

Лекция 10 Задача Кондо: вывод анзаца Бете

Начиная с 30-х годов наблюдался минимум в температурной зависимости сопротивления некоторых, казалось, чистых металлов (золота, серебра, меди) при низких температурах. Позднее оказалось, что аномалия связана с наличием малой концентрации примесных атомов переходных металлов (Mn, Fe, Cr, Co, Ce, Y). Кондо (1964) объяснил это явление рассеянием электронов на примесях, описываемом взаимодействием (*sd-модель*)

$$V = J \sum_i \boldsymbol{\sigma} \mathbf{S}_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}_i) \quad (1)$$

В борновском приближении амплитуда рассеяния на одиночной примеси равна

$$J(\boldsymbol{\sigma} \mathbf{S})_{\sigma' \sigma}.$$

Так как J в несколько раз меньше ϵ_F/n (n — концентрация электронов), эта амплитуда мала. Однако первая поправка к борновской амплитуде содержит логарифмические члены и сумма нулевого и первого приближения равна [1]

$$J(\boldsymbol{\sigma} \mathbf{S})_{\sigma' \sigma} \left(1 + J\rho(\epsilon_F) \log \frac{\epsilon_F}{\max(|\epsilon_{\mathbf{p}} - \epsilon_F|, T)} \right), \quad (2)$$

где $\rho(\epsilon)$ — плотность состояний. Эта поправка растет при $T \rightarrow 0$ и энергиях электрона, близких к ϵ_F , и теория возмущений, в конце концов, становится непригодной. Характерная температура, при которой теория возмущений непригодна, называемая *температурой Кондо*, равна

$$T_K \sim \epsilon_F e^{1/J\rho(\epsilon_F)}. \quad (3)$$

Эта температура является единственной характерной шкалой в эффекте Кондо.

Давайте приведем краткий вывод выражения (2). Двукратное рассеяние может происходить двумя способами. Во-первых, электрон в состоянии $\mathbf{p}\boldsymbol{\sigma}$ может перейти сначала в состояние $\mathbf{p}''\boldsymbol{\sigma}''$, а затем в конечное состояние $\mathbf{p}'\boldsymbol{\sigma}'$. Амплитуда этого процесса равна

$$J^2 \sum_{\sigma''} \int \frac{d^3 p''}{(2\pi)^3} \frac{(\boldsymbol{\sigma} \mathbf{S})_{\sigma' \sigma''} (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{S})_{\sigma'' \sigma} (1 - f(\mathbf{p}''))}{\epsilon_{\mathbf{p}} - \epsilon_{\mathbf{p}''}},$$

где $f(\mathbf{p})$ — функция распределения. Индексы, связанные с состоянием примеси, опущены. Во-вторых, сначала электрон из заполненного состояния $\mathbf{p}''\boldsymbol{\sigma}''$ переходит в состояние $\mathbf{p}'\boldsymbol{\sigma}'$, а уже потом электрон из состояния $\mathbf{p}\boldsymbol{\sigma}$ переходит в состояние $\mathbf{p}''\boldsymbol{\sigma}''$. Амплитуда этого перехода равна

$$-J^2 \sum_{\sigma''} \int \frac{d^3 p''}{(2\pi)^3} \frac{(\boldsymbol{\sigma} \mathbf{S})_{\sigma'' \sigma} (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{S})_{\sigma' \sigma''} f(\mathbf{p}'')}{\epsilon_{\mathbf{p}''} - \epsilon_{\mathbf{p}'}}.$$

Знак минус связан с антисимметрией волновых функций электронов. Если бы спиновых множителей не было, вклады, содержащие $f(\mathbf{p}'')$, сократились бы, и логарифмически большого множителя не было бы. Но для спиновых множителей имеем:

$$\begin{aligned} \sigma^i S^i \sigma^j S^j &= S(S+1) - \boldsymbol{\sigma} \mathbf{S}, \\ \sigma^i S^j \sigma^j S^i &= S(S+1) + \boldsymbol{\sigma} \mathbf{S}. \end{aligned}$$

Мы получаем интеграл

$$J^2 \int \frac{d^3 p''}{(2\pi)^3} \left(\frac{S(S+1)\delta_{\sigma' \sigma}}{\epsilon_{\mathbf{p}} - \epsilon_{\mathbf{p}''}} + \frac{2f(\mathbf{p}'') - 1}{\epsilon_{\mathbf{p}} - \epsilon_{\mathbf{p}''}} (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{S})_{\sigma' \sigma} \right)$$

Первый член не имеет особенности при $\epsilon_{\mathbf{p}''} = \mu$ и дает конечный вклад вблизи поверхности Ферми. Второй член дает вклад, логарифмически расходящийся при нулевой температуре. Он и дает (2).

