

Лекция 10
Алгебраический анзац Бете. Решение уравнений Бете

Вернемся к определению L -оператора:

$$L(u) = R_{0N}(u) \dots R_{02}(u)R_{01}(u) = \begin{pmatrix} A(u) & B(u) \\ C(u) & D(u) \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Рассмотрим матричный элемент $B(u) = L(u)_-^+$. Этот элемент уменьшает спин на единицу:

$$[S^z, B(u)] = -B(u). \quad (2)$$

Подействуем этим оператором на псевдовакуум $|\Omega_+\rangle$. Мы получим плоскую волну

$$B(u)|\Omega_+\rangle = \sum_j b^{j-1}(u)c(u)a^{N-j}(u)|j\rangle = \frac{a^N(u)c(u)}{b(u)} \sum_j \left(\frac{b(u)}{a(u)}\right)^j |j\rangle. \quad (3)$$

Роль импульса здесь играет параметр u , определяющий отношение $z = b(u)/a(u)$. Несколько сложнее получить следующее состояние:

$$B(u_1)B(u_2)|\Omega_+\rangle = \frac{a_1^N a_2^N c_1 c_2}{b_1 b_2} \sum_{j_1 < j_2} \left(\frac{a_{21}}{b_{21}} z_1^{j_1} z_2^{j_2} + \frac{a_{12}}{b_{12}} z_1^{j_2} z_2^{j_1} \right) |j_1, j_2\rangle, \quad (4)$$

где $a_i = a(u_i)$, $a_{ij} = a(u_i - u_j)$ и т. п., $z_i = b_i/a_i$. Прямым вычислением можно показать, что

$$S(z_1, z_2) = \frac{a(u_1 - u_2)b(u_2 - u_1)}{b(u_1 - u_2)a(u_2 - u_1)}, \quad z_i = \frac{b(u_i)}{a(u_i)}. \quad (5)$$

Исходя из этих примеров можно предположить, что состояния вида

$$|u_1, u_2, \dots, u_n\rangle = B(u_1)B(u_2) \dots B(u_n)|\Omega_+\rangle \quad (6)$$

имеют структуру волновых функций Бете с $z_j = b(u_j)/a(u_j)$. Выражение (6) именуется *алгебраическим анзацем Бете*. Чтобы понять, действительно ли это выражение дает собственные векторы, рассмотрим коммутационные соотношения, следующие из уравнения Янга–Бакстера:

$$R_{12}(u_1 - u_2)L_1(u_1)L_2(u_2) = L_2(u_2)L_1(u_1)R_{12}(u_1 - u_2).$$

Во-первых, $^{++}_{--}$ -компонента этого соотношения дает

$$B(u_1)B(u_2) = B(u_2)B(u_1). \quad (7)$$

Это значит, что состояния (6) симметричны по u_1, \dots, u_n . Во-вторых, из компонент $^{++}_{++}$ и $^{--}_{--}$ имеем соотношения

$$a(u_1 - u_2)B(u_1)A(u_2) = c(u_1 - u_2)B(u_2)A(u_1) + b(u_1 - u_2)A(u_2)B(u_1), \quad (8)$$

$$a(u_2 - u_1)B(u_1)D(u_2) = c(u_2 - u_1)B(u_2)D(u_1) + b(u_2 - u_1)D(u_2)B(u_1). \quad (9)$$

Из этих соотношений можно вывести тождества

$$\begin{aligned} A(u)|u_1, \dots, u_n\rangle &= \alpha(u; u_1, \dots, u_n)|u_1, \dots, u_n\rangle \\ &\quad - \sum_{i=1}^n \frac{c(u_i - u)}{b(u_i - u)} \alpha(u_i; u_1, \dots, \hat{u}_i, \dots, u_n)|u, u_1, \dots, \hat{u}_i, \dots, u_n\rangle, \\ D(u)|u_1, \dots, u_n\rangle &= \delta(u; u_1, \dots, u_n)|u_1, \dots, u_n\rangle \\ &\quad - \sum_{i=1}^n \frac{c(u - u_i)}{b(u - u_i)} \delta(u_i; u_1, \dots, \hat{u}_i, \dots, u_n)|u, u_1, \dots, \hat{u}_i, \dots, u_n\rangle, \end{aligned} \quad (10)$$

где

$$\alpha(u; u_1, \dots, u_n) = a^N(u) \prod_{i=1}^n \frac{a(u_i - u)}{b(u_i - u)}, \quad \delta(u; u_1, \dots, u_n) = b^N(u) \prod_{i=1}^n \frac{a(u - u_i)}{b(u - u_i)}. \quad (11)$$

Соотношения (10) доказываются по индукции.

