Лекция 2
Представление свободными полями и фоковское представление алгебры Вирасоро

2.1. Свободное поле

Рассмотрим теорию свободного безмассового бозонного поля $\varphi(z,\bar z)$ с действием

$$S[\varphi]=\int d^2x\,\frac{(\partial_\mu\varphi)^2}{16\pi}. \tag{1}$$

Из функционального интеграла нетрудно получить, что парная корреляционная функция равна

$$\langle\varphi(x')\varphi(x)\rangle=2\log\frac{R^2}{|x'-x|^2}. \tag{2}$$

Параметр R выбран произвольно, но для теории на конечной области он будет порядка размера области. Мы будем рассматривать его как параметр инфракрасной обрезки и в конце вычислений будем устремлять его к бесконечности. Все остальные корреляционные функции определяются парной по теореме Вика.

Нас будут особенно интересовать экспоненциальные поля

$$V_\alpha(x)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha\varphi(x)}$$

и их корреляционные функции

$$\langle V_{\alpha_1}(x_1)\cdots V_{\alpha_N}(x_N)\rangle.$$

Для вычисления этих корреляционных функций, воспользуемся тождеством

$$\langle\mathrm{e}^{\Phi}\rangle=\mathrm{e}^{\frac12\langle\Phi^2\rangle},$$

верным для любого поля Φ, линейного по фундаментальному полю. Подставляя $\Phi=\alpha_1\varphi(x_1)+\cdots+\alpha_2\varphi(x_2)$, получим

$$\langle V_{\alpha_1}(x_1)\cdots V_{\alpha_N}(x_N)\rangle=\exp\left(-\frac12\sum_{i=1}^N\alpha_i^2\langle\varphi^2(x)\rangle-\sum_{i<j}^N\alpha_i\alpha_j\langle\varphi(x_i)\varphi(x_j)\rangle\right).$$

Здесь появилась первая трудность. Дело в том, что величина $\langle\varphi^2(x)\rangle$ формально бесконечна. Введем ультрафиолетовое обрезание, которое удобно записать в виде

$$\langle\varphi^2(x)\rangle=2\log\frac{R^2}{r_0^2},$$

где r_0 — масштаб обрезания.

С учетом такой ультрафиолетовой обрезки получим

$$\langle V_{\alpha_1}(x_1)\cdots V_{\alpha_N}(x_N)\rangle=\left(\frac{r_0}{R}\right)^{2\sum\alpha_i^2}\prod_{i<j}\left(\frac{|x_i-x_j|^2}{R^2}\right)^{2\alpha_i\alpha_j}=r_0^{2\sum\alpha_i^2}R^{-2(\sum\alpha_i)^2}\prod_{i<j}|z_i-z_j|^{4\alpha_i\alpha_j}.$$

Мы видим, что ультрафиолетово расходящиеся множетели $r_0^{2\alpha_i^2}$ могут быть устранены перенормировкой экспоненциальных полей

$$V_\alpha(x)\to r_0^{2\alpha^2}V_\alpha(x).$$

При этом формально такой перенормированный экспоненциальный оператор становится размерным и имеет размерность $2\alpha_0^2$. Инфракрасный множитель $R^{-2(\sum\alpha_i)^2}$ стремится к нулю в пределе $R\to\infty$ если только $\sum\alpha_i\neq0$. Поэтому окончательно находим

$$\langle V_{\alpha_1}(x_1)\cdots V_{\alpha_N}(x_N)\rangle=\begin{cases}\prod_{i<j}^N|z_i-z_j|^{4\alpha_i\alpha_j}, & \text{если }\sum_{i=1}^N\alpha_i=0,\\ 0, & \text{если }\sum_{i=1}^N\alpha_i\neq0.\end{cases} \tag{3}$$

Заметим, что ненулевая парная корреляционная функция

$$\langle V_\alpha(x)V_{-\alpha}(0)\rangle = \frac{1}{|z|^{4\alpha^2}}$$

согласуется с предположением, что конформные размерности полей равны $\Delta_\alpha = \bar{\Delta}_\alpha = \alpha^2$.

Теперь получим тензор энергии-импульса из действия (1):

$$T(z) = -\frac{1}{4}:(\partial\varphi)^2:, \qquad \bar{T}(\bar{z}) = -\frac{1}{4}:(\partial\varphi)^2:.$$

Нетрудно проверить операторные разложения

$$T(z')T(z) = \frac{1/2}{(z'-z)^4} + \frac{2T(z)}{(z'-z)^2} + \frac{\partial T(z)}{z'-z} + O(1),$$
$$T(z')V(z) = \frac{\alpha^2 V_\alpha(z)}{(z'-z)^2} + \frac{\partial V_\alpha(z)}{z'-z} + O(1).$$

Первое из этий разложений означает, что центральный заряд алгебры Вирасоро равен единице, а второе — что экспоненциальное поле $V_\alpha(z)$ является первичным (примарным) полем с конформной размерностью $\Delta_\alpha = \alpha^2$. Заметим, что для вычисления второго разложения удобно пользоваться соотношением

$$V_\alpha(z) = R^{-2\alpha^2}:V_\alpha(z):.$$

В дальнейшем, чтобы не утежелять формул, мы будем опускать все множители $R^\#$ и отождествлять экспоненты с их нормально-упорядоченными вариантами.