Удельное сопротивление в первом порядке равно

$$\rho = \rho_v + \rho_J^{(0)} \left(1 + 2J\rho(\epsilon_F) \log \frac{\epsilon_F}{T} \right).$$

В случае ферромагнитного взаимодействия ($J < 0$) вклад магнитных примесей падает при уменьшении температуры, в то время как в случае антиферромагнитного взаимодействия ($J > 0$) — растет.

Оказывается, можно просуммировать логарифмические члены во всех порядках теории возмущений (Абрикосов, 1965; Сул, 1965):

$$\rho = \rho_v + \frac{\rho_J^{(0)}}{\left(1 - J\rho(\epsilon_F) \log \frac{\epsilon_F}{T} \right)^2}.$$

Однако при $T \sim T_K$ это выражение имеет особенность, так что ограничиться только логарифмическими поправками нельзя.

Были наблюдаены также и аномалии в термодинамических характеристиках металлов с магнитными примесями, например, теплоемкости C и магнитной восприимчивости χ . При больших температурах примесный вклад в эти величины с хорошей точностью описывается обратными степенями логарифма:

$$\begin{aligned} \rho_{\text{imp}}(T) &\simeq \frac{\text{const}}{\log^2 \frac{T}{T_K}}, \\ C_{\text{imp}}(T) &\simeq \frac{\text{const}}{\log^2 \frac{T}{T_K}}, \\ \chi_{\text{imp}}(T) &\simeq \frac{\text{const}}{T \log \frac{T}{T_K}}, \quad T \gg T_K. \end{aligned}$$

При $T \rightarrow 0$ наблюдается другое поведение:

$$\begin{aligned} \rho_{\text{imp}}(T) &= \rho_{\text{imp}}(0) \left(1 - \kappa_R \left(\frac{T}{T_K} \right)^2 + \dots \right), \\ C_{\text{imp}}(T) &= \gamma \frac{T}{T_K} \left(1 - \kappa_C \left(\frac{T}{T_K} \right)^2 + \dots \right), \\ \chi_{\text{imp}}(T) &= \chi_0 \left(1 - \kappa_\chi \left(\frac{T}{T_K} \right)^2 + \dots \right), \end{aligned}$$

где $\kappa_R, \kappa_C, \kappa_\chi$ — величины порядка единицы.

Решение этой задачи при $T \lesssim T_K$ кажется довольно безнадежным. Тем не менее, в некотором приближении эта задача сводится к задаче, точно решаемой с помощью анзаца Бете (Вигман 1980; Андрей, 1980). На эту тему есть хорошие обзоры [2,3].

Запишем гамильтониан sd -модели в виде

$$H = H_0 + J\sigma(0)\mathbf{S}, \quad H_0 = \sum_{p\sigma} \epsilon_p c_{p\sigma}^\dagger c_{p\sigma}, \quad \sigma(0) = \sum_{p'\sigma', p\sigma} c_{p'\sigma'}^\dagger \sigma_{\sigma'\sigma} c_{p\sigma}. \quad (4)$$

Здесь предполагается, что в системе имеется только одна примесь, изотропно взаимодействующая со свободными электронами. Кроме того, потенциальное рассеяние на примеси отсутствует. Будем также предполагать, что ϵ_p не зависит от направления импульса, а спектр вблизи ферми-сферы имеет вид

$$\epsilon_p = \epsilon_F + v_F(p - p_F). \quad (5)$$

Разложим теперь операторы рождения-уничтожения по сферическим функциям:

$$c_{p\sigma}^\dagger = \sum_{lm} Y_{lm}(\mathbf{p}/p) c_{plm\sigma}^\dagger. \quad (6)$$

