omega}. \tag{36}$$

Энергия возбуждения определяется как разность $E_{N-1} - E_N$ и равна

$$\epsilon(\lambda) = m_0\, \mathrm{ch}\, \lambda - m_0 L \int_{-\Theta}^{\Theta} d\beta\, \delta\rho(\beta, \lambda)\, \mathrm{ch}\, \beta,$$

$$p(\lambda) = m_0\, \mathrm{sh}\, \lambda - m_0 L \int_{-\Theta}^{\Theta} d\beta\, \delta\rho(\beta, \lambda)\, \mathrm{sh}\, \beta.$$

Ситуация здесь различна при положительных и отрицательных g.

При $g < 0$ интегралы в этих выражениях сходятся при $\Theta \to \infty$. Но если мы положим $\Theta = \infty$, мы получим, что $\epsilon(\lambda) = p(\lambda) = 0$, так как $\delta\rho_{\pm i} = \frac{1}{L} e^{\pm\lambda}$. Поэтому следует перенормировать затравочную массу m_0. Явное вычисление первой поправки, связанной с полюсами функции $\delta\rho_\omega$ в точках $\omega = \pm\frac{i\pi}{\pi + g}$ дает

$$m_0 = M \exp\left(-\frac{g}{\pi + g}\Theta\right) \sim M \left(\frac{m_0}{\Lambda}\right)^{g/(\pi + g)}, \tag{37}$$

[1] К сожалению, в первоначальной версии лекции была допущена ошибка при рассмотрении моря фермионов с одной дополнительной частицей. Я благодарен И. Протопопову, который заметил ее, решая задачу 6.4. Исследование дополнительной частицы, на самом деле, требует рассмотрения так называемых струнных решений уравнений Бете.

где M — конечная постоянная размерности массы. Сравнивая с нашей предыдущей оценкой

$$m_0 \sim M^{2-\beta^2}, \tag{38}$$

где β — константа связи модели синус-Гордона, получаем соотношение

$$\frac{g}{\pi} = 1 - \beta^2,$$

отличное от соотношения

$$\frac{g}{\pi} = \beta^{-2} - 1,$$

приведенного в Лекции 2. Можно предположить, что нормировка константы связи g_{BA} в анзаце Бете отлична от физической нормировки g_{OPE}, определенной операторными разложениями, за пределами первой поправки по теории возмущений. Тем не менее, если постулировать

$$\frac{g_{\mathrm{BA}}}{\pi} = \frac{g_{\mathrm{OPE}}}{\pi + g_{\mathrm{OPE}}},$$

то результаты, полученные разными способами, совпадают. Заметим, что область определения (21) для константы g_{BA} эквивалентна области релевантности возмущения для модели синус-Гордона:

$$0 < \beta^2 < 2.$$

При $g > 0$ ситуация несколько иная. Полюсы функции $\delta\rho_\omega(\lambda)$ при $\omega = \pm i\pi/(\pi + g)$ становятся ближе к вещественной оси, чем точки $\pm i$. Это значит, что интегралы в формулах для импульса и энергии расходятся, что соответствует $m_0 \to 0$. Строго говоря, требуется явное вычисление $\delta\rho(\beta, \lambda)$ и затем интегралов для энергии и импульса возбуждений. Однако вся эта процедура приводит к ответам, получающимся аналитическим продолжением из области $g < 0$. Это значит, что формула для перенормировки массы (37) верна и в этом случае.

Энергия и импульс возбуждения равны ($g = g_{\mathrm{BA}}$)

$$\epsilon(\lambda) = m \operatorname{ch} \frac{\pi\lambda}{\pi + g}, \qquad p(\lambda) = m \operatorname{sh} \frac{\pi\lambda}{\pi + g}, \qquad m = \frac{M}{g} \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}\frac{\pi - g}{\pi + g}\right). \tag{39}$$

Таким образом, частицы имеют релятивистский спектр с быстротой

$$\theta = \frac{\pi\lambda}{\pi + g}.$$

Совершенно аналогично вычисляется спектр дырок, соответствующий античастицам.

Следует еще вычислить S-матрицу частиц и дырок. Для этого надо рассмотреть систему из двух частиц и сравнить уравнения на фазы этих частиц с уравнением на фазы, следующим из S-матрицы. Реально сделать это довольно сложно, поэтому проще найти S-матрицу так, как она была найдена для $O(N)$-моделей в прошлой лекции. Явный вид в базисе $(++, +-, -+, --)$ следующий:

$$S(\theta) = \left(S^{\alpha_1\alpha_2}_{\beta_1\beta_2}(\theta)\right) = \begin{pmatrix} a(\theta) & & & \\ & b(\theta) & c(\theta) & \\ & c(\theta) & b(\theta) & \\ & & & a(\theta) \end{pmatrix}, \tag{40}$$

причем

$$\frac{b(\theta)}{a(\theta)} = \frac{\operatorname{sh}\frac{\theta}{p}}{\operatorname{sh}\frac{i\pi - \theta}{p}}, \qquad \frac{c(\theta)}{a(\theta)} = \frac{\operatorname{sh}\frac{i\pi}{p}}{\operatorname{sh}\frac{i\pi - \theta}{p}}, \qquad \left(\beta^2 = 2\frac{p}{p+1}\right). \tag{41}$$

Общий множитель имеет довольно сложный вид:

$$a(\theta) = -\frac{\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)\Gamma\left(1 + \frac{i\theta}{\pi p}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{p} + \frac{i\theta}{\pi p}\right)} \prod_{n=0}^{\infty} \frac{R_n(\theta) R_n(i\pi - \theta)}{R_n(0) R_n(i\pi)}, \qquad R_n(\theta) = \frac{\Gamma\left(\frac{2n}{p} + \frac{i\theta}{\pi p}\right)\Gamma\left(1 + \frac{2n}{p} + \frac{i\theta}{\pi p}\right)}{\Gamma\left(\frac{2n+1}{p} + \frac{i\theta}{\pi p}\right)\Gamma\left(1 + \frac{2n-1}{p} + \frac{i\theta}{\pi p}\right)}. \tag{42}$$

При $0 < p < 1$ $(0 < \beta^2 < 1)$ в теории имеются связанные состояния, соответствующие полюсам в точках

$$\theta_n = i\pi - i\pi p n, \qquad n = 1, 2, \ldots, \left\lfloor \frac{1}{p} \right\rfloor .$$

Массы этих состояний равны

$$M_n = 2m \sin \frac{\pi p n}{2} \tag{43}$$

Литература

[1] М. Годен, Волновая функция Бете, М., «Мир», 1987

[2] Н. М. Боголюбов, А. Г. Изергин, В. Е. Корепин, Корреляционные функции интегрируемых систем и квантовый метод обратной задачи, М., «Наука», 1992

Задачи

1. Получите (3) из (1). Выведите (14).

2. Получите (9).

3. Выведите (19).

4. Получите соотношения (37) и (39).

5. Методом анзаца Бете найдите волновую функцию системы N тождественных нерелятивистских бозонов, взаимодействующих через потенциал

$$U(x) = c\delta(x).$$

Найдите систему уравнений Бете для них. Напишите эту систему в термодинамическом пределе при конечной плотности частиц n. Найдите энергию основного состояния в пределе $c \to \infty$.