2.2. «Заряд на бесконечности»

Возникает естественный вопрос: можем ли мы описать с помощью свободного бозона теорию с произвольным центральным зарядом? Попробуем модифицировать тензор энергии-импульса, прибавив к нему полную производную. Из соображений размерности ясно, что единственное слагаемое, которое можно добавить, пропорционально $\partial^2\varphi$:

$$T(z) = -\frac{1}{4}(\partial\varphi)^2 + \mathrm{i}\alpha_0\partial^2\varphi, \qquad \bar{T}(\bar{z}) = -\frac{1}{4}(\bar{\partial}\varphi)^2 + \mathrm{i}\alpha_0\bar{\partial}^2\varphi. \tag{4}$$

Нетрудно вычислить операторные разложения для такого тензора энергии-импульса

$$T(z')T(z) = \frac{c/2}{(z'-z)^4} + \frac{2T(z)}{(z'-z)^2} + \frac{\partial T(z)}{z'-z} + O(1), \qquad c = 1 - 24\alpha_0^2, \tag{5}$$
$$T(z')V(z) = \frac{\Delta_\alpha V_\alpha(z)}{(z'-z)^2} + \frac{\partial V_\alpha(z)}{z'-z} + O(1), \qquad \Delta_\alpha = \alpha(\alpha - 2\alpha_0). \tag{6}$$

Нетрудно проверить, что физически осмысленные вещественные значаения конформной размерности имеют место в двух случаях: 1) параметр α_0 вещественный, а α либо вещественный, либо лежит в множестве $\mathrm{i}\alpha_0 + \mathrm{i}\mathbb{R}$; 2) параметр α_0 чисто мнимый, в то время как α либо тоже чисто мнимый, либо лежит в множестве $\alpha_0 + \mathbb{R}$. В первом случае $c \leq 1$, а во втором $c \geq 1$. Хотя мы будем, в основном, заниматься первым случаем, мы введем также обозначения, удобные во втором случае, во-первых, потому что они красивы, а во-вторых, потому что они удобны при исследовании теории Лиувилля, о которой вам расскажет Литвинов. Именно, положим

$$\mathrm{i}\alpha_0 = \frac{Q}{2}, \qquad \mathrm{i}\alpha = a.$$

Тогда центральный заряд равен

$$c = 1 + 6Q^2,$$

а конформная размерность поля $\mathrm{e}^{a\varphi}$ равна

$$\Delta_{-\mathrm{i}a} = a(Q - a).$$

Сравнивая с формулами для кацевских размерностей из Лекции 1, нетрудно убедиться в том, что кацевские размерности вещественны только при

$$\text{(I) } c \le 1 \quad \text{или} \quad \text{(II) } c \ge 25.$$

Ниже мы убедимся, что и с других точек зрения эти две области выделены. В области (I) возможно построить *минимальные модели*, в которых все первичные поля вырождены (а параметр α вещественный), а в области (II) возможно построить самосогласованную теорию, физические первичные операторы в которой представляют собой невырожденные поля с $\alpha \in (\mathrm{i}\mathbb{R}) \cup (\alpha_0 + \mathbb{R})$, то есть $a \in \mathbb{R} \cup (Q/2 + \mathrm{i}\mathbb{R})$. Последняя теория может быть отождествлена с теорией Лиувилля.

Вернемся к конформным размерностям экспоненциальных полей. Со сдвинутым тензором энергии-импульса одинаковую размерность имеют уже не поля V_α и $V_{-\alpha}$, а поля V_α и $V_{2\alpha_0-\alpha}$. А это значит, что, для того, чтобы теория была корректно определена на сфере, следует переопределить парную корреляционную функцию. Именно, для любого оператора X положим

$$\langle X \rangle_{\alpha_0} = \lim_{|z|\to\infty} |z|^{16\alpha_0^2} \langle V_{-2\alpha_0}(z,\bar{z}) X \rangle_0, \tag{7}$$

где $\langle \cdots \rangle_0$ — стандартное вакуумное среднее для свободного безмассового бозона. Множитель $|z|^{16\alpha_0^2}$ введен потому, что при больших значениях $|z|$ оператор общего вида X будет выглядеть пропорциональными $V_{2\alpha_0}(0,0)$. Таким образом, корреляционная функция в правой части (7) будет в лидирующем порядке пропорциональна $|z|^{-16\alpha_0^2}$. Ниже под средним $\langle \cdots \rangle$ всегда будет пониматься среднее с «зарядом на бесконечности» $\langle \cdots \rangle_{\alpha_0}$. Тогда

$$\langle V_\alpha(z_1,\bar{z}_1) V_{2\alpha_0-\alpha}(z_2,\bar{z}_2) \rangle = \frac{1}{|z_{12}|^{4\Delta_\alpha}}, \tag{8}$$

что согласуется со свойствами двухточечных корреляционных функций конформной теории на сфере. Для общих корреляционных функций имеем

$$\langle V_{\alpha_1}(x_1) \cdots V_{\alpha_N}(x_N) \rangle = \begin{cases} \prod_{i<j}^N |z_i - z_j|^{4\alpha_i\alpha_j}, & \text{если } \sum_{i=1}^N \alpha_i = 2\alpha_0, \\ 0, & \text{если } \sum_{i=1}^N \alpha_i \ne 2\alpha_0. \end{cases} \tag{9}$$