В силу ортогональности сферических гармоник гамильтониан взаимодействия содержит только компоненты с $l = m = 0$:

$$H = \sum_{plm\sigma} \epsilon_p c_{plm\sigma}^\dagger c_{plm\sigma} + J \sum_{p'\sigma', p\sigma} c_{p'00\sigma'}^\dagger c_{p00\sigma} \sigma_{\sigma'\sigma} \mathbf{S}. \quad (7)$$

Электроны с $l > 0$ не взаимодействуют с электронами с $l = 0$ и друг с другом, и их вклад тривиален. Нетривиальная часть задачи состоит в исследовании вклада в гамильтониан электронов с $l = 0$. Будем отсчитывать энергию электронов от энергии Ферми, а квазиимпульс от p_F . Кроме того, положим для простоты $v_F = 1$. Получаем

$$H = \sum_{p\sigma} p c_{p\sigma}^+ c_{p\sigma} + J \sum_{p'\rho\sigma'\sigma} c_{p'\sigma'}^+ c_{p\rho\sigma} \sigma_{\sigma'\sigma} \mathbf{S}, \quad (8)$$

где $c_{p\sigma} = c_{p_F+p,00\sigma}$, а суммирование производится по всем вещественным p . Этот гамильтониан — одномерный. Более того, по существу, это гамильтониан, определенный на всей вещественной оси x , а не только на полуоси $x < 0$, поскольку отраженная и падающая волна не взаимодействуют друг с другом. При этом, однако, волны в системе могут двигаться только в одном (положительном) направлении. Циклическому граничному условию на интервале $[-R, R]$ будет соответствовать условие отражения волны на сфере радиуса R в физическом пространстве. В координатном представлении гамильтониан имеет вид

$$H = \int dx (-ic^+(x)\partial_x c(x) + Jc^+(x)(\sigma\mathbf{S})c(x)\delta(x)), \quad c(x) = \begin{pmatrix} c_+(x) \\ c_-(x) \end{pmatrix} = \int \frac{dp}{2\pi} e^{ipx} \begin{pmatrix} c_{p+} \\ c_{p-} \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Гамильтониан H сохраняет число частиц в системе и суммарный спин. Состояние $|\Psi_N\rangle$ системы с фиксированным числом частиц N можно представить в виде

$$|\Psi_N\rangle = \int dx_1 \dots dx_N \sum_{\sigma_1 \dots \sigma_N, s} \Psi^{\sigma_1 \dots \sigma_N, s}(x_1, \dots, x_N) c_{\sigma_1}^+(x_1) \dots c_{\sigma_N}^+(x_N) (S^-)^{S-s} |\Omega\rangle, \quad (10)$$

где $s = -S, -S+1, \dots, S$ — значение z -компоненты спина \mathbf{S} , а $|\Omega\rangle$ — псевдовакуумное состояние, удовлетворяющее условиям

$$c_\sigma(x)|\Omega\rangle = S^+|\Omega\rangle = 0. \quad (11)$$

Гамильтониан (9) действует на состояние $|\Psi_N\rangle$ так:

$$\hat{H}\Psi^{\sigma_1 \dots \sigma_N, s} = -i \sum_{j=1}^N \partial_{x_j} \Psi^{\sigma_1 \dots \sigma_N, s} + J \sum_{j=1}^N \sum_{\sigma'_j, s'} \delta(x_j) \sigma_{\sigma_j \sigma'_j} \mathbf{S}_{ss'} \Psi^{\sigma_1 \dots \sigma'_j \dots \sigma_N, s'} \quad (12)$$

Рассмотрим сначала одночастичное состояние. Мы будем искать решение в виде

$$\Psi_p^{\sigma, s}(x) = \begin{cases} A_p^{\sigma, s} e^{ipx}, & x < 0, \\ B_p^{\sigma, s} e^{ipx}, & x > 0. \end{cases} \quad (13)$$

Подставляя (13) в (12), получаем

$$A_p^{\sigma, s} = \sum_{\sigma', s'} R_{\sigma' s'}^{\sigma s} B^{\sigma', s'}, \quad R = e^{iJ\sigma\mathbf{S}}. \quad (14)$$

