Лекция 7
Спиновая цепочка Гайзенберга и ее скейлинговый предел

Рассмотрим цепочку из N спинов $S = 1/2$, то есть пространство

$$\mathcal{H}_N = \underbrace{\mathbb{C}^2 \otimes \cdots \otimes \mathbb{C}^2}_{N}, \tag{1}$$

на котором действует гамильтониан

$$H_{XYZ} = -\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\left(J_x\sigma_n^x\sigma_{n+1}^x + J_y\sigma_n^y\sigma_{n+1}^y + J_z\sigma_n^z\sigma_{n+1}^z\right). \tag{2}$$

Здесь σ_n^i действует на n-ю компоненту в $\mathcal{H}_N$, причем $(N+1)$-я компонента отождествляется с первой. Такая модель называется *XYZ-моделью Гайзенберга* с циклическими граничными условиями. В случае $J_x = J_y$ модель называют *XXZ-моделью*, а в случае $J_x = J_y = \pm J_z$ — *XXX-моделью.* Мы будем считать N четным числом.

Поскольку физика не зависит от общего множителя в гамильтониане, обычно вводят обозначения

$$\Gamma = J_y/J_x, \qquad \Delta = J_z/J_x \tag{3}$$

При этом принимается, что

$$J_x > 0, \qquad |\Gamma| \leq 1, \qquad |\Delta| \leq |\Gamma| \quad \text{или} \quad |\Delta| \geq 1.$$

Без ограничения общности мы положим $J_x = 1$. Гамильтониан записывается в виде

$$H_{XYZ} = -\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\left((1+\Gamma)(\sigma_n^+\sigma_{n+1}^- + \sigma_n^-\sigma_{n+1}^+) + (1-\Gamma)(\sigma_n^+\sigma_{n+1}^+ + \sigma_n^-\sigma_{n+1}^-) + \Delta\sigma_n^z\sigma_{n+1}^z\right). \tag{4}$$

Здесь

$$\sigma^+ = \frac{\sigma^x + i\sigma^y}{2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma^- = \frac{\sigma^x - i\sigma^y}{2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{5}$$

— операторы повышения и понижения спина.

Применим к этому гамильтониану преобразование Йордана–Вигнера:

$$\sigma_n^z = 2a_n^+a_n - 1, \qquad \sigma_n^+ = a_n^+\exp\left(i\pi\sum_{j=1}^{n-1}a_j^+a_j\right), \qquad \sigma_n^- = a_n\exp\left(-i\pi\sum_{j=1}^{n-1}a_j^+a_j\right), \tag{6}$$

где a_n, a_n^+ — фермионные операторы:

$$a_m^+a_n + a_na_m^+ = \delta_{mn}, \qquad a_ma_n + a_na_m = a_m^+a_n^+ + a_n^+a_m^+ = 0.$$

Обратное преобразование имеет вид

$$a_n = \sigma_n^-\prod_{j=1}^{n-1}(-\sigma_j^z), \qquad a_n^+ = \sigma_n^+\prod_{j=1}^{n-1}(-\sigma_j^z). \tag{7}$$

Получаем

$$H_{XYZ} = -\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1+\Gamma}{2}(a_{n+1}^+a_n + a_n^+a_{n+1}) + \frac{1-\Gamma}{2}(a_n^+a_{n+1}^+ - a_na_{n+1}) \right.$$
$$\left. + 2\Delta(a_n^+a_na_{n+1}^+a_{n+1} - a_n^+a_n)\right). \tag{8}$$

Рассмотрим сначала случай *XY-модели*, т. е. модели с $\Delta = 0$. В этом случае гамильтониан квадратичен по фермионам и легко диагонализуется. Положим

$$a_n = \frac{1}{N^{1/2}} \sum_k a_k e^{ikn}. \tag{9}$$

Тогда

$$H_{XY} = -\sum_k \left((1+\Gamma)\cos k \cdot a_k^+ a_k + i\frac{1-\Gamma}{2}\sin k \cdot (a_k^+ a_{-k}^+ + a_k a_{-k}) \right). \tag{10}$$