В картине радиального квантоваяния мы можем ввести состояния $|\alpha\rangle$ и $\langle\alpha|$ следующим очевидным образом:

$$|\alpha\rangle = V_\alpha(0,0)|0\rangle, \qquad \langle\alpha| = \lim_{z\to\infty} (z\bar{z})^{4\Delta_\alpha} \langle 0| V_\alpha(z,\bar{z}). \tag{10}$$

Более аккуратно их можно ввести с помощью разложения поля $\varphi(z,\bar{z})$ по модам:

$$\varphi(z,\bar{z}) = Q - 2\mathrm{i}P \log(z\bar{z}) + \sum_{n\ne0} \left(\frac{a_n}{\mathrm{i}n} z^{-n} + \frac{\bar{a}_n}{\mathrm{i}n} \bar{z}^{-n} \right), \tag{11}$$

где

$$[P,Q] = -\mathrm{i}, \qquad [a_m,a_n] = [\bar{a}_m,\bar{a}_n] = 2m\delta_{m+n,0}. \tag{12}$$

Тогда

$$a_n|\alpha\rangle = \bar{a}_n|\alpha\rangle = 0 \quad (n>0), \qquad P|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle. \tag{13}$$

Нетрудно проверить, что

$$|\alpha\rangle \sim \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha Q}|\alpha\rangle = {:}V_\alpha(0){:}\,|\alpha\rangle. \tag{14}$$

Каждый вектор $|\alpha\rangle$ порождает *фоковский модуль* $\mathcal{F}_\alpha^{\mathrm{tot}}$, представляющий собой свободно-порожденное представление алгебры Гайзенберга

$$\mathcal{F}_\alpha^{\mathrm{tot}} = \left\{ a_{-n_1} \cdots a_{-n_k} \bar{a}_{-\bar{n}_1} \cdots \bar{a}_{-\bar{n}_{\bar{k}}} |\alpha\rangle \middle| k,\bar{k} \ge 0;\ n_i,\bar{n}_i \ge 0 \right\}. \tag{15}$$

В то же время, фоковский модуль является представлением двух алгебр Вирасоро, поскольку на нем алгебра Вирасоро действует коэффициентами разложения по z, $\bar{z}$ компонент тензора энергии-имапульса.

2.3. Киральные компоненты

Хотя представление свободными полями и позволяет прямо получать корреляционные функции в конформной теории поля, нашей первой целью будет именно представление для конформных блоков. Поэтому мы разобьем свободное поле на правую и левую компоненту, или, как еще говорят, на голоморфную и антиголоморфную части:

$$\varphi(z,\bar z) = \varphi(z) + \bar\varphi(\bar z). \tag{16}$$

При этом корреляционные функции по определению равны

$$\langle\varphi(z')\varphi(z)\rangle_0 = 2\log\frac{R}{z'-z}, \qquad \langle\bar\varphi(\bar z')\bar\varphi(\bar z)\rangle_0 = 2\log\frac{R}{\bar z'-\bar z}, \qquad \langle\bar\varphi(\bar z')\varphi(z)\rangle_0 = 0. \tag{17}$$

Такое разбиение основано на том, что оно формально дает решение уравнения движения $\partial\bar\partial\varphi = 0$. Из разложение по модам (12) мы можем видеть, что это разбиение

$$\begin{aligned}\varphi(z) &= Q - 2\mathrm{i}P\log z + \sum_{n\neq 0}\frac{a_n}{\mathrm{i}n}z^{-n},\\ \bar\varphi(z) &= Q - 2\mathrm{i}P\log\bar z + \sum_{n\neq 0}\frac{\bar a_n}{\mathrm{i}n}\bar z^{-n}\end{aligned}$$

не вполне точно: нулевая мода Q не может быть буквально «разделена» на правую и левую киральные части. Это отвечает неоднозначности такого представления для классического решения уравнения движения. Фоковский модуль $\mathcal F_\alpha^{\mathrm{tot}}$ распадается в тензорное произведение

$$\mathcal F_\alpha^{\mathrm{tot}} = \mathcal F_\alpha \otimes \bar{\mathcal F}_\alpha, \tag{18}$$

где $\mathcal F_\alpha$ порождается операторми a_{-n}, а $\bar{\mathcal F}_\alpha$ — операторами $\bar a_{-n}$. Очевидно, правый и левый модули изоморфны: $\bar{\mathcal F}_\alpha \cong \mathcal F_\alpha$.