Теперь, казалось бы, можно элементарно построить волновую функцию произвольного состояния как антисимметризованные произведения волновых функций вида (13). Это, однако, не так. Дело в том, что в модели имеется дополнительная динамическая переменная s . Рассмотрим, например, область $x_1, x_2 < 0$. Предположим, что в этой области волновая функция непрерывна. Продолжим волновую функцию в область $x_1 < 0 < x_2$. Частица 2 рассеялась на примеси, поэтому волновая функция в этой области будет отличаться фактором рассеяния R_{20} . Продолжив в область $0 < x_1 < x_2$, мы получим фактор $R_{20}R_{10}$. Аналогично, продолжение сначала в область $x_2 < 0 < x_1$, а затем в область $0 < x_2 < x_1$, получим фактор $R_{10}R_{20}$. Но

$$R_{20}R_{10} \neq R_{10}R_{20}.$$

Отсюда следует, что на линии $x_1 = x_2$ в области $x_1, x_2 > 0$ волновая функция имеет разрыв.

Мы будем рассматривать решения, имеющие разрывы при $x_1 = x_2$ как в области $x_1, x_2 > 0$, так и в области $x_1, x_2 < 0$. Посмотрим, какие разрывы совместны с уравнением Шредингера. Пусть, например, $x_1, x_2 < 0$. Согласно уравнению Шредингера, имеем

$$(\partial_{x_1} + \partial_{x_2})\Psi^{\sigma_1\sigma_2,s}(x_1, x_2) = (\text{конечное при } x_1 = x_2 \text{ выражение}).$$

Это условие допускает произвольный разрыв волновой функции при $x_1 = x_2$. Действительно,

$$\begin{aligned}\partial_{x_1}\Psi(x_1, x_2) &= \delta(x_1 - x_2)(\Psi(x_1 + 0, x_2) - \Psi(x_1 - 0, x_2)) + \dots, \\ \partial_{x_2}\Psi(x_1, x_2) &= \delta(x_1 - x_2)(\Psi(x_1, x_2 + 0) - \Psi(x_1, x_2 - 0)) + \dots \\ &= -\delta(x_1 - x_2)(\Psi(x_1 + 0, x_2) - \Psi(x_1 - 0, x_2)) + \dots\end{aligned}$$

Поэтому можно выбрать любой разрыв.

Мы будем искать решение уравнения Шредингера в виде анзаца Бете по переменным $(\sigma_1, x_1), \dots, (\sigma_N, x_N), (s, 0)$, причем коэффициенты матрица рассеяния для частицы $j \neq 0$ с частицей 0 (примесью) будет даваться матрицей R , а рассеяние двух электронов $j, j' \neq 0$ будет даваться некоторой матрицей S , которую мы найдем из условий ассоциативности (уравнения Янга–Бакстера):

$$S_{12}R_{10}R_{20} = R_{20}R_{10}S_{12}. \quad (15)$$

Очевидным решением этого уравнения является матрица перестановки

$$S_{12} = P_{12}, \quad P_{\sigma_1\sigma_2}^{\sigma'_1\sigma'_2} = \delta_{\sigma_2\sigma'_2}\delta_{\sigma_1\sigma'_1}. \quad (16)$$

Если обозначать частицы сплошными линиями, а примесь пунктиром, то графически это выглядит так:

$$R_{10} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \nearrow & \nwarrow \\ \searrow & \nearrow \end{array} \\ \begin{array}{cc} 1 & 0 \end{array} \end{array} = e^{J\sigma S}, \quad S_{12} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \nwarrow & \nearrow \\ \nearrow & \nwarrow \end{array} \\ \begin{array}{cc} 1 & 2 \end{array} \end{array} = \begin{array}{c} \uparrow \\ 1 \end{array} \quad \begin{array}{c} \uparrow \\ 2 \end{array} = P_{12}.$$

В этих обозначения доказательство (15) при $S = P$ выглядит очевидно:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cc} \nwarrow & \nearrow \\ \nearrow & \nwarrow \end{array} \\ \begin{array}{c} \uparrow \\ \vdots \end{array} \end{array} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \longrightarrow & \longrightarrow \\ \longrightarrow & \longrightarrow \end{array} \\ \begin{array}{c} \uparrow \\ \vdots \end{array} \end{array} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \nwarrow & \nearrow \\ \nearrow & \nwarrow \end{array} \\ \begin{array}{c} \uparrow \\ \vdots \end{array} \end{array}$$

