

**Лекция 9**  
**Алгебраический анзац Бете. Решение уравнений Бете**

Вернемся к определению  $L$ -оператора:

$$L(u) = R_{0N}(u) \dots R_{02}(u) R_{01}(u) = \begin{pmatrix} A(u) & B(u) \\ C(u) & D(u) \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Рассмотрим матричный элемент  $B(u) = L(u)_-^+$ . Этот элемент уменьшает спин на единицу:

$$[S^z, B(u)] = -1. \quad (2)$$

Подействуем этим оператором на псевдовакуум  $|\Omega_+\rangle$ . Мы получим плоскую волну

$$B(u)|\Omega_+\rangle = \sum_n b^{n-1}(u)c(u)a^{N-n}(u)|n\rangle = \frac{a^N(u)c(u)}{b(u)} \sum_n \left(\frac{b(u)}{a(u)}\right)^n |n\rangle.$$

Роль импульса здесь играет параметр  $u$ , определяющий отношение  $z = b(u)/a(u)$ . Несколько сложнее получить следующее состояние:

$$B(u_1)B(u_2)|\Omega_+\rangle = \frac{a_1^N a_2^N c^2}{b_1 b_2} \sum_{n_1 < n_2} \left( \frac{a_{21}}{b_{21}} z_1^{n_1} z_2^{n_2} + \frac{a_{12}}{b_{12}} z_1^{n_2} z_2^{n_1} \right) |n_1, n_2\rangle,$$

где  $a_i = a(u_i)$ ,  $a_{ij} = a(u_i - u_j)$  и т. п.,  $z_i = b_i/a_i$ . Мы видим, что состояния вида

$$|u_1, u_2, \dots, u_k\rangle = B(u_1)B(u_2) \dots B(u_k)|\Omega_+\rangle \quad (3)$$

имеют структуру волновых функций Бете с  $z_j = b(u_j)/a(u_j)$ . Выражение (3) именуется *алгебраическим анзацем Бете*. Чтобы понять, действительно ли это выражение дает собственные векторы, рассмотрим коммутационные соотношения, следующие из уравнения Янга-Бакстера:

$$R_{12}(u_1 - u_2)L_1(u_1)L_2(u_2) = L_2(u_2)L_1(u_1)R_{12}(u_1 - u_2).$$

Во-первых,  $_{--}^{++}$ -компонента этого соотношения дает

$$B(u_1)B(u_2) = B(u_2)B(u_1). \quad (4)$$

Это значит, что состояния (3) симметричны по  $u_1, \dots, u_k$ . Во-вторых, из компонент  $_{-+}^{++}$  и  $_{--}^{-+}$  имеем соотношения

$$a(u_1 - u_2)B(u_1)A(u_2) = c(u_1 - u_2)B(u_2)A(u_1) + b(u_1 - u_2)A(u_2)B(u_1), \quad (5)$$

$$a(u_2 - u_1)B(u_1)D(u_2) = c(u_2 - u_1)B(u_2)D(u_1) + b(u_2 - u_1)D(u_2)B(u_1). \quad (6)$$

Из этих соотношений можно вывести тождества

$$\begin{aligned} A(u)|u_1, \dots, u_k\rangle &= \alpha(u; u_1, \dots, u_k)|u_1, \dots, u_k\rangle \\ &\quad - \sum_{i=1}^k \frac{c(u_i - u)}{b(u_i - u)} \alpha(u_i; u_1, \dots, \hat{u}_i, \dots, u_k)|u, u_1, \dots, \hat{u}_i, \dots, u_k\rangle, \\ D(u)|u_1, \dots, u_k\rangle &= \delta(u; u_1, \dots, u_k)|u_1, \dots, u_k\rangle \\ &\quad - \sum_{i=1}^k \frac{c(u - u_i)}{b(u - u_i)} \delta(u_i; u_1, \dots, \hat{u}_i, \dots, u_k)|u, u_1, \dots, \hat{u}_i, \dots, u_k\rangle, \end{aligned} \quad (7)$$

где

$$\alpha(u; u_1, \dots, u_k) = a^N(u) \prod_{i=1}^k \frac{a(u_i - u)}{b(u_i - u)}, \quad \delta(u; u_1, \dots, u_k) = b^N(u) \prod_{i=1}^k \frac{a(u - u_i)}{b(u - u_i)}. \quad (8)$$

Соотношения (7) доказываются по индукции.