Киральные части можно определить и другим способом. Введем *дуальное* поле

$$\tilde\varphi(x) = \int_{-\infty}^{x_1} dy^1\,\partial_0\varphi(x^0,y^1).$$

Это поле нелокально, но его корреляционные функции непрерывны, пока контур интегрирования не пересечет какой-нибудь точки, где сидит другое поле. Таким образом, «огибая» контуром эти точки, можно определить его корреляционные функции как многозначные функции на плоскости. Далее, поля $\varphi(z)$ и $\bar\varphi(\bar z)$ можно определить формулой

$$\tilde\varphi(z,\bar z) = \varphi(z) - \bar\varphi(\bar z). \tag{19}$$

Для экпоненциальных полей киральных операторов

$$V_\alpha(z) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha\varphi(z)}, \qquad \bar V_\alpha(\bar z) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha\bar\varphi(\bar z)} \tag{20}$$

имеет место следующее выражение для корреляционных функций

$$\left\langle \overset{\curvearrowright}{\prod_{i=1}^{N}} V_\alpha(z_i)\right\rangle = \begin{cases}\prod_{i<j}^N (z_i-z_j)^{2\alpha_i\alpha_j}, & \sum_{i=1}^N \alpha_i = 2\alpha_0,\\ 0, & \sum_{i=1}^N \alpha_i \neq 2\alpha_0.\end{cases} \tag{21}$$

Эта формула очень похожа на (9), но здесь важен порядок расположения операторов $V_{\alpha_i}(z_i)$. Кроме того, мы видим, что эта корреляционная функция, вообще говоря, неоднозначна. Аналогичная формула имеет место для $\bar V_\alpha(\bar z)$.

2.4. Экранирующие операторы и структура фоковских модулей

Поскольку мы задались целью научиться вычислять конформные блоки, мы можем на время забыть про $\bar{\varphi}(\bar{z})$. Среди операторов $V_\alpha(z)$ есть два оператора конформной размерности 1. Значения параметра α для этих операторов определяются решением квадратного уравнения:

$$\alpha_\pm(\alpha_\pm - 2\alpha_0) = 1. \tag{22}$$

Решения этого уравнения очевидны:

$$\alpha_\pm = \alpha_0 \pm \sqrt{\alpha_0^2 + 1} \tag{23}$$

В «лиувиллевских» обозначениях это решение выглядит особенно просто. Полагая

$$Q = b + b^{-1}, \tag{24}$$

из уравнения $a_\pm(Q - a_\pm)$ получаем

$$a_+ = b^{-1}, \qquad a_- = b.$$

Соответствующие вершинные операторы мы будем обозначать $V_\pm(z)$. Теперь в теории свободного «кирального» поля $\varphi(z)$ мы можем ввести два оператора

$$S_\pm(C) = \int_C dz\, V_\pm(z), \tag{25}$$

зависящих от контура интегрирования C. Такие операторы называются *экранирующими операторами* (в просторечьи, «скринингами») и в случае замкнутого (на универсальном накрытии!) контура C коммутируют с алгеброй Вирасоро. Действительно,

$$T(z')V_\pm(z) = \frac{V_\pm(z)}{(z'-z)^2} + \frac{\partial V_\pm(z)}{z'-z} + O(1) = \frac{\partial}{\partial z}\frac{V_\pm(z)}{z'-z} + O(1)$$

и сингулярная часть интеграла по z вокруг точки z' сводится к полной производной. В терминах генераторов алгебры Вирасоро это столь же просто

$$[L_n, V_\pm(z)] = (n+1)z^n V_\pm(z) + z^{n+1}\partial V_\pm(z) = \partial(z^{n+1}V_\pm(z)).$$

Давайте определим более общий оператор

$$Q_\pm^{(k)}(z_0) = \int_{C(z_0)} \frac{dz_1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{C(z_1)} \frac{dz_2}{2\pi \mathrm{i}} \cdots \int_{C(z_{k-1})} \frac{dz_k}{2\pi \mathrm{i}}\, V_\pm(z_1)V_\pm(z_2)\cdots V_\pm(z_k), \tag{26}$$

причем контуры $C(z_i)$ обходят вокруг нуля в положительном направлении, начинаясь и заканчиваять в точке z_i. Каждый следующий контур лежит внутри предыдущего. Каждый из контуров $C(z_i)$, вообще говоря, не замкнут, но общий контур интегрирования может замкнуться. Давайте, к примеру, рассмотрим интеграл

$$\begin{aligned} Q_+^{(m)}(z_0)|\alpha\rangle &= \int \frac{dz_1}{2\pi \mathrm{i}} \cdots \int \frac{dz_m}{2\pi \mathrm{i}} \prod_{i=1}^m z_i^{2\alpha_+\alpha_i} \prod_{i<j}^m (z_i - z_j)^{2\alpha_+^2} :V_+(z_1)\cdots V_+(z_m)V_\alpha(0): |0\rangle \\ &= \int \frac{dz_1}{2\pi \mathrm{i}} \cdots \int \frac{dz_m}{2\pi \mathrm{i}} \prod_{i=1}^m z_i^{2\alpha_+\alpha_i + 2(m-i)\alpha_+^2} \prod_{i<j}^m \left(1 - \frac{z_j}{z_i}\right)^{2\alpha_+^2} :V_+(z_1)\cdots V_+(z_m)V_\alpha(0): |0\rangle. \end{aligned}$$

Последняя строчка в этом выражении говорит о том, что интеграл в целом не будет зависеть от z_0 и, на самом деле, будет замкнутым, если

$$\sum_{i=1}^m (2\alpha_+\alpha + 2(m-i)\alpha_+^2) = 2m\alpha_+\alpha + m(m-1)\alpha_+^2 \in \mathbb{Z}.$$