Гамильтонианы такого вида диагонализуются с помощью преобразования Боголюбова. Для начала рассмотрим простой случай $\Gamma = 1$. Очевидно, зона Бриллюэна $-\pi \le k < \pi$ разбивается на две области: 1) $-\frac{\pi}{2} \le k < \frac{\pi}{2}$ и 2) $-\pi \le k < -\frac{\pi}{2}$ или $\frac{\pi}{2} \le k < \pi$. Очевидно, энергии в первой области отрицательны и эта часть зоны будет полностью заполнена: $k_F = \pi/2$. По-другому, можно сказать так: основное состояние системы $|0\rangle$ удовлетворяет соотношению $a_k|0\rangle = 0$ во второй области и $a_k^+|0\rangle = 0$ в первой области. Это диктует следующее преобразование Боголюбова:

$$b_k = a_{k-\pi}, \qquad b_k^+ = a_{k-\pi}^+, \qquad b'_k = ia_k^+, \qquad b'^+_k = -ia_k, \qquad -\frac{\pi}{2} \le k < \frac{\pi}{2}, \tag{11}$$

считая, что k определено по модулю 2π. Множители $\pm i$ введены произвольно, чтобы упростить дальнейшие формулы. Тогда гамильтониан примет вид

$$H_{XY} = \sum_{-\pi/2 \le k < \pi/2} \cos k\, (b_k^+ b_k + b'^+_k b'_k).$$

Операторы b_k^+, b_k являются операторами рождения-уничтожения частиц, а b'^+_k, b'_k — античастиц.

Построим преобразование Боголюбова в общем случае так, чтобы оно переходило в преобразование (11) в пределе $\Gamma \to 1$. Положим

$$a_k = \alpha'_k b'_k + \beta'_k b'^+_{-k}, \qquad a_k^+ = \beta'^*_k b'_{-k} + \alpha'^*_k b'^+_k, \qquad |\alpha'_k|^2 + |\beta'_k|^2 = 1, \qquad \alpha'_k \beta'_{-k} + \alpha'_{-k}\beta'_k = 0. \tag{12}$$

Подставляя (12) в (10), и требуя, чтобы члены, пропорциональные $b'^+ b'^+$ и $b' b'$ обратились в нуль, получаем

$$\alpha'_k = -\sin\frac{\kappa}{2}, \qquad \beta'_k = i\cos\frac{\kappa}{2}, \qquad \operatorname{tg}\kappa = \frac{1-\Gamma}{1+\Gamma}\operatorname{tg} k. \tag{13}$$

Это решение хорошо определено в первой половине, $-\pi/2 < k < \pi/2$, зоны Бриллюэна. Оставшуюся половину перенесем в эту же область, и заменой $\kappa \to \kappa - \pi$ получим

$$\alpha_k = \cos\frac{\kappa}{2}, \qquad \beta_k = i\sin\frac{\kappa}{2}. \tag{14}$$

Гамильтониан равен

$$H_{XY} = \sum_{-\pi/2 < k < \pi/2} \epsilon_k (b_k^+ b_k + b'^+_k b'_k), \qquad \epsilon_k = \sqrt{(1+\Gamma)^2\cos^2 k + (1-\Gamma)^2 \sin^2 k}. \tag{15}$$

В системе имеется массовая щель величины $(1 - |\Gamma|)$. В пределе $\Gamma \to \pm 1$ массовая щель исчезает и система попадает в критическую точку, а вблизи критической точки можно осуществить скейлинговый предел $a \to 0$ (a — параметр решетки) при соответствующем перемасштабировании остальных параметров.

Без ограничения общности можно ограничиться пределом $\Gamma \to 1$. Положим $pa = \pi/2 - |k|$. Тогда при $|p|a \ll 1$ имеем

$$\epsilon(p) = 2a\sqrt{m^2 + p^2}, \qquad m = \frac{1-\Gamma}{2a}. \tag{16}$$

Гамильтониан $H_{FF} = \frac{1}{2a} H_{XY}$ представляет собой гамильтониан свободных дираковских фермионов.