Теперь наложим циклические граничные условия

$$\Psi(x_1, \dots, x_j, \dots, x_N) = \Psi(x_1, \dots, x_j + L, \dots, x_N). \quad (17)$$

Введем оператор

$$T_j = P_{jj+1} \dots P_{jN} R_{j0} P_{j1} \dots P_{jj-1}. \quad (18)$$

Из циклического граничного условия (17) следует, что

$$e^{ip_j L} \Psi = T_j \Psi. \quad (19)$$

Это значит, что решение задачи сводится к совместной диагонализации операторов T_j . Легко видеть, что операторы T_j совпадают. Действительно, их можно записать в виде

$$T_j = T = \text{tr}_1(P_{11} \dots P_{1N} R_{10}), \quad (20)$$

где $\tilde{1}$ — индекс вспомогательного пространства. Дополнительный оператор $P_{\tilde{1}j}$ превращает произведение операторов в след.

Как диагонализировать трансфер-матрицу T ? Для этого надо повторно использовать анзац Бете (*вторичный анзац Бете*), причем удобнее воспользоваться алгебраическим анзацем. Но для этого необходимо построить семейство коммутирующих трансфер-матриц.

Давайте построим однопараметрические семейства R -матриц $R(u)$, $S(u)$, удовлетворяющие следующим условиям.

1. Матрицы $R(u)$ и $S(u)$ удовлетворяют уравнению Янга–Бакстера:

$$S_{12}(u_1 - u_2)R_{10}(u_1 - u_0)R_{20}(u_2 - u_0) = R_{20}(u_2 - u_0)R_{10}(u_1 - u_0)S_{12}(u_1 - u_2), \quad (21a)$$

$$S_{12}(u_1 - u_2)S_{13}(u_1 - u_3)S_{23}(u_2 - u_3) = S_{23}(u_2 - u_3)S_{13}(u_1 - u_3)S_{12}(u_1 - u_2). \quad (21b)$$

2. В специальных точках матрицы $S(u)$ и $R(u)$ совпадают с S и R :

$$S(0) = P, \quad R(1) = R = e^{iJ\sigma S}. \quad (22)$$

3. Дополнительно удобно потребовать, чтобы R -матрицы удовлетворяли условию унитарности:

$$S_{12}(u)S_{21}(-u) = 1, \quad R_{10}(u)R_{10}(-u) = 1. \quad (23)$$

Решение можно представить в виде

$$\begin{aligned} S_{12}(u) &= w_0(u) + w(u)\sigma_1\sigma_2, \\ R_{10} &= w'_0(u) + 2w'(u)\sigma_1\mathbf{S}_0. \end{aligned} \quad (24)$$

Удобно ввести обозначения

$$\begin{aligned} a &= w_0 + w, & b &= w_0 - w, & c &= 2w, \\ a' &= w'_0 + w', & b' &= w'_0 - w', & c' &= 2w'. \end{aligned} \quad (25)$$

В этом случае матрица $S(u)$ имеет тот же вид, что и для XXZ-модели:

$$S(u) = \begin{pmatrix} a(u) & & & & \\ & b(u) & c(u) & & \\ & c(u) & b(u) & & \\ & & & & a(u) \end{pmatrix}.$$

Решая уравнение Янга–Бакстера, находим

$$\begin{aligned} \frac{b(u)}{a(u)} &= \frac{b'(u)}{a'(u)} = \frac{u}{u + ig}, \\ \frac{c(u)}{a(u)} &= \frac{c'(u)}{a'(u)} = \frac{ig}{u + ig}, \end{aligned} \quad (26)$$

т. е. $S(u)$ совпадает (с точностью до изменения масштаба спектрального параметра и некоторого несложного матричного преобразования, меняющего знаки) с R -матрицей для XXX-модели.

Условие унитарности требует чтобы

$$a(u)a(-u) = 1, \quad a'(u)a'(-u) = \frac{g^2 - u^2}{g^2(S + 1/2)^2 - u^2}. \quad (27)$$

Наконец условие (22) дает

$$a(0) = 1, \quad a'(1) = \frac{1 + ig}{2}(e^{iJS} + e^{-iJ(S+1)}) \quad (28)$$

и

$$g = \frac{1}{S + 1/2} \operatorname{tg} J(S + 1/2). \quad (29)$$

В остальном $a(u)$, $a'(u)$ — произвольные функции.