Аналогично потребуем замкнутости контура в интеграле $Q_-^{(n)}(z_0)|\alpha\rangle$:

$$\sum_{i=1}^{n}(2\alpha_-\alpha+2(n-i)\alpha_-^2)=2n\alpha_-\alpha+n(n-1)\alpha_-^2\in\mathbb{Z}.$$

Эти два условия согласованы, если

$$\alpha=\alpha_{mn}\equiv\frac{1-m}{2}\alpha_++\frac{1-n}{2}\alpha_-,\quad\Leftrightarrow\quad a=a_{mn}\equiv\frac{1-m}{2}b^{-1}+\frac{1-n}{2}b. \tag{27}$$

Соответствующие конформные размерности $\Delta_{\alpha_{mn}}$ совпадают с кацевскими размерностями Δ_{mn} вырожденных полей. Чтобы понять, с чем это связано, нам нужно будет установить несколько важных фактов. Мы будем формулировать их в терминах $Q_+^{(m)}$, предполагая, что все они без труда переписываются на $Q_-^{(n)}$.

Первый факт состоит в том, что оператор $Q_+^{(m)}$ действует на всем пространстве $\mathcal{F}_{mn}=\mathcal{F}_{\alpha_{mn}}$, а не только на $|\alpha_{mn}\rangle$. Действительно, выражение под интегралом изменится, но если мы выделим произведение $\prod_{i=1}^m z_i^{2\alpha_+\alpha_i}$, остальная часть будет раскладыватьс по целым степеням z_j/z_i. Более того, оператор $Q_+^{(m)}$ является *сплетающим оператором* алгебры Вирасоро:

$$Q_+^{(m)}:\mathcal{F}_{mn}\to\mathcal{F}_{-m,n},\qquad[L_n,Q_+^{(m)}]=0. \tag{28}$$

Если бы оба модуля $\mathcal{F}_{mn}$ и $\mathcal{F}_{-m,n}$ были бы неприводимы, это автоматически означало бы их изоморфизм. Очевидно, они не изоморфны, так как имеют разные старшие веса

$$\Delta_{-m,n}=\Delta_{mn}+mn. \tag{29}$$

Значит, они и не могут быть одновременно неприводимы. Из формулы (29) немедленно следует, что

$$Q_+^{(m)}|\alpha_{mn}\rangle=0,\quad\text{если } n>0. \tag{30}$$

Действительно,

$$L_0Q_+^{(m)}|\alpha_{mn}\rangle=Q_+^{(m)}L_0|\alpha_{mn}\rangle=\Delta_{mn}Q_+^{(m)}|\alpha_{mn}\rangle,$$

а, значат, вес вектора $Q_+^{(m)}|\alpha_{mn}\rangle$ равен Δ_{mn}. Но модуль $\mathcal{F}_{-m,n}$ при $n>0$ не содержит вектора с таким весом. Взаимоотношения между модулями $\mathcal{F}_{mn}$ и $\mathcal{F}_{-m,n}$ в точках общего положения по центральному заряду c можно изобразить следующей диаграммой:

$$\begin{array}{ccc} & & \mathcal{F}_{mn}^{(0)} \\ & & \uparrow \\ \mathcal{F}_{-m,n} & \xleftarrow{Q_+^{(m)}} & \mathcal{F}_{mn}^{(1)} \end{array}\qquad(n>0) \tag{31}$$

Здесь горизонтальная стрелка обозначает действие $Q_+^{(m)}$, а вертикальная — отношение подмодуля. Пространство $\mathcal{F}_{-m,n}$ с точки зрения алгебры Вирасоро является неприводимым представлением. Представление $\mathcal{F}_{mn}^{(1)}=\mathcal{F}_{mn}$ порождаемое некоторым вектором (не старшего веса!) на уровне mn является приводимым, так как содержит подмодуль $\mathcal{F}_{mn}^{(0)}$, порождаемый вектором страшего веса $|\alpha_{mn}\rangle$. Подмодуль $\mathcal{F}_{mn}^{(0)}$ является неприводимым.

В случае $n<0$ картина другая:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}_{-m,n}^{(0)} & & \\ \downarrow & & \\ \mathcal{F}_{-m,n}^{(-1)} & \xleftarrow{Q_+^{(m)}} & \mathcal{F}_{mn} \end{array}\qquad(n<0) \tag{32}$$

Представление (алгебры Вирасоро) $\mathcal{F}_{mn}$ является неприводимым. Оно изоморфно неприводимому же подмодулю $\mathcal{F}_{-m,n}^{(-1)}$, в то время как модуль $\mathcal{F}_{-m,n}^{(0)}=\mathcal{F}_{-m,n}$ изоморфен модулю Верма $M_{c,\Delta_{mn}}$.