Из соотношений (10) получаем

$$T(u)|u_1, \dots, u_n\rangle = (\alpha(u; u_1, \dots, u_n) + \delta(u; u_1, \dots, u_n))|u_1, \dots, u_n\rangle + \text{плохие члены.}$$

Чтобы вектор $|u_1, \dots, u_n\rangle$ был собственным, сумма плохих членов должна быть равна нулю. В этом случае собственное значение трансфер-матрицы будет равно

$$\Lambda(u; u_1, \dots, u_n) = a^N(u) \prod_{i=1}^n \frac{a(u_i - u)}{b(u_i - u)} + b^N(u) \prod_{i=1}^n \frac{a(u - u_i)}{b(u - u_i)}. \quad (12)$$

Отметим, что плохие члены, по сути, набегают в точках $n = 1, N$ и условие их сокращения эквивалентно условию периодичности.

Так как $\frac{c(u)}{b(u)} = -\frac{c(-u)}{b(-u)}$, плохие члены сокращаются, если

$$\alpha(u_i; u_1, \dots, \hat{u}_i, \dots, u_n) = \delta(u_i; u_1, \dots, \hat{u}_i, \dots, u_n)$$

или

$$\left(\frac{b(u_i)}{a(u_i)}\right)^N = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{a(u_j - u_i)b(u_i - u_j)}{b(u_j - u_i)a(u_i - u_j)}, \quad (13)$$

Это и есть уравнения Бете. Каждому решению уравнений Бете соответствует некоторый собственный вектор трансфер-матрицы (и гамильтониана), так что состояния можно нумеровать наборами $\{u_i\}_{i=1}^n$.

Более явно перепишем уравнения Бете в виде

$$\left(\frac{\sin u_i}{\sin(\lambda - u_i)}\right)^N = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{\sin(u_i - u_j + \lambda)}{\sin(u_i - u_j - \lambda)} \quad \text{при } c < a + b \text{ и т. д. } (|\Delta| < 1), \quad (14)$$

$$\left(\frac{\text{sh } u_i}{\text{sh}(\lambda - u_i)}\right)^N = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{\text{sh}(u_i - u_j + \lambda)}{\text{sh}(u_i - u_j - \lambda)} \quad \text{при } c > a + b \text{ } (\Delta < -1). \quad (15)$$

Режим $\Delta < -1$ соответствует наличию двух основных конфигураций шестивершинной модели, для которых конфигурации вокруг всех вершин имеют c -тип, и двукратному (в термодинамическом пределе) вырождению основного состояния ХХЗ-модели. Возбужденные состояния в ХХЗ-модели отделены от основного щелью. В этом случае говорят об антисегнетоэлектрическом упорядочении шестивершинной модели и антиферромагнитном основном состоянии ХХЗ-модели. В режиме $|\Delta| < 1$ имеется бесконечно много (на бесконечной решетке) основных конфигураций шестивершинной модели (неупорядоченное критическое состояние) и бесщелевой спектр вблизи основного состояния в ХХЗ-модели. В обоих случаях основному состоянию отвечают состояния с $S^z = 0$ или $S^z = \pm \frac{1}{2}$ в зависимости от четности n .

Покажем, как найти наибольшее собственное значение $\Lambda_{\max}(u)$ в этой модели в термодинамическом пределе. Сделаем следующие предположения:

- 1) В основном состоянии плоские волны не содержат ни экспоненциально растущих, ни экспоненциально спадающих членов, так что $|z_i| \equiv |b(u_i)/a(u_i)| = 1$ или $u_i = \lambda/2 + iv_i$ с вещественными v_i .
- 2) В основном состоянии v_i сгущаются в термодинамическом пределе, образуя непрерывные зоны без дырок и отдельно стоящих значений.
- 3) В основном состоянии $S^z/N \rightarrow 0$.

Для определенности будем рассматривать случай $|\Delta| < 1$.

Уравнения Бете удобно прологорифмировать. Введем обозначения

$$e^{ip(v)} = \frac{\sin(\lambda/2 + iv)}{\sin(\lambda/2 - iv)}, \quad e^{i\theta(v)} = \frac{\sin(\lambda + iv)}{\sin(\lambda - iv)}. \quad (16)$$

Мы выбираем ветвь логарифма, такую что $p(0) = \theta(0) = 0$. Уравнения Бете записываются в виде

$$e^{iNp(v_i)} = (-)^{n-1} \prod_{j=1}^n e^{i\theta(v_i - v_j)}.$$

Прологарифмировав, получим

$$Np(v_i) = 2\pi I_i + \sum_{j=1}^n \theta(v_i - v_j),$$

где I_i — целое либо полуцелое в зависимости от четности n . Условие 2) мы можем теперь уточнить:

2') В основном состоянии все I_i образуют набор последовательных целых при нечетных n и полуцелых при четных n чисел.