Рассмотрим преобразование Боголюбова вблизи точек $\kappa = \pm\pi/2$. Пусть, например $k = \pi/2 - pa$. Из (13) мы видим, что при $\Gamma \to 1$ параметр κ определяется формулой

$$\operatorname{ctg}\kappa = \frac{|p|}{m}$$

и преобразование Боголюбова тривиально всюду кроме области $p \sim m$. Нас, конечно, интересует область $pa \ll 1$, но при этом величина импульса p может быть и много больше массы m. В этой области $\kappa = 0$ и преобразование принимает простой вид

$$\begin{aligned} &a_{\pi/2-pa} = ib'^{+}_{-\pi/2+pa}, \qquad && a_{\pi/2+pa} = b_{-\pi/2+pa}, \\ &a_{-\pi/2+pa} = ib'^{+}_{\pi/2-pa}, \qquad && a_{-\pi/2-pa} = b_{\pi/2-pa}, \qquad m \ll p \ll a^{-1}. \end{aligned} \tag{17}$$

Теперь исследуем вклад взаимодействия $\Delta \neq 0$ в скейлинговом пределе. Удобно стартовать со случая $m = 0$ ($\Gamma = 1$). Прежде всего, с помощью $b_{\pm\pi/2+pa}$, $b'_{\pm\pi/2+pa}$ надо ввести стандартные релятивистские фермионные операторы. В обозначениях Лекции 6 вейлевские фермионы должны иметь вид

$$\begin{aligned} \frac{\psi_R(x)}{\sqrt{Na}} &= \int_0^\infty \frac{m_0^{1/2}dp}{2\pi\sqrt{2p}}\left(b_{-\pi/2+pa}\chi_\lambda(x) + b'^{+}_{-\pi/2+pa}\chi_{\lambda+i\pi}(x)\right)\Big|_{\substack{m_0\to 0\\ m_0e^{\lambda}=2p}} \\ &= \begin{pmatrix} 0\\ -i\end{pmatrix}\int_0^\infty \frac{dp}{2\pi}\left(b_{-\pi/2+pa}e^{ipx} + ib'^{+}_{-\pi/2+pa}e^{-ipx}\right) = \begin{pmatrix} 0\\ -i\end{pmatrix}\int_0^\infty \frac{dp}{2\pi}\left(a_{\pi/2+pa}e^{ipx} + a_{\pi/2-pa}e^{-ipx}\right), \\ \frac{\psi_L(x)}{\sqrt{Na}} &= \int_{-\infty}^0 \frac{m_0^{1/2}dp}{2\pi\sqrt{2|p|}}\left(b_{\pi/2+pa}\chi_\lambda(x) + b'^{+}_{\pi/2+pa}\chi_{\lambda+i\pi}(x)\right)\Big|_{\substack{m_0\to 0\\ m_0e^{-\lambda}=2|p|}} \\ &= \begin{pmatrix} 1\\ 0\end{pmatrix}\int_{-\infty}^0 \frac{dp}{2\pi}\left(b_{\pi/2+pa}e^{ipx} + ib'^{+}_{\pi/2+pa}e^{-ipx}\right) = \begin{pmatrix} 1\\ 0\end{pmatrix}\int_{-\infty}^0 \frac{dp}{2\pi}\left(a_{-\pi/2+pa}e^{ipx} + a_{-\pi/2-pa}e^{-ipx}\right), \end{aligned}$$

Полный дираковский фермион имеет вид

$$\psi(x) = \psi_R(x) + \psi_L(x) = \begin{pmatrix} \psi_-(x)\\ -i\psi_+(x)\end{pmatrix},$$

где

$$\psi_\pm(x) = \int_{-\infty}^\infty \frac{dp}{2\pi}\, a_\pm(p)e^{ipx} \qquad a_\pm(p) = (Na)^{1/2}a_{\pm\pi/2+pa}, \tag{18}$$

записываются как обычные нерелятивистские фермионы через осцилляторы $a_\pm(p)$. Заметим, что исходные фермионы a_n выражаются через них как

$$a_n = a^{1/2}(i^n\psi_+(an) + i^{-n}\psi_-(an)).$$

Теперь перепишем гамильтониан в виде

$$H_\Delta \equiv \frac{1}{2a}(H_{XXZ} + \Delta N/2 - 2\Delta M) = H_{FF} - \frac{\Delta}{Na}\sum_q \rho_q\rho_{-q}\cos q, \tag{19}$$