2.5. Правила слияния и операторные разложения

Рассмотрим произведение $V_{21}(z)V_\alpha(0)$ и попробуем вычислить его операторное разложение:

$$\begin{aligned}V_{21}(z)V_\alpha(0) &= z^{2\alpha_{21}\alpha} :V_{21}(z)V_\alpha(0):\\ &= z^{2\alpha_{21}\alpha}\Big(V_{\alpha+\alpha_{21}}(0) + z\cdot \mathrm{i}\alpha_{21} :\partial\varphi\, V_{\alpha+\alpha_{21}}: (0)\\ &\qquad + z^2 :\!\left(\mathrm{i}\alpha_{21}\partial^2\varphi - \alpha_{21}^2(\partial\varphi)^2\right) V_{\alpha+\alpha_{21}}: (0) + O\left(z^3\right)\Big).\end{aligned}$$

Мы видим, что в правой стороне находится оператор из модуля $\mathcal{F}_{\alpha+\alpha_{21}}$ (не забудем про соответствие между операторами и векторами, хотя здесь и нелокальные поля!), причем z в нецелой степени стоит общим множителем. Показатель у z перед скобкой как раз равен $\Delta_{\alpha+\alpha_{21}} - \Delta_\alpha - \Delta_{21}$. Следовательно, при обходе точки z вокруг точки 0 набегает фаза $\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\cdot 2\alpha\alpha_+} = \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}(\Delta_{\alpha+\alpha_{21}}-\Delta_{21}-\Delta_\alpha)}$. Кроме того, мы можем предположить, что матричные элементы

$$\langle X V_{21}(z)V_\alpha(0)\rangle$$

при некоторых ограничениях на оператор X будут удовлетворять дифференциальному уравнению, которому удовлетворяют конформные блоки $\mathcal{F}^{\alpha_4}_{\alpha_3,21,\alpha}(\alpha+\alpha_{21}|z)$. Мы уточним эти ограничения позже и выясним вид оператора X.

А сейчас заметим, что если мы вставим экранирующие операторы по замкнутым контурам, то, поскольку экранирующие коммутируют с алгеброй Вирасоро, матричный элемент будет удовлетворять тому же дифференциальному уравнению. Если мы рассматриваем произведение $V_{21}(z)V_\alpha(0)$, то нацепить на него оператор S_- не удастся, потому что $S_-|\alpha_{21}\rangle = 0$ и экранирующий оператор «соскальзнет» с оператора V_{21}, а замкуться вокруг V_α он, вообще говоря, не сможет. Поэтому нацепим S_+ так, чтобы контур дважды обходил точки z и 0 в противоположных направлениях и контур замкнулся. Вычислять такой интеграл довольно занудно, и мы, вместо этого, сожмем контур вокруг точки z, превратив его в незамкнутый контур от z до $z\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}}$. Иными словам, рассмотрим произведение:

$$\begin{aligned}V_{21}(z)Q_+^{(1)}(z)V_\alpha(0) &= z^{2\alpha_{21}\alpha}\int_{C(z)}\frac{dv}{2\pi\mathrm{i}}\, v^{2\alpha_+\alpha}(z-v)^{2\alpha_+\alpha_{21}} :V_{21}(z)Q_+^{(1)}(z)V_\alpha(0):\\ &= z^{2\alpha_{21}\alpha+2\alpha_+\alpha+2\alpha_+\alpha_{21}+1}\int_{C(1)}\frac{d\xi}{2\pi\mathrm{i}}\,\xi^{2\alpha_+\alpha}(1-\xi)^{2\alpha_+\alpha_{21}}\Big(V_{\alpha-\alpha_{21}}(0)\\ &\qquad + z\cdot \mathrm{i}(\alpha_{21}+\alpha_+\xi) :\partial\varphi\, V_{\alpha-\alpha_{21}}: (0) + O\left(z^2\right)\Big).\end{aligned}$$

Правая часть принадлежит модулю $\mathcal{F}_{\alpha-\alpha_{21}}$, а показатель у z перед интегралом равен $\Delta_{\alpha-\alpha_{21}} - \Delta_\alpha - \Delta_{21}$. Таким образом, мы ожидаем корреляционные функции вида

$$\langle X V_{21}(z)Q_+^{(1)}(z)V_\alpha(0)\rangle$$

дадут нам конформные блоки $\mathcal{F}^{\alpha_4}_{\alpha_3,21,\alpha}(\alpha-\alpha_{21}|z)$. Дальнейшее «накручивание» экранирующих операторв S_+ ничего не даст, так как они будут «соскальзывать» с V_{21} и обращать корреляционнуй функцию в нуль. Следовательно наши ответы согласуются с правилом слияния, полученым на прошлой лекции:

$$\Phi_{21}(z)\Phi_\alpha(0) \sim [\Phi_{\alpha+\alpha_{21}}(0)] + [\Phi_{\alpha-\alpha_{21}}(0)].$$

Более того, такой ответ дает нам надежду получить конформные блоки, содержащие поле Φ_{21} в виде интегралов. Интегральные представления играют большую роль в теории линейных дифференциальных уравнений, поскольку позволяют явно найти матрицы монодромии. Этим (или почти этим) мы займемся в следующей лекции, а сейчас попробуем обобщить результат на произвольные вершинные операторы V_{mn}.