Из соотношений (7) получаем

$$T(u)|u_1, \dots, u_k\rangle = (\alpha(u; u_1, \dots, u_k) + \delta(u; u_1, \dots, u_k))|u_1, \dots, u_k\rangle + \text{плохие члены.}$$

Чтобы вектор  $|u_1, \dots, u_k\rangle$  был собственным, сумма плохих членов должна быть равна нулю. В этом случае собственное значение трансфер-матрицы будет равно

$$\Lambda(u; u_1, \dots, u_k) = a^N(u) \prod_{i=1}^k \frac{a(u_i - u)}{b(u_i - u)} + b^N(u) \prod_{i=1}^k \frac{a(u - u_i)}{b(u - u_i)}. \quad (9)$$

Отметим, что плохие члены, по сути, набегают в точках  $n = 1, N$  и условие их сокращения эквивалентно условию периодичности.

Так как  $\frac{c(u)}{b(u)} = -\frac{c(-u)}{b(-u)}$ , плохие члены сокращаются, если

$$\alpha(u_i; u_1, \dots, \hat{u}_i, \dots, u_k) = \delta(u_i; u_1, \dots, \hat{u}_i, \dots, u_k)$$

или

$$\left(\frac{b(u_i)}{a(u_i)}\right)^N = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^k \frac{a(u_j - u_i)b(u_i - u_j)}{b(u_j - u_i)a(u_i - u_j)}, \quad (10)$$

Это и есть уравнения Бете. Каждому решению уравнений Бете соответствует некоторый собственный вектор трансфер-матрицы (гамильтониана), так что состояния можно нумеровать наборами  $\{u_i\}_{i=1}^k$ .

Более явно перепишем уравнения Бете в виде

$$\left(\frac{\sin u_i}{\sin(\lambda - u_i)}\right)^N = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^k \frac{\sin(u_i - u_j + \lambda)}{\sin(u_i - u_j - \lambda)} \quad \text{при } c < a + b \text{ и т. д. } (|\Delta| < 1), \quad (11)$$

$$\left(\frac{\text{sh } u_i}{\text{sh}(\lambda - u_i)}\right)^N = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^k \frac{\text{sh}(u_i - u_j + \lambda)}{\text{sh}(u_i - u_j - \lambda)} \quad \text{при } c > a + b \text{ } (\Delta < -1). \quad (12)$$

Режим  $\Delta < -1$  соответствует наличию двух основных конфигураций шестивершинной модели, для которых конфигурации вокруг всех вершин имеют  $c$ -тип, и двукратному (в термодинамическом пределе) вырождению основного состояния ХХЗ-модели. Возбужденные состояния в ХХЗ-модели отделены от основного щелью. В этом случае говорят об антисегнетоэлектрическом упорядочении шестивершинной модели и антиферромагнитном основном состоянии ХХЗ-модели. В режиме  $|\Delta| < 1$  имеется бесконечно много (на бесконечной решетке) основных конфигураций шестивершинной модели (неупорядоченное критическое состояние) и бесщелевой спектр вблизи основного состояния в ХХЗ-модели. В обоих случаях основному состоянию отвечают состояния с  $S^z = 0$  или  $S^z = \pm \frac{1}{2}$  в зависимости от четности  $n$ .

Покажем, как найти наибольшее собственное значение  $\Lambda_{\max}(u)$  в этой модели в термодинамическом пределе. Сделаем следующие предположения:

- 1) В основном состоянии плоские волны не содержат ни экспоненциально растущих, ни экспоненциально спадающих членов, так что  $|z_i| \equiv |b(u_i)/a(u_i)| = 1$  или  $u_i = \lambda/2 + iv_i$  с вещественными  $v_i$ .
- 2) В основном состоянии  $v_i$  сгущаются в термодинамическом пределе, образуя непрерывные зоны без дырок и отдельно стоящих значений.
- 3) В основном состоянии  $S^z/N \rightarrow 0$ .