где

$$M = \rho_0 = \sum_n a_n^+a_n = \sum_k a_k^+a_k \tag{20}$$

— фермионное число, а

$$\rho_q = \sum_k a_{k+q}^+a_{k'} = \sum_n a_n^+a_ne^{iqn} \tag{21}$$

— фурье-образ соответствующего тока. Фермионное число, строго говоря, сохраняется только точно в точке $\Gamma = 1$. Но оно также сохраняется в скейлинговом пределе, так что вычитание его из гамильтониана в этом пределе ничего не меняет. Основной вклад во взаимодействие будет вносить область наименьших энергий вблизи точек $k = \pm\pi/2$. Поэтому будут иметь значение ρ_q с параметром q в окрестности точек 0 и π. Запишем ρ_q в виде

$$\rho_{pa} = \rho_{++}(p) + \rho_{--}(p), \qquad \rho_{\pi+pa} = \rho_{+-}(p) + \rho_{-+}(p), \qquad \rho_{\alpha\beta}(p) = \int \frac{dp'}{2\pi}\, a^+_\alpha(p'+p) a_\beta(p'). \tag{22}$$

Подставляя в (19), получим

$$H_\Delta = H_{FF} - \Delta \int \frac{dp}{2\pi} (\rho_{++}(p) + \rho_{--}(p))(\rho_{++}(-p) + \rho_{--}(-p)) \\ + \Delta \int \frac{dp}{2\pi} (\rho_{+-}(p) + \rho_{-+}(p))(\rho_{+-}(-p) + \rho_{-+}(-p)).$$

Переходя к координатному представлению, получаем

$$\begin{aligned} H_\Delta &= H_{FF} - \Delta \int dx\, ((\psi^+_+\psi_+)^2 + (\psi^+_-\psi_-)^2 + 2\psi^+_+\psi_+\psi^+_-\psi_- - \psi^+_-\psi_+\psi^+_+\psi_- - \psi^+_+\psi_-\psi^+_-\psi_+) \\ &= H_{FF} - 4\Delta \int dx\, \psi^+_+\psi_+\psi^+_-\psi_-. \end{aligned} \tag{23}$$

Здесь мы использовали коммутационные соотношения $\psi^+_\alpha(x)\psi_\beta(x) + \psi_\beta(x)\psi^+_\alpha(x) = a^{-1}\delta_{\alpha\beta}$. В частности, $(\psi^+_\alpha\psi_{-\alpha})^2 = (\psi^+_\alpha)^2\psi^2_{-\alpha} = 0$.

Сравнивая (23) с формулами для модели Тирринга, заключаем, что

$$g = -2\Delta \qquad (\Delta \ll 1). \tag{24}$$

Понятно, что эта формула верна только при малых Δ. Достаточно вспомнить, что массовый член $\bar\psi\psi$ в модели Тирринга не имеет размерности массы, так что скейлинговый закон (16) заведомо не выполняется при $\Delta \neq 0$.

При выводе этих формул я немного обманул вас. Дело в том, что произведение $\psi^+_\alpha\psi_\alpha$ содержит регулярный вклад. Действительно, если мы бозонизуем фермионы с помощью конструкции из лекции 2 при $g \to 0$, мы получим

$$\begin{aligned} \psi^+_+(z')\psi_+(z) &= \frac{i}{2\pi}\left(\frac{1}{z'-z} - i\partial\varphi(z) + O(z'-z)\right), \\ \psi^+_-(z')\psi_-(z) &= -\frac{i}{2\pi}\left(\frac{1}{\bar z'-\bar z} - i\bar\partial\varphi(\bar z) + O(\bar z'-\bar z)\right). \end{aligned}$$

Это приводит к тому, что члены $(\psi^+_\alpha\psi_\alpha)^2$ дают вклады в гамильтониан, пропорциональные $(\partial_x\phi)^2$, что приводит к перенормировке пространственной компоненты импульса [1].