Рассмотрим произведение

$$V_{mn}(z)Q_+^{(r)}(z)Q_-^{(s)}(z)V_\alpha(0), \qquad 0\le r\le m-1, \quad 0\le s\le n-1. \tag{33}$$

Нетрудно проверить, что общий «заряд» такого оператора равен

$$\alpha_{mn} + \alpha - r\alpha_+ - s\alpha_- = \alpha + \alpha_{m-2r,n-2s}.$$

Отсюда заключаем, что

$$V_{mn}(z)Q_+^{(r)}(z)Q_-^{(s)}(z)V_\alpha(0) = z^{\Delta_{\alpha+\alpha_{m-2r,n-2s}}-\Delta_\alpha-\Delta_{mn}} D_\alpha^{(mn;rs)}(V_{\alpha+\alpha_{m-2r,n-2s}}(0) + O(z)).$$

Коэффициенты $D_\alpha^{(mn;rs)}$ можно вычислить явно, взяв кратные интегралы.

Наконец, предположим, что оператор Φ_α тоже вырожденный: $\alpha = \alpha_{m_1 n_1}$. Тогда произведение (33) обратится в нуль, если $r \geq m_1$ или $s \geq n_1$. Это согласуется правилом слияния вырожденных полей, выписанных в предыдущей лекции.

2.6. Рациональные точки. Резольвента Фельдера

Зададимся вопросом: что будет, если в модуле Верма имеется два нуль-вектора:

$$\Delta_{mn} = \Delta_{m'n'}, \qquad m, n, m', n' > 0?$$

Это возможно, если либо $\alpha_{mn} = \alpha_{m'n'}$, либо $\alpha_{mn} + \alpha_{m'n'} = 2\alpha_0$. Решая первое уравнение, мы найдем, что

$$\frac{n'-n}{m'-m} = -\frac{\alpha_+}{\alpha_-} = \alpha_+^2,$$

то есть α_+^2 является рациональным числом q/p. К аналогичному выводу мы придем во втором случае:

$$\frac{n'+n}{m'+m} = \alpha_+^2.$$

Более того, несомненно, что если это выполняется для одной пары m', n', то существует бесконечно много решений и в модуле $M_{c,\Delta_{mn}}$ имеется бесконечно много нуль-векторов. Считая числа p и $q > p$ взаимно-простыми, находим

$$c = c(p, q) \equiv 1 - \frac{6(q-p)^2}{pq}. \tag{34}$$

Для этих случаев все поля $\Phi_{m+kp,n+kq}$, $\Phi_{-m+(k+1)p,-n+(k+1)q}$ с неотрицательными целыми k имеют одинаковую размерность. Мы будем отождествлять такие поля. В этом случае мы можем ограничиться на полосу, например, $1 \leq n \leq q-1$. В минимальных моделях общего положения мы уже выбрасывали поля с $m \leq 0$, $n > 0$. Это было возможно, потому что при слиянии двух полей в области $m, n > 0$ снова получались поля в этой же области. В случае рациональных α_+^2 можно выбросить и поля с $m \geq p$. Действительно, мы можем совершить преобразования $(m, n) \to (p-m, q-n)$, не меняющее размерностей. Поэтому слияние полей в области $p-m, q-n > 0$ снова даст поля только в этой области. Отсюда следует, что мы можем ограничить первичные поля набором $\Phi_{m,n}$ с

$$1 \leq m \leq p-1, \qquad 1 \leq n \leq q-1. \tag{35}$$

При этом, чтобы, в соответствии с определением минимальных моделей, поле каждой размерности входило в теорию в одном экземпляре, мы должны отождествить

$$\Phi_{mn} = \Phi_{p-m,q-n}.$$

Поэтому наша теория будет иметь всего $(p-1)(q-1)/2$ первичных полей. Размерности этих полей равны

$$\Delta_{mn} = \frac{(qm-pn)^2 - (q-p)^2}{4pq}. \tag{36}$$

Такую теорию мы будем называть *рациональной минимальной моделью.* Я хочу подчеркнуть, что рациональные минимальные модели *не совпадают* с минимальными моделями общего положения в пределе $c \to c(p,q)$, а получаются из них *редукцией пространства состояний.* Точно также как минимальные модели общего положения не совпадают с теорией свободного бозонного поля с подкрученным тензором энергии-импульса и зарядом на бесконечности, а получаются из нее некоторой редукцией.

Рассмотрим теперь структуру модуля Верма $M_{c,\Delta_{mn}}$. Как мы уже установили, модуль Верма содержит по крайней мере два нуль-вектора с размерностями $\Delta_{mn}+mn=\Delta_{-m,n}$ и $\Delta_{mn}+(p-m)(q-n)=\Delta_{2p-m,n}$. Эти нуль-векторы порождают подмодули Верма, которые содержат тоже пару нуль-векторов с размерностями $\Delta_{-2p+m,n}=\Delta_{-m,n}+(p-m)(q+n)=\Delta_{2p-m,n}+(2p-m)n$ и $\Delta_{2p+m,n}=\Delta_{-m,n}+(p+m)(q-n)=\Delta_{2p-m,n}+m(2p-n)$. Оказывается, что эти два нуль-вектора — общие для подмодулей и полностью порождают пересечение этих двух подмодулей. Их подмодули также пересекаются и их пересечение порождаются двумя следующими нуль-векторами. Размерности нуль-векторов легко устанавливается отражениями исходной пары (m,n) от двух плоскостей: $m=0$ и $m=p$.