Далее, однопараметрическое семейство трансфер-матриц имеет вид

$$T(u) = \text{tr}_{\bar{1}} L_{\bar{1}}(u), \quad L_{\bar{1}}(u) = S_{\bar{1}1}(u) \dots S_{\bar{1}N}(u) R_{\bar{1}0}(u+1), \quad (30)$$

причем

$$T(0) = T, \quad [T(u), T(v)] = 0. \quad (31)$$

L -операторы удовлетворяют соотношениям

$$S_{\bar{1}\bar{2}}(u_1 - u_2) L_{\bar{1}}(u_1) L_{\bar{2}}(u_2) = L_{\bar{2}}(u_2) L_{\bar{1}}(u_1) S_{\bar{1}\bar{2}}(u_1 - u_2). \quad (32)$$

Как и в случае ХХЗ-модели, L -оператор может быть представлен в виде

$$L(u) = \begin{pmatrix} A(u) & B(u) \\ C(u) & D(u) \end{pmatrix}, \quad (33)$$

причем $A(u), \dots, D(u)$ удовлетворяют соотношениям того же вида, что и в случае ХХЗ-модели, но с другими $a(u), b(u), c(u)$. Отсюда следует, что и решение будет примерно таким же.

Именно, псевдовакуум $|\Omega_N\rangle$, соответствующий всем спинам электронов, смотрящим вверх ($\sigma_j = +$), и $s = +S$, определяется условием

$$C(u)|\Omega_N\rangle = 0. \quad (34)$$

Анзац Бете имеет вид

$$|u_1, \dots, u_n\rangle = B(u_1) \dots B(u_n)|\Omega_N\rangle, \quad S^z = N/2 + S - n, \quad (35)$$

причем

$$\begin{aligned} A(u)|\Omega_N\rangle &= \Lambda_A(u)|\Omega_N\rangle, & \Lambda_A(u) &= ((S+1/2)a'(u+1) - (S-1/2)b'(u+1))a^N(u), \\ D(u)|\Omega_N\rangle &= \Lambda_D(u)|\Omega_N\rangle, & \Lambda_D(u) &= ((S+1/2)b'(u+1) - (S-1/2)a'(u+1))b^N(u). \end{aligned} \quad (36)$$

Уравнения Бете записываются в стандартном виде

$$\frac{\Lambda_D(u_i)}{\Lambda_A(u_i)} = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{a(u_j - u_i)b(u_i - u_j)}{b(u_j - u_i)a(u_i - u_j)}, \quad (37)$$

а собственные значения выражаются через корни уравнений Бете как

$$\Lambda(u; u_1, \dots, u_N) = \Lambda_A(u) \prod_{i=1}^n \frac{a(u_i - u)}{b(u_i - u)} + \Lambda_D(u) \prod_{i=1}^n \frac{a(u - u_i)}{b(u - u_i)}. \quad (38)$$

Уравнение (19) принимает вид

$$e^{ip_j L} = \Lambda(0; u_1, \dots, u_N). \quad (39)$$

Подставляя в (37) и (38), (39) явные формулы для $a(u)$ и $b(u)$ и заменяя

$$u_j = g(v_j - i/2),$$

получим уравнения Бете в виде

$$\left(\frac{v_i + i/2}{v_i - i/2} \right)^N \frac{v_i + iS + 1/g}{v_i - iS + 1/g} = - \prod_{j=1}^n \frac{v_i - v_j + i}{v_i - v_j - i}, \quad (40)$$

и

$$e^{ip_j L} = e^{iJS} \prod_{i=1}^n \frac{v_i + i/2}{v_i - i/2}. \quad (41)$$

Это сводит решение задачи Кондо к совместному решению уравнений (40) и (41)

Литература

- [1] А. А. Абрикосов, *Основы теории металлов*, М., «Наука», 1987.
- [2] А. М. Tsvelik and P. B. Wiegmann, *Exact results in the theory of magnetic alloys*, Advances in Physics **32** (1983) 453.
- [3] P. B. Wiegmann, *An exact solution of the Kondo problem*, in: Quantum Theory of Solids, М., “Mir 1982.

Задачи

1. Выведите (14).
2. Покажите, что трансфер-матрицы $T(u)$, определенные (30), действительно образуют семейство коммутирующих трансфер-матриц.