Можно ли установить точную связь между параметром g модели Тирринга и параметром Δ XYZ-модели? Это возможно, поскольку XYZ-модель допускает точное решение [2]. К сожалению, это решение очень сложно, и я не могу его здесь привести. Из решения можно извлечь корреляционную длину r_c, которая при $\Gamma \to 1$ пропорциональна

$$r_c \sim \left(\frac{1-\Delta^2}{1-\Gamma}\right)^{1/(2-2\mu/\pi)}, \qquad \Delta = -\cos\mu. \tag{25}$$

Вспоминая, что $1-\Gamma$ пропорциональна затравочной массе m_0 в модели Тирринга, а $m_0 \sim m^{2-\beta^2}$, где m — масса физических возбуждений, получаем

$$\beta^2 = \frac{2\mu}{\pi}, \qquad \frac{g}{\pi} = \frac{\pi/2-\mu}{\mu}. \tag{26}$$

При $\Delta \to 0$ ($\mu \to \pi/2$) воспроизводится (24).

Теперь попробуем сопоставить операторам на решетке поля в теории поля. Для этого удобнее пользоваться моделью синус-Гордона. Вспомним, что в гауссовой модели (соответствующей XXZ-случаю) имеется симметрия

$$\varphi \to \varphi + \alpha,$$

где α — произвольная константа. В модели синус-Гордона эта симметрия нарушается и α должно быть целым кратным $2\pi/\beta$:

$$\alpha = \frac{2\pi n}{\beta}. \tag{27}$$

В XXZ-модели тоже имеется непрерывная симметрия

$$\sigma^\pm \to e^{\pm i\lambda}\sigma^\pm, \qquad \sigma^z \to \sigma^z.$$

Эта симметрия отвечает сохранению z-проекции полного спина

$$S^z = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\sigma_n^z = M - \frac{N}{2}. \tag{28}$$

При $\Gamma < 1$ член, пропорциональный

$$\sum_n (\sigma_n^+\sigma_{n+1}^+ + \sigma_n^-\sigma_{n+1}^-)$$

и отвечающий массовому члену в модели Тирринга, то есть косинусу в модели синус-Гордона, нарушает эту симметрию до

$$\lambda = \pi n. \tag{29}$$

Сравнивая (27) с (29), заключаем, что

$$\alpha = \frac{2\lambda}{\beta} \tag{30}$$

Отсюда следует, что

$$\sigma_n^\pm\sigma_{n+1}^\pm \sim a^{\beta^2}e^{\pm i\beta\phi}.$$

Поскольку оператор $\sigma_n^\pm$ коммутирует с оператором $\sigma_m^\pm\sigma_{m+1}^\pm$ $(n \neq m, m+1)$, то соответствующее поле должно быть ему взаимно-локально. Естественно предположить, что

$$\sigma_n^\pm \sim a^{\beta^2/4}e^{\pm i\frac{\beta}{2}\phi}.$$

Общие допустимые экспоненциальные операторы в теории имеют вид

$$V_{m,n}(x) = \exp\left(im\frac{\beta}{2}\phi + in\frac{1}{2\beta}\tilde{\phi}\right), \qquad m,n \in \mathbb{Z}. \tag{31}$$

В частности, оператор σ_n^z пропорционален линейной комбинации $a\partial_t\phi$ и $(-1)^n a^{1/\beta^2}(V_{0,2} - V_{0,-2})$. Очень подробно связь между решеточными и полевыми переменными описана в работе [3].

Решение XXZ-модели см. в лекции 8.

Литература

[1] A. Luther and I. Peschel, Phys. Rev. B12 (1975) 3908; A. Luther, Phys. Rev. B14 (1976) 2153.
[2] Р. Бэкстер, *Точно решаемые модели в статистической механике*, М. «Мир», 1985.
[3] S. Lukyanov and V. Terras, Nucl. Phys. B654 (2003) 323 [arXiv:hep-th/0206093].

Задачи

1. Выведите (8).

2. XY-цепочка в магнитном поле. Найдите спектр гамильтониана

$$H = -\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}(\sigma_n^x\sigma_{n+1}^x + \Gamma\sigma_n^y\sigma_{n+1}^y + 2h\sigma_n^z).$$

Найти критические значения внешнего поля h в зависимости от Γ, при которых исчезает щель в спектре.

3. Покажите, что все поля (31) взаимно-локальны, либо взаимно полулокальны, то есть любое произведение $V_{m_1n_1}(x_1)V_{m_2n_2}(x_2)$ не меняется при обходе x_2 вокруг x_1 в комплексной плоскости, либо меняется на -1.