В этом виде утверждение, по-видимому, верно не только в термодинамическом пределе. При малых n можно также показать, что

2а) Наибольшее собственное значение трансфер-матрицы в секторе с данным S^z достигается при симметричном распределении I_i (и v_i) вокруг нуля.

Найдем интервал, в котором будет изменяться v в непрерывном пределе. Для этого удобнее пользоваться гамильтонианом H_{XXZ} . Как мы уже говорили в прошлой лекции энергия состояния складывается из энергий псевдочастиц $\epsilon(z) = 2\Delta - z - z^{-1} = 2\Delta - 2\cos p(v)$. Наименьшей энергии отвечает значение $p = 0$, то есть $v = 0$. Псевдочастицы должны плотно заполнять область $-p_F \leq p(v) \leq p_F$, где p_F — импульс Ферми, $\epsilon(e^{\pm ip_F}) = \epsilon_F$. Поскольку функция $p(v)$ нечетна и монотонна, спектральный параметр v должен заметать область от $-v_F$ до v_F , где $p(v_F) = p_F$.

Имеем для основного состояния

$$p(v_{i+1}) - p(v_i) = \frac{2\pi}{N} + \frac{1}{N} \sum_{j=1}^n (\theta(v_{i+1} - v_j) - \theta(v_i - v_j)).$$

В пределе $N \rightarrow \infty$ имеем

$$p'(v) = \rho(v) + \int_{-v_F}^{v_F} \frac{dv'}{2\pi} \theta'(v - v') \rho(v') \quad (17)$$

или

$$\rho(v) = \frac{2 \sin \lambda}{\operatorname{ch} 2v - \cos \lambda} - \int_{-v_F}^{v_F} \frac{dv'}{2\pi} \frac{2 \sin 2\lambda}{\operatorname{ch} 2(v - v') - \cos 2\lambda} \rho(v'), \quad (17')$$

где $p'(v)$, $\theta'(v)$ — производные от $p(v)$, $\theta(v)$ по v , а $\rho(v) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{2\pi}{N(v_{i+1} - v_i)}$ — плотность корней вблизи точки v , которая и будет неизвестной функцией в этом уравнении. Интервал $[-v_F, v_F]$ определяется из условия

$$\int_{-v_F}^{v_F} \frac{dv}{2\pi} \rho(v) = \frac{n}{N}. \quad (18)$$

Далее надо минимизировать энергию по n/N .

Уравнение (17) нетрудно решить методом Фурье при $v_F = \infty$. Положим

$$\rho(v) = \int dk \rho_k e^{ikv}, \quad p'(v) = \int dk p'_k e^{ikv}, \quad \theta'(v) = \int dk \theta'_k e^{ikv}. \quad (19)$$

Тогда

$$\rho_k = p'_k - \theta'_k \rho_k,$$

т. е.

$$\rho_k = \frac{p'_k}{1 + \theta'_k}.$$

Нетрудно проверить, что

$$p'_k = \frac{\operatorname{sh} \frac{1}{2}(\pi - \lambda)k}{\operatorname{sh} \frac{1}{2}\pi k}, \quad \theta'_k = \frac{\operatorname{sh} \frac{1}{2}(\pi - 2\lambda)k}{\operatorname{sh} \frac{1}{2}\pi k}. \quad (20)$$

Отсюда получаем

$$\rho_k = \frac{1}{2 \operatorname{ch} \frac{1}{2} \lambda k}. \quad (21)$$

Очевидно

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dv}{2\pi} \rho(v) = \rho_0 = \frac{1}{2},$$

а, значит, $n = N/2$ и $S^z/N \ll 1$. Таким образом, это решение соответствует основному состоянию системы.