Изучим теперь структуру соответствующего фоковского модуля. Прежде всего заметим, что оператор $Q_+^{(m)}$ теперь определен на всех пространствах $\mathcal{F}_{m+pk,n}$, переводя их в $\mathcal{F}_{-m+pk,n}$. При этом $Q_+^{(m)}|\alpha_{m+pk,n}\rangle=0$, если $k\le 0$. Отсюда следует, что операторы $Q_+^{(m)}$ и $Q_+^{(p-m)}$ чередуются:

$$\cdots\xleftarrow{Q_+^{(m)}}\mathcal{F}_{-2p+m,n}\xleftarrow{Q_+^{(p-m)}}\mathcal{F}_{-m,n}\xleftarrow{Q_+^{(m)}}\mathcal{F}_{mn}\xleftarrow{Q_+^{(p-m)}}\mathcal{F}_{2p-m,n}\xleftarrow{Q_+^{(m)}}\mathcal{F}_{2p+m,n}\xleftarrow{Q_+^{(p-m)}}\cdots \tag{37}$$

Важный факт (Дж. Фельдер, 1989) состоит в том, что

$$Q_+^{(m)}Q_+^{(p-m)}=Q_+^{(p-m)}Q_+^{(m)}=Q_+^{(p)}=0. \tag{38}$$

Для доказательства запишем интеграл явно

$$Q_+^{(p)}=\int\frac{dz_1}{2\pi\mathrm{i}}\cdots\int\frac{dz_p}{2\pi\mathrm{i}}\prod_{i=1}^{p}\prod_{i<j}^{m}(z_i-z_j)^{2\alpha_+^2}{:}V_+(z_1)\cdots V_+(z_m){:}$$

и симметризуем его. С каждой перестановкой двух соседних переменных связан множитель $\boldsymbol{q}_+=\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\alpha_+^2}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi q/p}$. Вычислим сумму по перестановкой, заменив $\boldsymbol{q}_+$ произвольным w:

$$\sum_{\sigma\in S_p}\prod^{p} i<jw^{\theta(\sigma_i-\sigma_j)}=(1+w)(1+w+w^2)\cdots(1+w+\cdots+w^{p-1}), \tag{39}$$

где $\theta(x)$ — ступенчатая функция Хевисайда. Формула доказывается по индукции. Она очевидно верна, если $p=1$. Если формула верна на шаге $p-1$, то на шаге p рассмотрим по отдельности перестановки в которых на первом месте (σ_1) стоят последовательно числа $1,2,\dots p$. Каждый данный σ_1 дает множитель w^{σ_1-1}, так как он находится левее (σ_1-1) чисел $1,2,\dots,\sigma_1-1$. Для перестаноки оставшихся $p-1$ чисел пользуемся формулой (39) и получаем одно и то же число. Таким образом, на p-м шаге формула просто умножается на $1+w+\cdots+w^{p-1}$. Далее, подставив $w=\boldsymbol{q}_+$, получим для последнего множителя

$$1+\boldsymbol{q}_++\cdots+\boldsymbol{q}_+^{p-1}=\frac{1-\boldsymbol{q}_+^p}{1-\boldsymbol{q}_+}=0.$$

Это завершает доказательство.

Факт (38) означает, что цепочка (37) представляет собой цепной комплекс. Пространство физических состояний является резольвентой цепного комплекса:

$$\mathcal{H}_{mn}=\operatorname{Ker}Q_+^{(m)}/\operatorname{Im}Q_+^{(p-m)}.$$

Можно показать, что цепной комплекс точен во всех членах, кроме нулевого. Поэтому

$$\mathcal{H}_{mn}=\operatorname{Ker}_{\mathcal{F}_{mn}}Q_+^{(m)}/\operatorname{Im}_{\mathcal{F}_{2p-m,n}}Q_+^{(p-m)}. \tag{40}$$

Ситуацию можно проиллюстрировать диаграммой

$$
\begin{tikzcd}
& & & & \mathcal{F}^{(0)}_{mn} \arrow[dr] & & & & \\
& & \mathcal{F}^{(0)}_{-m,n} \arrow[d] & \mathcal{F}^{(1)}_{mn} \arrow[l] \arrow[ur] \arrow[d] \arrow[drr] & & \mathcal{F}^{(-1)}_{mn} & \mathcal{F}^{(0)}_{2p-m,n} \arrow[l] \arrow[dr] & & \\
{} & \mathcal{F}^{(1)}_{-m,n} \arrow[l] \arrow[ur] \arrow[d] \arrow[dr] & \mathcal{F}^{(-1)}_{-m,n} & \mathcal{F}^{(2)}_{mn} \arrow[l] \arrow[urr] \arrow[d] \arrow[drr] & & \mathcal{F}^{(-2)}_{mn} \arrow[u] \arrow[d] & \mathcal{F}^{(1)}_{2p-m,n} \arrow[l] \arrow[u] \arrow[d] \arrow[dr] & \mathcal{F}^{(-1)}_{2p-m,n} & {} \arrow[l] \\
& {} \arrow[ur] & {} \arrow[u] & {} \arrow[urr] & & {} & {} \arrow[ur] & {} \arrow[u] &
\end{tikzcd}
\tag{41}
$$

Фактически неприводимый модуль $\mathcal{H}_{mn}$ дается факторизацией $\mathcal{F}^{(0)}_{mn}/\mathcal{F}^{(-1)}_{mn}$.