Для определенности будем рассматривать случай  $|\Delta| < 1$ .

Уравнения Бете удобно прологорифмировать. Введем обозначения

$$e^{ip(v)} = \frac{\sin(\lambda/2 + iv)}{\sin(\lambda/2 - iv)}, \quad e^{i\theta(v)} = \frac{\sin(\lambda + iv)}{\sin(\lambda - iv)}.$$

Мы выбираем ветвь логарифма, такую что  $p(0) = \theta(0) = 0$ . Уравнения Бете записываются в виде

$$e^{iNp(v_i)} = (-)^{k-1} \prod_{j=1}^k e^{i\theta(v_i - v_j)}.$$

Прологориформировав, получим

$$Np(v_i) = 2\pi I_i + \sum_{j=1}^k \theta(v_i - v_j),$$

где  $I_i$  — целое либо полуцелое в зависимости от четности  $k$ . Условие 2) мы можем теперь уточнить:

2') В основном состоянии все  $I_i$  образуют набор последовательных целых при нечетных  $k$  и полуцелых при четных  $k$  чисел.

В этом виде утверждение, по-видимому, верно не только в термодинамическом пределе. При малых  $k$  можно также показать, что

2а) Наибольшее собственное значение трансфер-матрицы в секторе с данным  $S^z$  достигается при симметричном распределении  $I_i$  (и  $v_i$ ) вокруг нуля.

Найдем интервал, в котором будет изменяться  $v$  в непрерывном пределе. Для этого удобнее пользоваться гамильтонианом  $H_{XXZ}$ . Как мы уже говорили в прошлой лекции энергия состояния складывается из энергий псевдочастиц  $\epsilon(z) = 2\Delta - z - z^{-1} = 2\Delta - 2\cos p(v)$ . Наименьшей энергии отвечает значение  $p = 0$ , то есть  $v = 0$ . Псевдочастицы должны плотно заполнять область  $-p_F \leq p(v) \leq p_F$ , где  $p_F$  — импульс Ферми,  $\epsilon(e^{\pm ip_F}) = \epsilon_F$ . Поскольку функция  $p(v)$  нечетна и монотонна, спектральный параметр  $v$  должен заметать область от  $-v_F$  до  $v_F$ , где  $p(v_F) = p_F$ .

Имеем для основного состояния

$$p(v_{i+1}) - p(v_i) = \frac{2\pi}{N} + \frac{1}{N} \sum_{j=1}^k (\theta(v_{i+1} - v_j) - \theta(v_i - v_j)).$$

В пределе  $N \rightarrow \infty$  имеем

$$p'(v) = 2\pi\rho(v) + \int_{-v_F}^{v_F} dv' \theta'(v - v')\rho(v') \quad (13)$$

или

$$\rho(v) = \frac{1}{\pi} \frac{\sin \lambda}{\operatorname{ch} 2v - \cos \lambda} - \int_{-v_F}^{v_F} \frac{dv'}{\pi} \frac{\sin 2\lambda}{\operatorname{ch} 2(v - v') - \cos 2\lambda} \rho(v'), \quad (13')$$

где  $p'(v)$ ,  $\theta'(v)$  — производные от  $p(v)$ ,  $\theta(v)$  по  $v$ , а  $\rho(v) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N(v_{i+1} - v_i)}$  — плотность корней вблизи точки  $v$ , которая и будет неизвестной функцией в этом уравнении. Интервал  $[-v_F, v_F]$  определяется из условия

$$\int_{-v_F}^{v_F} dv \rho(v) = \frac{k}{N}. \quad (14)$$

Далее надо минимизировать энергию по  $k/N$ .