В пределе $N \rightarrow \infty$ можно ожидать, что одно из слагаемых в (12) много больше другого, поэтому (минус) свободная энергия на одну вершину равна

$$\log \kappa(u) \equiv \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\log \Lambda(u)}{N} = \max \left(\log a(u) + \int_{-v_F}^{v_F} \frac{dv}{2\pi} \rho(v) \log \frac{a(iv - u + \lambda/2)}{b(iv - u + \lambda/2)}, \right. \\ \left. \log b(u) + \int_{-v_F}^{v_F} \frac{dv}{2\pi} \rho(v) \log \frac{a(u - iv - \lambda/2)}{b(u - iv - \lambda/2)} \right). \quad (22)$$

Логарифмы правых частей легко выражаются через $p(v)$:

$$\log \kappa(u) = \max \left(\log a(u) - i \int_{-v_F}^{v_F} \frac{dv}{2\pi} \rho(v) p(iu + v), \right. \\ \left. \log b(u) - i \int_{-v_F}^{v_F} \frac{dv}{2\pi} \rho(v) p(i(\lambda - u) + v) \right). \quad (23)$$

В терминах фурье-образов это выглядит как

$$\log \kappa(u) = \max \left(\log a(u) + \int \frac{dk}{k} \rho_{-k} p'_k e^{ku}, \log b(u) + \int \frac{dk}{k} \rho_k p'_k e^{k(\lambda - u)} \right). \quad (24)$$

Подставляя (20) и (21), мы находим, что оба значения под знаком максимума в (22) совпадают и свободная энергия дается выражением

$$\log \kappa(u) = \log a(u) + \int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{\operatorname{sh} uk \operatorname{sh} \frac{\pi - \lambda}{2} k}{2k \operatorname{sh} \frac{\pi}{2} k \operatorname{ch} \frac{\lambda}{2} k} \\ = \log b(u) + \int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{\operatorname{sh}(\lambda - u) k \operatorname{sh} \frac{\pi - \lambda}{2} k}{2k \operatorname{sh} \frac{\pi}{2} k \operatorname{ch} \frac{\lambda}{2} k}. \quad (25)$$

В случае $\Delta < -1$ синусы заменяются на гиперболические синусы и функции $p'(v)$ и $\theta'(v)$ оказываются периодическими по v с периодом π . Это значит, что интеграл Фурье в (19) заменяется на ряд Фурье:

$$\int \frac{dk}{2\pi} \rightarrow \frac{1}{\pi} \sum_{k \in 2\mathbf{Z}}.$$

Фурье-компоненты равны

$$p'_k = 2\pi e^{-\lambda|k|/2}, \quad \theta'_k = 2\pi e^{-\lambda|k|}. \quad (26)$$

Плотность опять выражается в виде (21), но с целыми четными k . Поэтому окончательная формула для свободной энергии имеет вид ряда:

$$\log \kappa(u) = \log a(u) + u + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda m} \operatorname{sh} 2um}{m \operatorname{ch} \lambda m} \\ = \log b(u) + \lambda - u + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda m} \operatorname{sh} 2(\lambda - u)m}{m \operatorname{ch} \lambda m}. \quad (27)$$

Отметим, что при общих значениях $v_F < \infty$ (при $|\Delta| < 1$) или $v_F < \frac{\pi}{2}$ (при $\Delta < -1$) уравнение (17) описывает основное состояние шестивершинной модели общего вида с, вообще говоря, различными a, a', b, b' (отличное от единицы отношение c/c' вообще не влияет на модель). Уравнение не имеет аналитического решения, но может быть решено численно. При этом два слагаемых под знаком максимума в свободной энергии будут различны.

Задачи

1. Выведите (4) и (5).
2. Докажите соотношения (10) индукцией по k .
3. Покажите, что анзац Бете (13) можно получить из формулы (12) для собственных значений и требования, чтобы для любого собственного значения $\Lambda(u)$ произведение $\Lambda(u) \sin^N(\lambda - u)$ (при $|\Delta| < 1$) или $\Lambda(u) \operatorname{sh}^N(\lambda - u)$ (при $\Delta < -1$) было целой аналитической функцией u .
4. Введите переменную t , имеющую смысл $(T - T_c)/T_c$ вблизи критической точки $\Delta = -1$. Покажите, что вблизи этой точки свободная энергия регулярна в антисегнетоэлектрической области и имеет слабую сингулярность в неупорядоченной области:

$$f_{\text{sing}} \sim e^{-c/(-t)^{1/2}}$$

с некоторой константой c .

5*. В асимметричной шестивершинной модели с $E_v = 0$ в области $\Delta < 1$ найдите значение E_h , при котором насыщается электрическая поляризация: $n = 0$. Найдите соответствующее магнитное поле насыщения в XXZ модели.¹

¹При $\Delta < -1$ в системе имеется еще одно критическое поле, ограничивающее антисегнетоэлектрическую (или антиферромагнитную) область. Однако вычисление границы этой области несколько сложнее и требует вычисления энергии одночастичных возбуждений.