В пределе  $N \rightarrow \infty$  можно ожидать, что одно из слагаемых в (9) много больше другого, поэтому

$$\log \kappa(u) \equiv \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\log \Lambda(u)}{N} = \max \left( \log a(u) + \int_{-v_F}^{v_F} dv \rho(v) \log \frac{a(iv - u + \lambda/2)}{b(iv - u + \lambda/2)}, \right. \quad (15)$$

$$\left. \log b(u) + \int_{-v_F}^{v_F} dv \rho(v) \log \frac{a(u - iv - \lambda/2)}{b(u - iv - \lambda/2)} \right). \quad (16)$$

Уравнение (13) нетрудно решить методом Фурье при  $v_F = \infty$ . Положим

$$\rho(v) = \int dk \rho_k e^{ikv}, \quad p'(v) = \int dk p_k e^{ikv}, \quad \theta'(v) = \int dk \theta_k e^{ikv}. \quad (17)$$

Тогда

$$\rho_k = \frac{p_k}{2\pi} - \theta_k \rho_k,$$

т. е.

$$\rho_k = \frac{1}{2\pi} \frac{p_k}{1 + \theta_k}.$$

Нетрудно проверить, что

$$p_k = \frac{\operatorname{sh} \frac{1}{2}(\pi - \lambda)k}{\operatorname{sh} \frac{1}{2}\pi k}, \quad \theta_k = \frac{\operatorname{sh} \frac{1}{2}(\pi - 2\lambda)k}{\operatorname{sh} \frac{1}{2}\pi k}.$$

Отсюда получаем

$$\rho_k = \frac{1}{4\pi \operatorname{ch} \frac{1}{2}\lambda k}. \quad (18)$$

Очевидно

$$\int_{-\infty}^{\infty} dv \rho(v) = 2\pi \rho_0 = \frac{1}{2},$$

а значит  $k = N/2$  и  $S^z = 0$  (конечно, с точностью до членов порядка 1). Таким образом, это решение соответствует основному состоянию системы.

Учитывая, что

$$\int \frac{dv}{2\pi} e^{-ikv} \log \left| \frac{\sin(\lambda - iv + w)}{\sin(iv - w)} \right| = \frac{\operatorname{sh} \frac{1}{2}(\lambda + 2w)k \operatorname{sh} \frac{1}{2}(\pi - \lambda)k}{k \operatorname{sh} \frac{1}{2}\pi k},$$

можно убедиться, что оба значения под знаком максимума в (16) совпадают и дают

$$\log \kappa(u) = \log a(u) + \int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{\operatorname{sh} uk \operatorname{sh} \frac{\pi - \lambda}{2}k}{2k \operatorname{sh} \frac{\pi}{2}k \operatorname{ch} \frac{\lambda}{2}k} \quad (19)$$

$$= \log b(u) + \int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{\operatorname{sh}(\lambda - u)k \operatorname{sh} \frac{\pi - \lambda}{2}k}{2k \operatorname{sh} \frac{\pi}{2}k \operatorname{ch} \frac{\lambda}{2}k}. \quad (20)$$

В случае  $\Delta < -1$  синусы заменяются на гиперболические синусы и функции  $p'(v)$  и  $\theta'(v)$  оказываются периодическими по  $v$  с периодом  $\pi$ . Это значит, что интеграл Фурье в (17) заменяется на ряд Фурье. Поэтому окончательная формула для свободной энергии имеет вид ряда

$$\log \kappa(u) = \log a(u) + u + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda m} \operatorname{sh} 2um}{m \operatorname{ch} \lambda m} \quad (21)$$

$$= \log b(u) + \lambda - u + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda m} \operatorname{sh} 2(\lambda - u)m}{m \operatorname{ch} \lambda m}. \quad (22)$$

### Задачи

1. Доказать соотношения (7) по индукции по  $k$ .
2. Покажите, что анзац Бете (10) можно получить из формулы для собственных значений (9) и требования аналитичности собственного значения как функции  $u$ .
3. Введите переменную  $t$ , имеющую смысл  $(T - T_c)/T_c$  вблизи каждой из двух критических точек  $\Delta = \pm 1$ . Покажите, что свободная энергия непрерывна в этих точках и найдите выражения для свободной энергии.
4. Покажите, что вблизи точки  $\Delta = -1$  свободная энергия регулярна в антисегнетоэлектрической области и имеет слабую сингулярность в неупорядоченной области:

$$f_{\text{sing}} \sim e^{-c/t^{1/2}}$$

с некоторой константой  $c$ .